فصل پنجم

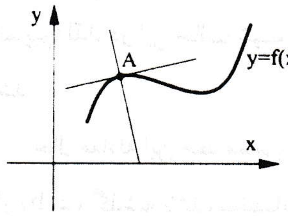
کاربردهای مشتق

- معادله خط مماس و خط قائم بر یک منحنی در هر نقطه از آن
- معادله خط مماس و خط قائم بر یک منحنی از نقطه‌ای خارج آن
- محاسبه زاویه بین دو منحنی در نقطه تقاطعشان
- تحت مماس، تحت قائم، طول مماس، طول قائم
- مماس مشترک دو منحنی
- وتر مشترک دو منحنی
- قاعده هوپیتال
- تعیین وضعیت صعودی یا نزولی بودن یک تابع
- تعیین نقاط اکسترمم نسبی یک تابع
- تعریف نقاط بحرانی یک تابع
- قضیه آزمون مشتق اول
- قضیه آزمون مشتق دوم
- تعیین نقاط اکسترمم مطلق یک تابع
- تعیین تقعر و تحدب یک تابع (جهت انحناء تابع)
- تعیین نقاط عطف یک تابع
- نکات مربوط به نقاط اکسترمم نسبی و عطف توابع
- یادآوری خواص نقاط روی منحنی‌ها
- جمع‌بندی بسیار مهم و مفهومی از مباحث جهت صعودی و نزولی، جهت تقعر و تحدب و نقاط اکسترمم نسبی و عطف یک تابع
- محاسبه مقدار تقریبی یک تابع در یک نقطه
- نسبت‌های وابسته
- بهینه‌سازی (اکسترمم کردن یک کمیت با شرایط خاص)
- چند نکته مهم در تعیین ماکزیمم و مینیمم در حالات خاص (بدون استفاده از مشتق)
- چند قضیه در بخش مشتق (قضیه رول، قضیه مقدار میانگین در مشتق [قضیه لاگرانژ]، قضیه کوشی، قضیه نامساوی مشتق، قضیه تابع ثابت)
- مجموعه تست مشتق و کاربردهای آن

یادداشت:

معادله خط مماس و خط قائم بر یک منحنی در هر نقطه از آن

از آنجا که مشتق به ازاء مختصات نقطه تماس شیب خط مماس بر منحنی را توصیف می‌کند، اگر در نقطه‌ای؛ مانند، (x_0 , y_0) از منحنی $y = f(x)$ خطوط مماس و قائمی ترسیم شود، معادلات آنها عبارتند از:



معادله خط مماس $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

معادله خط قائم $y - y_0 = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

دقت داریم دو خط با شیب‌های m_1, m_2:

الف) بر هم عمودند؛ هرگاه: $m_1 \cdot m_2 = -1$

ب) با هم موازیند؛ هرگاه: $m_1 = m_2$

توجه:

۱) اگر مشتق معادله منحنی را مساوی ضریب زاویه خط مماس قرار دهیم سه حالت زیر قابل تصور است:

الف) اگر مشتق برحسب x باشد، طول نقطه تماس به‌دست می‌آید.

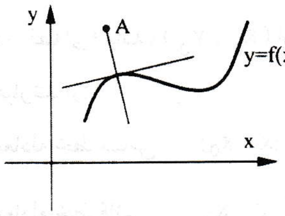
ب) اگر مشتق برحسب y باشد، عرض نقطه تماس به‌دست می‌آید.

ج) اگر مشتق برحسب x و y باشد، رابطه بین مختصات نقاط تماس به‌دست می‌آید. اگر این رابطه برحسب x و y از درجه اول باشد، می‌توان گفت که معادله خطی به‌دست می‌آید که از نقاط تماس می‌گذرد؛ البته، ممکن است، خط مماس وجود نداشته باشد. برای تحقیق وجود خط مماس در این مورد باید، رابطه را با معادله منحنی تقاطع دهیم؛ چنانچه، معادله تقاطع ریشه حقیقی داشته باشد، خط مماس وجود دارد.

۲) اگر شیب خط مماس در نقطه (x_0, y_0) برابر بی‌نهایت شد؛ خط مماس، عمود بر محور xها بوده و معادله آن $x = x_0$ است.

۳) اگر شیب خط مماس در نقطه (x_0, y_0) برابر صفر شد؛ خط مماس، موازی محور xها بوده و معادله آن $y = y_0$ است.

معادله خط مماس و قائم بر یک منحنی از نقطه‌ای خارج آن



فرض کنید، بخواهیم از نقطه (a,b) خارج منحنی $y=f(x)$ خطی مماس بر منحنی رسم کنیم. می‌توانیم مختصات نقطه تماس را (x_0 , y_0) فرض نماییم؛ لذا، در این حالت شیب خط مماس $f'(x_0)$ خواهد شد.

حال معادله این خط مماس را به‌صورت $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ نوشته و چون این خط باید از (a,b) گذشته باشد، مختصات این نقطه را در معادله خط مماس نوشته شده قرار می‌دهیم تا تکلیف مقادیر (x_0 , y_0) و به تبع آن وضعیت معادله خط مماس مشخص شود.

راه دیگر: البته می‌توان معادله خط مماس را $y=mx+h$ فرض کرده و با قرار دادن مختصات نقطه (a,b) در آن h را نیز برحسب m به‌دست آورد. حال اگر معادله خط مماس و معادله منحنی را در یک دستگاه قرار دهیم، معادله حاصل باید دارای ریشه مضاعف باشد (شرط مماس بودن)؛ لذا، با نوشتن شرط داشتن ریشه مضاعف می‌توان تکلیف m و به تبع آن وضعیت معادله خط مماس را مشخص نمود.

برای نوشتن معادله خط قائم بر یک منحنی؛ مانند، $y=f(x)$ از نقطه ای خارج از آن مانند (a,b) نیز کافی است، مختصات پای قائم را (x_0,y_0) فرض کرده و معادله خط قائم را به‌صورت $y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ بنویسیم. حال شرط گذشتن این خط از نقطه معلوم (a,b) تکلیف x_0 را معلوم خواهد کرد.

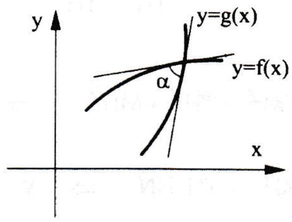
محاسبه زاویه بین دو منحنی در نقطه تقاطعشان

زاویه بین هر دو منحنی در نقطه تقاطعشان، زاویه بین خطوط مماس بر این دو منحنی در نقطه مذکور است.

همان‌طوری که می‌دانیم زاویه بین دو خط با شیب‌های m_2 و m_1 از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$tg\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}\right|$$

لذا، برای محاسبه زاویه بین دو منحنی $y=f(x)$, $y=g(x)$ در نقطه تقاطع x_0 می‌توان نوشت:



$$tg\alpha = \left|\frac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)\,g'(x_0)}\right|$$

چند نکته

۱) برای پیدا کردن زاویه یک منحنی با محور xها محل تقاطع آن را با محور xها یافته واز طریق مشتق در آنجا شیب خط مماس را به‌دست می آوریم. این شیب تانژانت زاویه منحنی (خط مماس بر منحنی) با محور xها می باشد.

۲) برای پیدا کردن زاویه یک منحنی با محور yها، شیب خط مماس بر منحنی را در $x=0$ یافته و با به‌دست آوردن زاویه نظیر آن، متمم این زاویه را محاسبه می کنیم.

۳) اگر دو منحنی بر هم مماس باشند، مقدار مشتق آنها در نقطه تماس یکسان است.

۴) برای یافتن نقاط تقاطع دو منحنی، معادلات آن دو را با هم قطع می‌دهیم، (حذف y ها)، ریشه‌های ساده معادله تقاطع، طول‌های نقاط تقاطع و ریشه‌های مضاعف آن طول‌های نقاط تماس است.

تحت مماس، تحت قائم، طول مماس، طول قائم

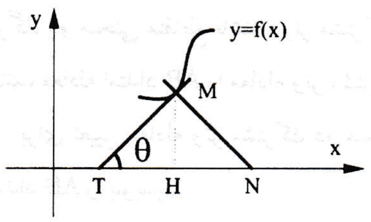
فرض کنید، بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای؛ مانند، $M(x,y)$، خط مماس و خط قائمی رسم شده باشد. چنانچه محل تقاطع خط مماس و قائم مذکور را با محور xها به ترتیب T و N و تصویر نقطه M بر روی محور x ها را H بنامیم، مطابق تعریف می گویند:

HN = تحت قائم در نقطه M

TH = تحت مماس در نقطه M

NM = طول قائم در نقطه M

TM = طول مماس در نقطه M



برای محاسبه این مقادیر با توجه به آنکه مشتق به ازاء مختصات نقطه تماس شیب خط مماس را توصیف می کند. می‌توان نوشت:

تحت مماس $\overset{\Delta}{THM} : \quad y' = tg\,\theta = \frac{MH}{TH} = \frac{y}{TH} \quad \Rightarrow \quad TH = \frac{y}{y'}$

طول مماس $\overset{\Delta}{THM} : \quad TM^2 = TH^2 + MH^2 \quad \Rightarrow \quad TM = \sqrt{\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2}$

تحت قائم $\overset{\Delta}{TMN} : \quad MH^2 = TH.HN \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{y}{y'}.HN \quad \Rightarrow \quad HN = yy'$

طول قائم $\overset{\Delta}{MHN} : \quad NM^2 = MH^2 + HN^2 \quad \Rightarrow \quad NM = \sqrt{y^2 + (yy')^2}$

در شکل فوق زاویه θ حاده و مقادیر y و y' مثبت می‌باشند؛ لذا، اندازه‌های طول مماس، طول قائم، تحت مماس و تحت قائم همگی مثبت به‌دست می‌آیند؛ اما، در حالت کلی باید توجه داشت که، قدرمطلق عبارات به‌دست آمده، بیانگر پاره‌خط‌های مذکور می‌باشند.

تذکر: با توجه به این که θ، ممکن است منفرجه باشد، می‌نویسیم:

$$TH = \left|\frac{y}{y'}\right| \quad , \quad HN = |yy'|$$

مماس مشترک دو منحنی

اگر دو منحنی به معادلات $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ مماس مشترک داشته باشند، برای تعیین معادله مماس مشترک آنها فرض می‌کنیم، خط $y = ax + b$ معادله آن باشد. این خط را با هر یک از معادلات منحنی‌های y_1 و y_2 قطع می دهیم و شرط وجود ریشه مضاعف را می نویسیم. از آن جا a و b به‌دست می‌آید.

وتر مشترک دو منحنی

هرگاه دو منحنی متقاطع باشند، وتر مشترک دارند. اگر دو منحنی یکدیگر را در دو نقطه A , B قطع کنند، معادله امتداد AB را معادله وتر مشترک می گویند.

برای تعیین معادله وتر مشترک دو منحنی، باید مختصات نقاط تقاطع B , A را پیدا کرده، معادله امتداد AB را بنویسیم.

قاعده هوپیتال

در محاسبه حد $I=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر یکی از صور مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ حاصل شد، می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مشروط بر اینکه حاصل حد اخیر، عددی معلوم شود و چنانچه حد حاصل مجددا مبهم بود می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

و استفاده از قاعده هوپیتال را می‌توان به‌صورت متوالی تا رسیدن به وضعیت غیر مبهم (رفع ابهام شده) ادامه داد. (شرط استفاده از قاعده هوپیتال آن است که توابع g و f در نقطه $x=a$ دارای مشتق پیوسته باشند).

تعیین وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع

همان‌طوری که گفتیم f در بازه I اکیدا صعودی است، هرگاه:

$$\forall x_1,x_2\in I\ ,\ x_1>x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)>f(x_2)$$

و می گوییم f در بازه I اکیدا نزولی است، هرگاه:

$$\forall x_1,x_2\in I\ ,\ x_1>x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2)$$

دو مفهوم فوق را می‌توان با استفاده از علامت f' نیز مورد بررسی قرار داد؛ بدین ترتیب که، فرض کنید تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته و در فاصله (a,b) مشتق پذیر باشد؛ آنگاه:

۱ـ اگر در هر نقطه از فاصله (a,b)، $f'(x)\geq 0$ بوده و تعداد نقاطی که f' برابر صفر شده شمارش‌پذیر باشد؛ آنگاه f روی فاصله مورد نظر اکیداً صعودی است.

۲ـ اگر در هر نقطه از فاصله (a,b)، $f'(x)\leq 0$ بوده و تعداد نقاطی که f' برابر صفر شده شمارش‌پذیر باشد؛ آنگاه f روی فاصله مورد نظر اکیدا نزولی است.

۳ـ اگر در هر نقطه از فاصله (a,b)، $f'(x)=0$ باشد، آنگاه f روی فاصله مورد نظر ثابت است.

بنابراین، در تعیین وضعیت یکنوایی تابع باید $f'(x)$ را به‌دست آورده، آن را تعیین علامت کنیم.

تعیین نقاط اکسترمم نسبی یک تابع

فرض کنید تابع f در فاصله $\left[a , b\right]$ تعریف شده باشد و x_0 یک نقطه درونی این فاصله باشد،

الف) اگر به ازاء هر x متعلق به یک همسایگی x_0 داشته باشیم:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

(یعنی عرض تابع در x_0 از عرض تمام نقاط همسایگی آن بزرگ‌تر باشد)، می‌گوییم f در x_0 دارای ماکزیمم نسبی است.

ب) اگر به ازاء هر x متعلق به یک همسایگی x_0 داشته باشیم:

$$f(x) \geq f(x_0)$$

(یعنی عرض تابع در x_0 از عرض تمام نقاط همسایگی آن کمتر باشد)، می‌گوییم تابع f در x_0 دارای مینیمم نسبی است.

تعریف: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 دارای ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی باشد، می‌گوییم تابع در نقطه به طول x_0 دارای اکسترمم نسبی است.

تعریف نقاط بحرانی یک تابع

نقاط بحرانی تابع f نقاطی هستند که در آنجا $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا $f'(x)$ اصولا موجود نباشد. این نقاط، کاندیداهای اکسترمم‌های نسبی می‌باشند (اگرچه ممکن است در این نقاط اکسترمم نسبی اتفاق نیفتد).

انواع نقاط بحرانی یک تابع عبارتند از:

۱ـ نقاط ناپیوستگی
۲ـ نقاط بازگشت
۳ـ نقاط زاویه دار
۴ـ نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی
۵ ـ نقاط عطف قائم
۶ ـ نقاط عطف افقی

برای تشخیص نقاط اکسترمم نسبی یک تابع می‌توان از قضایای زیر استفاده کرد.

قضیه آزمون مشتق اول

فرض کنید c یک نقطه بحرانی تابع f و تابع در این نقطه پیوسته باشد.

اگر f' در c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد؛ یعنی، تابع در مجاورت $x = c$ از وضعیت نزولی به وضعیت صعودی تغییر رفتار دهد؛ آنگاه f در c دارای مینیمم نسبی است.

اگر f' در c از مثبت به منفی تغییر علامت دهد؛ یعنی، تابع در مجاورت $x = c$ از وضعیت صعودی به وضعیت نزولی تغییر رفتار دهد؛ آنگاه f در c دارای ماکزیمم نسبی است.

تعیین نقاط اکسترمم نسبی یک تابع

فرض کنید تابع f در فاصله $\left[a, b\right]$ تعریف شده باشد و x_0 یک نقطه درونی این فاصله باشد،

الف) اگر به ازاء هر x متعلق به یک همسایگی x_0 داشته باشیم:

$f(x) \le f(x_0)$

(یعنی عرض تابع در x_0 از عرض تمام نقاط همسایگی آن بزرگ‌تر باشد)، می‌گوییم f در x_0 دارای ماکزیمم نسبی است.

ب) اگر به ازاء هر x متعلق به یک همسایگی x_0 داشته باشیم:

$f(x) \ge f(x_0)$

(یعنی عرض تابع در x_0 از عرض تمام نقاط همسایگی آن کمتر باشد)، می‌گوییم تابع f در x_0 دارای مینیمم نسبی است.

تعریف: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 دارای ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی باشد، می‌گوییم تابع در نقطه به طول x_0 دارای اکسترمم نسبی است.

تعریف نقاط بحرانی یک تابع

نقاط بحرانی تابع f نقاطی هستند که در آنجا $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا $f'(x)$ اصولا موجود نباشد. این نقاط، کاندیداهای اکسترمم‌های نسبی می‌باشند (اگرچه ممکن است در این نقاط اکسترمم نسبی اتفاق نیفتد).

انواع نقاط بحرانی یک تابع عبارتند از:

۱ـ نقاط ناپیوستگی ۲ـ نقاط بازگشت

۳ـ نقاط زاویه دار ٤ـ نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی

۵ ـ نقاط عطف قائم ۶ ـ نقاط عطف افقی

برای تشخیص نقاط اکسترمم نسبی یک تابع می‌توان از قضایای زیر استفاده کرد.

قضیه آزمون مشتق اول

فرض کنید c یک نقطه بحرانی تابع f و تابع در این نقطه پیوسته باشد.

اگر f' در c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد؛ یعنی، تابع در مجاورت $x = c$ از وضعیت نزولی به وضعیت صعودی تغییر رفتار دهد؛ آنگاه f در c دارای مینیمم نسبی است.

اگر f' در c از مثبت به منفی تغییر علامت دهد؛ یعنی، تابع در مجاورت $x = c$ از وضعیت صعودی به وضعیت نزولی تغییر رفتار دهد؛ آنگاه f در c دارای ماکزیمم نسبی است.

اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ یعنی، تابع در مجاورت $x=c$ وضعیت اکیدا یکنوا داشته باشد؛ آنگاه f در c دارای اکسترمم نسبی نخواهد بود.

Important

قضیه آزمون مشتق دوم

فرض کنید برای تابع f داشته باشیم:

$f'(c)=0$

اگر $f''(c)>0$ باشد، آنگاه f در c دارای مینیمم نسبی است.

اگر $f''(c)<0$ باشد، آنگاه f در c دارای ماکزیمم نسبی است.

اگر $f''(c)=0$ باشد، آنگاه f در c ممکن است دارای مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی و یا عطف باشد و این آزمون نوع نقطه را مشخص نمی‌کند.

نکته: اگر $f''(c)=0$ باشد، مشتقات بعدی را در این نقطه تشکیل می‌دهیم. چنانچه اولین مشتق مخالف صفر از مرتبه زوج و مقدار آن مثبت باشد، در $x=c$ مینیمم نسبی داریم و اگر مرتبه آن زوج و مقدار مشتق، منفی باشد، در $x=c$ ماکزیمم نسبی داریم و اگر مرتبه آن فرد باشد، در $x=c$ عطف داریم.

دقت کنید که این قضیه برای تعیین نوع نقاط بحرانی‌ای که در آنجا $f'(x)$ موجود نمی‌باشد، قابل استفاده نیست.

نکته ۱) اگر تابع f در نقطه $x=c$ دارای اکسترمم نسبی باشد و مشتق تابع در این نقطه موجود باشد الزاما $f'(c)$ برابر صفر است؛ ولی، هر کجا $f'(c)$ صفر باشد، تابع f در آنجا الزاما دارای اکسترمم نسبی نخواهد بود.

نکته ۲) یک تابع ممکن است در یک فاصله دارای چندین ماکزیمم و مینیمم نسبی باشد.

نکته ۳) نقاط ابتدایی و انتهایی بازه تعریف تابع به عنوان اکسترمم‌های نسبی مطرح نمی شوند.

جمع بندی

در نقاط اکسترمم نسبی، مشتق وضعیت خاصی دارد.

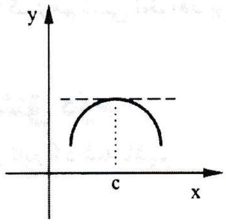
در تمام نقاط اشکال زیر بدیهی است تابع در $x=c$ دارای ماکزیمم نسبی است.

در شکل «الف» $f'(c)$ موجود و مقدار آن صفر است (تابع در این نقطه دارای خط مماسی موازی محور x هاست).

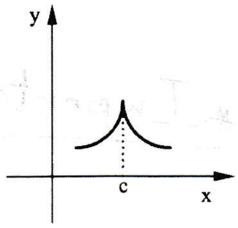
در شکل «ب» $f'(c)$ موجود نمی‌باشد (تابع در این نقطه دارای خط مماس نبوده؛ اما، نیم‌مماس‌های چپ و راست موجود و شیب یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ می‌باشد).

در شکل «ج» $f'(c)$ موجود نمی‌باشد (در این نقطه نیز تابع دارای خط مماس نمی‌باشد؛ ولی، شیب نیم‌مماس‌های چپ یا راست اعدادی محدود می‌باشند).

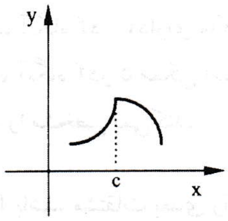
در شکل «د» نیز $f'(c)$ موجود نمی‌باشد (در این نقطه اصولا تابع پیوسته نیست).



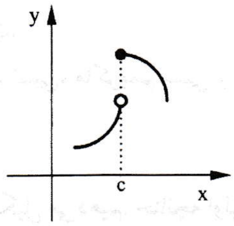
(الف)



(ب)



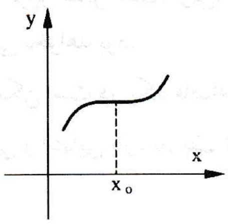
(ج)



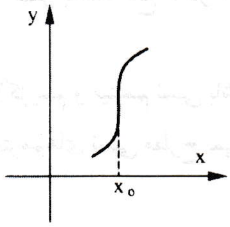
(د)

همان‌طوری که گفتیم، مهم است توجه کنیم، عکس موارد فوق صحیح نمی‌باشد. به عبارت دیگر لازم نیست که یک تابع در نقاط بحرانی الزاماً اکسترمم نسبی داشته باشد.

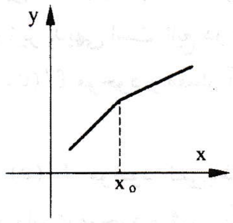
در شکل زیر در قسمت الف مشتق در x_0 برابر صفر است، در قسمت ب مشتق در x_0 نامتناهی است، در قسمت ج مشتق در x_0 موجود نمی‌باشد و در قسمت د تابع اصولاً در x_0 پیوسته نمی‌باشد. با این حال در هر چهار مورد x_0 طول نقطه اکسترمم نسبی تابع نخواهد بود.



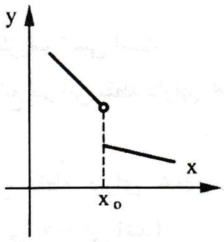
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

تعیین نقاط اکسترمم مطلق یک تابع

فرض کنید تابع f در فاصله $[a , b]$ تعریف شده باشد و x_0 نقطه‌ای از این فاصله باشد:

الف) اگر به ازای هر x متعلق به این فاصله داشته باشیم:

$f(x) \le f(x_0)$

(یعنی عرض تابع در x_0 از عرض تمام نقاط موجود در آن فاصله بزرگ‌تر باشد)، می‌گوییم f در x_0 دارای ماکزیمم مطلق است.

ب) اگر به ازای هر x متعلق به این فاصله داشته باشیم:

$f(x) \ge f(x_0)$

(یعنی عرض تابع در x_0 از عرض تمام نقاط موجود در آن فاصله کوچک‌تر باشد)، می‌گوییم f در x_0 دارای مینیمم مطلق است.

تعریف: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 دارای ماکزیمم یا مینیمم مطلق باشد، می‌گوییم تابع در آن نقطه دارای اکسترمم مطلق است.

قضیه: اگر تابع f در فاصله بسته $[a , b]$ پیوسته باشد، آنگاه f در این فاصله قطعا دارای ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق است.

(دقت کنید در این قضیه دو شرط پیوستگی تابع و بسته بودن فاصله، اساسی است؛ لذا، در غیاب یکی از این دو شرط وجود ماکزیمم و مینیمم مطلق تضمین شده نیست).

روش یافتن مقادیر اکسترمم مطلق یک تابع پیوسته در فاصله بسته $[a , b]$

۱ـ نقاط بحرانی تابع f را در فاصله (a , b) را مشخص می‌کنیم و مقادیر تابع را در این نقاط به‌دست می‌آوریم.

۲ـ مقادیر تابع f را در نقاط انتهائی فاصله مورد نظر؛ یعنی، $x = b$ و $x = a$ محاسبه می‌کنیم.

۳ـ از میان مقادیر به‌دست آمده در دو قسمت فوق کمترین و بیشترین اعداد حاصل را به عنوان اکسترمم‌های مطلق گزارش می‌کنیم.

طرز تعیین عرض‌های اکسترمم منحنی تابع f به معادله $y = f(x)$ بدون استفاده از مشتق

اگر $M\Big|_b^a$ اکسترمم نسبی منحنی تابع مشتق‌پذیر f باشد، خط $y = b$ در نقطه M بر منحنی تابع مماس است. اگر در تابع f خط غیرمشخص $y = b$ را با معادله منحنی قطع دهیم، چنانچه $y = b$ عرض نقطه

اکسترمم منحنی تابع f باشد، باید معادله تقاطع، ریشه مضاعف داشته باشد؛ لذا، باید $\Delta = 0$. از حل معادله $\Delta = 0$، مقادیر b به‌دست می‌آید.

چنانچه به جای b همان y را در نظر بگیریم و خط $y = y$ را با معادله منحنی قطع دهیم، مانند آن است که معادله منحنی را برحسب x بازنویسی کرده، سپس دلتای معادله حاصل را مساوی صفرقرار داده‌ایم.

تعیین تقعر و تحدب یک تابع (جهت انحناء تابع)

هرگاه تمامی خطوط مماس بر یک منحنی در یک فاصله در بالای منحنی قرار بگیرند، اصطلاحا می‌گوییم تقعر منحنی در آن فاصله به سمت پایین است (منحنی محدب است) و هرگاه تمامی خطوط مماس بر یک منحنی در یک فاصله در پایین منحنی قرار بگیرند، اصطلاحا می‌گوییم تقعر منحنی در آن فاصله به سمت بالا است (منحنی مقعر است).

به تعبیر دیگر، فرض کنید f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد، اگر در این فاصله f' تابعی اکیدا صعودی باشد، در این بازه تقعر f به سمت بالا است. اگر در این فاصله f' تابعی اکیدا نزولی باشد، در این بازه تقعر f به سمت پایین است.

جهت انحناء یک تابع را می‌توان با استفاده از علامت f'' تشخیص داد؛ بدین ترتیب که، فرض کنید تابع $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته و در فاصله (a, b) مشتق پذیر باشد:

۱ـ اگر در هر نقطه از فاصله (a, b)، $f''(x) > 0$ باشد، تقعر f در این فاصله به سمت بالا است.

۲ـ اگر در هر نقطه از فاصله (a, b)، $f''(x) < 0$ باشد، تقعر f در این فاصله به سمت پایین است.

۳ـ اگر در هر نقطه از فاصله (a, b)، $f''(x) = 0$ باشد، f در این فاصله فاقد انحناء است.

تعیین نقاط عطف یک تابع

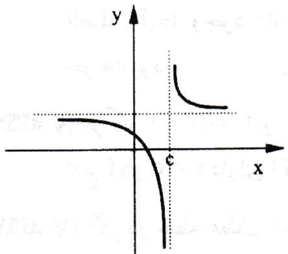
می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای به‌طول c دارای عطف است، هرگاه:

اولاً؛ تابع در $x = c$ پیوسته باشد.

ثانیاً؛ تابع در $x = c$ دارای خط مماس باشد.

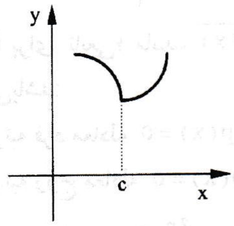
ثالثاً؛ جهت تقعر تابع در مجاورت $x = c$ تغییر کند (و به تعبیری علامت f'' در همسایگی c تغییر کند).

توجه: به اشکال زیر توجه کنید:



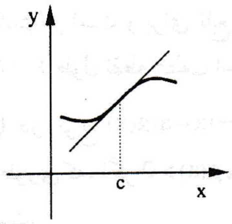
«الف»

در شکل «الف» در مجاورت نقطه $x=c$ جهت تقعر تابع عوض شده؛ اما، $x=c$ طول نقطه عطف تابع نمی‌باشد؛ زیرا، اساساً تابع در این نقطه پیوسته نیست.



«ب»

در شکل «ب» تابع در $x=c$ پیوسته بوده و جهت انحناء آن در اطراف این نقطه عوض شده؛ اما، چون در این نقطه منحنی دارای خط مماس نمی‌باشد؛ لذا، $x=c$ طول نقطه عطف تابع نمی‌باشد.



«ج»

در شکل «ج» تابع در $x=c$ پیوسته و دارای خط مماس است، مضافا جهت تقعر تابع در همسایگی این نقطه عوض می‌شود؛ لذا، تابع در $x=c$ دارای نقطه عطف است.

نکات مربوط به نقاط اکسترمم نسبی و عطف تابع

نکته ۱) اگر تابع f در $x=c$ دارای نقطه عطف بوده و $f''(x)$ در این نقطه موجود باشد، الزاما $f''(c)$ برابر صفر است؛ ولی، هر کجا $f''(c)$ صفر باشد، تابع f در آنجا الزاما دارای عطف نخواهد بود.

نکته ۲) در نقطه عطف یک منحنی، خط مماس بر منحنی از آن عبور می‌کند.

نکته ۳) هرگاه $f'(c)=0$ باشد؛ ولی، $f'(x)$ در مجاورت $x=c$ تغییر علامت ندهد، تابع f در $x=c$ دارای نقطه عطف است.

نکته ۴) هرگاه $f'(c)\neq 0$ و $f''(c)=0$ باشد؛ ولی، $f''(x)$ در مجاورت $x=c$ تغییر علامت ندهد، بدیهی است تابع در $x=c$ دارای عطف نیست. این گونه نقاط را اصطلاحا "نقطه مِیلا" می گویند.

نکته ۵) اگر $f'(a)=f'(b)=0$ و تابع f'' در بازه (a,b) موجود باشد، آنگاه دست‌کم یک c در فاصله (a,b) وجود دارد که $f''(c)=0$ و حتماً یکی از این cها طول نقطه عطف تابع $f(x)$ خواهد بود.

نکته ۶) هرگاه $f'(c)=0$ و $f''(c)=0$ باشد؛ ولی، $f''(x)$ در مجاورت $x=c$ تغییر علامت ندهد، تابع f در $x=c$ دارای اکسترمم نسبی است.

نکته ۷) اگر در نقطه عطف $y'=0$ باشد، می‌گوییم تابع دارای عطف افقی است (یعنی، خط مماس در نقطه عطف موازی محور xها است) و اگر در نقطه عطف $y'=\infty$ باشد، می‌گوییم تابع دارای عطف قائم است (یعنی، خط مماس در نقطه عطف موازی محور yها است).

نکته ۸) برای تابعی؛ مانند، $y=\sqrt[n]{p(x)}$ که در آن $p(x)$ یک چند جمله‌ای و n عددی فرد می‌باشد:

- ریشه مرتبه فرد معادله $p(x)=0$ طول نقطه عطف منحنی است.
- ریشه مرتبه زوج معادله $p(x)=0$ طول نقطه بازگشت منحنی است.

نکته ۹) برای تابع $f(x)=(x-a)^{2n}\cdot P(x)$ (به شرطی که $n\in N$ و $P(a)\neq 0$)، $x=a$ طول نقطه اکسترمم است و برای تابع $f(x)=(x-a)^{2n+1}\cdot P(x)$ (به شرطی که $n\in N$ و $P(a)\neq 0$)، $x=a$ طول نقطه عطف است.

نکته ۱۰) در توابع $f(x)=|x-a|g(x)$ اگر $g(a)\neq 0$، نقطه به طول a طول نقطه اکسترمم است؛ به‌طوری‌که، اگر $g(a)>0$، طول نقطه min نسبی و اگر $g(a)<0$، طول نقطه max نسبی تابع f است.

نکته ۱۱) برای تابع $y=ax-[ax]$ اگر $ax_0\in Z$ تابع در x_0 دارای min است.

نکته ۱۲) در توابع به فرم $f(x)=\sqrt[2k+1]{(x-a)^n}$، اگر $n<2k+1$ باشد:

۱) اگر n زوج باشد، $x=a$ طول نقطه بازگشت تابع بوده و تابع دارای اکسترمم نسبی است.
۲) اگر n فرد باشد، $x=a$ طول نقطه عطف تابع است.

نکته ۱۳) در توابع به فرم $f(x)=\sqrt[2k]{(x-a)^n}$:

۱) اگر n زوج و $n<2k$، باشد آنگاه $x=a$ طول نقطه بازگشت تابع بوده و تابع در این نقطه مینیمم نسبی دارد.
۲) اگر $n=2k$ باشد، آنگاه $x=a$ طول نقطه زاویه‌دار تابع f است.
۳) اگر $n>2k$ باشد، ابتدا آن را طوری ساده می‌کنیم که توان عبارت زیر رادیکال کوچک‌تر از 2k باشد.

یادآوری خواص نقاط روی منحنی‌ها

۱ـ هرگاه $A(x_0, y_0)$ نقطه‌ای معمولی از منحنی $y = f(x)$ باشد، مختصات این نقطه باید در معادله $y = f(x)$ صدق کند.

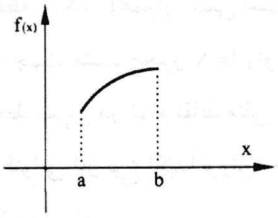
۲ـ هرگاه $A(x_0, y_0)$ نقطه‌ای اکسترمم از منحنی پیوسته $y = f(x)$ باشد، اولا؛ باید مختصات آن در معادله $y = f(x)$ صدق کند و ثانیا؛ $f'(x)$ باید در x_0 تغییر علامت دهد (لذا، اگر f در $x = x_0$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار آن صفر است؛ البته، ممکن است f اساساً در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد).

۳ـ هرگاه $A(x_0, y_0)$ نقطه عطف منحنی $y = f(x)$ باشد، اولاً؛ باید مختصات آن در معادله $y = f(x)$ صدق کند و ثانیا؛ $f''(x)$ باید در x_0 تغییر علامت دهد (لذا لازم است $f''(x_0)$ صفر و یا بی‌نهایت شده باشد).

جمع‌بندی بسیار مهم و مفهومی از مباحث صعودی و نزولی، جهت تقعر و تحدب و نقاط اکسترمم نسبی و عطف یک تابع

مثال: فرض کنید نمودار تابع f مطابق شکل ترسیم شده باشد.

در این مورد می‌توان گفت تابع در فاصله (a, b) اکیداً صعودی است.



«الف»

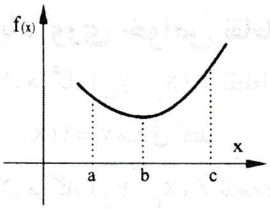
این معنا را از دو نظر می‌توان دریافت:

اولا؛ ملاحظه می‌شود با افزایش مقدار x در فاصله مذکور مقدار y دائما در حال افزایش می‌باشد.

ثانیا؛ ملاحظه می‌شود در هر نقطه از فاصله مذکور چنانچه خط مماسی بر نمودار تابع ترسیم شده باشد این خط با جهت مثبت محور xها زاویه حاده می‌سازد و به تعبیری شیب آن $(tg\theta)$ مثبت است و چون شیب خط مماس توصیف کننده مشتق $(f'(x))$ می‌باشد؛ لذا:

ـ در فاصله (a,b) همواره $f'(x) > 0$ بوده و لذا تابع f در این فاصله اکیداً صعودی است.

ـ در فاصله (a,b) تقعر منحنی $f(x)$ (جهت انحناء منحنی) همواره به سمت پایین است (به عبارتی در این فاصله داریم $f''(x) < 0$).



«ب»

مثال: فرض کنید نمودار f مطابق شکل ترسیم شده باشد:

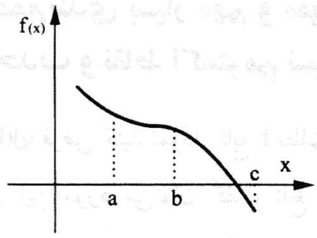
ـ در فاصله (a,b) تابع اکیدا نزولی می‌باشد $(f'(x) < 0)$.

ـ در فاصله (b,c) تابع اکیدا صعودی می‌باشد $(f'(x) > 0)$.

ـ در تمام فاصله (a , c) تقعر تابع به سمت بالاست $(f''(x) > 0)$

ـ $f'(x)$ در نقطه $x = b$ برابر صفر است (و خط مماس در این نقطه موازی محور xها می‌باشد) و چون f' در مجاورت این نقطه تغییر علامت نیز داده است، تابع f در $x = b$ دارای اکسترمم نسبی (از نوع min) است و البته به وضوح دیده می‌شود مقدار f در این نقطه نسبت به نقاط اطراف آن کمترین می‌باشد.

مثال: فرض کنید نمودار f مطابق شکل ترسیم شده باشد:



$f'(x)$ در $x = b$ برابر صفر شده (خط مماس بر منحنی در این نقطه افقی است)؛ اما، چون در فاصله $[a , c]$ به غیر از یک نقطه، $f'(x)$ همواره منفی است (خط مماس بر منحنی $f(x)$ با جهت مثبت محور x ها زاویه منفرجه ساخته و لذا شیب خط مماس در تمام نقاط منفی است)؛ پس، تابع طبیعت اکیدا یکنوایی (از نوع اکیدا نزولی) خود را در فاصله مذکور حفظ کرده است.

ـ در فاصله (a,c) تابع اکیدا نزولی $(f'(x) \leq 0)$ است.

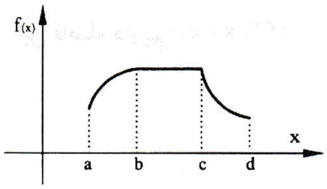
ـ در فاصله (a , b) تقعر منحنی $f(x)$ به سمت بالا $(f''(x) > 0)$ و در فاصله (b , c) به سمت پایین $(f''(x) < 0)$ است و چون تابع در $x = b$ پیوسته و مشتق پذیر بوده و علامت $f''(x)$ در مجاورت این نقطه تغییر کرده (جهت انحناء منحنی $f(x)$ عوض شده است) تابع f در $x = b$ دارای نقطه عطف است.

مثال: فرض کنید نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت مقابل باشد:

ـ در فاصله (a , b) تابع، اکیدا صعودی می‌باشد $(f'(x) > 0)$.

ـ در فاصله (b , c) تابع، ثابت می‌باشد $(f'(x) = 0)$.

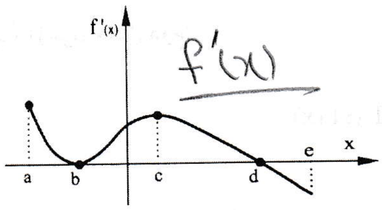
ـ در فاصله (c , d) تابع، اکیدا نزولی می‌باشد $(f'(x) < 0)$.



- $f'(x)$ در نقاط $x = c$, $x = b$ موجود نمی‌باشد. (زیرا نمودار تابع در این دو جا دارای نقطه نوک تیز؛ می‌باشد)؛ همچنین:

- تقعر منحنی $f(x)$ در فاصله (a, b) به سمت پایین $(f''(x)<0)$ و در فاصله (c, d) به سمت بالا $(f''(x)>0)$ می‌باشد. بدیهی است در فاصله (b, c) منحنی $f(x)$ دارای انحنایی نمی‌باشد و تقعر و تحدبی ندارد $(f''(x)=0)$.

مثال: فرض کنید نمودار تابع $f'(x)$ مطابق شکل ترسیم شده باشد:



- در فاصله (a, b)، نمودار $f'(x)$ بالای محور xها بوده و $f'(x)>0$ می‌باشد؛ لذا، تابع f اکیدا صعودی است؛ همچنین، در این فاصله شیب خط مماس بر منحنی $f'(x)$ منفی است؛ لذا، $f''(x)<0$ و تابع f دارای تقعر به سمت پایین است. (در این فاصله چون $f'(x)$ نزولی است $(f''(x)<0$.

- در فاصله (b, c)، نمودار $f'(x)$ بالای محور xها بوده و $f'(x)>0$ می‌باشد؛ لذا، تابع f اکیدا صعودی است؛ همچنین، در این فاصله شیب خط مماس بر منحنی $f'(x)$ مثبت است؛ لذا، $f''(x)>0$ و تابع f دارای تقعر به سمت بالا است. (در این فاصله چون $f'(x)$ صعودی است $(f''(x)>0$.

- در $x = b$، $f'(x)$ برابر صفر شده؛ ولی، چون $f'(x)$ در مجاورت این نقطه تغییر علامت نداده، تابع f در اینجا اکسترمم نسبی ندارد و البته هم طبق قضایای گفته شده و هم با توجه به تغییر علامت $f''(x)$ در مجاورت آن، تابع f در $x = b$ دارای نقطه عطف است.

- در فاصله (c, d) نمودار $f'(x)$ بالای محور xها بوده و $f'(x)>0$ می‌باشد؛ لذا، تابع f اکیدا صعودی است؛ همچنین، در فاصله (c, d) شیب خط مماس بر منحنی $f'(x)$ منفی است؛ لذا، $f''(x)<0$ و تابع f دارای تقعر به سمت پایین است. (در این فاصله چون $f'(x)$ نزولی است $(f''(x)<0$.

- در $x = c$ چون تقعر منحنی $f(x)$ (نه منحنی $f'(x)$) عوض شده تابع f دارای نقطه عطف می‌باشد.

- در فاصله (d, e) نمودار $f'(x)$ پایین محور xها بوده و $f'(x)<0$ می‌باشد؛ لذا، تابع f اکیدا نزولی است؛ همچنین، در فاصله (d, e) شیب خط مماس بر منحنی $f'(x)$ منفی است؛ لذا، $f''(x)<0$ و تابع f دارای تقعر به سمت پایین است. (در این فاصله چون $f'(x)$ نزولی است $(f''(x)<0$.

ـ در $x=d$ چون $f'(x)$ برابر صفر شده و $f'(x)$ در مجاورت این نقطه تغییر علامت می‌دهد، تابع f در آن اکسترمم نسبی دارد و نوع این اکسترمم از جنس max است که دلیل آن را از دو طریق می‌توان مشخص کرد.

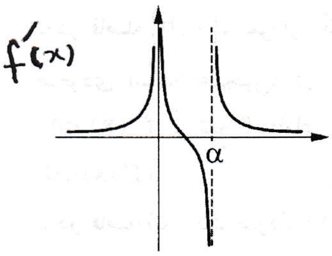
الف) جدول تعیین علامت $f'(x)$ در مجاورت $x=d$:

x		d	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

ب) آزمون مشتق دوم:

$$\begin{cases} f'(d)=0 \\ f''(d)<0 \end{cases} \Rightarrow$$ $f(x)$ در $x=d$ دارای max نسبی است.

مثال: اگر نمودار مشتق تابع همواره پیوسته f به‌صورت زیر باشد، می‌توان گفت:



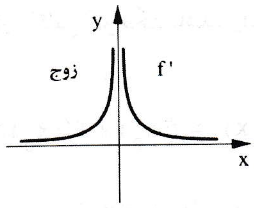
الف) از آنجا که $f'(0^-)=f'(0^+)=+\infty$، خط مماس بر نمودار $f(x)$ عمود بر محور xها بوده و چون قبل از $x=0$ نمودار f' صعودی $(f''>0)$ و بعد از $x=0$ نمودار f' نزولی $(f''<0)$ است، در $x=0$ جهت انحناء تابع f عوض شده و در کل تابع f در $x=0$ دارای عطف قائم است.

ب) از آنجا که $f'(\alpha^+)=+\infty$ و $f'(\alpha^-)=-\infty$ لذا تابع f در $x=\alpha$ دارای نقطه بازگشت بوده و چون f' در اطراف $x=\alpha$ از منفی به مثبت تغییر علامت داده، $x=\alpha$ طول نقطه مینیمم نسبی نمودار $f(x)$ است.

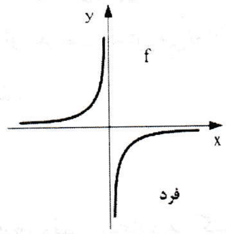
ج) رفتار تابع f در $-\infty$ صعودی با تقعر به سمت بالا است؛ زیرا، در $x\to-\infty$ مقدار f' مثبت و با افزایش x نمودار f' صعودی است.

د) رفتار تابع f در $+\infty$ صعودی با تقعر به سمت پایین است؛ زیرا، در $x\to+\infty$ مقدار f' مثبت و با افزایش x نمودار f' نزولی است.

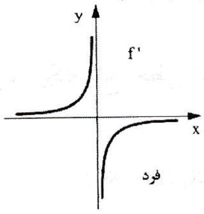
یک مثال دیگر: با توجه به نمودار f داده شده، نمودار f' ترسیم شده است.



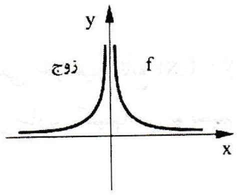
نمودار f' بالای محور xها است.
$x=0$ مجانب قائم f' است.



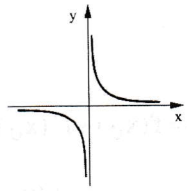
f در هر قسمت صعودی است.
$x=0$ مجانب قائم f است.



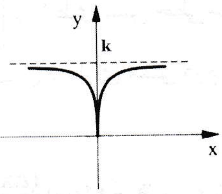
f' در بازه $(-\infty,0)$ بالای محور xها است.
f' در بازه $(0,+\infty)$ پایین محور xها است.
$x=0$ مجانب قائم f' است



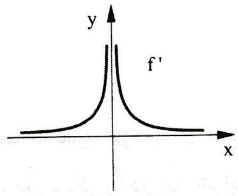
f در بازه $(-\infty,0)$ صعودی است.
f در بازه $(0,+\infty)$ نزولی است.
$x=0$ مجانب قائم f است.



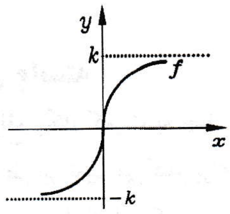
$f'_-(0)=-\infty$
$f'_+(0)=+\infty$
$y=0$ مجانب افقی f' است.



f در مبدا نقطه بازگشتی دارد.
شیب نیم مماس چپ در مبدا $=-\infty$
شیب نیم مماس راست در مبدا $=+\infty$
$y=k$ مجانب افقی f است.



$f'_{(0)}=\infty$
f' در اطراف مبدا بالای محور xها است.
$y=0$ مجانب افقی f' است.



f در مبدا عطف قائم دارد.
f در همسایگی مبدا طبیعت اکیداً صعودی دارد.
$y=\pm k$ مجانب‌های افقی f هستند.

محاسبه مقدار تقریبی یک تابع در یک نقطه

با استفاده از تعریف مشتق می‌توان نشان داد اگر Δx به اندازه کافی کوچک باشد، رابطه تقریبی زیر برقرار است:

$$f(x_0+\Delta x) \cong f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

از رابطه فوق وقتی استفاده می‌کنیم که مقدار تابع و مشتق آن را در نقطه‌ای می‌دانیم و می‌خواهیم مقدار تابع را در نزدیکی‌های آن نقطه تخمین بزنیم.

نکته: وقتی می خواهیم تابع $y=f(x)$ را در نقطه (x_0,y_0) از طریق یک تابع خطی تخمین بزنیم، (خطی سازی کنیم) می نویسیم:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

حاصل $|\Delta y-dy|$ را خطای خطی سازی می گوییم که در آن:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

$$dy=f'(x_0)dx$$

همچنین، $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ را خطای نسبی خطی‌سازی می‌نامیم.

اگر f در اطراف x_0 دارای مشتق دوم باشد؛ آنگاه داریم:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+R$$

که در آن $R=f''(\alpha)\frac{(\Delta x)^2}{2}$ و α نقطه‌ای در فاصله $(x_0\,,\,x_0+\Delta x)$ است.

اگر تقعر نمودار $f(x)$ به سمت بالا باشد $R>0$ و اگر تقعر نمودار $f(x)$ به سمت پایین باشد $R<0$ خواهد بود.

همچنین، اگر $|f''|\le M$ باشد طبیعی است $|R|\le \frac{M}{2}(\Delta x)^2$.

نسبت‌های وابسته

برخی مواقع یک کمیت به چند متغیر وابسته می‌شود و طبیعتا با تغییر کردن آن متغیرها، مقدار کمیت مورد نظر نیز تغییر می‌کند. برای آنکه وضعیت تغییر کمیت مورد نظر را در این شرایط مشخص کنیم، کافی است رابطه آن کمیت را با متغیرهای مذکور نوشته و با مشتق‌گیری از دو طرف رابطه حاصل به سئوال مورد نظر پاسخ دهیم. (معمولاً در این بحث تمامی متغیرها و طبیعتاً کمیت مورد نظر همگی تابعی از زمان می باشند و لذا مشتق‌گیری گفته شده نیز نسبت به زمان انجام می گیرد).

بهینه سازی (اکسترمم کردن یک کمیت با شرایط خاص)

گاهی مواقع یک کمیت به دو متغیر وابسته بوده و هدف آن است که با توجه به ارتباط خاصی که بین آن دو متغیر وجود دارد، مقدار کمیت مورد نظر را اکسترمم کنیم. در این شرایط نخست رابطه کمیت مذکور را با آن دو متغیر نوشته و سپس رابطه بین آن دو متغیر را که در مساله توصیف شده است معین می‌کنیم. حال می‌توان کمیت مورد نظر را تنها برحسب یک متغیر بیان نمود و با استفاده از مشتق به اکسترمم کردن آن پرداخت.

چند نکته مهم در تعیین ماکزیمم و مینیمم در حالات خاص (بدون استفاده از مشتق)

در دو قضیه زیر x, y, z متغیرهای مثبت فرض شده اند:

قضیه: اگر مجموع متغیرهای x و y ثابت باشد، حاصل‌ضرب آنها، xy، وقتی ماکزیمم است که این دو متغیر باهم مساوی باشند. (اگر تساوی ممکن نباشد؛ باید $|x-y|$ مینیمم باشد).

قضیه: اگر مجموع متغیرهای x, y, z ثابت باشد، حاصل‌ضرب $x^a \cdot y^b \cdot z^c$ وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

و لذا در حالت خاص اگر مجموع متغیرهای x, y ، z ثابت باشد، حاصل‌ضرب $x\,y\,z$ وقتی ماکزیمم است که $x=y=z$ باشد.

قضیه: اگر حاصل‌ضرب دو متغیر x و y ثابت باشد، مجموع آنها وقتی مینیمم است که آن دو متغیر باهم مساوی باشند. (چنانچه تساوی ممکن نباشد؛ باید $|x-y|$ مینیمم شود).

قضیه: اگر برای متغیرهای z ، y و x حاصل‌ضرب $x^a \cdot y^b \cdot z^c$ ثابت باشد، مجموع $x+y+z$ وقتی مینیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

و لذا در حالت خاص اگر حاصل‌ضرب $x\,y\,z$ ثابت باشد مجموع $x+y+z$ وقتی مینیمم است که $x=y=z$ باشد.

قضیه: اگر مجموع مربعات متغیرهای z ، y و x ثابت باشد $(x^2+y^2+z^2=k)$، ماکزیمم عبارت $ax+by+cz$ وقتی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

و لذا در حالت خاص اگر برای متغیرهای z ، y و x حاصل $x^2+y^2+z^2$ ثابت باشد، عبارت $x+y+z$ وقتی ماکزیمم است که $x=y=z$ باشد.

قضیه: اگر برای متغیرهای z ، y و x حاصل جمع $ax+by+cz$ ثابت باشد، عبارت $x^2+y^2+z^2$ وقتی مینیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

و لذا در حالت خاص اگر مجموع z ، y و x ثابت باشد، مجموع مربعات آنها وقتی مینیمم است که $x=y=z$ باشد.

قضیه: اگر حاصل‌ضرب xyz ثابت باشد حداکثر $x^n+y^n+z^n$ وقتی اتفاق می افتد که داشته باشیم:

$$x=y=z$$

نکته: در مسائل اکسترمم، معمولاً مستطیل و لوزی به مربع، مکعب مستطیل به مکعب تبدیل می‌شود و اصولاً اشکال به تقارن بیشتر متمایل می‌شوند.

چند قضیه در بخش مشتق

۱ـ قضیه رول:

هرگاه:

الف) تابع f در فاصله $[a\,,b]$ پیوسته باشد.

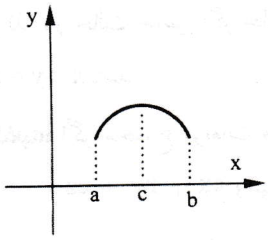
ب) تابع f در فاصله $(a\,,b)$ مشتق پذیر باشد.

ج) $f(a)=f(b)$ باشد.

(به سه شرط فوق، شرایط قضیه رول در فاصله $[a\,,b]$ گفته می‌شود)

آنگاه دست‌کم یک c متعلق به فاصله $(a\,,b)$ وجود دارد که خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در آنجا افقی می‌شود و به بیان ریاضی:

$$\exists\, c\in(a,b)\ \mid\ f'(c)=0$$



توجه: عدم وجود شرایط قضیه رول الزاماً وجود cای با شرایط گفته شده را منتفی نمی‌کند.

نکته: از قضیه رول می توان نتیجه گرفت هرگاه معادله $f'(x)=0$ در فاصله (a,b) دارای m تا ریشه حقیقی باشد، معادله $f(x)=0$ در فاصله (a,b) حداکثر می تواند $m+1$ ریشه حقیقی داشته باشد (ممکن است صفر، یک، دو، ... یا $m+1$ ریشه حقیقی داشته باشد و نه بیشتر)؛ همچنین، بین هر دو ریشه معادله $f(x)=0$ معادله $f'(x)=0$ حداقل یک ریشه خواهد داشت.

۲ـ قضیه مقدار میانگین در مشتق (قضیه لاگرانژ)

هر گاه:

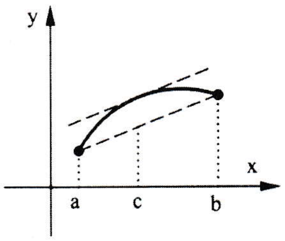
الف) تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد.

ب) تابع f در فاصله (a,b) مشتق پذیر باشد.

(به دو شرط فوق، شرایط قضیه لاگرانژ در فاصله $[a,b]$ گفته می‌شود).

آنگاه دست‌کم یک c متعلق به فاصله (a,b) وجود دارد که خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در آنجا موازی خط قاطعی می‌شود که نقاط ابتدایی و انتهایی منحنی را در فاصله مذکور به هم وصل کرده است و به بیان ریاضی:

$$\exists c \in (a,b) \;\middle|\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



توجه: عدم وجود شرایط قضیه لاگرانژ الزاما وجود c ای با شرایط گفته شده را منتفی نمی‌کند.

نکته: از قضیه لاگرانژ می توان نتیجه گرفت اگر m و M به ترتیب مقادیر مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع f برای xهای بازه $[a,b]$ باشند، داریم:

$$m\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le M$$

۳ـ قضیه کوشی

هر گاه:

الف) توابع f و g در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشند.

ب) توابع f و g در فاصله (a,b) مشتق پذیر باشند.

ج) به ازاء تمام مقادیر x متعلق به فاصله (a , b)، حاصل $g'(x)$ مخالف صفر باشد.

آنگاه دست‌کم یک c متعلق به فاصله (a , b) وجود دارد که:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

۴ـ قضیه نامساوی مشتق

اگر دو تابع g و f در فاصله $(a,+\infty)$ مشتق پذیر بوده و به ازای هر x در این فاصله داشته باشیم $f'(x)\geq g'(x)$، با این شرط که $f(a)=g(a)$ باشد، آنگاه برای هر x در بازه $(a,+\infty)$ داریم:

$$f(x)\geq g(x)$$

۵ ـ قضیه تابع ثابت

هرگاه تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و در فاصله (a,b) مشتق پذیر باشد و برای هر x در بازه (a,b) داشته باشیم $f'(x)=0$، آنگاه تابع f در فاصله $[a,b]$ تابعی ثابت است؛ یعنی، در این فاصله داریم: $f(x)=k$.

مجموعه تست مشتق و کاربردهای آن

۱ ـ مقادیر b و a چقدر باشند که تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & |x|\le 2 \\ \sqrt{x^2+4x+4} & |x|>2 \end{cases}$ **در نقطه** $x=2$ **مشتق پذیر باشد؟**

۱) $a=0\ ,b=1$ ۲) $a=1\ ,\ b=0$ ۳) $b=0\ ,a=\frac{1}{2}$ ۴) غیر ممکن

حل :

باید داشته باشیم:

$$1)\quad \left(ax^2+bx+2\right)\Big|_{x=2}=\sqrt{x^2+4x+4}\Big|_{x=2}$$

$$\rightarrow\quad 4a+2b+2=\sqrt{4+8+4}\quad\rightarrow\quad 4a+2b=2$$

$$2)\quad \left(ax^2+bx+2\right)'\Big|_{x=2}=\left(\sqrt{x^2+4x+4}\right)'\Big|_{x=2}$$

$$\rightarrow\quad (2ax+b)\Big|_{x=2}=\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+4}}\Bigg|_{x=2}$$

$$\rightarrow\quad 4a+b=\frac{4+4}{2\sqrt{4+8+4}}\quad\Rightarrow\quad 4a+b=1$$

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول فوق به‌دست می‌آید:

$b=1\ ,\ a=0$

۲ ـ اگر $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{2x}+b\cos x+ce^{-x}}{x\,tg\,2x}=3$ **باشد، حاصل** $\dfrac{a+c}{b}$ **کدام است؟**

۱) -1 ۲) 1 ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

حل :

با توجه به اینکه در محاسبه حد مذکور، مخرج صفر و جواب نهایی عدد متناهی 3 می‌باشد، باید، حد دارای ابهام $\frac{0}{0}$ باشد که پس از رفع ابهام جواب نهایی، عدد 3 شود؛ پس:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{2x}+b\cos x+ce^{-x}}{x\,tg\,2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a+b+c}{x(2x)}\quad\Rightarrow\quad a+b+c=0\qquad(1)$$

با اعمال قاعده هوپیتال داریم:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{2ae^{2x}-b\sin x-ce^{-x}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{2a-c}{4x}\quad\Rightarrow\quad 2a-c=0\qquad (2)$$

و مجدداً با اعمال قاعده هوپیتال خواهیم داشت:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{4ae^{2x}-b\cos x+ce^{-x}}{4}=\lim_{x\to 0}\frac{4a-b+c}{4}=3\quad\Rightarrow\quad 4a-b+c=12\qquad (3)$$

با حل دستگاه شامل سه معادله فوق به دست می‌آید:

$$a=\frac{4}{3}\ ,\quad b=-4\ ,\quad c=\frac{8}{3}\quad\Rightarrow\quad\frac{a+c}{b}=-1$$

۳ـ اگر $f(x)=\begin{cases}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ **باشد؛** $f'(0)$ **کدام است؟**

۱) 0 ۲) 2 ۳) -4 ۴) موجود نمی‌باشد.

حل :

به سادگی می‌توان دید $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=1$ بوده و تابع در $x=0$ پیوسته است.

با استفاده از تعریف مشتق در یک نقطه داریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}-1}{x}$$

حد مذکور مبهم از نوع $\frac{0}{0}$ بوده و با اعمال قاعده هوپیتال داریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{x}\,\frac{2x}{1+x^2}\right)\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}}{1}$$

حال از آنجا که:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}=\frac{0}{0}\ \overset{H}{\Rightarrow}\ I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}=1$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\,\frac{2x}{1+x^2}=2$$

به‌دست می‌آید:

$$f'(0)=(-1+2)(1)=1$$

راه دوم:

دقت کنید که در همسایگی $x=0$ داریم:

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x}=e^{x}$$

حال می‌توان نوشت:

$$f'(0) = (e^x)'\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = e^0 = 1$$

۴ ـ تابع $f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right] & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ **مفروض است. این تابع در نقطه $x = 0$:**

۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است. ۲) پیوسته است؛ ولی، مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۳) نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر. ۴) هیچ کدام

حل:

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$ مبهم از نوع $0\times\infty$ می‌باشد؛ اما، با توجه به هم‌ارزی $\left[\frac{1}{x}\right] \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0} x \times \frac{1}{x} = 1 = f(0)$$

پس f در $x = 0$ پیوسته است.

با توجه به تعریف مشتق در یک نقطه داریم:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left[\frac{1}{x}\right] - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x}\right] - \frac{1}{x} = -\lim_{x\to 0} \left\{\frac{1}{x}\right\}$$

بدیهی است حاصل عبارت فوق همواره در فاصله $(-1,0]$ قرار دارد و وقتی x به سمت صفر میل می‌کند، مقدار آن مشخص نیست؛ بنابراین، $f'(0)$ موجود نمی‌باشد و در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

۵ ـ زاویه دو منحنی $C_1: \begin{cases} x = t^2 \\ y = \ln t \end{cases}$ **و** $C_2: \begin{cases} x = t^3 \\ y = 2\ln t \end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$ ۲) $\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{3}\right)$ ۳) $\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{4}\right)$ ۴) $\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{8}\right)$

حل:

نخست محل تلاقی دو منحنی را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} t^3 = t^2 \Rightarrow t^2(t-1) = 0 \Rightarrow t = 0,0,1 \\ 2\ln t = \ln t \Rightarrow \ln t = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

جواب مشترک؛ یعنی، $t = 1$ بیانگر محل تقاطع است.

$$c_1:\begin{cases}x=t^2\\ y=\ln t\end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{1}{t}}{2t}=\frac{1}{2t^2} \Rightarrow m_1=\left.\frac{1}{2t^2}\right|_{t=1}=\frac{1}{2}$$

$$c_2:\begin{cases}x=t^3\\ y=2\ln t\end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2}{t}}{3t^2}=\frac{2}{3t^3} \Rightarrow m_2=\left.\frac{2}{3t^3}\right|_{t=1}=\frac{2}{3}$$

و زاویه مورد نظر عبارت است از:

$$tg\,\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right|=\frac{1}{8} \Rightarrow \alpha=\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{8}\right)$$

۶ـ زاویه بین نیم مماس‌های چپ و راست بر نمودار $y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ در $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

حل:

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \rightarrow y'=\frac{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)-\left(\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)x}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

وقتی $x\rightarrow 0^+$ داریم:

$$\frac{1}{x}\rightarrow +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}\rightarrow +\infty$$

وقتی $x\rightarrow 0^-$ داریم:

$$\frac{1}{x}\rightarrow -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}\rightarrow 0$$

لذا، با توجه به بحث مقایسه مرتبه بی‌نهایت بزرگ ها و بی‌نهایت کوچک ها داریم:

شیب نیم مماس چپ: $m_1=y'\left(0^-\right)=\lim\limits_{x\rightarrow 0^-}\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{1+0}{1^2}=1$

$$m_2 = y'\left(0^+\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$: شیب نیم مماس راست

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

پس زاویه بین دو نیم مماس مورد نظر $\frac{\pi}{4}$ خواهد بود.

۷ ـ اگر $y = \ln\left(\frac{x\sqrt{x+5}}{(x-1)^3}\right)$ **باشد، حاصل** $y'(2)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{-17}{7}$ ۲) $\frac{-23}{7}$ ۳) $\frac{17}{7}$ ۴) $\frac{23}{7}$

حل :

برای ساده کردن عمل مشتق‌گیری با توجه به اینکه مقدار y' در $x=2$ مطلوب است؛ می‌توانیم بنویسیم:

$$y = \ln\left(\frac{x\sqrt{x+5}}{(x-1)^3}\right) \to y = \ln x + \ln\sqrt{x+5} - \ln(x-1)^3$$

$$\to y = \ln x + \frac{1}{2}\ln(x+5) - 3\ln(x-1)$$

$$\to y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+5} - 3\left(\frac{1}{x-1}\right) \to y'(2) = \frac{-17}{7}$$

۸ ـ اگر $x = \int \frac{dy}{\sqrt{1+4y^2}}$ **باشد، حاصل** $\frac{d^2y}{dx^2}$ **کدام است؟**

۱) $4\left(1+4y^2\right)$ ۲) $\frac{4}{1+4y^2}$ ۳) $4y$ ۴) $\frac{4}{y}$

حل :

با مشتق‌گیری از طرفین فرض مساله نسبت به متغیر y داریم:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1+4y^2}} \to \frac{dy}{dx} = \sqrt{1+4y^2}$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه فوق نسبت به متغیر x داریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8y\dfrac{dy}{dx}}{2\sqrt{1+4y^2}} \to \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4y\sqrt{1+4y^2}}{\sqrt{1+4y^2}} \to \frac{d^2y}{dx^2}=4y$$

۹ـ اگر $f\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)=x^2$ **باشد،** $f'(3)$ **کدام است؟**

۱) -12 ۲) -24 ۳) 12 ۴) 24

حل :

با فرض $\dfrac{2x+1}{x-1}=t$ داریم:

$$2x+1=tx-t \Rightarrow 1+t=tx-2x \Rightarrow 1+t=(t-2)x \Rightarrow x=\frac{t+1}{t-2}$$

حال با بازنویسی فرض مسأله برحسب x داریم:

$$f(t)=\left(\frac{t+1}{t-2}\right)^2$$

و با مشتق‌گیری به‌دست می‌آوریم:

$$f'(t)=2\left(\frac{t+1}{t-2}\right)\left(\frac{-3}{(t-2)^2}\right) \Rightarrow f'(3)=2(4)(-3)=-24$$

راه دوم:

از طرفین رابطه اصلی مشتق می‌گیریم:

$$\left(\frac{-3}{(x-1)^2}\right)f'\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=2x$$

حال به ازای $x=4 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}=3$ داریم:

$$\frac{-3}{(4-1)^2}f'\left(\frac{8+1}{4-1}\right)=2(4) \to f'(3)=-24$$

۱۰ـ مشتق تابع $y=\sin^4x+\cos^2x$ **نسبت به** $\operatorname{tg}x$ **در** $x=\dfrac{\pi}{4}$ **کدام است؟**

۱) 0 ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) 2

حل :

$$\frac{d(\sin^4x+\cos^2x)}{d(\operatorname{tg}x)}=\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\sin^4x+\cos^2x\right)}{\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg}x)}=\frac{4\sin^3x\cos x-2\cos x\sin x}{1+\operatorname{tg}^2x}$$

در $x = \frac{\pi}{4}$ حاصل چنین می‌شود:

$$\frac{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1+(1)^2}=0$$

۱۱ ـ در تابع $f(x)=\begin{cases}4x-1 & x<0\\ 3x^2+1 & x>\frac{1}{2}\end{cases}$ **حاصل** $\left(f^{-1}\right)'(4)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل :

اگر بخواهیم ببینیم به ازای چه xای حاصل $f(x)$ برابر 4 می‌شود، می‌نویسیم:

$$4x-1=4 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

اما، چون ضابطه $y=4x-1$ برای $x<0$ تعریف شده این x قابل قبول نیست.

$$3x^2+1=4 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

و چون ضابطه $3x^2+1$ برای $x>\frac{1}{2}$ تعریف شده پس $x=1$ قابل قبول است.

حال می‌توان نوشت:

$$\left(f^{-1}\right)'(4)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\left(3x^2+1\right)'\Big|_{x=1}}=\frac{1}{6x\Big|_{x=1}}=\frac{1}{6}$$

۱۲ ـ اگر $f(x)=\int_{1-x}^{\ln x}\frac{dt}{1+t^4}$ **باشد، حاصل** $\left(f^{-1}\right)'(0)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) صفر ۴) ∞

حل :

$$f(x)=\int_{1-x}^{\ln x}\frac{dt}{1+t^4} \rightarrow f(1)=\int_{1-1}^{\ln(1)}\frac{dt}{1+t^4}=\int_0^0\frac{dt}{1+t^4}=0$$

پس:

$$(1,0)\in f \Leftrightarrow (0,1)\in f^{-1}$$

حال داریم:

$$f'(x)=(\ln x)'\frac{1}{1+(\ln x)^4}-(1-x)'\frac{1}{1+(1-x)^4}=\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{1+\ln^4 x}-(-1)\frac{1}{1+(1-x)^4}$$

$$\rightarrow\ f'(1)=(1)\frac{1}{1+0}+(1)\frac{1}{1+0}=2\ \rightarrow\ \left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$$

۱۳ـ منحنی پارامتری $\begin{cases}x=t^2\\ y=t^3+t-1\end{cases}$ در $t=1$ از نقطه $(1,1)$ می‌گذرد. منحنی $y=x^x$ نیز از نقطه $(1,1)$ می‌گذرد، زاویه بین این دو منحنی در نقطه مذکور چیست؟

۱) $\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$ ۲) $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$ ۳) $\text{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}$ ۴) صفر

حل :

$$\begin{cases}x=t^2\\ y=t^3+t-1\end{cases}\ \rightarrow\ y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+1}{2t}\ \Rightarrow\ y'_x\Big|_{t=1}=\frac{3+1}{2}=2=m_1$$

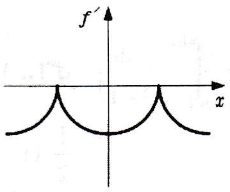
$$y=x^x\ \rightarrow\ \ln y=x\ln x\ \rightarrow\ \frac{y'}{y}=\ln x+x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\rightarrow\ y'=(\ln x+1).x^x\ \rightarrow\ y'(1)=(\ln 1+1).1^1=1=m_2$$

پس، زاویه بین دو منحنی چنین خواهد شد:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{2-1}{1+2}\right|=\frac{1}{3}\ \rightarrow\ \alpha=\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$$

۱٤ـ نمودار مشتق تابعی به‌صورت زیر است. این تابع........... ماکزیمم، .... مینیمم و .... عطف دارد.



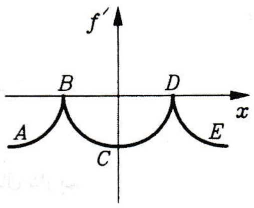
۱) یک، یک، یک

۲) یک، یک، صفر

۳) صفر، صفر، یک

۴) صفر، صفر، سه

حل :



f' در نقاط D و B صفر است؛ ولی، f' در اطراف این نقاط تغییر علامت نمی‌دهد؛ پس، تابع f در D و B عطف دارد.

در فاصله A تا B ← f' صعودی ← $f''>0$

در فاصله B تا C ← f' نزولی ← $f''<0$

در فاصله C تا D ← f' صعودی ← $f''>0$

در فاصله D تا E ← f' نزولی ← $f''<0$

← f در B و C و D عطف دارد.

مشاهده می‌شود در کل فاصله تعریف شده، نمودار f' همواره پایین محور x بوده (به جز در نقاط B و D که گفتیم عطف‌های f هستند) و لذا f طبیعت اکیداً نزولی داشته و فاقد اکسترمم نسبی است.

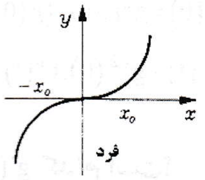
تذکر: به یاد داشته باشید که اکسترمم‌های f'، عطف‌های f هستند و ریشه‌های ساده f'، اکسترمم‌های f هستند؛ مشروط بر اینکه، f' در اطراف ریشه، تغییر علامت دهد. (دقت داریم که اگر منحنی f'، هموار باشد، ریشه‌های ساده f'، حتماً اکسترمم های f را نشان می‌دهند).

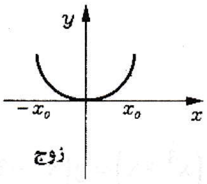
۱۵ ـ اگر f یک تابع زوج بوده و $f'(1^+)=1$ و $f'(1^-)=2$ باشد $f'\left((-1)^+\right)$ کدام است؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) 1 ۴) -1

حل :

می‌دانیم مشتق یک تابع زوج تابعی فرد و مشتق یک تابع فرد تابعی زوج است؛ همچنین، نمودار یک تابع زوج نسبت به محور yها و نمودار یک تابع فرد نسبت به مبدا مختصات متقارن است.





در این مساله چون f زوج است، f' فرد است و داریم:

$$f'\left((-1)^+\right)=-f'\left(1^-\right)=-2$$

۱٦ ـ مشتق تابع $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt.\left(x^3+x^2-2\right)^4$ درنقطه $x=1$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\sin 1$ ۳) $4\sin 1$ ۴) 2

حل :

با فرض:

$$U(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt \qquad V(x)=\left(x^3+x^2-2\right)^4$$

ملاحظه می‌شود:

$$U(1)=\int_1^{1}\frac{\sin t}{t}dt=0 \qquad V(1)=(1+1-2)^4=0$$

لذا:

$$f(x)=U(x).V(x) \ \rightarrow\ f'(x)=U'(x).V(x)+U(x).V'(x)$$
$$\rightarrow\ f'(1)=U'(1).V(1)+U(1).V'(1)=U'(1)(0)+(0)V'(1)=0$$

۱۷ ـ اگر $\begin{cases} f''(1)=10\ ,\ f'(1)=6\ ,\ f(1)=5 \\ g''(0)=\frac{1}{2}\ ,\ g'(0)=2\ ,\ g(0)=1\end{cases}$ **حاصل** $(fog)''(0)$ **کدام است؟**

۱) 0 ۲) 6 ۳) 43 ۴) 40

حل :

$$(fog)'(x)=g'(x).f'(g(x)) \ \rightarrow\ (fog)''(x)=\left(g'(x).f'(g(x))\right)'$$
$$=g''(x).f'(g(x))+g'(x).g'(x)f''(g(x))$$
$$\Rightarrow\ (fog)''(0)=g''(0).f'(g(0))+g'^2(0).f''(g(0))$$
$$=g''(0).f'(1)+g'^2(0).f''(1)=\left(\frac{1}{2}\right)(6)+(2)^2(10)=43$$

۱۸ ـ اگر $f\left(x^3+x\right)=g\left(x^2-3x\right)$ **و** $f'(10)=1$ **حاصل** $g'(-2)$ **کدام است؟**

۱) 13 ۲) 12 ۳) -13 ۴) -12

حل :

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه فوق داریم:

$$\left(3x^2+1\right)f'\left(x^3+x\right)=(2x-3)g'\left(x^2-3x\right)$$

در $x=2$ داریم:

$$(13)f'(10)=(1)g'(-2)\ \rightarrow\ (13)(1)=(1)g'(-2)\ \rightarrow\ g'(-2)=13$$

۱۹ـ اگر $xy = \text{Arctan}\dfrac{x}{y}$ حاصل y'_x کدام است؟

۱) $\dfrac{y}{x}\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$ ۲) $\dfrac{x}{y}\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$ ۳) $\dfrac{y}{x}\dfrac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}$ ۴) $\dfrac{x}{y}\dfrac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}$

حل :

$$F(x,y)=\text{Arctan}\frac{x}{y}-xy=0$$

با استفاده از قاعده مشتق گیری ضمنی داریم:

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\dfrac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}-y}{\dfrac{\frac{-x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}-x}=-\frac{\dfrac{y}{y^2+x^2}-y}{\dfrac{-x}{y^2+x^2}-x}=\frac{y}{x}\frac{\dfrac{1}{y^2+x^2}-1}{\dfrac{1}{y^2+x^2}+1}=\frac{y}{x}\frac{1-y^2-x^2}{1+y^2+x^2}$$

۲۰ـ معادله خط مماس در تابع $y=\cos\left(x+\cos\left(x+\cos(\ldots)\right)\right)$ در نقطه‌ای با مختصات $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ کدام است؟

۱) $x+2y=\dfrac{\pi}{2}$ ۲) $2x+y=\pi$ ۳) $x-2y=\dfrac{\pi}{2}$ ۴) $2x-y=\pi$

حل :

می‌توان دید:

$$y=\cos\left(x+\cos\left(x+\cos(\ldots)\right)\right) \rightarrow y=\cos(x+y) \rightarrow y-\cos(x+y)=0$$

طبق قاعده مشتق گیری ضمنی داریم:

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$$

در نقطهٔ $y=0$ و $x=\dfrac{\pi}{2}$ که به منحنی مورد بحث تعلق دارد، داریم:

$$y'_x=-\frac{1}{2}$$

و معادله خط مماس در این نقطه چنین می‌باشد:

$$y-0=\frac{-1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow x+2y=\frac{\pi}{2}$$

۲۱ ـ اگر $x^2y-\ln x=1-e^y$ باشد، حاصل y''_{xx} در نقطه $x=1\ ,\ y=0$ کدام است؟

۱) $-3\frac{1}{2}$ ۲) $-3\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{13}{8}$ ۴) صفر

حل :

$$x^2y-\ln x+e^y-1=0$$

با مشتق‌گیری از رابطه فوق نسبت به متغیر x و با عنایت به تابع بودن y به‌دست می‌آید:

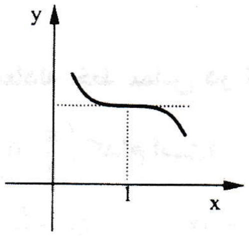
$$2xy+x^2y'-\frac{1}{x}+y'e^y=0\xrightarrow[y=0]{x=1}0+y'-1+y'=0\quad\rightarrow\quad y'=\frac{1}{2}$$

با مشتق‌گیری مجدد نسبت به متغیر x حاصل می‌شود:

$$2y+2xy'+2xy'+x^2y''+\frac{1}{x^2}+y''e^y+y'y'e^y=0\xrightarrow[y'=\frac{1}{2}]{x=1\ ,\ y=0}$$

$$0+1+1+y''+1+y''+\frac{1}{4}=0\quad\rightarrow\quad y''=-\frac{13}{8}$$

۲۲ ـ نمودار تابع f به فرم روبرو می‌باشد؛ کدام گزینه صحیح است؟



۱) $f''(1)<0\ ,\ f'\left(1^+\right)<0$

۲) $f''(1)>0\ ,\ f'\left(1^+\right)=0$

۳) $f''(1)=0\ ,\ f'\left(1^+\right)<0$

۴) $f''(1)=0\ ,\ f'\left(1^+\right)>0$

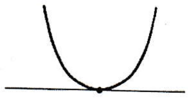
حل :

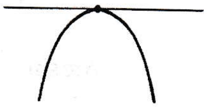
ملاحظه می‌شود، تابع در $x=1$ پیوسته بوده و در این نقطه، مشتق پذیر است و خط مماس در این نقطه موازی محور x ها شده؛ یعنی، $f'(1)=0$ از طرفی به وضوح دیده می‌شود درمجاورت $x=1$ تابع طبیعت اکیداً نزولی دارد؛ یعنی، $f'\left(1^-\right)$ و $f'\left(1^+\right)$ هر دو منفی می‌باشند؛ همچنین، مشاهده می‌شود جهت تقعر تابع در مجاورت $x=1$ تغییر می‌کند؛ به طوری‌که:

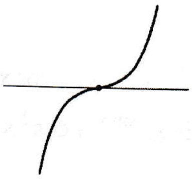
$f''\left(1^+\right)<0$ و در $x=1^+$ تقعر نمودار f به سمت پایین است و $f''\left(1^-\right)>0$ و در $x=1^-$ تقعر نمودار f به سمت بالاست.

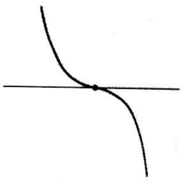
بنابراین، تابع در $x=1$ دارای عطف است و اگر f'' در این نقطه موجود باشد، باید $f''(1)=0$؛ پس، گزینه سوم صحیح است.

۲۳ ـ اگر $\begin{cases} y'+y=e^{-x}+3x \\ y(0)=1 \end{cases}$**، نمودار $y=f(x)$ در اطراف نقطه $(0,1)$ چگونه است؟**

۱)


۲)


۳)


۴)


حل :

با نگاه کردن به معادله دیفرانسیل داده شده در $x=0$ داریم:

$$y'(0)+y(0)=e^{-(0)}+3(0) \rightarrow y'(0)+1=1+0 \rightarrow y'(0)=0$$

حال چنانچه از معادله دیفرانسیل داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$y''+y'=-e^{-x}+3$$

و با نگاه کردن به این رابطه در $x=0$ خواهیم داشت:

$$y''(0)+y'(0)=-e^{-(0)}+3 \rightarrow y''(0)+0=-1+3 \Rightarrow y''(0)=2$$

از آنجا که $y''(0)>0$ و $y'(0)=0$ می‌باشد، طبق آزمون مشتق دوم، تابع f در $x=0$ دارای min نسبی بوده و گزینه اول صحیح است.

۲۴ ـ می‌دانیم $g'(x)=\dfrac{f(x)}{1+f(x)}$، **چنانچه** $f(0)=0$ **و** $f'(0)<0$ **باشد، تابع** g **در** $x=0$ **دارای:**

۱) max نسبی است. ۲) min نسبی است. ۳) عطف است. ۴) هیچ‌کدام

حل :

$$g'(0)=\frac{f(0)}{1+f(0)}=\frac{0}{1+0}=0$$

یعنی تابع g در $x=0$ دارای نقطه بحرانی است. از طرفی، داریم:

$$g''(x)=\frac{f'(x)(1+f(x))-f'(x)f(x)}{(1+f(x))^2} \rightarrow g''(0)=\frac{f'(0)(1+f(0))-f'(0)f(0)}{(1+f(0))^2}=f'(0)$$

و چون $f'(0)<0$ فرض شده، $g''(0)<0$ بوده و با توجه به آنکه $g'(0)=0$ شده است، مطابق قضیه آزمون مشتق دوم، تابع g در $x=0$ دارای max نسبی است.

۲۵ـ طول نقطه عطف تابع $y=e^{\sin x}$ عبارت است از:

۱) $\text{Arc}\sin\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$
۲) $\text{Arc}\sin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$
۳) $\text{Arc}\sin\left(\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)$
۴) $\text{Arc}\sin\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)$

حل :

$$y=e^{\sin x} \rightarrow y'=\cos x.e^{\sin x} \rightarrow$$
$$y''=-\sin x.e^{\sin x}+\cos^2 x.e^{\sin x}=e^{\sin x}\left(\cos^2 x-\sin x\right)$$

برای یافتن نقاط عطف می‌نویسیم:

$$y''=0 \rightarrow \cos^2 x-\sin x=0 \rightarrow 1-\sin^2 x-\sin x=0 \rightarrow$$
$$\sin^2 x+\sin x-1=0 \rightarrow \sin x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

از آنجا که $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<-1$ است و $\sin x$ محدودیت بین 1- تا 1 را دارد؛ جواب قابل قبول عبارت است از:

$$\sin x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow x=\text{Arc}\sin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

۲۶ـ برد تابع $y=x+\sqrt{x^2+2x+3}$ کدام است؟

۱) $y\geq 0$
۲) $y\leq -1$
۳) $y>-1$
۴) R

حل :

$$y=x+\sqrt{x^2+2x+3} \rightarrow y=x+\sqrt{(x+1)^2+2}$$

لذا، ملاحظه می‌شود دامنه تابع R بوده والبته این تابع در تمام مجموعه اعداد حقیقی پیوسته می‌باشد و داریم:

$$y'=1+\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} \rightarrow y'=\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

نقطه بحرانی تابع را پیدا کنیم:

$$\sqrt{x^2+2x+3}+x+1=0 \rightarrow \sqrt{x^2+2x+3}=-(x+1) \rightarrow$$
$x^2+2x+3=x^2+2x+1 \rightarrow 3=1$ غیر ممکن

پس تابع نقطه بحرانی نداشته و از آنجا که:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x+3}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+|x+1|\right)\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x+x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x-x-1)=-1\end{cases}$$

نتیجه آنکه: $R_f=(-1,+\infty)$

دقت کنید که می‌توانیم بنویسیم:

$$y=x+\sqrt{x^2+2x+3}=(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+2}-1=t+\sqrt{t^2+2}-1$$

واضح است که $t+\sqrt{t^2+2}>0$ است و وقتی $t\to-\infty$ خواهیم داشت:

$$y\to(t+(-t)-1)=-1$$

و با افزایش t، مقدار y نیز زیاد می‌شود؛ پس:

$$R_f=\left(-1,+\infty\right)$$

۲۷ ـ نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ دارای:

۱) سه اکسترمم نسبی، دو عطف است. ۲) یک اکسترمم نسبی، دو عطف است.

۳) سه اکسترمم نسبی، چهار عطف است. ۴) یک اکسترمم نسبی، چهار عطف است.

حل :

بدیهی است داریم: $D_f=R$ و:

$$f(x)=\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}\rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{3}}(2x)=\frac{4}{3}x\left(x^2-1\right)^{\frac{-1}{3}}$$

$$f''(x)=\frac{4}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{-1}{3}}+\frac{4}{3}x\left(\frac{-1}{3}\right)\left(x^2-1\right)^{\frac{-4}{3}}(2x)$$

$$=\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2-1}}-\frac{8x^2}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}=\frac{12\left(x^2-1\right)-8x^2}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}=\frac{4x^2-12}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}=\frac{4}{9}\frac{x^2-3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}$$

ملاحظه می‌شود:

$$f'(x)=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}\ ,\ f''(x)=\frac{4\left(x^2-3\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}$$

x		$-\sqrt{3}$		-1		$+1$		$+\sqrt{3}$	
f''	+	0	−	ن	−	ن	−	0	+
f	$\cup$	عطف	$\cap$		$\cap$		$\cap$	عطف	$\cup$

x		-1		0		1	
f'	−	ن	+	0	−	ن	+
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

۲۸ـ کمترین فاصله مبدأ مختصات از منحنی $x^2+y^2-2x-8=0$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

حل :

با استفاده از متغیرهای قطبی $\begin{pmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{pmatrix}$ معادله منحنی به‌صورت $r^2-2r\cos\theta-8=0$ نوشته می‌شود. از آنجاکه r مبین فاصله هر نقطه از منحنی تا مبدأ مختصات می‌باشد، هدف، یافتن حداقل مقدار r در رابطه فوق است.

با حل معادله $r^2-2r\cos\theta-8=0$ برحسب مجهول r به‌دست می‌آید:

$$r=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta+8}$$

اما از آنجاکه همواره $\cos\theta<\sqrt{\cos^2\theta+8}$ و اساساً r نمی‌تواند منفی باشد، داریم:

$$r=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8}$$

$$\frac{dr}{d\theta}=-\sin\theta+\frac{-2\cos\theta\sin\theta}{2\sqrt{\cos^2\theta+8}}=\frac{-\sin\theta\left(\sqrt{\cos^2\theta+8}+\cos\theta\right)}{\sqrt{\cos^2\theta+8}}$$

$$\frac{dr}{d\theta}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \sin\theta=0 \\ \sqrt{\cos^2+8}+\cos\theta=0 : \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

بنابراین اکسترمم های r به ازاء $\sin\theta=0$ اتفاق می‌افتد:

$$\theta=0 \quad\Rightarrow\quad r=1+\sqrt{1+8}=4$$

$$\theta=\pi \quad\Rightarrow\quad r=-1+\sqrt{1+8}=2$$

لذا، حداقل و حداکثر فاصله مبدأ تا منحنی مورد بحث به ترتیب $r_{min}=2$ و $r_{max}=4$ خواهد بود.

راه دوم:

می‌توانیم بنویسیم:

$$x^2+y^2-2x-8=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2+y^2=9$$

و روشن است که باید:

$$(x-1)^2\le 9 \quad\Rightarrow\quad -3\le x-1\le 3 \quad\Rightarrow\quad -2\le x\le 4$$

و می‌دانیم فاصله نقطه $A\Big|_{y}^{x}$ از مبدا مختصات برابر $d=\sqrt{x^2+y^2}$ است و ضمناً بر روی منحنی داریم:

$$x^2+y^2=2x+8$$

پس:

$$d=\sqrt{2x+8}$$

حال می‌توان نوشت:

$$-2\le x\le 4 \;\Rightarrow\; -4\le 2x\le 8 \;\Rightarrow\; 4\le 2x+8\le 16 \;\Rightarrow\; 2\le d=\sqrt{2x+8}\le 4$$

بنابراین:

$$d_{min}=2 \quad , \quad d_{max}=4$$

۲۹ ـ معادله $6x^4-7x+1=0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

۱) چهار ریشه حقیقی　　۲) دو ریشه حقیقی

۳) بیشتر از دو ریشه حقیقی　　۴) هیچ‌کدام

حل :

بدیهی است هدف یافتن تعداد نقاط تلاقی منحنی $f(x)=6x^4-7x+1$ با محور xها می‌باشد.

$$f'(x)=24x^3-7$$

اما داریم:

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=\sqrt[3]{\frac{7}{24}}$$

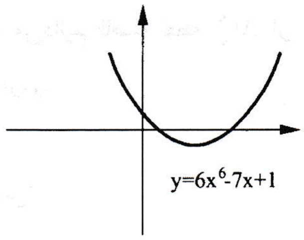
لذا، رفتار این تابع در جدول زیر ملاحظه می‌شود:

x	$-\infty$		$\sqrt[3]{\frac{7}{24}}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

حال کافی است مشخص شود که نقطه min نسبی در کجای صفحه مختصات واقع است.

می‌توان دید:

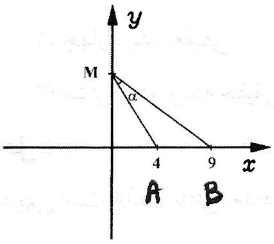
$$f\left(\sqrt[3]{\frac{7}{24}}\right)\approx -2.5$$



لذا با توجه به شکل ترسیم شده (که به‌صورت کیفی می‌باشد) مشخص می‌شود تعداد ریشه‌های حقیقی معادله مورد نظر دو تا می‌باشد.

تذکر: از آنجا که مجموع ضرایب $f(x)$ صفر است؛ یکی از ریشه‌های معادله، $x=1$ است و چون نمودار تابع f فقط دارای یک مینیمم نسبی است؛ نمودار کیفی آن قابل ترسیم است؛ پس معادله دارای دو ریشه حقیقی خواهد بود.

۳۰ـ در شکل زیر دو نقطه A و B به ترتیب با طول‌های 4 و 9 برروی محور افقی قرار دارند. y نقطه M چقدر باشد تا زاویه α حداکثر مقدار را داشته باشد؟



۱) 7.4

۲) 6.5

۳) 6

۴) 5.4

$$\begin{cases} m_{MB} = \dfrac{y_B - y_M}{x_B - x_M} = \dfrac{0-y}{9-0} = \dfrac{-y}{9} \\ m_{MA} = \dfrac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \dfrac{0-y}{4-0} = \dfrac{-y}{4} \end{cases} \rightarrow \quad \tan\alpha = \left|\dfrac{m_{MB} - m_{MA}}{1 + m_{MB} m_{MA}}\right|$$

$$= \frac{\frac{-y}{9} + \frac{y}{4}}{1 + \left(\frac{-y}{9}\right)\left(\frac{-y}{4}\right)} = \frac{\frac{5y}{36}}{1 + \frac{y^2}{36}} = \frac{5y}{36+y^2} \quad \rightarrow \alpha = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{5y}{36+y^2}\right)$$

برای آنکه α حداکثر باشد، باید:

$$\frac{d\alpha}{dy} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\left(\frac{5y}{36+y^2}\right)'}{1 + \left(\frac{5y}{36+y^2}\right)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{5\left(36+y^2\right) - (2y)(5y)}{\left(36+y^2\right)^2} = 0$$

$$\rightarrow \quad 180 - 5y^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{180}{5} = 36 \quad \rightarrow \quad y = \pm 6$$

۳۱ـ هرگاه $x^2y^3=e^5$ باشد؛ حداکثر $\ln x \ln y$ کدام است؟

۱) $\frac{25}{24}$ ۲) $\frac{24}{25}$ ۳) $\frac{25}{6}$ ۴) $\frac{6}{25}$

حل :

$$x^2y^3=e^5 \rightarrow \ln\left(x^2y^3\right)=\ln e^5 \rightarrow \ln x^2+\ln y^3=\ln e^5 \rightarrow 2\ln x+3\ln y=5$$

می‌دانیم وقتی مجموع دو عبارت مثبت، ثابت باشد، حاصل‌ضرب آنها وقتی حداکثر است که آن دو عبارت با هم مساوی باشند و به تغییری در این مساله اگر بخواهیم حداکثر $(2\ln x)(3\ln y)$ رخ دهد؛ باید: $2\ln x=3\ln y=\frac{5}{2}$ باشد و در این حالت داریم:

$$\max\left((2\ln x)(3\ln y)\right)=\frac{5}{2}.\frac{5}{2} \rightarrow \max(\ln x \ln y)=\frac{25}{24}$$

۳۲ـ حداقل تابع $f(x)=5^{\sin^2 x}+5^{\cos^2 x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $3\sqrt{5}$ ۴) $4\sqrt{5}$

حل :

می‌دانیم وقتی حاصل‌ضرب دو عبارت عددی ثابت است، مجموع آنها زمانی حداقل می‌شود که آن دو عبارت با هم مساوی باشند. در این مساله چون $5^{\sin^2 x}\ .\ 5^{\cos^2 x}=5$، حداقل $5^{\sin^2 x}+5^{\cos^2 x}$ زمانی رخ می‌دهد که:

$$5^{\sin^2 x}=5^{\cos^2 x} \rightarrow \sin^2 x=\cos^2 x \Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$$

و لذا $\min f=2\sqrt{5}$

۳۳ـ با طنابی به طول 1 متر، سه مربع یکسان و یک دایره ساخته‌ایم. اگر مجموع مساحت‌های این چهار شکل min مقدار ممکن باشد، شعاع دایره چیست؟

۱) $\frac{1}{2(\pi+12)}$ ۲) $\frac{1}{2(\pi+24)}$ ۳) $\frac{1}{2(\pi+36)}$ ۴) $\frac{1}{2(\pi+48)}$

حل :

اگر ضلع مربع را a و شعاع دایره را r بنامیم، مجموع محیط سه مربع و یک دایره مورد نظر باید طول طناب اصلی؛ یعنی، 1 متر باشد به تعبیری:

$$3(4a)+2\pi r=1 \rightarrow a=\frac{1-2\pi r}{12}$$

حال از آنجا که مجموع مساحت سه مربع و یک دایره مورد بحث $S=3\left(a^2\right)+\pi r^2$ می‌باشد، می‌توان گفت:

$$S(r)=3\left(\frac{1-2\pi r}{12}\right)^2+\pi r^2=\frac{3}{144}\left(1+4\pi^2 r^2-4\pi r\right)+\pi r^2$$

و برای اکسترمم شدن S باید:

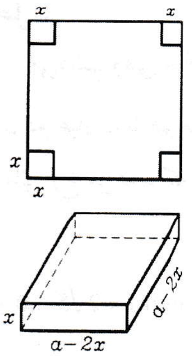
$$S'(r)=0 \rightarrow \frac{3}{144}\left(8\pi^2 r-4\pi\right)+2\pi r=0 \rightarrow \frac{1}{6}\pi^2 r-\frac{1}{12}\pi+2\pi r=0$$

$$\rightarrow 2\pi r-1+24r=0 \rightarrow r=\frac{1}{2\pi+24}$$

۳۴ ـ می‌خواهیم، با بریدن مربع‌های کوچکی از چهار گوشه یک ورق مربعی به ضلع a و سپس وصل لبه‌ها به هم یک جعبه مکعب مستطیل شکل در باز بسازیم، طول ضلع مربع‌های برشی را چقدر انتخاب کنیم که بزرگ‌ترین حجم، حاصل شود؟

۱) $\frac{a}{6}$ ۲) $\frac{a}{4}$ ۳) $\frac{a}{8}$ ۴) $\frac{a}{3}$

حل :



اگر ضلع مربع‌های برشی را x فرض کنیم، مطابق شکل، حجم مکعب حاصل چنین است:

$$V=(a-2x)^2.x$$

و برای max شدن V می‌نویسیم:

$$V'(x)=2(a-2x)(-2)x+(a-2x)^2(1)=0 \rightarrow$$
$$(a-2x)(-4x+a-2x)=0 \rightarrow (a-2x)(a-6x)=0$$

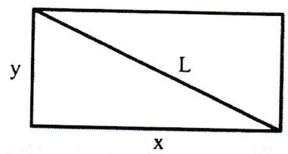
بدیهی است اگر $a-2x=0 \rightarrow x=\frac{a}{2}$ باشد، دیگر چیزی از صفحه باقی نمانده و به تعبیری حجم ساخته شده مینیمم و برابر صفر خواهد شد؛ لذا، باید:

$$a-6x=0 \Rightarrow x=\frac{a}{6}$$

۳۵ ـ طول مستطیلی 10 متر بوده و با سرعت 4 متر بر ثانیه زیاد می‌شود؛ عرض مستطیل 4 متر بوده و با سرعت 3 متر بر ثانیه کم می‌شود. قطر مستطیل با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

۱) $\frac{28}{\sqrt{116}}$ ۲) $\frac{52}{\sqrt{116}}$ ۳) $\frac{42}{\sqrt{116}}$ ۴) $\frac{46}{\sqrt{116}}$

حل :



$$\text{فرضیات}:\begin{cases} x=10\ ,\ \dfrac{dx}{dt}=4 \\ y=4\ ,\ \dfrac{dy}{dt}=-3 \end{cases}$$

$$\text{حکم}: \frac{dL}{dt}=?$$

می دانیم قطر مستطیل برابر $L=\sqrt{x^2+y^2}$ است؛ لذا، با مشتق‌گیری نسب به زمان از طرفین رابطه فوق به‌دست می‌آید:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{2x\dfrac{dx}{dt}+2y\dfrac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

در شرایط مورد نظر داریم:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{(10)(4)+(4)(-3)}{\sqrt{100+16}}=\frac{28}{\sqrt{116}}$$

۳۶ـ مثلث متساوی الاضلاعی را در نظر بگیرید که دایره‌ای بر آن محیط شده است. اگر اضلاع مثلث با سرعت $1\frac{m}{s}$ بزرگ شوند، در لحظه‌ای که ضلع مثلث $5\sqrt{3}$ متر می‌شود، مساحت دایره با چه سرعتی بزرگ می‌شود؟

۱) $10\pi\sqrt{3}$ ۲) $\frac{10\pi}{3}$ ۳) $5\pi\sqrt{3}$ ۴) $\frac{10\pi}{\sqrt{3}}$

حل :

توجه داریم که مساحت دایره محیطی نسبت به زمان تغییر می‌کند؛ پس، داریم:

$$S=\pi R^2 \Rightarrow \frac{dS}{dt}=\frac{d(\pi R^2)}{dR}\cdot\frac{dR}{dt}=2\pi R\cdot\frac{dR}{dt}$$

بنابراین باید بدانیم در زمانی که $a=5\sqrt{3}$ است، مقدار R و $\frac{dR}{dt}$ چقدر است؛ اما، می‌دانیم اگر طول ضلع مثلث متساوی الاضلاعی a باشد، شعاع دایره محیطی آن از رابطه $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$ به‌دست می‌آید؛ پس:

$$R=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 5\sqrt{3}=5$$

ضمناً، با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به زمان داریم:

$$\frac{dR}{dt}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{da}{dt}$$

چون $\frac{da}{dt}=1$ می‌باشد $\frac{dR}{dt}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ خواهد بود.

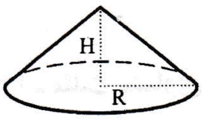
لذا:

$$\frac{dS}{dt}=2\pi(5)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{10\pi}{\sqrt{3}}\ \frac{m^2}{s}$$

۳۷ـ شنی که با سرعت $3\frac{m^3}{s}$ می ریزد، تلی مخروطی می‌سازد که شعاع آن همواره دو برابر ارتفاعش است، در لحظه‌ای که ارتفاع 10 m می‌شود، سرعت ازدیاد ارتفاع چند متر بر ثانیه است؟

۱) $\frac{3}{400\pi}$ ۲) $\frac{3}{500\pi}$ ۳) $\frac{7}{400\pi}$ ۴) $\frac{7}{500\pi}$

حل :



فرض: $R=2H$ و $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$

با توجه به فرض داریم:

$$V=\frac{\pi}{3}(2H)^2H=\frac{4\pi}{3}H^3 \rightarrow \frac{dV}{dt}=\frac{4\pi}{3}3H^2\frac{dH}{dt}=4\pi H^2\frac{dH}{dt}$$

چون $\frac{dV}{dt}=3\,{}^{m^3}\!/_{s}$ بوده و $H=10m$ شده، داریم:

$$3=4\pi(10)^2\frac{dH}{dt} \rightarrow \frac{dH}{dt}=\frac{3}{400\pi}\ {}^{m}\!/_{s}$$

۳۸ـ مساحت مستطیل و مساحت جانبی کره‌ای در هر لحظه با هم برابرند. اگر طول مستطیل با سرعت $\frac{3\pi}{10}$ در حال افزایش و عرض آن با سرعت $\frac{\pi}{20}$ در حال کاهش باشد، در لحظه‌ای که طول آن 2π و عرض آن π است، سرعت تغییرات حجم کره چقدر است؟

۱) $\frac{\pi^3}{20}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ۲) $\frac{\pi^3}{20}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ۳) $\frac{\pi^2}{20}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ۴) $\frac{\pi^2}{20}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

حل :

برای مستطیل داریم:

$$\begin{cases} x = 2\pi \ , \ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3\pi}{10} \\ y = 1\pi \ , \ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-\pi}{20} \end{cases}$$

$$S_1 = xy \ \rightarrow \ \frac{dS_1}{dt} = \frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt} = \left(\frac{3\pi}{10}\right)(1\pi) + (2\pi)\left(\frac{-\pi}{20}\right) = \frac{\pi^2}{5}$$

برای کره داریم:

$$S_2 = 4\pi r^2 \ \rightarrow \ \frac{dS_2}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}$$

$S_1 = S_2$ لذا، $\dfrac{dS_1}{dt} = \dfrac{dS_2}{dt}$ پس:

$$S_2 = S_1 \ \rightarrow \ 4\pi r^2 = xy \ \rightarrow \ 4\pi r^2 = (2\pi)(1\pi) \ \rightarrow \ r^2 = \frac{\pi}{2} \ \rightarrow \ r = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{dS_2}{dt} = \frac{dS_1}{dt} \ \rightarrow \ 8\pi r\frac{dr}{dt} = \frac{\pi^2}{5} \ \rightarrow \ 8\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{dr}{dt} = \frac{\pi^2}{5} \ \rightarrow \ \frac{dr}{dt} = \frac{\pi}{40}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

لذا، برای حجم کره داریم:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \ \rightarrow \ \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right) = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \ \rightarrow \ \frac{dV}{dt} = 4\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{40}\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi^3}{20}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

۳۹ـ اگر قضیه رول را برای تابع $g(x) = (f(x) - f(a))(x - b)$ در فاصله $[a,b]$ استفاده کنیم، نتیجه می‌شود $\exists c \in (a,b)$ به طوری که:

۱) $f'(c) = 0$ ‏ ۲) $f'(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$

۳) $f'(c) = \dfrac{f(a) - f(c)}{c - b}$ ‏ ۴) $f'(c) = \dfrac{f(a) - f(c)}{c - a}$

حل :

طبق قضیه رول برای تابع g انتظار داریم:

$$\exists c \in (a,b) \,|\, g'(c) = 0$$

اما از آنجا که

$$g(x) = (f(x) - f(a))(x - b) \ \rightarrow \ g'(x) = f'(x)(x - b) + (f(x) - f(a))(1)$$

پس باید c ای در فاصله (a,b) موجود باشد که:

$$g'(c)=0 \quad \to \quad f'(c)(c-b)+(f(c)-f(a))=0 \quad \to \quad f'(c)=\frac{f(a)-f(c)}{c-b}$$

۴۰ـ مقدار c قضیه لاگرانژ برای تابع $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ x^2-x+1 & 1<x\le 3\end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{10}{3}$

۳) فاقد شرایط قضیه لاگرانژ می‌باشد. ۴) 2

حل :

بدیهی است تنها نقطه کاندیدا برای عدم پیوستگی یا عدم‌مشتق پذیری تابع در فاصله $[0,3]$ نقطه $x=1$ است و چون:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \left(x^2-x+1\right)=1 \\ f(1)=(1)^2-(1)+1=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1^-)=(x)'\Big|_{x=1}=1 \\ f'(1^+)=\left(x^2-x+1\right)'\Big|_{x=1}=(2x-1)\Big|_{x=1}=1 \end{cases}$$

پس، تابع در فاصله $[0,3]$ شرایط قضیه لاگرانژ را دارد و داریم:

$$f(0)=0\ ,\ f(3)=9-3+1=7$$

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{7}{3}$$

حال باید:

$$\frac{7}{3}=f'(c)=\begin{cases}1 & 0<c\le 1 \\ 2c-1 & 1<c\le 3\end{cases} \xrightarrow{1<c<3} 2c-1=\frac{7}{3} \to 2c=\frac{10}{3} \to c=\frac{5}{3}$$

۴۱ـ اگر $0<a<b$ باشد، کدام گزینه زیر صحیح است؟

۱) $\frac{b-a}{2b}\le \ln\left(\frac{b}{a}\right)\le \frac{b-a}{2a}$ ۲) $\frac{b-a}{b}\le \ln\left(\frac{b}{a}\right)\le \frac{b-a}{a}$

۳) $\frac{b+a}{2b}\le \ln\left(\frac{b}{a}\right)\le \frac{b+a}{2a}$ ۴) $\frac{b+a}{b}\le \ln\left(\frac{b}{a}\right)\le \frac{b+a}{a}$

حل :

با استفاده از قضیه مقدار میانگین در مشتق برای $f(x)=\ln x$ در فاصله $[a,b]$ داریم:

$$\min f' \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \max f'$$

اما از آنجا که:

$$f(x)=\ln x \quad \to \quad f'(x)=\frac{1}{x}$$

و طبیعی است با توجه به شرط $0<a<b$ داریم:

$$\min f'=f'(b)=\frac{1}{b} \quad , \quad \max f'=f'(a)=\frac{1}{a}$$

لذا داریم:

$$\frac{1}{b} \le \frac{\ln b-\ln a}{b-a} \le \frac{1}{a} \quad \to \quad \frac{b-a}{b} \le \ln\left(\frac{b}{a}\right) \le \frac{b-a}{a}$$

۴۲ـ با توجه به قضیه لاگرانژ، حاصل $\frac{\sinh^{-1} x}{x}$ برای $0 \le x \le 1$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ ۲) $[1,\sqrt{2}]$ ۳) $[0,\sqrt{2}]$ ۴) $[0,1]$

حل :

با استفاده از نتیجه قضیه لاگرانژ برای تابع $f(x)=\sinh^{-1} x$ در فاصله $[0,x]$ داریم:

$$\min f' \le \frac{\sinh^{-1} x-\sinh^{-1} 0}{x-0} \le \max f'$$

اما، $f(x)=\sinh^{-1} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$؛ لذا، $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ و به سادگی می‌توان دید در فاصله $[0,x]$ که در آن $0 \le x \le 1$ می‌باشد، داریم:

$$\min f'=f'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \max f'=f'(0)=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

و می‌توان گفت:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{\sinh^{-1} x}{x} \le 1$$

۴۳ـ اگر $f'(x)=\cos^{10} x$ و $f(\pi)=1$ باشد، محدوده $f(0)$ کدام است؟

۱) $[1-\pi,0]$ ۲) $[-\pi,1]$ ۳) $[1-\pi,1]$ ۴) $[0,1]$

حل :

با استفاده از نتیجه قضیه مقدار میانگین در مشتق برای تابع f در بازه $[0 , \pi]$ داریم:

$$\min f'(x) \le \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi-0} \le \max f'(x)$$

اما بدیهی است مقادیر اکسترمم $f'(x)=\cos^{10} x$ در بازه $[0 , \pi]$ عبارتند از:

$$\max f' = f'(0) = f'(\pi) = 1 \quad , \quad \min f' = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

پس به‌دست می‌آید:

$$0 \le \frac{1-f(0)}{\pi} \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le 1-f(0) \le \pi \;\rightarrow\; -1 \le -f(0) \le \pi-1$$

$$\Rightarrow\; 1-\pi \le f(0) \le 1$$

۴۴ ـ معادله $x^8+x^6+x^2-1=0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

۱) صفر ۲) 4 ۳) 2 ۴) 8

حل :

تابع با ضابطه $f(x)=x^8+x^6+x^2-1$ همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x)=8x^7+6x^5+2x=2x\left(4x^6+3x^4+1\right)$$

و چون $4x^6+3x^4+1$ همواره مثبت است؛ معادله $f'(x)=0$ فقط دارای یک ریشه حقیقی است؛ لذا، طبق نتیجه قضیه لاگرانژ معادله $f(x)=0$ حداکثر می‌تواند دارای دو ریشه حقیقی باشد.

از طرفی ملاحظه می‌شود (طبق قضیه بولتزانو):

$$\begin{cases} f(10)>0 \\ f(0)<0 \end{cases} \rightarrow \exists c_1 \in (0,10) \,|\, f(c_1)=0$$

$$\begin{cases} f(-10)>0 \\ f(0)<0 \end{cases} \rightarrow \exists c_2 \in (-10,0) \,|\, f(c_2)=0$$

لذا، وجود حداقل دو ریشه حقیقی برای معادله $f(x)=0$ قطعی است و در کل گزینه سوم صحیح است.

۴۵ ـ مشتق مرتبه n ام تابع $y=\frac{1+x}{1-x}$ کدام است؟

۱) $\frac{2n!}{(1-x)^n}$ ۲) $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$ ۳) $\frac{n!}{(1-x)^n}$ ۴) $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

حل :

$$y=\frac{1+x}{1-x} \rightarrow y'=\frac{(1)(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}=2(1-x)^{-2}$$

$$\rightarrow y''=2(-2)(1-x)^{-3}(-1)=2\times2(1-x)^{-3}$$

$$\rightarrow y'''=2\times2(-3)(1-x)^{-4}(-1)==2\times3\times2(1-x)^{-4}$$

$$\rightarrow y^{(4)}=2\times3\times2\times(-4)(1-x)^{-5}(-1)=2.4.3.2(1-x)^{-5}$$

پس، می‌توان انتظار داشت:

$$y^{(n)}=2(n!).\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

تذکر: به کمک رابطه زیر که در درس بیان شد، پاسخ سؤال به سادگی قابل دستیابی است.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y^{(n)}=\frac{(ad-bc)\ n!(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$$

۴۶ـ سینوس زاویه بین خط مماس و شعاع حامل نقطه تماس بر منحنی قطبی $r=a^{\theta}$ که در آن a عددی ثابت است؛ کدام می‌باشد؟

۱) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$ ۲) $\sin\alpha=\frac{\ln a}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$

۳) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{1+\ln a}}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$ ۴) به زاویه θ بستگی دارد

حل :

$$r=a^{\theta} \rightarrow \frac{dr}{d\theta}=a^{\theta}\ln a \rightarrow \tan\alpha=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{a^{\theta}}{a^{\theta}\ln a}=\frac{1}{\ln a} \rightarrow \cot\alpha=\ln a$$

و از آنجا:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$$

۴۷ـ شیب خط مماس بر منحنی $r=\theta$ در $\theta=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi+3\sqrt{3}}{3-\pi\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{\pi+3\sqrt{3}}{3+\pi\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{\pi+\sqrt{3}}{3-\pi\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\pi+3\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

حل :

اگر β زاویه خط مماس با محور xها باشد داریم:

$$\tan\beta=\frac{r+r'\tan\theta}{-r\tan\theta+r'}$$

از آن‌جا که $r'=1$ → $r=\theta$ در $\theta=\frac{\pi}{3}$ به‌دست می‌آید:

$$\theta=\frac{\pi}{3} \quad , \quad r'=1 \quad , \quad \tan\theta=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$ ۳

$$\tan\beta=\frac{\frac{\pi}{3}+(1)\left(\sqrt{3}\right)}{-\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\sqrt{3}\right)+1}=\frac{\pi+3\sqrt{3}}{3-\pi\sqrt{3}}$$

۴۸ـ در محاسبه $\sin 61^\circ$ عدد $\frac{\sqrt{3}}{2}$ را منظور کرده‌ایم. خطای حاصل شده تقریباً چقدر است؟

۱) 0.0063 ۲) 0.0078 ۳) 0.0087 ۴) 0.0036

حل :

واضح است که: $f(x)=\sin x \to f'(x)=\cos x$

$$x_0=60^\circ \quad , \quad \Delta x=1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{rad}$$

پس، داریم:

$$f(x_0+\Delta x)\simeq f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \to$$

$$\sin 61^\circ\simeq\sin 60^\circ+\cos 60^\circ\times\frac{\pi}{180}\Rightarrow\sin 61^\circ\simeq\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{180}$$

پس خطای موجود در محاسبات حدوداً $\frac{\pi}{360}$؛ یعنی، 0.0087 است.

۴۹ـ برای تابع $y=f(x)$ اگر $y'=\frac{x}{5}+3y$ و $f(5)=1$ باشد؛ مقدار تقریبی $f\left(\frac{19}{4}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل :

از آنجا که $\frac{19}{4}=5-\frac{1}{4}$؛ با توجه به رابطه $f(x_0+\Delta x)\simeq f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x$ با انتخاب $\Delta x=-\frac{1}{4}$ و $x_0=5$ و با توجه به آنکه:

$$y'=\frac{x}{5}+3y \quad\Rightarrow\quad f'(5)=\frac{5}{5}+3f(5)=1+3(1)=4$$

به‌دست می‌آید:

$$f\left(\frac{19}{4}\right)\simeq f(5)+f'(5)\left(\frac{-1}{4}\right)=1+(4)\left(-\frac{1}{4}\right)=0$$

۵۰ـ در نقطه‌ای به طول $x=2\ln 2$ واقع بر منحنی $f(x)=1-e^{\frac{-x}{2}}$ مماس رسم کرده‌ایم، محل تقاطع این خط مماس و مجانب منحنی کدام است؟

۱) $x=2+\ln 2$ ۲) $x=2-\ln 2$ ۳) $x=2+2\ln 2$ ۴) $x=2-2\ln 2$

حل :

مجانب منحنی $y=f(x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{\frac{-x}{2}}\right)=1$$

برای محاسبه ضریب زاویه خط مماس در نقطه $x=2\ln 2$ می‌توان نوشت:

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}} \quad\Rightarrow\quad m=\frac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}(2\ln 2)}=\frac{1}{4}$$

عرض نقطه تماس عبارت است از:

$$y=1-e^{\frac{-2\ln 2}{2}}=\frac{1}{2}$$

بنابراین، معادله خط مماس مورد بحث به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-2\ln 2)$$

و طول محل تقاطع این خط و مجانب افقی منحنی که $y=1$ می‌باشد، از معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-2\ln 2) \quad\Rightarrow\quad x=2+2\ln 2$$

۵۱ـ راجع به تابع $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) نمودار تابع دارای هیچ مجانبی نبوده و در $x=e$ دارای ماکزیمم نسبی است.

۲) نمودار تابع دارای مجانب افقی $y=0$ بوده و در $x=e$ دارای مینیمم نسبی است.

۳) نمودار تابع دارای مجانب افقی $y=0$ و بوده و در $x=e\sqrt{e}$ دارای نقطه عطف است.

۴) گزینه‌های (۲) و (۳) هر دو صحیح هستند.

حل :

توجه داریم که دامنه تابع به‌صورت $D_f=R^+$ می‌باشد و داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

لذا، $y=0$ معادله مجانب افقی تابع است.

خط $x = 0$ نیز مجانب قائم نمودار تابع است؛ چرا که:

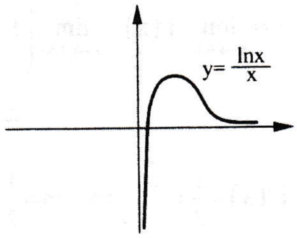
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 0^+}{0^+}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

از طرفی داریم:

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\quad,\quad f''(x)=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

لذا ملاحظه می‌شود:

x	0		e		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
y'		+	0	−		−	
y"		−		−	0	+	
y		↗ $\cap$		↘ $\cap$		↘ $\cup$	



یعنی، تابع در $x = e$ دارای یک ماکزیمم نسبی و در $x=e^{\frac{3}{2}}$ دارای نقطه عطف است؛ بنابراین، گزینه (۳) صحیح است.