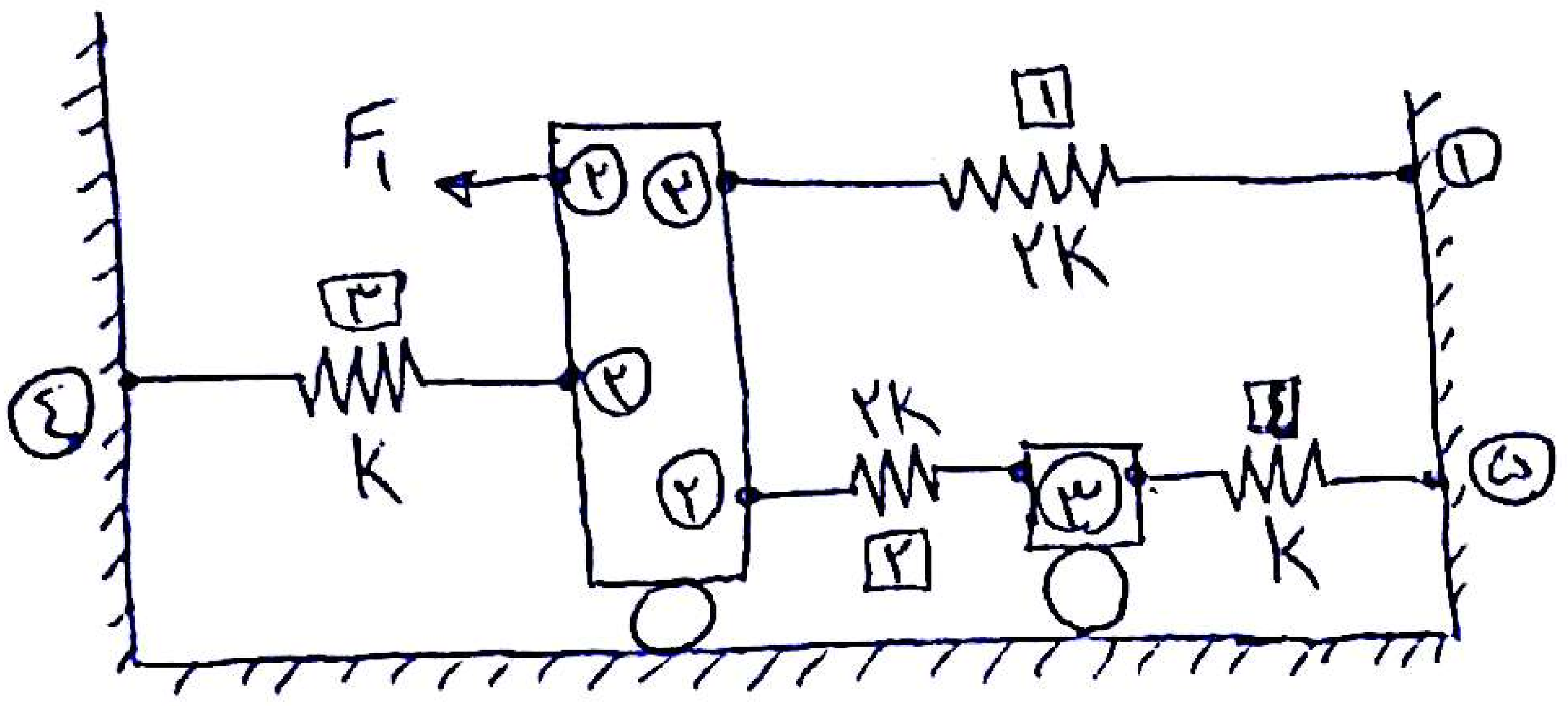
پاسخ ۷



$$F = KU \longrightarrow U = K^{-۱}F$$

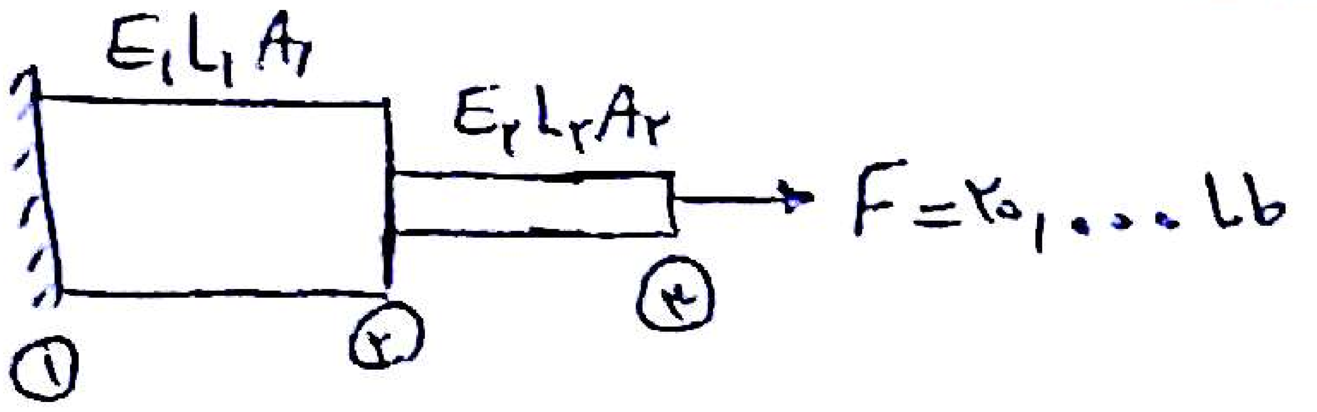
$$\begin{bmatrix} K_{۱} & -K_{۱} & ۰ & ۰ & ۰ \\ -K_{۱} & K_{۱}+K_{۲} & -K_{۲} & ۰ & ۰ \\ & -K_{۲} & K_{۲}+K_{۳} & -K_{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & -K_{۳} & K_{۳}+K_{۴} & -K_{۴} \\ & & & -K_{۴} & K_{۴} \\ ۰ & ۰ & ۰ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{۱} \\ U_{۲} \\ U_{۳} \\ U_{۴} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{۱} \\ F_{۲} \\ F_{۳} \\ F_{۴} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} ۲K & -۲K & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲K & ۲K+K+۲K & -۲K & -K & ۰ \\ & -۲K & ۲K+K & ۰ & -K \\ ۰ & & & K & ۰ \\ ۰ & -K & ۰ & & \\ & & & -K & K \\ ۰ & & ۰ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{۱}=۰ \\ U_{۲} \\ U_{۳} \\ U_{۴}=۰ \\ U_{۵}=۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{۱} \\ F_{۲} \\ F_{۳} \\ F_{۴} \\ F_{۵} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{۲} \\ F_{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵K & -۲K \\ -۲K & ۳K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{۲} \\ U_{۳} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} U_{۲} \\ U_{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵K & -۲K \\ -۲K & ۳K \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۲۰ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵K & -۲K \\ -۲K & ۳K \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{\underbrace{۱۵K^{۲}-۴K^{۲}}_{۱۱K^{۲}}} \begin{bmatrix} ۳K & ۲K \\ ۲K & ۵K \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲۷۵۰۰} \begin{bmatrix} ۱۵۰ & ۱۰۰ \\ ۱۰۰ & ۲۵۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵/۴\times۱۰^{-۳} & ۳/۶\times۱۰^{-۳} \\ ۳/۶\times۱۰^{-۳} & ۹\times۱۰^{-۳} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵/۴\times۱۰^{-۳} & ۳/۶\times۱۰^{-۳} \\ ۳/۶\times۱۰^{-۳} & ۹\times۱۰^{-۳} \end{bmatrix}_{۲\times۲} \begin{bmatrix} ۲۰ \\ ۱۵ \end{bmatrix}_{۲\times۱} = \begin{bmatrix} ۱۶۲\times۱۰^{-۳} \\ ۲۰۷\times۱۰^{-۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{۲} \\ U_{۳} \end{bmatrix}$$



پاسخ ۲-۱۱

$A_1 = 4\ in^2$

$A_2 = 2.25\ in^2$

$E_1 = 15 \times 10^6\ lb/in^2$

$E_2 = 10 \times 10^6\ lb/in^2$

$L_1 = 20\ in$

$L_2 = 20\ in$

$$K = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \rightarrow \frac{A_1E_1}{L_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{A_2E_2}{L_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

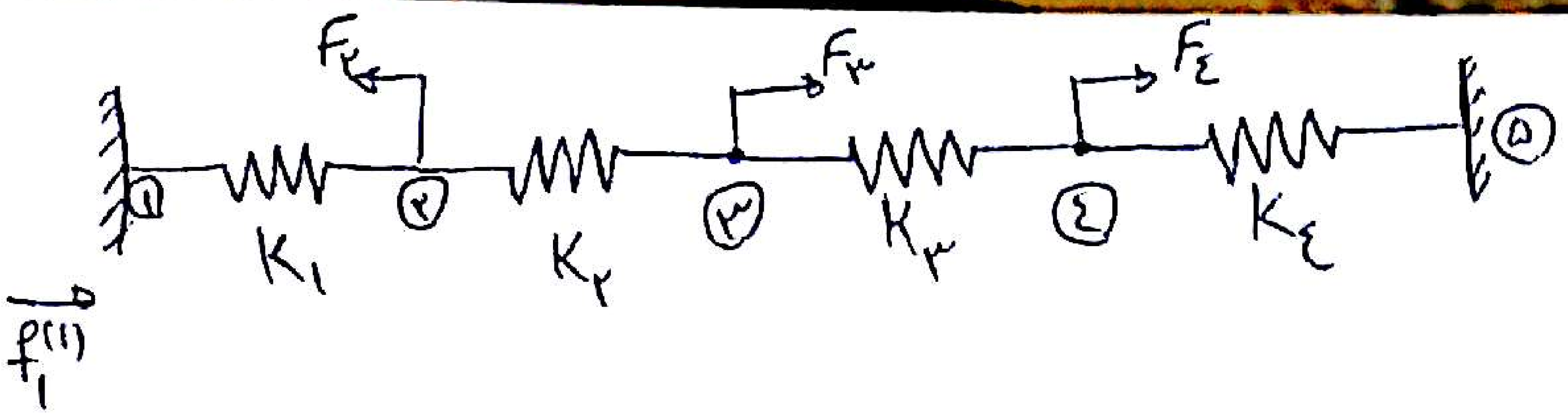
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{A_1E_1}{L_1} & -\frac{A_1E_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{A_1E_1}{L_1} & \frac{A_1E_1}{L_1} + \frac{A_2E_2}{L_2} & -\frac{A_2E_2}{L_2} \\ 0 & -\frac{A_2E_2}{L_2} & \frac{A_2E_2}{L_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 = 0 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{A_1E_1}{L_1} + \frac{A_2E_2}{L_2} & -\frac{A_2E_2}{L_2} \\ -\frac{A_2E_2}{L_2} & \frac{A_2E_2}{L_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

$$K^{-1} = \frac{1}{3.2758 \times 10^{12}}\begin{bmatrix} \frac{A_2E_2}{L_2} & \frac{A_2E_2}{L_2} \\ \frac{A_2E_2}{L_2} & \frac{A_1E_1}{L_1} + \frac{A_2E_2}{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3 \times 10^{-7} & 3.3 \times 10^{-7} \\ 3.3 \times 10^{-7} & 1.2 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3 \times 10^{-7} & 3.3 \times 10^{-7} \\ 3.3 \times 10^{-7} & 1.2 \times 10^{-6} \end{bmatrix}_{2\times2}\begin{bmatrix} 0 \\ 20000 \end{bmatrix}_{2\times1} = \begin{bmatrix} 0.0066 \\ 0.024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۸-۲



$$U_e = \tfrac{1}{2}K_1(u_2-u_1)^2+\tfrac{1}{2}K_2(u_3-u_2)^2+\tfrac{1}{2}K_3(u_4-u_3)^2+\tfrac{1}{2}K_4(u_5-u_4)^2$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial u_1} = f_1 = -K_1(u_2-u_1)$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial u_2} = F_2 = K_1(u_2-u_1)+(-1)K_2(u_3-u_2) = K_1u_2-K_1u_1-K_2u_3+K_2u_2 = (K_1+K_2)u_2-K_1u_1-K_2u_3$$

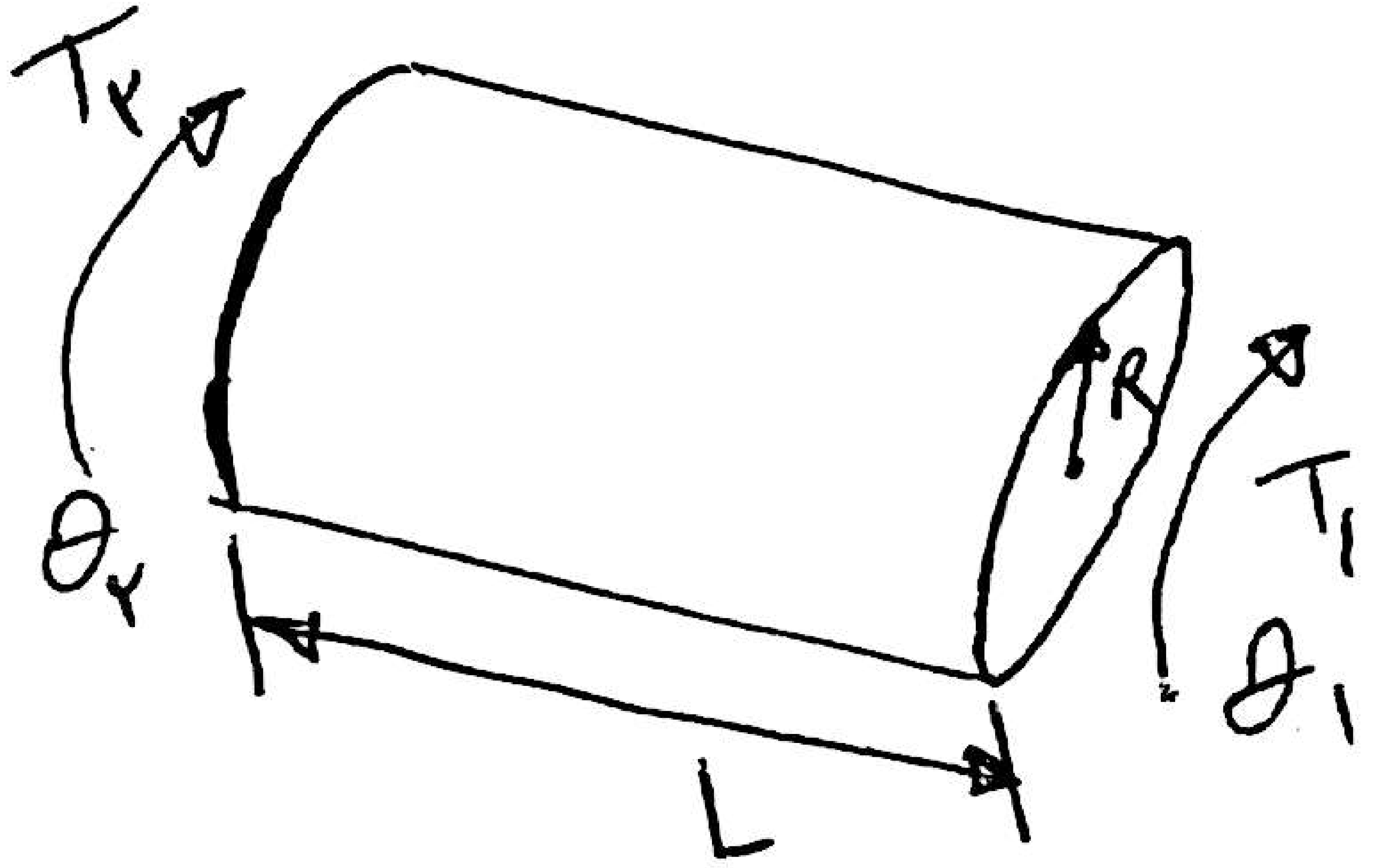
$$\frac{\partial U_e}{\partial u_3} = F_3 = K_2(u_3-u_1)+(-1)K_3(u_4-u_3) = K_2u_3-K_2u_1-K_3u_4+K_3u_3 = (K_2+K_3)u_3-K_2u_1-K_3u_4$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial u_4} = F_4 = K_3(u_4-u_3)+(-1)K_4(u_5-u_4) = K_3u_4-K_3u_3-K_4u_5+K_4u_4 = (K_3+K_4)u_4-K_3u_3-K_4u_5$$

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3+K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1=0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5=0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3+K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۱۵-۲



$$\tau = \frac{Tr}{J} \,,\quad \gamma = \frac{Tr}{JG} \,,\quad U_e = \frac{1}{2}\int \tau \gamma \, dv = \frac{T^2 L}{2JG}$$

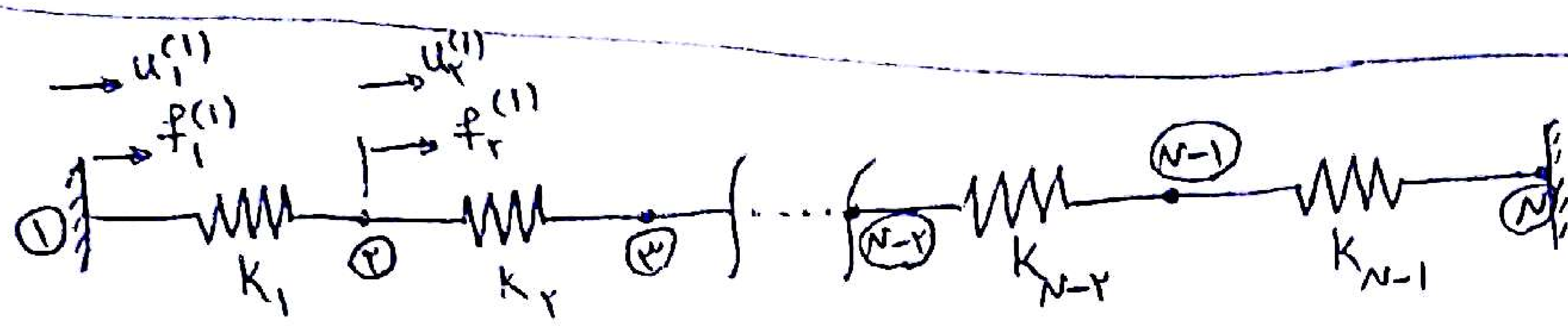
$$\frac{\partial U_e}{\partial \theta_1} = T_1 = \frac{JG}{L}\theta_1$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial \theta_2} = T_2 = \underbrace{\frac{JG}{L}}_{K}\theta_2$$

$$\Rightarrow \frac{JG}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

(بنام خدا)

پاسخ ۲-۳



$$[F]=[K][U] \longrightarrow \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} K_{N-1} & -K_{N-1} \\ -K_{N-1} & K_{N-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_{N-1} \\ F_N \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & & & & \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & & & \\ & -K_2 & K_2+K_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & K_{N-2}+K_{N-1} & -K_{N-1} & \\ & & & -K_{N-1} & K_{N-1}+K_N & -K_N \\ & & & & -K_N & K_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1=0 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \\ U_N=0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-2} \\ F_{N-1} \\ F_N \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & & \\ -K_2 & K_2+K_3 & \ddots & \\ & \ddots & K_{N-2}+K_{N-1} & -K_{N-1} \\ & & -K_{N-1} & K_{N-1}+K_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-2} \\ F_{N-1} \end{bmatrix}$$