

----- آنالیز ریاضی -----

۱- برای پیوستگی یکنواخت تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$

(۱) حوزه‌ی تعریف f می‌تواند تمام $\mathbb{R}$ باشد.

(۲) کافی است حوزه‌ی تعریف f کراندار باشد.

(۳) لازم است حوزه‌ی تعریف f فشرده باشد.

(۴) لازم است حوزه‌ی تعریف f بسته باشد.

۲- فرض کنید $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ چنان باشند که $f \circ g$ بر $\mathbb{R}$ تعریف شده و پیوسته باشد. در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(۱) نقطه‌ای مانند a هست که f در a و g در $f(a)$ پیوسته است.

(۲) ممکن است f و g در هیچ نقطه‌ای پیوسته نباشند.

(۳) اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ آنگاه f در $g(a)$ دارای حد است.

(۴) اگر f در $g(a)$ پیوسته باشد، g نیز در a پیوسته است.

۳- فرض کنید f بر $[a, b]$ تابعی حقیقی و f' بر (a, b) کراندار باشد. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ وجود دارد.

(۲) f بر $[a, b]$ پیوسته‌ی یکنواخت است ولی مشتق f در a و b وجود ندارد.

(۳) f بر $[a, b]$ مشتق‌پذیر است.

(۴) f ماکزیمم و مینیمم خود را در $[a, b]$ می‌گیرد.

۴- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{|x|-1}; & x \neq 1 \\ 0; & x = 1 \end{cases}$ در این صورت این تابع:

(۱) فقط در $x = -1$ ناپیوسته‌ی حذف شدنی است.

(۲) در نقاط $x = 1$ و $x = -1$ ناپیوسته‌ی حذف شدنی است.

(۳) در نقاط $x = 1$ و $x = -1$ ناپیوسته‌ی حذف شدنی نیست.

(۴) فقط در $x = 1$ ناپیوسته‌ی حذف شدنی است.

۵- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ مشتق‌پذیر و تابع g با ضابطه‌ی $g(x) = \frac{f(x)}{x^2+1}$ نزولی باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) g در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

(۲) f در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ نزولی است.

(۳) f صعودی است.

(۴) g صعودی و f یک چندجمله‌ای از درجه‌ی بزرگتر از ۳ است.

۶- فرض کنید تابع f بر بازه‌ی $(-1, 1)$ پیوسته و بر $(0, 1) \cup (-1, 0)$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

(۱) ممکن است $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ موجود باشد ولی $f'(0)$ موجود نباشد.

(۲) اگر $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = A$ ، آنگاه $f'(0) = A$.

(۳) اگر $f'(0) = A$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = A$.

(۴) $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ وجود ندارد.

۷- کدام گزینه یک شرط کافی برای پیوستگی یکنواخت تابع مشتق‌پذیر f بر بازه‌ی $(a, +\infty)$ است؟

(۱) $f(a^+)$ موجود و b ای بزرگتر از a موجود باشد که f' بر $[b, +\infty)$ نزولی و مثبت باشد.

(۲) f' بر $(a, +\infty)$ نزولی و مثبت باشد.

(۳) حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ موجود باشد.

(۴) $f(a^+)$ موجود و f' بر $(a, +\infty)$ یکنوا باشد.

۸- فرض کنید X و Y دو فضای متریک باشند و $f: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد. کدام گزینه پیوستگی تابع f را نتیجه نمی‌دهد؟

(۱) تصویر وارون هر مجموعه‌ی فشرده در Y ، در X فشرده است.

(۲) برای هر دنباله کوشی $\{x_n\}$ در X ، دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ در Y کوشی است.

(۳) تصویر وارون هر مجموعه‌ی بسته در Y ، در X فشرده است.

(۴) برای هر دنباله همگرای $\{x_n\}$ در X دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ در Y همگراست.

۹- کدام یک از توابع زیر بر $(0, \infty)$ پیوسته‌ی یکنواخت است؟

(۱) e^x

(۲) $x \ln x$

(۳) $x \sin \frac{1}{x}$

(۴) $x \sin x$

۱۰- فرض کنیم تابع غیر ثابت $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، f و f' صفر مشترک نداشته باشند و مجموعه‌ی صفرهای f' ناتهی باشد. در این صورت مجموعه‌ی صفرهای تابع f :

- (۱) تهی است.
- (۲) ناشماراست.
- (۳) متناهی است.
- (۴) شمارای نامتناهی است.

۱۱- اگر توابع f و g هر دو در a مشتق پذیر باشند و قرار دهیم $h = \min\{f, g\}$ ، آنگاه:

- (۱) اگر $f(a) = g(a)$ ، آنگاه h در a مشتق پذیر است.
- (۲) اگر $f(a) \neq g(a)$ ، آنگاه h در a مشتق پذیر است.
- (۳) اگر $f'(a) \neq g'(a)$ ، آنگاه h در a مشتق پذیر است.
- (۴) اگر h در a مشتق پذیر باشد، $f(a) \neq g(a)$.

۱۲- اگر $f: (a, b) \rightarrow [c, d]$ مشتق پذیر و پوشا باشد، آنگاه کدام گزینه لزوماً درست است؟

- (۱) f' حداکثر یک ریشه دارد.
- (۲) f' حداقل دو ریشه دارد.
- (۳) f' ریشه ندارد.
- (۴) f' دقیقاً دو ریشه دارد.

۱۳- توابع حقیقی و کراندار f و α روی بازه‌ی $[a, b]$ مفروض‌اند به‌طوری که α است. در کدام حالت انتگرال ریمان- اشتیلیس f نسبت به α همواره موجود نیست؟

- (۱) α در یک نقطه ناپیوسته باشد.
- (۲) f و α هر دو در یک نقطه از راست ناپیوسته باشند.
- (۳) f در یک نقطه ناپیوسته باشد.
- (۴) f و α هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند.

۱۴- اگر به‌ازای هر $x \geq 0$ ،

$$f(x) = \int_0^x (1+t^3)^{-\frac{1}{3}} dt$$

و g وارون f باشد، در این صورت $g''(x)$ برابر است با:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (۱) $\frac{2}{3}g(x)$ | (۲) $\frac{2}{3}g(x)$ |
| (۳) $\frac{2}{3}(g(x))^2$ | (۴) $\frac{2}{3}(g(x))^2$ |

۱۵- همهی توابع زیر در $[0, 1]$ ریمان-انتگرال پذیر هستند، به جز:

$$(۱) \quad f(x) = [x] \quad (۲) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$(۳) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (۴) \quad f(x) = \begin{cases} 4 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 3-x & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1] \end{cases}$$

----- جبر خطی -----

۱۶- فرض کنید $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی بر فضاهای برداری با بعد متناهی باشد، $\dim V = 6$ ، $\dim W = 4$ و بعد هسته‌ی T برابر ۲ باشد. در این صورت:

(۱) T خودتوان است.

(۲) رتبه‌ی T برابر ۳ است.

(۳) T پوشاست.

(۴) $\dim(T(V)) = 2$

۱۷- فرض کنید T عملگری خطی روی فضای برداری ماتریس‌های حقیقی 3×3 با ضابطه‌ی $T(B) = B - B^t$ باشد. در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱) $\ker T \cong \mathbb{R}^3$ و $\text{Im } T \cong \mathbb{R}^6$

(۲) $\ker T \cong \mathbb{R}^7$ و $\text{Im } T \cong \mathbb{R}^4$

(۳) $\ker T \cong \mathbb{R}^6$ و $\text{Im } T \cong \mathbb{R}^3$

(۴) $\ker T \cong \mathbb{R}^4$ و $\text{Im } T \cong \mathbb{R}^7$

۱۸- فرض کنید $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ تبدیلی خطی با ضابطه‌ی $T(x, y) = (x - y, 3y + 2x)$ باشد. در این صورت $\text{tr}(T^2)$ برابر است با:

(۱) -۶

(۲) ۱

(۳) ۴

(۴) ۶

۱۹- فرض کنید V یک فضای برداری ۵ بعدی روی میدان F و W زیرفضایی ۲ بعدی از V باشد. اگر $S = \{T: V \rightarrow V | T(W) = 0\}$ زیرفضایی از $L(V, V)$ باشد، آنگاه بعد S برابر است با:

(۱) ۲۱

(۲) ۷

(۳) ۱۰

(۴) ۱۵

۲۰- فضای برداری با بعد ۲ روی میدانی ۳ عضوی فرض می‌شود. تعداد تبدیلات خطی وارون‌پذیر از V به V برابر است با:

- (۱) ۹ (۲) ۴۸ (۳) ۲۴ (۴) ۸

۲۱- ماتریس تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $T(x, y) = (2x + y, y - x)$ نسبت به پایه‌ی مرتب $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
(۳) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

۲۲- فرض کنید $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ یک عملگر خطی است و در پایه استاندارد $\{(1, 0), (0, 1)\}$ نمایش آن به صورت $\begin{bmatrix} 2+2i & 2-2i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$ است. نمایش T نسبت به پایه‌ی $\{(1, -i), (i, -1)\}$ به چه صورت است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 2+3i & -1 \\ 2i-1 & i \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -1 & 2+3i \\ i & 2i-1 \end{bmatrix}$
(۳) $\begin{bmatrix} i & 2i-1 \\ -1 & 2+3i \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2i-1 & i \\ 2+3i & -1 \end{bmatrix}$

۲۳- فرض کنید W یک زیرفضای سره ناصفر فضای برداری V ، و T عملگری خطی بر V باشد که به ازای هر $\alpha \in V$ که $\alpha \notin W$ ، $T(\alpha) = 0$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

- (۱) T پوچ توان نیست.
(۲) $T = 0$.
(۳) T خودتوان است ولی لزوماً عملگر صفر نیست.
(۴) $T + I$ خودتوان غیرهمانی است.

۲۴- فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $\text{Im}(T) = \text{Im}(T^2)$ اگر و تنها اگر $V = \text{Im}(T) \oplus \ker(T)$
(۲) $\dim V = \text{rank}(T) + \dim \ker(T)$
(۳) $\text{Im}(T) = \text{Im}(T^2)$
(۴) $\ker(T) \subseteq \ker(T^2)$

۲۵- اگر V فضای تمام توابع انتگرال پذیر $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ ، f و W فضای تمام توابع پیوسته $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ باشد، در مورد تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ با ضابطه $T(f(x)) = \int_a^x f(t) dt$ کدام گزینه درست است؟

(۱) T پوشاست (۲) T یک به یک است. (۳) $T^2 = T$ (۴) $T^2 = I$

۲۶- برد کدام یک از تبدیلات خطی زیر از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}^3$ توسط بردارهای $(1, 0, -1)$ و $(1, 2, 2)$ تولید می شود؟

$$(1) T(x, y, z) = (x, 2y, 2z)$$

$$(2) T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + 2z, -x + 2y + 2z)$$

$$(3) T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2z, -x + 2y + 2z)$$

$$(4) T(x, y, z) = (x, 0, -2z)$$

۲۷- اگر A ماتریسی 10×10 باشد، به طوری که تمام عناصر روی قطر اصلی آن ۳ و بقیه درایه هایش ۲ باشد، در این صورت دترمینان ماتریس A چقدر است؟

$$(1) 8$$

$$(2) 9$$

$$(3) 15$$

$$(4) 21$$

۲۸- اگر f یک تابع خطی روی $\mathbb{R}^{10}$ باشد، بعد هسته ی T کدام گزینه می تواند باشد؟

$$(1) 0 \quad (2) 10 \quad (3) 9 \text{ یا } 10 \quad (4) 8 \text{ یا } 9$$

۲۹- حاصل دترمینان زیر کدام است؟

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

$$(1) x^2 z \quad (2) xz \quad (3) xz^2 \quad (4) x^2 z^2$$

۳۰- اگر A یک ماتریس $n \times n$ حقیقی باشد، در مورد $\text{rank}(\text{adj } A)$ کدام گزینه درست است؟

(۱) همواره برابر با صفر یا n است.

(۲) همواره برابر با صفر یا یک یا n است.

(۳) همواره از یک بزرگتر و از n کوچکتر است.

(۴) اگر $\det A$ برابر با صفر باشد، آنگاه $\text{rank}(\text{adj } A) = 0$.

۳۱- فرض کنید $p(x)$ چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ و $x_2 = 3$ باشد و $p(2) = 5$. اگر $(x_3, f(x_3)) = (2, 3)$ به جدول درونیابی اضافه شود، مقدار $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۱

۳۲- اگر $L_i(x)$ چندجمله‌ای لاگرانژ i ام در نقاط x_0, x_1, x_2, x_3 باشد، حاصل $\sum_{i=0}^3 L_i(0)x_i$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\sum_{i=0}^3 x_i$ (۳) ۱ (۴) $x_0 - x_1 + x_2 - x_3$

۳۳- فرض کنید $f(x) = e^{3x}$. اگر $x_0 = 0$ و نقاط $x_1, \dots, x_n$ متساوی‌فاصله باشند و برای هر $0 \leq i \leq n$ داشته باشیم $x_{i+1} - x_i = h$ ، مقدار $\Delta^n f(0)$ کدام است؟

- (۱) $(e^{3h} + 1)^n e^{3x}$ (۲) $(e^{3h} - 1)^n$ (۳) $(e^{3h} - 1)^{n-1} e^h$ (۴) $(e^{3h} - 1)^n e^{3x}$

۳۴- تابع اسپلین $S_1(x)$ از درجه‌ی ۳ در بازه‌ی $0 \leq x \leq 1$ عبارتست از $S_1(x) = x^3 + x^2$. اگر $S_2(x)$ درونیاب اسپلین درجه‌ی ۳ در بازه‌ی $1 \leq x \leq 2$ باشد، آنگاه $S_2(x)$ برابر است با:

- (۱) $x^3 - x^2 + 3x - 1$ (۲) $2x^3 - x^2 + 3x - 1$ (۳) $2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ (۴) $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

۳۵- تخمین $f(x) = \ln x$ در بازه‌ی $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ با توابع تکه‌ای خطی مدنظر است. تعداد زیربازه‌های مساوی در این بازه حداقل چقدر باشد تا کران بالای خطای برشی تخمین‌ها در این بازه کمتر از $10^{-4} \times 2$ باشد؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۰ (۴) ۵

۳۶- درجه‌ی چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر کدام است؟

x_i	-۱	۰	۱	۲	۳
$f(x_i)$	-۱	-۲	-۱	۲	۷

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۳۷- خطای تقریب $f'(x_i)$ توسط $\frac{1}{h}(\Delta f_i - \frac{1}{4}\Delta^2 f_i)$ در کدام گزینه آمده است؟

$O(h^4)$ (۱)

$O(h^2)$ (۲)

$O(h^3)$ (۳)

$O(h)$ (۴)

۳۸- کدام گزینه با گزینه‌های دیگر برابر نیست؟

$(\nabla\Delta)f_i$ (۱)

$(\nabla - \Delta)f_i$ (۲)

$(\delta^2)f_i$ (۳)

$(\Delta\nabla)f_i$ (۴)

۳۹- فرض کنید $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی N است، $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ و $k > N$. در این صورت مقدار $f[x_0, \dots, x_k]$ کدام است؟

صفر (۱)

$\frac{1}{k!}$ (۲)

$k!$ (۳)

(۴) صفر است اگر و تنها اگر $x_0 = x_k$

۴۰- از تابع f اطلاعات زیر را داریم. مقدار تقریبی $f''(1)$ کدام است؟

x_i	۱	۱/۱	۱/۲
$f(x_i)$	۷/۱۹	۸/۴۶	۹/۸۵

۱۰ (۲)

۹ (۱)

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۴۱- فرض کنید $f'(x) \approx \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(1/5)$. به ازای کدام مقادیر α_1 و α_2 این فرمول برای چندجمله‌ای‌های با حداکثر درجه، دقیق می‌باشد؟

$\alpha_2 = 2$ و $\alpha_1 = -2$ (۱)

$\alpha_2 = 3$ و $\alpha_1 = -1$ (۲)

$\alpha_2 = -2$ و $\alpha_1 = 2$ (۳)

$\alpha_2 = -1$ و $\alpha_1 = 3$ (۴)

۴۲- برای تابع جدولی زیر، مقدار تقریبی $f(-\frac{3}{4})$ با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب درجه دوم کدام است؟

x_i	-۲	-۱	۰	۱
$f(x_i)$	۱	۰	۲	-۱

$\frac{1}{8}$ (۱)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{3}{8}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۴)

۴۳- در رابطه‌ی زیر گزینه‌ی صحیح برای نقطه‌چین کدام است؟

$$\frac{f\left(x + \frac{h}{4}\right) - 2f(x) + f\left(x - \frac{h}{4}\right)}{\left(\frac{h}{4}\right)^2} + O(h^2) = \dots$$

$f''(x + h)$ (۲)

$f'(x + h)$ (۴)

$f'(x)$ (۱)

$f''(x)$ (۳)

۴۴- فرض کنید $L_i(x)$ ها چندجمله‌ای‌های لاگرانژ در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ باشند. در این صورت حاصل $\sum_{i=0}^n x_i^{n+1} L_i(0)$ برابر با کدام گزینه است؟

$\sum_{i=0}^n x_i$ (۲)

$\frac{\prod_{i=0}^n x_i}{\sum_{i=0}^n x_i}$ (۴)

$(-1)^n \prod_{i=0}^n x_i$ (۱)

$\sum_{0 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ (۳)

۴۵- تابع $\cos x$ را با چه اندازه‌ی گام h باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درونیابی خطی نایب‌تر از $10^{-4} \times \frac{1}{4}$ شود؟

۰٫۰۴ (۴)

۰٫۰۲ (۳)

۰٫۰۱۵ (۲)

۰٫۰۱ (۱)

----- پایان -----