

www.sakoye10hom.blog.ir

www.sakoye10hom.blog.ir

ریاضی (۱)

سال اول دوره متوسطه دوم

فرهاد صمدی

۱۳۹۵

ریاضی ۱ دوره متوسطه دوم

فرهاد صمدی

تابستان ۹۵

فهرست مطالب

۱	مجموعه ها و دنباله ها
۵	۱.۱ مجموعه ها
۵	۱.۱.۱ مجموعه های اعداد
۹	۲.۱.۱ بازه های اعداد حقیقی
۱۱	۳.۱.۱ مجموعه های متناهی و نامتناهی
۱۴	۲.۱ متمم یک مجموعه
۱۴	۱.۲.۱ مجموعه مرجع
۱۶	۲.۲.۱ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه
۱۸	۳.۱ الگو و دنباله
۱۸	۱.۳.۱ الگو
۲۰	۲.۳.۱ دنباله ها
۲۲	۳.۳.۱ دنباله حسابی
۲۵	۴.۳.۱ دنباله هندسی
۳۱	۴.۱ تست های فصل اول
۳۹	۵.۱ کلید تست های فصل اول
۴۰	۲ مثلثات
۴۱	۱.۲ نسبت های مثلثاتی
۴۸	۲.۲ دایره مثلثاتی
۵۲	۳.۲ روابط بین نسبت های مثلثاتی
۵۵	۴.۲ تست های فصل دوم
۶۱	۵.۲ کلید تست های فصل دوم
۶۲	۳ توان های گویا و عبارات جبری
۶۲	۱.۳ ریشه و توان اعداد حقیقی

۶۹	توان‌های گویا	۲.۳
۷۲	عبارت‌های جبری	۳.۳
۸۰	تست‌های فصل سوم	۴.۳
۸۶	کلید تست‌های فصل سوم	۵.۳
۸۷		۴
۸۷		معادلات و نامعادلات
۹۲	معادله درجه دوم و روش‌های حل آن	۱.۴
۹۶	سهمی‌ها	۲.۴
۹۷	تعیین علامت چندجمله‌ایها	۳.۴
۹۸	۱.۳.۴ تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول	۱.۳.۴
۱۰۲	۲.۳.۴ تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم	۲.۳.۴
۱۰۴	۴.۴ نامعادله	۴.۴
۱۰۷	۵.۴ قدرمطلق و معادلات و نامعادلات قدرمطلقی	۵.۴
۱۱۳	۶.۴ تست‌های فصل چهارم	۶.۴
۱۱۴	۷.۴ کلید تست‌های فصل چهارم	۷.۴
۱۱۴		۵
۱۱۴		تابع
۱۱۸	۱.۵ مفهوم تابع و روش‌های نمایش آن	۱.۵
۱۲۲	۲.۵ دامنه و برد توابع	۲.۵
۱۲۶	۳.۵ انواع توابع	۳.۵
۱۳۵	۴.۵ ترسیم با انتقال	۴.۵
۱۴۷	۵.۵ تست‌های فصل پنجم	۵.۵
۱۴۸	۶.۵ کلید تست‌های فصل پنجم	۶.۵
۱۴۸		۶
۱۴۸		آنالیز ترکیبی
۱۵۲	۱.۶ اصل ضرب و جمع	۱.۶
۱۵۶	۲.۶ جایگشت	۲.۶
۱۶۰	۳.۶ ترکیب	۳.۶
۱۶۸	۴.۶ تست‌های فصل ششم	۴.۶
۱۶۹	۵.۶ کلید تست‌های فصل ششم	۵.۶
۱۶۹		۷
۱۶۹		آمار و احتمال
۱۷۶	۱.۷ احتمال و اندازه‌گیری شانس	۱.۷

۱۷۹	۳.۷ متغیر و انواع آن
۱۸۲	۴.۷ تست‌های فصل هفتم
۱۸۸	۵.۷ کلید تست‌های فصل هفتم

مقدمه

مجموعه حاضر تحت عنوان ریاضی دهم رشته ریاضی و تجربی برای دانشآموزان سال دهم (سال اول متوسطه دوم) نگاشته شده است. برای اولین بار از LATEX استفاده کرده‌ام و از نوع آرایش صفحه و نحوه فرمول نویسی در قیاس با سایر کتابها و حتی کتاب درسی متوجه برتری LATEX خواهید شد. در بسیاری از موارد از متن کتاب یا شکل‌های کتاب و حتی مثال‌های کتاب استفاده شده است چراکه هدف نوشتن کتابی بود که مطالب کتاب درسی را پوشش دهد و در عین حال شامل مطالب بیشتری برای پوشش سرفصل‌های کتاب درسی باشد. تعداد تمرینات بطور چشمگیری زیاد است (نسبت به کتاب درسی) و باید تاکید کنم که شرط تسلط نسبی بر ریاضی حل تمرین است. تمرین‌ها گاهیک محاسبه سرراست و تکراری از مثال‌های در متن هستند و گاهی هم کاملاً متفاوت. وسوس زیادی برای انتخاب مثال‌ها و تمرین‌ها داشته‌ام تا بتوانم آنچه را که در ذهن به عنوان هدف آن درس دارم به تمام و کمال اجرا کنم. پس فراموش نکنید که تمرین‌ها ادامه درس هستند و باید تا آنجا که می‌توانید در جهت حل آنها اقدام کنید. چنانچه به مشکلی برخورد کردید می‌توانید با دوستان در کلاس درس مسئله را با هم فکری حل کنید و نهایتاً اگر مسئله‌ای خیلی مشکل بود و با هم فکری هم حل نشد بnde همواره پاسخگوی شما هستم: (فکر کنم تعداد چنین مسائلی به تعداد انگشتان یک دست هم نرسد). در پایان هر فصل سوالات آزمون سراسری را با کلید آن قرار داده‌ام تا در تست زدن نیز مهارت خود را افزایش دهید، اگرچه به باور بnde آموزش صحیح را باید بدون تست انجام داد. امیدوارم تدریس کتاب حاضر آنچنان که در ذهن پرورانده‌ام برای شما عزیزان مفید باشد.

فرهاد صمدی

تابستان ۹۵

فصل ۱

مجموعه ها و دنباله ها

۱.۱ مجموعه ها

۱.۱.۱ مجموعه های اعداد

در این بخش ابتدا مجموعه‌ی اعدادی را که تابحال شناخته‌اید و نحوه پیدایش آنها را بررسی کرده و سپس مجموعه‌ها را در حالت کلی بررسی می‌کنیم و عملیات‌هایی چون اجتماع، اشتراک و تقاضا را بر آنها تعریف خواهیم کرد. تاریخچه‌ی دقیقی از نحوه شکل‌گیری و تکامل اعداد در دسترس نیست. از آثار بجای مانده از گذشتگان تنها می‌توان حدس زد که چگونه از شمارش در کارهای روزمره‌ی خود استفاده می‌کرده‌اند. خطوط موازی کوچک بر استخوان ران یک گاو که در کنگو در قاره‌ی آفریقا یافت شده است متعلق به حدود ۸۰۰۰ سال پیش است. آنها برای شمارش به ازای هر واحد شمارش (مثلًا شمارش فرزندان یا گوسفندان یا افراد قبیله و ...) یک خط بر استخوان یا چوب حک می‌کرده‌اند. گاهی نیز از سنگریزه برای شمارش استفاده کرده‌اند. شاید ابتدایی ترین راه شمارش استفاده از انگشتان دست باشد. در دسترس بودن انگشتان و خم کردن یک انگشت به ازای شمارش یک چیز کار ساده‌ایست و دلیل استفاده بشر از مبنای ۵ و ۱۰ به همین علت است. حتی مبنای ۲۰ هم در میان قوم مایاها در آمریکای جنوبی رواج داشته و یادآور دورانی است که بشر پا بر همه بوده است. در این دستگاه هر مرد معادل عدد ۲۰ بوده است. (چرا؟) ابتدایی ترین مجموعه مورد استفاده بشر همانطور که می‌دانید مجموعه اعداد طبیعی بوده است. مجموعه اعداد طبیعی بصورت زیر است:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

لازم است خاصیتی جالب را در مورد مجموعه \mathbb{N} معرفی کنیم. چنانچه دو عدد دلخواه از اعداد طبیعی را با هم جمع کنیم حاصل باز هم عدد طبیعی است بعنوان مثال: $1 + 3 = 4 \in \mathbb{N}$ در حالت کلی اگر a, b دو عدد طبیعی باشند واضح است که $a + b$ نیز عددی طبیعی است. این خاصیت را اصطلاحاً بسته بودن \mathbb{N} نسبت به عمل $+$ می‌نامیم.

مثال ۱.۱. آیا مجموعه \mathbb{N} نسبت به عمل ضرب بسته است؟ نسبت به عمل تفریق چطور؟ نسبت به عمل تقسیم چطور؟

تمرین ۱.۱. مجموعه $\{A \mid n \in \mathbb{N}^2\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید این مجموعه نسبت به ضرب بسته است نسبت به جمع چطور؟ نسبت به تقسیم چطور؟

تمرین ۲.۱. مجموعه $\{-1, 0, 1\} = B$ را در نظر بگیرید. آیا این مجموعه نسبت به جمع بسته است؟ نسبت به ضرب چطور؟

تمرین ۳.۱. فرض کنید مجموعه ای چون A داریم بطوریکه می دانیم این مجموعه نسبت به اعمال جمع و تفریق بسته است و شامل عدد یک نیز هست. ثابت کنید که این مجموعه A همان مجموعه اعداد صحیح است. حال با توجه به تعریف بسته بودن می توان متوجه ضعف مجموعه اعداد طبیعی شد. \mathbb{N} نسبت به تفریق بسته نیست. این بزرگترین ضعف \mathbb{N} است. زمانی که بشر برای معاملات خود متوجه شد که مفروض بودن را نمی توان با اعداد طبیعی نمایش داد خلاصه اعداد صحیح را حس کرد و مجبور شد اعداد صحیح را بکار بگیرد.

تعریف ۱.۱. مجموعه اعداد صحیح را که با نماد \mathbb{Z} نشان می دهیم عبارتست از :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

اینکه اعداد صحیح را با حرف \mathbb{Z} نمایش می دهند به خاطر کلمه *Zahlen* می باشد که لغتی آلمانی است. اعداد صحیح نیز به نوبه‌ی خود دارای ضعف بسته نبودن نسبت به عمل تقسیم بود به عنوان مثال دقت کنید که :

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 \notin \mathbb{Z}$$

برای برطرف کردن این ضعف \mathbb{Z} مجموعه ای مورد نیاز بود که شامل تمام کسرهای ممکن که می توان به کمک اعداد صحیح ساخت باشد. این مجموعه را اعداد گویا می نامیم و بصورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۲.۱. مجموعه اعداد گویا را که با نماد \mathbb{Q} نشان می دهیم (Q حرف اول کلمه *Quotient* به معنای خارج قسť) بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

مجموعه اعداد گویا کوچکترین مجموعه ای است که نسبت به هر چهار عمل اصلی $\div, \times, -, +$ بسته است. با این حال همین مجموعه هم بی نقص نیست. در واقع پیروان مکتب فیثاغورثیان معروف بودند اولین بار به این حقیقت نگران کننده پی بردنده که قطر مربعی به ضلع ۱ را نمی توان بصورت کسر نوشت. فیثاغورثیان که ایمان کامل به اعداد گویا داشتند و آنرا بی عیب و نقص می پنداشتند از این کشف نگران شدند و تا سالها آن را پنهان نگاه داشته بودند و حتی داستانی نقل کرده اند که دو تن از پیروان این مکتب در یک کشتی عازم سفر بودند و یکی از آنها دیگری را از این راز مهم آگاه کرد و گفت پس از سفر آن را با دیگران در میان خواهم گذاشت. همین امر باعث شد تا دوستش او را به دریا پرتاپ کند.

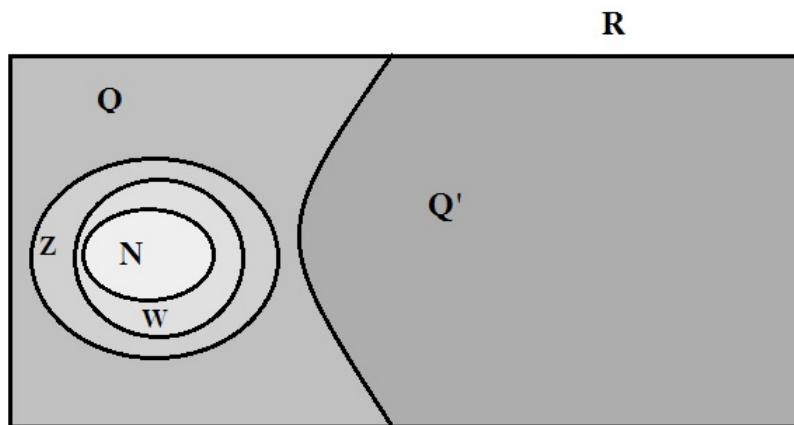
اکنون می‌دانیم که قطر مربعی به ضلع یک عددی غیر‌گویا یا اصم است. این عدد عددی نیست جز $\sqrt{2}$. می‌توان ثابت کرد که $\sqrt{2}$ را نمی‌توان بصورت یک کسر نوشت بعارت بهتر به ازای هر دو عدد صحیح دلخواه a, b همواره داریم: $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$

تمرین ۴.۱. اگرچه هنوز ابزار لازم برای اثبات گنگ بودن $\sqrt{2}$ را در اختیار ندارید اما تلاش برای اثبات آن خالی از لطف نیست. برای اینکه ثابت کنید $\sqrt{2}$ گنگ است ثابت کنید $\sqrt{2}$ گویا نیست. بدین منظور تصور کنید که اگر $\sqrt{2}$ بخواهد گویا باشد پس باید داشته باشیم: $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ و فرض کنید که کسر حاصل تحویل ناپذیر است (کسری که صورت و مخرج آن دیگر ساده نشود). با به توان ۲ رساندن طرفین و استفاده از خاصیت زوج بودن به عبارتی برسید که با فرض سازگار نیست. (این روش اثبات غیرمستقیم یا همان برهان خلف نام دارد).

مجموعه اعداد گنگ را با نماد \mathbb{Q}' نشان می‌دهیم. یکی دیگر از اعداد گنگی، که قدمت زیادی دارد عدد π است. نسبت محیط دایره به قطر آن عدد π است. داستان پیدایش عدد پی با مسئله تربیع دایره در ارتباط تنگاتنگ است. برای آشنایی با تربیع دایره می‌توانید همین «تربیع دایره» را در گوگل جستجو کنید. محاسبه مقدار تقریبی عدد پی نیز داستان جالبی دارد. چنانچه علاقمند هستید می‌توانید به کتاب تاریخ ریاضیات نوشته هاوارد ایوز صفحه ۱۱۵ مراجعه کنید. (نسخه pdf این کتاب دو جلدی در سایت کتابناک موجود و رایگان است). در اینجا بد نیست به تقریبی از عدد پی اشاره کنیم که توسط غیاث الدین جمشید کاشانی منجم و ریاضی دان دربار الغ بیگ بدست آمده است. وی توانست عدد پی را تا شانزده رقم اعشار بدرستی تقریب کند. این رکورد تا حدود دویست سال پابرجا بود تا سرانجام در سال ۱۶۱۰ میلادی توسط لودولف وان کولن ریاضی دان اهل آلمان شکسته شد. وی عدد پی را تا ۳۵ رقم تقریب کرد. الغ بیگ گورکانی نوه تیمور گورکانی و پسر شاهrix گورکانی بود. وی بر خلاف پدربرزگش که یک خونریز تمام عیار بود، به هنر و دانش اهتمام ویژه‌ای داشت. وی حتی در نجوم تبحر داشت و کمی هم اطلاعات ریاضی نزد جمشید کاشانی فرا گرفت. تاکنون با مجموعه‌های $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$, آشنا شده‌اید. رابطه بین سه مجموعه اول بصورت زیر است.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

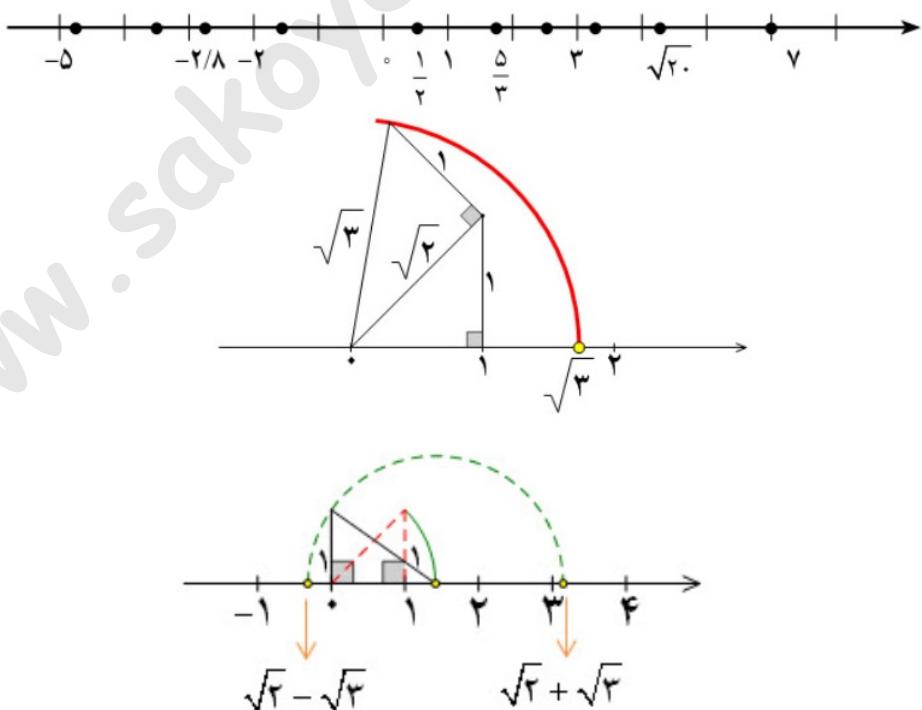
در این رابطه مجموعه \mathbb{Q}' چه جایگاهی دارد؟ حال می‌توان مجموعه اعداد حقیقی را هم تعریف کرد.
تعریف ۳.۱. مجموعه اعداد حقیقی را که با نماد \mathbb{R} نشان می‌دهیم برابر است با: $\mathbb{Q}' \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$. (علامت \cup به معنای اجتماع است که در کلاس نهم تا حدودی با آن آشنا شده‌اید).



شکل ۱.۱: رابطه‌ی بین مجموعه‌های اعداد

مجله ریاضی: مجموعه اعداد حقیقی نیز به شکلی دیگر (نه بسته بودن نسبت به اعمال اصلی) دارای نقصان است. معادلات درجه دوم را هنوز نخوانده اید با اینحال معادلات درجه دومی وجود دارند که جوابهای آن معادله دیگر عددی حقیقی نیست. مثل معادله $x^2 + 1 = 0$ که جواب آن عدد عجیبی است. در واقع جواب این معادله عددی است بنام i با این ویژگی عجیب که $-1 = i^2$. بله این اعداد عجیب اعداد مختلط نام دارند و با نماد \mathbb{C} نشان داده می‌شوند. برای مطالعه بیشتر ویکی پدیای فارسی را ملاحظه کنید.

متناظر به هر عدد حقیقی نقطه‌ای روی محور اعداد حقیقی وجود دارد. در اشکال زیر موقعیت برخی از اعداد روی محور نشان داده شده است.



شکل ۲.۱: نمایش اعداد گویا و گنگ روی محور اعداد

اگر به شکل ۲.۱ بدقت نگاه کنید متوجه خواهید شد که این شکل راه حل بسیار زیبایی را به شما معرفی

کرده است و ارزش آن بیش از یک شکل ساده است. سرانجام آخرین مجموعه از اعداد را که بزرگتر از \mathbb{N} و کوچکتر از \mathbb{Z} است را معرفی می‌کنیم. مجموعه اعداد حسابی که با نماد \mathbb{W} نشان می‌دهیم عبارتست از $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

تمرین ۵.۱. جاهای خالی را با مجموعه مناسب کامل کنید.

$$a) \mathbb{R} - \mathbb{Q} =$$

$$b) \mathbb{Z} - \mathbb{W} =$$

$$c) \mathbb{N} - \mathbb{W} =$$

$$d) \mathbb{Q}' - \mathbb{Q} =$$

۲.۱.۱ بازه‌های اعداد حقیقی

برای ورود به مطلب و آشنایی با بازه‌ها دو نامعادله زیر را در نظر بگیرید:

$$-1 \leq \frac{2x+1}{3} < 3 \quad (1) \quad , \quad 3x+1 < 7 \quad (2)$$

با حل این دو نامعادله مجموعه جواب معادله شماره ۱ عبارتست از $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4\}$ و مجموعه جواب معادله شماره ۲ عبارتست از $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$. آیا می‌توان مجموعه جواب را با نمادی ساده‌تر از مجموعه‌های فوق نوشت؟ جواب مثبت است. بازه‌ها جوابگوی ما برای این ساده‌نویسی هستند. مجموعه جواب نامعادله ۱ بازه‌ی $(-2, 4)$ است و مجموعه جواب نامعادله شماره ۲ بازه‌ی بی‌کران $(-\infty, 2)$ است. حال به سراغ تعریف بازه‌ها می‌رویم.

تعریف ۴.۱. یک بازه، زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که بصورت‌های زیر تعریف می‌شود:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{بازه‌ی باز}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{بازه‌ی نیم باز}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{بازه‌ی بسته}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \quad \text{بازه‌ی باز بی‌کران}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \quad \text{بازه‌ی نیم باز بی‌کران}$$

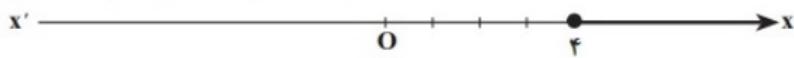
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \quad \text{بازه‌ی باز بی‌کران}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \quad \text{بازه‌ی نیم باز بی‌کران}$$

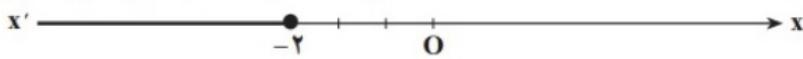
اغلب بجای اصطلاح نیم باز از اصطلاح نیم بسته هم استفاده می‌شود. نماد ∞ که بی‌نهایت خوانده می‌شود (مثبت بی‌نهایت یا منفی بی‌نهایت) یک عدد حقیقی نیست فقط نمادی است برای اینکه نشان دهیم بازه بی‌کران است. یعنی هر عددی خواه بسیار بزرگ یا خواه بسیار کوچک در این بازه‌ها می‌تواند وجود داشته باشد.

در اشکال زیر چند بازه را بعنوان مثال روی محور اعداد حقیقی نمایش داده ایم.

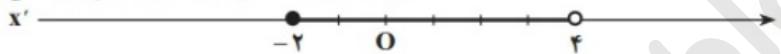
$$[4, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 4\}$$



$$(-\infty, -2] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2\}$$



$$[-2, 4) = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < 4\}$$



مثال ۲.۱. درست و نادرست را بررسی کنید و جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

$$(a) : 3 \in [-1, \sqrt{10})$$

$$(b) : \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0, 1]$$

$$(c) : \{0, 1\} \subseteq [0, 1]$$

$$(d) : -1395 \in (-\infty, -1396)$$

$$(e) : \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \in [3, 4]$$

$$(f) : \emptyset \subseteq (-\pi, \pi)$$

$$(g) : (-\infty, 3) \cap (-2, 0) \cap (-1, +\infty) =$$

$$(h) : \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) =$$

$$(m) : \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) =$$

$$(n) : \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) =$$

تمرین ۶.۱. درست و نادرست را مشخص کنید و جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ($n \in \mathbb{N}$)

- $$(a) : [0, 1) \subset \mathbb{Q} \quad (b) : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subset \mathbb{Q}' \quad (c) : \sqrt{n^2 + 1} \in \mathbb{Q}'$$
- $$(e) : \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}' \quad (f) : \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{W} \quad (g) : \frac{1-\pi}{2} \in (-1, +\infty)$$
- $$(h) : \sqrt{-1} \in \mathbb{R} \quad (m) : \sqrt[3]{-27} \in \mathbb{Q} \quad (n) : (-\infty, \sqrt{3}) \cap (0, \frac{\pi}{2}) =$$
- $$(d) : \sqrt{841} \in \mathbb{Q}$$

۳.۱.۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

در این بخش می‌خواهیم در مورد تعداد اعضای یک مجموعه صحبت کنیم.

تعریف ۵.۱. مجموعه‌ای چون A را یک مجموعه متناهی (بایان) گوییم هرگاه تعداد اعضای آن را بتوان با یک عدد حسابی نمایش داد. اگر تعداد اعضای یک مجموعه را با نماد $|A|$ نمایش دهیم متناهی بودن یک مجموعه چون A به معنای آن است که به ازای یک عدد حسابی مثل k داریم $|A| = k$. در غیر اینصورت مجموعه را نامتناهی (بی‌پایان) گوییم.

مثال ۳.۱. مجموعه‌های زیر را بررسی کنید و متناهی یا نامتناهی بودن آنها را معین کنید.

۱ - مجموعه دانش آموزان سال دهم رشته ریاضی در کشور.

۲ - تعداد اعداد ۳ رقمی و بزرگتر از ۵۰۰

۳ - تعداد اعداد اول.

۴ - مجموعه اعداد طبیعی فرد.

۵ - مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان بالغ.

۶ - مجموعه دایره‌هایی که مرکزشان مبدأ مختصات است.

۷ - مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی.

۸ - مجموعه درختان جنگل آمازون.

۹ - مجموعه کسرهایی که مثبت هستند و صورتشان ۱ است.

۱۰ - بازه $(0, 2)$.

۱۱ - مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب.

فعالیت

الف) بین ${}^{\circ}$ و 1 دو عدد گویای دلخواه بنویسید.

ب) در بازه $(1, 0)$ چهار عدد گویای دیگر بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانان مقایسه کنید.

پ) آیا می‌توان بین ${}^{\circ}$ و 1 به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه $(1, 0)$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن \mathbb{Q} چه می‌توان گفت؟

ج) اگر A دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود.

نتیجه فعالیت بالا بیان می‌کند که اگر مجموعه ای چون $B \subseteq A$ دارای زیرمجموعه ای چون B باشد ($B \subseteq A$) به طوری که B نامتناهی باشد آنگاه بنابراین خود A نیز نامتناهی است. در نتیجه چون اعداد گویای واقع در بازه $(1, 0)$ نامتناهی هستند پس \mathbb{Q} هم نامتناهی است و به همین ترتیب \mathbb{R} هم نامتناهی است. ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$) پرسش: با توجه به شرایط بالا اگر A متناهی باشد در مورد B چه می‌توان گفت؟

یادداشت تاریخی: اعداد اول یکی از قدیمی ترین مباحث در ریاضیات می‌باشد. در دوره معاصر نیز یکی از جذابترین شاخه‌های رشته ریاضیات نظریه اعداد است که به بررسی اعداد صحیح و خواص آن می‌پردازد. حدود 350 سال قبل از میلاد مسیح اقلیدس ثابت کرد که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد. بعارت بهتر ثابت کرد مجموعه اعداد اول نامتناهی است. جالب است بدانید که این اثبات به روش برهان خلف انجام می‌شود و هنوز در طی سالیان سال نتوانسته اند اثباتی ساده‌تر از اثبات اقلیدس بیایند.

تمرین ۷.۱. متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

۱ - مجموعه کلمات بکار رفته در کتاب ریاضی دهم.

۲ - مجموعه مضارب مثبت عدد 5 .

۳ - مجموعه پلنگ‌های زنده در قاره آفریقا.

۴ - مجموعه تمام زیرمجموعه‌های \mathbb{N} .

۵ - مجموعه تمام اعدادی که در تقسیم بر 5 باقیمانده 1 دارند.

۶ - مجموعه باقی مانده‌ها در تقسیم اعداد طبیعی بر عدد 7 .

۷ - مجموعه تمام موبایل‌های تولید شده در 20 سال گذشته.

بیشتر بدانیم: همانطور که از کلاس نهم می‌دانید چنانچه دو مجموعه دارای تعداد اعضای برابر باشند آن دو مجموعه لزوماً برابر نیستند. مثلاً دو مجموعه

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{a, b, c\}$$

هر دو دارای سه عضو می‌باشند اما برابر نیستند. اما برابر بودن تعداد اعضا باعث می‌شود اصطلاح دیگری در مورد این دو مجموعه بکار رود. اگر بتوان بین اعضای دو مجموعه یک تناظر یک به یک بقرار کرد در این صورت گویند دو مجموعه هم ارز یا هم عدد هستند. منظور از تناظر یک به یک این است که به هر عضو مجموعه A یک و فقط یک عضو از مجموعه B نظیر کرد و برعکس. در مورد مثال بالا تناظر بدین صورت است که :

$$1 \longleftrightarrow a$$

$$2 \longleftrightarrow b$$

$$3 \longleftrightarrow c$$

توجه داشته باشید که این تناظر باید اصطلاحاً یک به یک باشد. مثل تناظر بین انسان‌ها و اثر انگشتان. هر انسانی یک اثر انگشت دارد و هر اثر انگشتی فقط متعلق به یک انسان است. حال موضوع زمانی جالب تر می‌شود که بدانید \mathbb{N} و \mathbb{Z} هم هم ارز یا هم عدد هستند. برای ایجاد تناظر به این صورت عمل می‌کنیم که اگر n عددی طبیعی باشد دو حالت رخ می‌دهد یا زوج است یا فرد. اگر زوج بود آن را به $\frac{n}{2}$ نظیر می‌کنیم و اگر فرد بود آنرا به $\frac{1-n}{2}$ نظیر می‌کنیم. می‌توان ثابت کرد که این تناظر یک به یک است. چند مورد ابتدای این تناظر را در زیر می‌بینید.

$$1 \longleftrightarrow \frac{1-1}{2} = 0$$

$$2 \longleftrightarrow \frac{2}{2} = 1$$

$$3 \longleftrightarrow \frac{1-3}{2} = -1$$

$$4 \longleftrightarrow \frac{4}{2} = 2$$

$$5 \longleftrightarrow \frac{1-5}{2} = -2$$

در فصول بعدی که مفهوم تابع را درس خواهیم داد راحت‌تر می‌توان ضابطه تناظر را بیان کرد.

۲.۱ متمم یک مجموعه

۱.۲.۱ مجموعه مرجع

جهت روشن شدن لزوم در نظر گرفتن یک مجموعه بعنوان مجموعه مرجع مجموعه $\{3 \leq x \leq 2\}$ را در نظر بگیرید. اگر از شما بخواهند که اعضای مجموعه را بنویسید چه اعدادی را خواهید نوشت؟ جوابهای احتمالی شما بصورت زیر است:

$$A = \{1, 2, 3\} \quad (1)$$

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \quad (2)$$

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \quad (3)$$

$$A = [-2, 3] \quad (4)$$

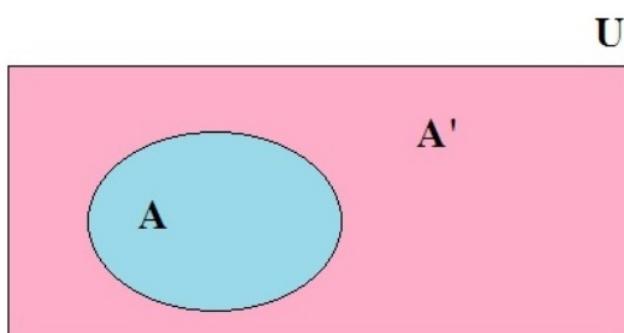
پس همانطور که مشاهده می‌کنید برای مجموعه می‌توان حالت‌های مختلف را در نظر گرفت و جواب یکتاً بدست نمی‌آید و این ابهام در تعریف مجموعه A چندان خواشایند نیست. چنانچه مجموعه را بصورت :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

تعریف کنیم دیگر تکلیف روشن است و می‌دانیم جواب چیست. در اینجا نبود یک مجموعه مرجع باعث بروز چنین مشکلی شد. اما با در نظر گرفتن مجموعه‌های $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{W}, \mathbb{N}$ بترتیب مجموعه‌های $1, 2, 3, 4$ بدست می‌آیند. پس با تغییر مجموعه بعد از علامت \in اعضای مجموعه نیز تغییر می‌کنند. چنین مجموعه‌هایی را مجموعه مرجع گویند.

تعریف ۶.۱. در هر مبحث مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های مورد بحث زیر مجموعه آن باشند را مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی می‌نامند و با حرف U نشان می‌دهند. در این حالت اگر $A \subseteq U$ مجموعه‌ای دلخواه باشد، $U - A$ را با نماد A' نشان می‌دهیم و آن را متمم A می‌نامیم. به عبارت بهتر A' شامل اعضایی از U است که در A نیستند.

در شکل زیر رابطه بین مجموعه‌های A, A', U دیده می‌شود.



بطور معمول در هر بحثی مجموعه مرجع را معرفی می‌کنند. چنانچه در بحثی مجموعه مرجع را معرفی نکردیم شما می‌توانید بزرگترین مجموعه موجود را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید. وقتی صحبت از اعداد باشد بزرگترین مجموعه ممکن همان \mathbb{R} است. در حالت کلی برای نوشتمن یک مجموعه به صورت استاندارد می‌نویسیم $\{x \in U \mid p(x)\}$ دارای خاصیت $A = \{x \in U \mid p(x)\}$ در اینجا U مجموعه مرجع است و خاصیتی است که x دارای آن است.

یادداشت تاریخی: آیا مجموعه مرجع به معنای مطلق وجود دارد؟ یعنی مجموعه‌ای چون U به طوری که شامل هر مجموعه‌ای که شما تصور کنید باشد. تا ابتدای قرن بیست و چنین مجموعه‌ای فرضی مسلم بود. برتراند راسل ریاضی دان و فیلسوف نامدار انگلیسی در ابتدای قرن بیست ثابت کرد چنین مجموعه‌ای وجود ندارد. پارادوکس راسل در همین ارتباط است و برای مطالعه بیشتر می‌توانید در گوگل عبارت پارادوکس راسل را جستجو کنید.

مثال ۴.۱. متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$$\begin{array}{ll} A = \{1, 3, 5, \dots\} & U = \mathbb{N} \\ B = \mathbb{N} & U = \mathbb{Z} \\ C = \mathbb{N} & U = \mathbb{W} \\ D = \mathbb{Q} & U = \mathbb{R} \\ E = [-\infty, -2) & U = \mathbb{R} \\ F = [-\infty, -2) & U = (-\infty, \circ) \\ G = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \right\} & U = [\circ, 1] \\ H = \mathbb{Z} & U = \mathbb{R} \end{array}$$

مثال ۵.۱. اگر U مجموعه مرجع دلخواهی باشد و $A \subseteq U$ باشد طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$a) A \cup A' = \quad b) A \cap A' = \quad c) \emptyset' = \quad d) U' =$$

مثال ۱.۶. فرض کنید $\{a, e, g, h, m, n, l\}$ و $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n, p, q\}$ باشند. جدول زیر را کامل کنید.

$(A')'$	{ }
$A' \cap B'$	{ }
$A' \cup B'$	{ }
$(A \cap B)'$	{ }
$(A \cup B)'$	{ }
$A \cap B'$	{ }
$A - B$	{ }

۲.۲.۱ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

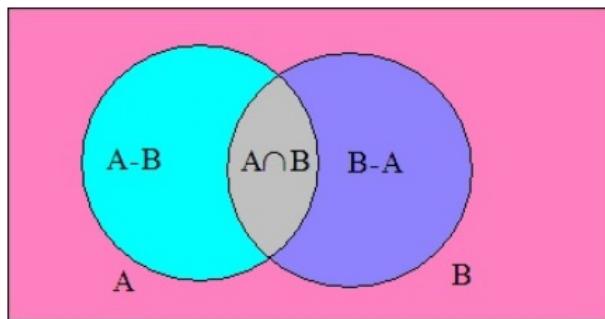
فرض کنید تعداد اعضای مجموعه های A, B معلوم باشد . می خواهیم تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ را بر حسب $n(A)$ و $n(B)$ بیابیم. (تعداد اعضای یک مجموعه را هم با نماد $|A|$ و هم با نماد $n(A)$ نشان می دهند) ممکن است تصور کنید که جواب واضح است و برابر است با عدد $n(A) + n(B)$ اما این نادرست است. چرا که اگر $U = \mathbb{N}, A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ آنگاه :

$$4 = n(A \cup B) \neq n(A) + n(B) = 3 + 3 = 6$$

دلیل آن ها ساده است. هنگامی که می نویسیم $n(A) + n(B)$ در واقع اعضای مشترک دوبار شمارش شده اند. یعنی $n(A \cap B)$ یکبار در هنگام شمارش اعضای A و یک بار در شمارش اعضای B حساب شده است . لذا برای یافتن تعداد درست باید یکبار $n(A \cap B)$ را از $n(A) + n(B)$ کم کنیم. پس جواب درست بصورت زیر است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

به شکل زیر دقت کنید. می توان درستی رابطه فوق را از روی نمودار ون زیر تحقیق کرد.



تذکر مهم: از روی شکل فوق روابط جالب دیگری بین اعضای مجموعه‌های $A - B$ و $A \cap B$ بدست می‌آید. این روابط بصورت زیر هستند که خودتان براحتی می‌توانید صحت آنها را تحقیق کنید.

$$\begin{aligned} n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) &= n(A \cup B) \\ n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

درس را با ذکر چند مثال پی می‌گیریم.

مثال ۷.۱. در یک کلاس مدرسه ۳۰ دانش آموز وجود دارد. ۲۲ نفر از آنها فوتبال بازی می‌کنند و ۱۸ نفر هم والیبال بازی می‌کنند. چند نفر هم فوتبال بازی می‌کنند و هم والیبال؟

مثال ۸.۱. در یک جمع ۴۰ نفره ۲۰ نفر به چای علاقه دارند و ۱۵ نفر هم چای دوست دارند و هم قهوه. چند نفر به قهوه علاقه دارند ولی به چای علاقه ندارند.

مثال ۹.۱. از بین اعداد ۱ تا ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که بر ۵ یا ۷ بخش پذیر باشد؟ چند عدد بر ۵ بخش پذیر است اما بر ۷ بخش پذیر نیست؟ چند عدد نه بر ۵ بخش پذیر است نه بر ۷؟

تمرین ۸.۱. در یک کلاس ۳۰ نفری، ۲۱ نفر به زبان انگلیسی، ۱۷ نفر به زبان فرانسه و ۱۰ نفر به هر دو زبان می‌توانند صحبت کنند. در این کلاس چند نفر هستند که به هیچ یک از این دو زبان صحبت نمی‌کنند؟

تمرین ۹.۱. در یک مدرسه، ۲۳ نفر در تیم فوتبال و ۱۲ نفر در تیم والیبال عضو هستند. ۴ نفر نیز در هر دو تیم عضو هستند. چند نفر از دانش آموزان مدرسه، در دست کم یکی از ۲ تیم ورزشی مدرسه هستند؟

تمرین ۱۰.۱. در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید داشته‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

- الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید داشته‌اند.
- ب) فقط از شرکت A خرید داشته‌اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید داشته‌اند.

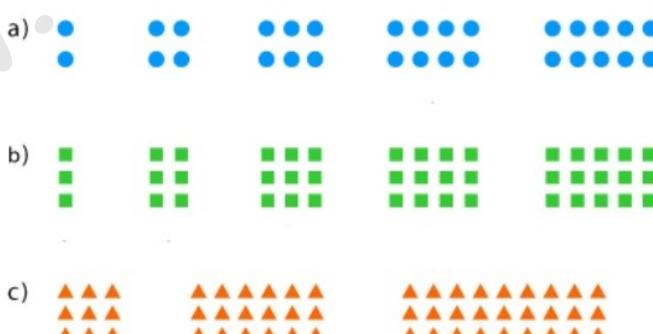
ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

۳.۱ الگو و دنباله

۱.۳.۱ الگو

دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شباهه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه‌ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی‌های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح‌های روی یک گل آفتابگردان، شکل‌های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده و یا مارپیچ‌های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد می‌باشد که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده و یا ترکیبی از این دو باشد. ریاضیات به عنوان ملکه علوم، یکی از رسالت‌های مهم خود را مدل سازی کردن پدیده‌های طبیعی و پی بردن به الگوهای نهفته در آنها می‌داند. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارتست از علم مطالعه الگوها. در این بخش برخی الگوهای هندسی و نیز الگوهای عددی منتظر با آنها مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مثال ۱۰.۱. به شکل زیر دقت کنید در هر مورد a, b, c , چه ارتباطی بین جملات است؟ در هر مورد چند جمله بعدی را بنویسید. آیا در حالت کلی می‌توان دستوری برای جمله n ام آن بدست آورد؟ (رسم بر اینست که جمله اول را با نماد a_1 جمله دوم را با نماد a_2 و جمله n ام را با a_n نشان دهن. شماره‌های جمله که به شکل کوچک و پایین حرف انگلیسی نوشته شده‌اند را اندیس گویند)

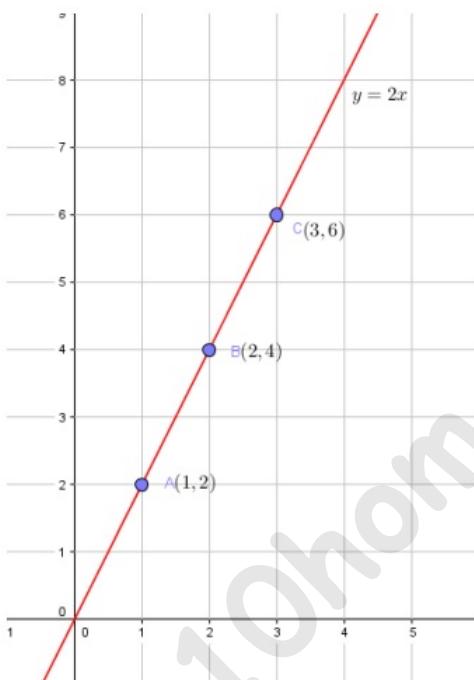


همانطور که در مثال بالا دیده شد اختلاف هر جمله از جمله قبلی مقدار ثابتی است. این نوع الگوهای خطی می‌نامیم چرا که به شکل معادله درجه اول $t_n = an + b$ است. در اینجا t_n جمله n ام الگو است. در نمودار زیر مشخص کرده‌ایم که در قسمت a اختلاف هر جمله از جمله قبلی ۲ واحد است و لذا الگوی خطی

دارد.

$$2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+2} 8 \xrightarrow{+2} \dots$$

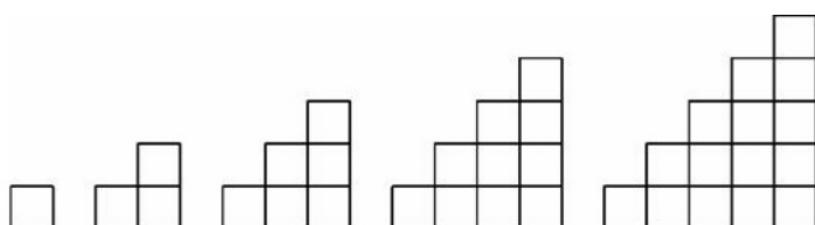
مثال ۱۱.۱. در یک اگوی خطی جمله چهارم ۱ و جمله هشتم ۱ – است. جمله چندم آن برابر ۴۷ – است؟



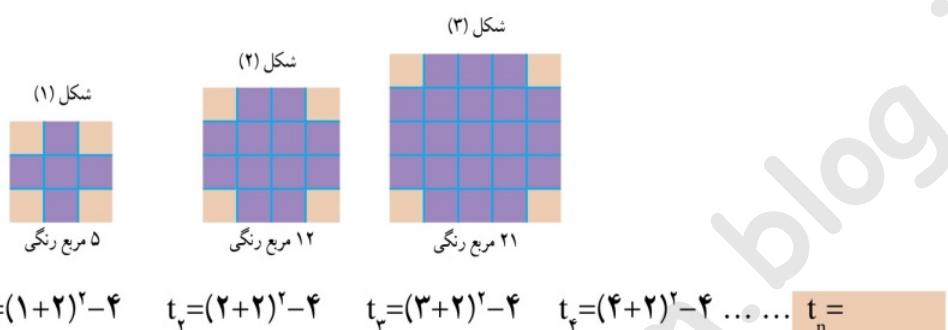
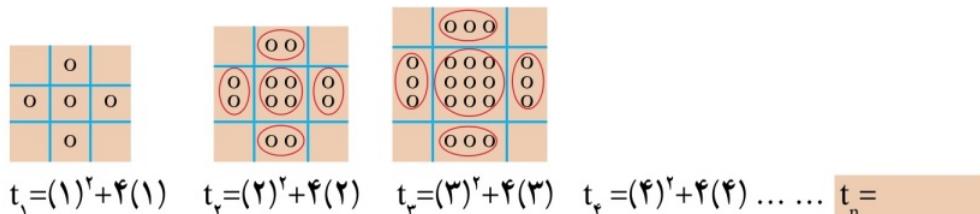
شکل ۳.۱: نمودار یک الگوی خطی

همانطور که در شکل ۱ ۳۰ مشاهده می‌کنید اعضای دنباله‌ی $\dots, 2, 4, 6, \dots$ در واقع عرض نقاط A, B, C, \dots روی خط $y = 2x$ هستند. به همین علت هم به این الگوها خطی گویند. اگر خوب به معادله آن که بر حسب متغیر n نوشته شده است دقت کنید بلافاصله به یاد معادله خط ارکلاس نهم خواهید افتاد یعنی عبارت $y = ax + b$. اما همه‌ی الگوها لزوماً خطی نیستند. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱۲.۱. با توجه به شکل زیر تعداد مربع‌ها را در هر مرحله بنویسید. آیا این الگو خطی است؟ چگونه می‌توان دستوری برای جمله n ام آن بدست آورد؟



مثال ۱۳.۱. الگوی $12, 21, 5, \dots$ را در نظر بگیرید. آیا الگو خطی می‌باشد؟ به کمک دو شکل زیر سعی کنید جمله n ام آن را بیابید.



تذکر : در مثال بالا نتیجه جالب و پرکاربرد به مجموع فوق می‌توان مجموع مربعات و مکعبات اعداد طبیعی را هم بدست آورد. تلاش شما برای اثبات روابط بسیار مهم زیر خالی از اجر نیست!

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

۲۰۳.۱ دنباله ها

همانطور که در بخش قبل دیدیم از روی الگوهای هندسی می‌توان اعدادی را استخراج کرده و به دنبال هم نوشت. اعداد بدست آمده را از چپ به راست می‌نویسیم و ترتیب آنها را هم حفظ می‌کنیم. در واقع این نکته بسیار مهمی است که اعداد نامنظم کنار هم قرار نگرفته اند بلکه دارای نظم و ترتیب هستند.

تعريف ۷.۱. به هر تعداد از اعداد که آنها را پشت سر هم نوشته باشیم یک دنباله گوییم. هر عدد که در دنباله قرار دارد را یک عضو دنباله گوییم و جمله n ام یا جمله عمومی دنباله را با نماد a_n نمایش می‌دهیم. نماد رایج برای نوشتتن جمله عمومی یک دنباله نماد $\{ \}$ است. مثلا می‌نویسیم $a_n = \frac{n^2 + 1}{5n}$ یا معادلاً عبارت $\cdot \left\{ \frac{n^2 + 1}{5n} \right\}$.

تمرین ۱۱.۱. پنج جمله اول دنباله‌های زیر را بنویسید.

$$a_n = (-1)^n \cdot 2^n$$

$$b_n = (n+2)^{-n}$$

$$c_n = n^n$$

$$d_n = -n^2 + 8n$$

$$e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$f_n = \frac{n}{n+2}$$

$$g_n = (\frac{1}{3})^n$$

$$k_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$p_n = \sqrt[n]{n}$$

مثال ۱۴.۱. الگوهای عددی زیر همگی مثال‌هایی برای دنباله محسوب می‌شوند. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین سعی کنید جمله عمومی دنباله را حدس بزنید.

a) $-1, -2, -3, -4, \dots$

b) $5, 18, 31, 44, \dots$

c) $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$

d) $-2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

e) $1, 4, 9, 16, \dots$

f) $1, 2, 4, 7, \dots$

h) $3, 1, 4, 1, 5, 1, \dots$

k) $-1, 8, -27, 64, \dots$

l) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

m) $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \frac{1}{63}, \dots$

n) $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$

p) $2, 8, 24, 64, 160, \dots$

یادداشت تاریخی: لئوناردو فیبوناتچی (حدود ۱۱۷۰-حدود ۱۲۵۰) نخستین ریاضیدان بزرگ اروپا در قرن سیزدهم است. برای مطالعه بیشتر در گوگل فیبوناتچی را جستجو کنید.

در اینجا ذکر چند نکته ضروری است. اول اینکه یافتن جمله عمومی از روی چند جمله اول هر دنباله ای در حالت کلی ممکن نیست. مثلاً دنباله اعداد اول دارای جمله عمومی نیست. دوم اینکه از روی چند جمله اول یک دنباله نمی‌توان بصورت منحصر به فرد جمله عمومی را یافت. مثلاً دنباله قسمت e مثال بالا را که جمله عمومی آن بصورت $a_n = n^2$ بدست آمده می‌توانست بصورت $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + n^2$ باشد چرا که دقیقاً همین اعداد ۱, ۴, ۹, ۱۶ را تولید می‌کند اما مشخص است که از جمله جهارم به بعد این دو دنباله کاملاً متفاوت هستند.

مثال ۱۵.۱. الف : جمله عمومی دنباله ای بصورت $a_n = n^2 - 10n + 18$ است. کوچکترین جمله دنباله جمله چندم است. ب: جمله عمومی یک دنباله بجای اینکه بر حسب n بیان شود بر حسب $1 - 3n$ بیان شده است. به عبارت بهتر داریم : $a_{3n-1} = \frac{6n-2}{3n+3}$ جمله بیستم دنباله چه عددی است؟ آیا می‌توان جمله عمومی دنباله را بدست آورد؟

بیشتر بدانیم: دو نوع خاص دنباله وجود دارد که از اهمیت ویژه ای برخوردار است. اول دنباله‌های یکنوا: دنباله ای که جملات آن مرتب‌آز اولین جمله افزایش یابند را دنباله صعودی گوییم. در مقابل چنانچه دنباله ای از اولین جمله شروع به کاهش کند، دنباله را نزولی گوییم. توجه کنید که یک دنباله ممکن است نه صعودی باشد و نه نزولی. منظور از دنباله یکنوا دنباله ای است که یا صعودی باشد یا نزولی. دوم دنباله‌های کراندار: دنباله ای را کراندار گوییم که همواره جملات آن بین دو عدد حقیقی قرار گیرند.

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} \rightarrow \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \dots \right\} \quad \text{دنباله صعودی و کراندار است} \rightarrow$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \quad \text{دنباله نه صعودی است و نه نزولی اما کران دار است} \rightarrow$$

$$c_n = \frac{1}{n} \rightarrow \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \quad \text{دنباله نزولی و کران دار است} \rightarrow$$

$$d_n = (-1)^n n^2 \rightarrow \{-1, 4, -9, 16, -25, 36, \dots\} \quad \text{نه صعودی و نه نزولی و نه کران دار} \rightarrow$$

۳.۳.۱ دنباله حسابی

تعريف ۸.۱. دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند. فرض کنید جمله اول دنباله a و قدر نسبت عدد d باشد در این صورت جملات ابتدایی دنباله بصورت زیر است:

$$\underbrace{a}_{a_1}, \underbrace{a+d}_{a_2}, \underbrace{a+2d}_{a_3}, \underbrace{a+3d}_{a_4}, \dots, \underbrace{a+(n-1)d}_{a_n}$$

به این ترتیب جمله عمومی دنباله حسابی بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$a_n = a + (n-1)d$$

تعداد جملات = $a_1 = d$, قدر نسبت = n , جمله اول =

مثال ۱۶.۱. در دنباله حسابی $\dots, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2$ جمله ۱۸ ام را بیابید. آیا جمله ای وجود دارد که برابر با -24 شود؟

مثال ۱۷.۱. در یک دنباله حسابی داریم $a_5 = 24$, $a_{11} = 48$ مطلوبست محاسبه a_2 .

مثال ۱۸.۱. در دنباله حسابی $\dots, 200, 204, 208, \dots$ کدام جمله صفر است؟

نکته مهم: فرض کنید سه عدد a , b , c تشکیل دنباله حسابی داده باشند. در این صورت باید $b = \frac{a+c}{2}$. در این حالت b را واسطه حسابی بین a و c گوییم.

مثال ۱۹.۱. در یک دنباله حسابی غیر ثابت (یعنی $d \neq 0$) چند جمله اول بصورت زیراست. جمله اول و قدرنسبت را بیابید.

$$a + 2, a^2 + 2a + 2, a^3 + 2 \dots$$

مثال ۲۰.۱. فرض کنید $1 \neq b$ باشد. نشان دهید که سه عدد $\frac{1}{1+b}$, $\frac{1}{1-b}$, $\frac{1}{1-\sqrt{b}}$ دنباله حسابی می‌دهند.

مثال ۲۱.۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای بیابید که اضلاع آن تشکیل دنباله حسابی دهند.

مثال ۲۲.۱. در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول 27 و مجموع مربعات آنها 293 است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

مثال ۲۳.۱. بین دو عدد 4 و 36 سه واسطه حسابی درج کنید به عبارت بهتر بین این دو عدد 3 عدد چنان قرار دهید که 5 عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند.

مثال ۲۴.۱. در یک دنباله حسابی که دارای n جمله است، مجموع سه جمله اول برابر $6\sqrt{2}$ و مجموع سه جمله آخر $6\sqrt{2}$ است. همچنین می‌دانیم $\frac{3}{2}a_{15} = a_{10}$. این دنباله چند جمله دارد؟

مثال ۲۵.۱. فرض کنید a_s, a_r, a_n, a_m چهار جمله از یک دنباله حسابی باشند بطوریکه $m+n = r+s$ باشد. نشان دهید در این حالت باید داشته باشیم $a_m + a_n = a_r + a_s$. بویژه اگر $m+n$ زوج باشد آنگاه $a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n$. در حالت خاص $a_m + a_n = 2a_{m+n}$.

مثال ۲۶.۱. در یک دنباله حسابی داریم $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 120$, $a_{13} + a_{18} = 130$. است. جمله 30 ام دنباله را بدست آورید.

مثال ۲۷.۱. مجموعه A شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول 3 و قدرنسبت 4 است. مجموعه B نیز شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول 5 و قدرنسبت 6 است. مطلوبست محاسبه $n(A \cap B)$.

تمرین ۱۲۰.۱. فرض کنید که p^r, q^r, r^r سه جمله متولی یک دنباله حسابی باشند. نشان دهید که سه عدد

$\frac{1}{p+q}$, $\frac{1}{r+p}$, $\frac{1}{q+r}$ نیز سه جمله متوالی یک دنباله حسابی‌اند.

تمرین ۱۳.۱. اعداد $1 + 2\sqrt{x}, 2 + 3\sqrt{x}, 1 + 2\sqrt{x} - 6$ تشکیل دنباله حسابی‌می‌دهند. قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۱۴.۱. در یک دنباله حسابی مجموع چهار جمله اول ۲ و مجموع مربعات ۲۴۶ است. جمله پنجم را بیابید.

تمرین ۱۵.۱. در یک دنباله حسابی $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n} = 0$ است. در این صورت حاصل عبارت زیر چیست؟

$$\frac{a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{3n-1}}{a_4 + a_7 + a_{10} + \dots + a_{3n+1}}$$

تمرین ۱۶.۱. در دنباله حسابی $-152, -151, -150, \dots, -161$ چند جمله منفی است؟

بیشتر بدانیم: می‌خواهیم مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را در حالت کلی بیابیم. اگر این مجموع را با S_n نمایش دهیم هدف یافتن عبارت

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

است. بدین منظور همان روشی را که کارل فردیش گاووس معروف در دوره دبستان انجام داد را بگار می‌گیریم.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_1 + a_n)$$

حال اگر مقدار جملات را از روی جمله عمومی جایگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$2S_n = \underbrace{[2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \dots + [2a + (n-1)d]}_n \text{ جمله}$$

بنابر این به دستور جالب زیر می‌رسیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

الف) درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2$

c) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

d) $3 + 7 + 11 + \dots + 79 = 820 \implies n = ?$

ب) در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول از دستور $S_n = n^2 + n$ حاصل می‌شود. مطلوبست محاسبه a_n, d

ج) مجموع چند جمله از دنباله $\dots, 16, 21, 26$ برابر ۷۴ است؟

۴.۳.۱ دنباله هندسی

می‌گویند یک هندی برای اولین بار شترنج را اختراع نمود و به پادشاه هند تقدیم کرد. پادشاه که بازی شترنج را بسیار پسندیده بود به مخترع قول داد هر جایزه‌ای درخواست کند قبول خواهد کرد. مخترع خوش ذوق و ریاضیدان، درخواستی عجیب نمود. او گفت من تقاضا و توقع زیادی ندارم فقط پادشاه لطف نموده دستور دهنده به ازای خانه اول صفحه شترنج یک دانه گندم، خانه دوم دو دانه گندم، خانه سوم چهار دانه گندم و بدین ترتیب به ازای هر خانه دو برابر خانه قبل گندم به من اهدا نمایند. پادشاه و اطرافیان درخواست مخترع را به دیده حقارت و تمسخر نگریستند و خزانه دار مامور شد فی الفور خواسته مخترع را برآورده سازد. ساعاتی بعد خزانه دار به حضور پادشاه رسید و در کمال ناباوری همگان گفت: پادشاه به سلامت باد اگر کلیه خزانه کشور را از گندم تهی نموده به مخترع دهیم باز هم تعداد زیادی از خانه‌های شترنج باقی می‌مانند و از برآوردن خواسته مخترع عاجزیم!

جدای از صحت و سقم داستان فوق باید امکان تهیه گندم را بررسی کنیم. مجموع گندم خواسته شده برابر است با :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{64} = 18446744073709551615$$

وزن هر دانه گندم را 0.4 گرم بگیرید در این صورت حاصل برابر است با

$$0.4 \times 18446744073709551615 = 7378697629483820646 gr = 737869762948 ton$$

تولید این مقدار گندم تقریبا هزار سال طول می‌کشد! در واقع هدف از بیان این داستان معرفی دنباله‌های هندسی و سرعت شگفت‌انگیز رشد یا زوال آنهاست.

تعريف ۹.۱. دنباله هندسی، دنباله‌های است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله مینامیم. جمله اول دنباله هندسی $a \neq 0$ است. قدر نسبت را با q نشان می‌دهیم. در حالت‌های خاص اگر $q = 1$ باشد دنباله‌های خاصی پدید می‌آیند. اگر $q = -1$ باشد دنباله بصورت $\dots, a, 0, 0, \dots$ و اگر $q = 0$ باشد دنباله ثابت \dots, a, a, a, \dots حاصل می‌شوند.

برای یافتن جمله عمومی یک دنباله هندسی فرض می‌کنیم جمله اول آن a و قدرنسبت q باشد در این صورت ترتیب جملات بصورت زیر است:

$$\underbrace{a}_{a_1}, \underbrace{aq}_{a_2}, \underbrace{aq^2}_{a_3}, \dots, \underbrace{aq^{n-1}}_{a_n}, \dots$$

بنابراین جمله n ام یا جمله عمومی دنباله هندسی بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$a_n = aq^{n-1}$$

تعداد جملات = n ، قدر نسبت = q ، جمله اول = a

مثال ۲۸.۱. دنباله‌های زیر را بررسی کنید. آنها را که هندسی هستند مشخص کرده و قدر نسبت و جمله عمومی آنها را بباید.

a) ۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸,

b) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3} \dots$

c) ۱, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$

d) ۵, ۵, ۵, \dots

e) ۲, ۶, ۱۸, ۵۴, \dots

f) ۶, -۶۰, ۶۰۰, -۶۰۰۰, \dots

g) ۴, ۲, ۱, $\frac{1}{4}, \dots$

h) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots$

k) ۳, $\sqrt{3}, 1 \dots$

مثال ۲۹.۱. در دنباله $\dots, \frac{1}{128}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ جمله چندم برابر است؟

مثال ۳۰.۱. در یک دنباله هندسی $a_8 = ۴۳۷۴$, $a_5 = ۱۶۲$ است. جمله سوم را بدست آورید.

مثال ۳۱.۱. سه عدد a , b , c سه جمله متولی یک دنباله هندسی اند. ثابت کنید: $ac = b^2$. (در این حالت b را واسطه هندسی بین a و c گویند).

مثال ۳۲.۱. سه عدد ۵, ۴, ۲, ۱ تشکیل دنباله هندسی داده اند. قدر نسبت را بباید.

مثال ۳۳.۱. پنج واسطه هندسی بین دو عدد ۱ و ۶۴ درج کنید.

مثال ۳۴.۱. سه عدد $81^{\frac{15}{4}}, 3^6, 3^b$ تشکیل دنباله هندسی داده اند. b را بباید.

مثال ۳۵.۱. در دنباله $\dots, \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}}$ جمله سیزدهم را بیابید.

مثال ۳۶.۱. در یک دنباله هندسی رابطه‌های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{13}{3} \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{26}{9} \end{cases}$$

جمله اول و قدرنسبت را بدست آورید.

مثال ۳۷.۱. در یک دنباله هندسی رابطه‌های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 108 \\ a_4 \times a_6 = 162 \end{cases}$$

جمله اول و قدرنسبت را بدست آورید.

تذکر مهم: در یک دنباله هندسی که جمله اول آن مثبت است چنانچه $1 < q$ باشد دنباله افزایشی است و $1 < q < 0$ باشد دنباله کاهشی است. اگر $-1 = q$ باشد دنباله متناوب است و اگر $0 < q < 1$ باشد دنباله نوسانی است.

مثال ۳۸.۱. در یک دنباله حسابی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی غیرثابت افزایشی اند. قدر نسبت دنباله هندسی را بیابید.

مثال ۳۹.۱. چهار عدد مثبت جملات متوالی یک دنباله هندسی اند. مجموع دو عدد بزرگتر برابر 20° و مجموع دو عدد بزرگتر برابر 45° است. بزرگترین این اعداد کدامست؟

تمرین ۱۷.۱. مجموع سه جمله متوالی یک دنباله هندسی $4\sqrt{6} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ است. قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۱۸.۱. در یک دنباله هندسی حاصلضرب سه جمله اول -8 و حاصلجمع جملات اول و سوم برابر -5 است. قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۱۹.۱. در یک دنباله هندسی $a_{10} - a_9 = 1$, $a_{20} - a_{19} = 1024$ است. جمله پنجم را بیابید.

تمرین ۲۰.۱. در یک دنباله هندسی $a_3 + a_4 + a_5 + a_7 = 546$, $a_3 + a_5 + a_7 = 1638$ است. حاصلضرب چند جمله دنباله برابر 11664 می‌شود؟

تمرین ۲۱.۱. عدد 325 را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند و اختلاف دو عدد بزرگتر برابر 150° باشد.

تمرین ۲۲.۱. جمله اول یک دنباله هندسی $\sqrt{2} - 1$ است. جمله دوم دنباله چه عدد صحیحی باشد تا جمله ششم برابر $12\sqrt{2} + 17$ شود؟

تمرین ۲۳.۱. در یک دنباله حسابی و غیرثابت، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متولی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله دنباله حسابی صفر است؟

بیشتر بدانیم: در این قسمت می‌خواهیم مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را بدست آوریم. اگر جمله اول را با a و قدر نسبت را با q نشان دهیم هدف محاسبه عبارت $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ است. بدین منظور داریم:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n$$

کم کردن طرفین ۲ رابطه بالا

$$qS_n - S_n = aq^n - a$$

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

$a =$	$q =$	$n =$
جمله اول	قدر نسبت	تعداد جملات

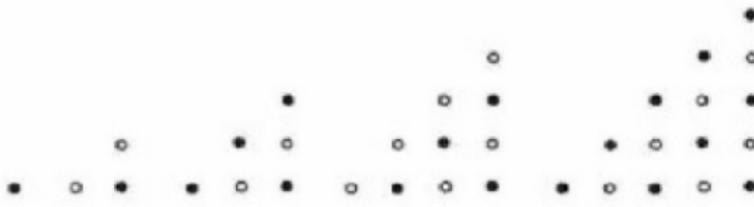
بویژه در یک حالت خاص که $|q| < 1$ است مشاهده می‌کنیم که چنانچه n به قدر کافی بزرگ باشد آنگاه $\approx q^n$ است و لذا رابطه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$S_\infty = \frac{a}{1 - q}$$

- ۱ - در یک دنباله هندسی $S_3 = -63$ ، $S_1 = ?$ است مطلوبست محاسبه.
- ۲ - مجموع $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8}$ را بیابید.
- ۳ - اگر $|q| < 1$ باشد حاصل $(1 + q + q^2 + q^3 + \dots)(1 - q + q^2 - q^3 + \dots)$ را بدست آورید.
- ۴ - در یک دنباله هندسی داریم $S_{2n} = 17$. مطلوبست محاسبه q .
- ۵ - حاصل عبارت $\underbrace{9 + 99 + 999 + \dots + 99\dots9}_n$ را بیابید.
- ۶ - توپی از ارتفاع ۵ متری پرتاب می‌شود و پس از هر بار برخورد به زمین به اندازه نصف ارتفاع قبلی بالا می‌رود تا ساکن شود. کل مسافتی که توپ طی می‌کند را محاسبه کنید.

تمرین الگو، دنباله‌های حسابی و هندسی

تمرین ۲۴.۱. با توجه به شکل زیر و الگوی آن در شکل پانزدهم چند دایره سیاه رنگ دیده می‌شود؟



تمرین ۲۵.۱. کوچکترین جمله‌ی دنباله‌های زیر را بیابید.

$$a) a_n = n^{\frac{1}{2}} - 20n$$

$$b) a_n = n + \frac{16}{n}$$

تمرین ۲۶.۱. بزرگترین جمله‌ی دنباله‌های زیر را بیابید.

$$a) a_n = -2n^{\frac{1}{2}} + 20n - 15$$

$$b) a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} + 10n + 5}$$

تمرین ۲۷.۱. دنباله‌ی $a_n = n + 3 + \frac{8}{n+1}$ چند جمله‌ی صحیح دارد؟

تمرین ۲۸.۱. دنباله‌های زیر را بررسی کنید. کدام هندسی یا حسابی‌اند؟

$$a) \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots$$

$$b) 2, 5, 9, 14, \dots$$

$$c) \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{16}, \dots$$

$$d) \sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2, 4 - 2\sqrt{2}, \dots$$

تمرین ۲۹.۱. دنباله‌ی $\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{16}, \frac{1}{5}, \frac{1}{64}$ مفروض است. جمله‌ی عمومی آن را بنویسید.

تمرین ۳۰.۱. فرض کنید a, b, c سه جمله متولی یک دنباله هندسی باشند. ثابت کنید $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+b}$ و $\frac{1}{2b}$ سه جمله متولی یک دنباله حسابی اند.

تمرین ۳۱.۱. اعداد فرد را بصورت $\dots, (1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19)$ دسته بندی کرده ایم. در دسته سی ام مجموع دو جمله اول و آخر را بیابید.

تمرین ۳۲.۱. تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع جملات دنباله سه برابر مجموع جملات ردیف فرد دنباله باشد قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۳۳.۱. در یک دنباله حسابی جملات اول، نهم و چهل و نهم بترتیب سه جمله متولی یک دنباله هندسی اند. قدرنسبت را بیابید.

تمرین ۳۴.۱. اعداد a, b, c تشکیل دنباله حسابی و اعداد a, c, b تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. قدرنسبت دنباله هندسی را بدست آورید.

تمرین ۳۵.۱. دستوری برای جمله عمومی دنباله $\dots, \frac{11}{18}, \frac{6}{11}, \frac{8}{11}, \frac{14}{11}, \frac{5}{6}$ بیابید.

تمرین ۳۶.۱. در دنباله زیر چند جمله مشترک کمتر از 19° وجود دارد؟

$$\left\{ \begin{array}{l} 3, 7, 11, 15, \dots \\ 2, 7, 12, 17, \dots \end{array} \right.$$

تمرین ۳۷.۱. بین دو عدد $a+8$ و a سه واسطه هندسی درج کرده ایم. اگر مجموع اولین و آخرین واسطه برابر $8\sqrt{2}$ باشد، a را بدست آورید.

تمرین ۳۸.۱. در دنباله هندسی که جمله اول آن 1° و قدر نسبت آن ۵ است چند جمله کمتر از 10000 داریم؟

تمرین ۳۹.۱. مجموع جملات یک دنباله هندسی $(1 < |q|)$ برابر ۸ و مجموع مربعات جملات همان دنباله برابر $\frac{64}{3}$ است. جمله اول را بیابید.

تمرین ۴۰.۱. حاصل عبارت $(1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ را بیابید.

۴.۱ تست‌های فصل اول

۱- اعداد $1, 2p + 3, 3p + 4, 5p - 1$ سه جمله‌ی متولی یک تصاعد عددی هستند. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

دیبرستان - سراسری - ریاضی - ۸۴

۲- اگر $A = \frac{1}{0.25} - 0.25$ باشد حاصل کدام است؟

۴۴۴ (۴)

۴۴۳ (۳)

۴۴۲ (۲)

۴۴۱ (۱)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۴

۳- عرض یک مستطیل ۴ متر است. اگر اندازه‌ی طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، مربع قطر مستطیل کدام است؟

۸(۶ + √۵) (۴)

۸(۵ + √۵) (۳)

۶(۸ + √۵) (۲)

۵(۸ + √۵) (۱)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۴

۴- اگر جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی ۴ و حد مجموع جملات این تصاعد ۱۶ باشد جمله‌ی چهارم کدام است؟

۲۷ (۴)

۲۷ (۳)

۹ (۲)

۹ (۱)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۴

۵- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول از یک تصاعد عددی و سه جمله‌ی اول دنباله S_n به صورت $\dots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ باشد جمله‌ی چهارم این دنباله کدام است؟

۵ (۴)

۹ (۳)

۴ (۲)

۷ (۱)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۵

۶- اگر A مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعه اعداد صحیح با قدر مطلق کمتر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در Z با پایان است؟

$A \cup B$ (۴)

$A \cap B$ (۳)

$A' \cup B$ (۲)

$A \cap B'$ (۱)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۶

۷- قطار سریع السیر به طور آزمایشی، فاصله دو شهر را بار اول در ۴ ساعت طی کرده است، طبق برنامه تعیین شده، در هر رفت یا برگشت ۵ دقیقه از مدت زمان نوبت قبل کاسته می‌شود، تا مدت زمان این مسافت به ۲ ساعت پیش‌بینی شده برسد، تعداد نوبت‌های آزمایشی کدام است؟

۲۵ (۴)

۲۴ (۳)

۲۰ (۲)

۱۶ (۱)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۶

۸- در آرایه‌ی مربعی مقابل، تفاضل صفرهای توپر در دو جمله دهم و یازدهم کدام است؟

•	•	○	•	○	•	•	○	•	○	○	...
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	...
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	...
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	...

۱۷ (۲)

۲۱ (۴)

۱۹ (۳)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۶

۹- تصاعد هندسی ... و $\frac{1}{2}$ و x و ۲ غیرنژولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

$$\frac{23}{16}(4)$$

$$\frac{11}{8}(3)$$

$$\frac{21}{16}(2)$$

$$\frac{41}{32}(1)$$

دیبرستان - سراسری - ریاضی - ۸۶

۱۰- ده عدد جملات متوالی از دنباله‌ی حسابی‌اند، مجموع ۵ جمله‌ی اول ۵۵ و مجموع ۵ جمله‌ی آخر آن‌ها ۱۳۰ می‌باشد، کوچکترین این اعداد کدام است؟

$$6(4)$$

$$5(3)$$

$$4(2)$$

$$3(1)$$

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۷

۱۱- در دنباله‌ی مثبتی هر جفت از جمله‌های متوالی را با هم جمع می‌کنیم. اعداد حاصل کدام نوع دنباله است؟

$$3(3)$$

$$2(2)$$

$$4(1)$$

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۷

۱۲- اعداد a^2 , $2\sqrt{2}$ و b^2 سه جمله متوالی از تصاعد هندسی‌اند، واسطه عددی بین a و b کدام است؟

$$\sqrt{2}(4)$$

$$1/5(3)$$

$$2(2)$$

$$2/5(1)$$

دیبرستان - سراسری - ریاضی - ۸۷

۱۳- در یک دنباله‌ی هندسی صعودی به صورت ... , b , a , 9 , 4 , a , b مجموع شش جمله اول کدام است؟

$$\frac{1}{8}(4)$$

$$\frac{3}{8}(3)$$

$$\frac{7}{8}(2)$$

$$\frac{3}{8}(1)$$

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۹

۱۴- مجموع n جمله اول از یک تصاعد عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-3)}{4}$ است. مجموع جملاتی از این تصاعد که از

جمله بیست و پنجم شروع و به جمله سی و پنجم ختم شوند، کدام است؟

$$154(4)$$

$$148(3)$$

$$145(2)$$

$$132(1)$$

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۸۹

۱۵- در یک دنباله‌ی هندسی، هر جمله $\frac{2}{7}$ جمله‌ی قبلی آن است. اگر مجموع پنج جمله‌ی اول آن $\frac{211}{27}$ باشد، جمله‌ی اول

کدام است؟

$$4(4)$$

$$3(3)$$

$$2(2)$$

$$1(1)$$

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۰

۱۶- در دنباله‌ی فیبوناتچی، دو مین عدد بخش پذیر بر ۱۳ کدام است؟

$$403(4)$$

$$390(3)$$

$$377(2)$$

$$264(1)$$

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۰

۱۷- مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با

$$\begin{array}{ll} \text{شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟} \\ \frac{49}{3} (۳) & \frac{29}{2} (۲) \\ ۱۸ (۴) & ۹ (۱) \end{array}$$

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۰

۱۸- اگر $k \in \mathbb{Z}$ (عدد صحیح نسبی) آنگاه مجموعه اعداد به کدام صورت می‌تواند فرد باشد؟

$$\begin{array}{ll} 3k+1 (۴) & 2k+6 (۲) \\ 2k-5 (۱) & \end{array}$$

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۹۱

۱۹- در تصاعد هندسی، ۲ و ۱، مجموع چهارده جمله‌ی اول چند برابر مجموع هفت جمله‌ی اول آن است؟

$$\begin{array}{ll} 129 (۴) & 127 (۳) \\ 63 (۲) & 65 (۱) \end{array}$$

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۰

۲۰- جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله‌ی حسابی، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{7}{3} (۴) & \frac{9}{4} (۳) \\ \frac{7}{4} (۲) & \frac{5}{3} (۱) \end{array}$$

دیبرستان - سراسری - تجربی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۱- اگر $A \cap C = \emptyset$ و $A \cap B = \emptyset$ ، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

$$A \cap (B - C) \neq \emptyset \quad (۴) \quad A \cap (B \cap C) = \emptyset \quad (۳) \quad B \cap C \neq \emptyset \quad (۲) \quad B \cap C = \emptyset \quad (۱)$$

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۲- شخص در ماه اول A ریال پس‌انداز کرده، در هر ماه به‌اندازه‌ی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ بیش‌تر از ماه قبل پس‌انداز می‌کند، تا مقدار

پس‌انداز یک ماه آن به دو برابر پس‌انداز ماه اول برسد. اگر در این زمان مجموع پس‌انداز وی ۶۳۰۰۰ تومان باشد، اولین پس‌انداز وی چه قدر بوده است؟

$$\begin{array}{ll} 2400 (۴) & 2200 (۳) \\ 2000 (۲) & 1600 (۱) \end{array}$$

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۳- در دنباله‌ی مثلثی، ۳، ۶، ۱ مجموع جملات دهم و یازدهم، کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 144 (۴) & 132 (۳) \\ 127 (۲) & 121 (۱) \end{array}$$

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۴- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع ۵ جمله‌ی اول آن، $\frac{1}{2}$ مجموع پنج جمله‌ی بعدی است. جمله‌ی دوم چند برابر جمله‌ی اول

است؟

$$\begin{array}{ll} 4 (۴) & 3 (۳) \\ \frac{5}{2} (۲) & \frac{3}{2} (۱) \end{array}$$

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۱

-۲۵- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته باشد،
 ...، (۳,۵)، (۷,۹,۱۱)، (۱) جمله‌ی آخر در دسته‌ی بیستم کدام است؟

۴۲۳ (۴) ۴۲۱ (۳) ۴۱۹ (۲) ۴۱۵ (۱)

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

-۲۶- بین دو عدد ۳۲۴ و ۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

۴۸۸ (۴) ۴۸۶ (۳) ۴۸۴ (۲) ۴۲۸ (۱)

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

-۲۷- اگر $\{A\}$ و $B = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ باشند، مجموعه $[A - (A \cap B)] - [A - (A \cup B)]$ چند عضو دارد؟

۵ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

-۲۸- مجموع ۵ جمله اول از یک دنباله‌ی حسابی صعودی مساوی ۶۰ و مجموع دو جمله بزرگ‌تر سه برابر مجموع سه جمله کوچک‌تر است. قدر نسبت آن کدام است؟

۷ (۴) ۶ (۳) ۵ (۲) ۴ (۱)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

-۲۹- در دنباله‌ی مثلثی با جمله اول ۱، جمله چهاردهم کدام است؟

۱۰۸ (۴) ۱۰۵ (۳) ۹۸ (۲) ۸۴ (۱)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

-۳۰- در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دوم، دو برابر جمله‌ی پنجم و جمله‌ی هشتم می‌توانند سه جمله‌ی متولی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

۷ + ۴ $\sqrt{3}$ (۴) ۵ + ۴ $\sqrt{3}$ (۳) ۵ + ۲ $\sqrt{3}$ (۲) ۲ + ۲ $\sqrt{3}$ (۱)

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۲

-۳۱- به ازای یک مقدار X ، اعداد $2 - X^2$ ، $2X$ و $4 + X^2$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی‌اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله، کدام است؟

$\frac{127}{8}$ (۴) $\frac{63}{4}$ (۳) $\frac{125}{16}$ (۲) $\frac{117}{16}$ (۱)

دیبرستان - سراسری - تجربی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

-۳۲- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و دوم $\frac{9}{2}$ و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ می‌باشد. جمله‌ی سوم این تصاعد کدام است؟

۱۲ (۴) ۹ (۳) ۸ (۲) ۶ (۱)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۸

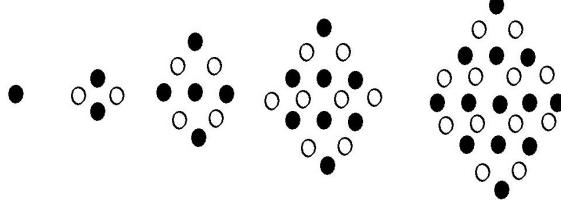
-۳۳- در آرایه‌ی لوزی مقابله عدد صفرهای توپر، در جمله‌ی یازدهم، کدام است؟

(۱) ۶۱

(۲) ۶۲

(۳) ۶۳

(۴) ۶۴



دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۸

-۳۴- در یک تصاعد هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله‌ی اول آن ۳ می‌باشد. مجموع ۶ جمله‌ی اول کدام است؟

(۱) ۱۰/۸

(۲) ۱۱/۲

(۳) ۱۲/۶

(۴) ۱۳/۴

دیبرستان - سراسری - ریاضی - ۸۸

-۳۵- در یک تصاعد عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جمله‌ی متواالی از تصاعد هندسی باشند. چندین جمله‌ی این تصاعد، صفر است؟

(۱) ۹

(۲) ۱۰

(۳) ۱۱

(۴) ۱۲

دیبرستان - سراسری - تجربی - ۸۸

-۳۶- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجدوّر کامل باشد:

(۱) مجموع جملات در دسته‌ی دهم کدام است؟

(۱) ۱۶۹۱

(۲) ۱۷۱۰

(۳) ۱۷۲۹

(۴) ۱۷۴۸

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۴

-۳۷- تفاضل جمله‌ی دهم از جمله‌ی دوازدهم یک تصاعد عددی ۵ و مجموع جمله‌ی دهم و دوازدهم ۲۵ است. جمله‌ی بیست و یکم این تصاعد کدام است؟

(۱) ۳۵

(۲) ۳۶

(۳) ۳۷/۵

(۴) ۳۸/۵

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۴

-۳۸- در یک تصاعد عددی، مجموع چهار جمله‌ای اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم این تصاعد کدام است؟

(۱) ۷/۵

(۲) ۸

(۳) ۸/۵

(۴) ۹

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۵

-۳۹- اعداد ... $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, x, y, z$ چهار جمله‌ی اول از یک تصاعد عددی‌اند. مجموع پانزده جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟

(۱) ۵۷

(۲) ۶۲/۵

(۳) ۶۷/۵

(۴) ۶۸

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۶

-۴۰- در یک تصاعد عددی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله‌ی متواالی از تصاعد هندسی صعودی‌اند. قدر نسبت تصاعد هندسی کدام است؟

(۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۷

-۴۱- در بیست جمله‌ی اول تصاعد عددی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد.

جمله‌ی اول کدام است؟

۱)

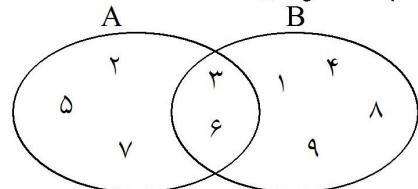
۲)

۳)

۴)

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۸۵

-۴۲- با توجه به شکل مقابل، اجتماع دو مجموعه $(A - B) - (B - A)$ و $(A - B) - (A - B)$ چند عضو دارد؟



۱)

۲)

۳)

۴)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۹

-۴۳- مجموع پنج عدد که جملات متوالی از دنباله حسابی‌اند برابر ۱۰۵، مجموع سه عدد بزرگ‌تر، ۶ برابر مجموع دو عدد کوچک‌تر است. بزرگ‌ترین این اعداد کدام است؟

۱)

۲)

۳)

۴)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۸۹

-۴۴- در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول آن ۱۵۳ می‌باشد. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟

۱)

۲)

۳)

۴)

دیبرستان - سراسری - ریاضی - ۸۹

-۴۵- در یک تصاعد عددی جمله‌ی n ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟

۱)

۲)

۳)

۴)

دیبرستان - سراسری - تجربی - ۸۹

۱)

۲)

۳)

۴)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۹۰

۱)

۲)

۳)

۴)

-۴۶- حد مجموع جملات دنباله هندسی $\dots, \frac{9}{7}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, \frac{2}{1}$ کدام است؟

۱)

۲)

۳)

۴)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۹۰

۱)

۲)

۳)

۴)

-۴۷- در دنباله مثلثی با جمله اول ۱، در جمله چندم عدد مربع کامل غیر ۱ نوشته است؟

۱)

۲)

۳)

۴)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۹۰

۱)

۲)

۳)

۴)

-۴۸- بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، تصاعد هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع

این هشت عدد کدام است؟

۱)

۲)

۳)

۴)

$36(\sqrt{2}+1)$

$30(\sqrt{2}+1)$

$48\sqrt{2}$

$20(2+\sqrt{2})$

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۸

۴۹- در یک تصاعد عددی، جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است. مجموع چند جمله‌ی اول از این تصاعد برابر صفر است؟

۲۱ (۴)

۲۰ (۳)

۱۹ (۲)

۱۸ (۱)

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۸۸

۵۰- در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله متولی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچکترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

دیبرستان - سراسری - تجربی - ۹۰

۵۱- در یک تصاعد عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

۳۸ (۴)

۳۶ (۳)

۳۴ (۲)

۳۲ (۱)

دیبرستان - سراسری - ریاضی - ۹۰

۵۲- مجموعه‌ی A دارای ۳۶ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه‌ی A حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه‌ی جدید با مجموعه‌ی B، کدام است؟

۴۵ (۴)

۴۲ (۳)

۴۱ (۲)

۴۰ (۱)

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۳- در یک دنباله‌ی هندسی ۶ جمله‌ای، مجموع دو جمله‌ی اول ۸۱ و مجموع دو جمله آخر ۱۶ می‌باشد. مجموع این ۶ جمله، کدام است؟

۱۱۵ (۴)

۱۲۴ (۳)

۱۳۸ (۲)

۱۳۳ (۱)

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۴- اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های (A-B) و (B-A) به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌ی اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعدد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدید، کدام است؟

۲۶ (۴)

۲۴ (۳)

۲۳ (۲)

۲۲ (۱)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۵- در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی چهارم ۸ برابر جمله‌ی اول است. اگر جمله‌ی ششم ۲۴ باشد، مجموع شش جمله اول آن، کدام است؟

۴۸/۵ (۴)

۴۷/۷۵ (۳)

۴۷/۵ (۲)

۴۷/۲۵ (۱)

دیبرستان - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۶- بهازای یک مقدار X، اعداد $X - 8$ ، $X + 12$ ، X و X^2 ، به ترتیب سه جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی نزولی‌اند. حد مجموع جملات این دنباله، کدام است؟

۲۷ (۴)

۲۴ (۳)

۲۱ (۲)

۱۸ (۱)

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۳

۵۷- تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی، عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

دیبرستان - سراسری - ریاضی - ۹۴

۵۸- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره‌ی آن دسته باشد.

۱۸۵۰ (۴)

۱۸۰۰ (۳)

۱۷۵۰ (۲)

۱۷۰۰ (۱)

دیبرستان - سراسری - تجربی - ۹۴

۵۹- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره‌ی آن دسته باشد،

۴۰۱۰ (۱)

۴۰۳۰ (۳)

۴۰۲۰ (۲)

۴۰۴۰ (۴)

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۴

۶۰- در دو دنباله‌ی حسابی به صورت‌های ... ۱۲, ۷, ۲, ... و ... ۱۱, ۱۴, ..., ۸ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

۶۱ (۴)

۶۰ (۳)

۵۹ (۲)

۵۸ (۱)

دیبرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۴

۵.۱ کلید تست‌های فصل اول

۴	۳	۲	۱	- ۳۷	۴	۳	۲	۱	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۲
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۰	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۱	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۳
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۶
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۷
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۰
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۱
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۲
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۶

فصل ۲

مثلثات

از نامگذاری مثلثات می توان حدس زد که این شاخه از ریاضیات دست کم در آغاز پیدایش خود به نحوی با "مثلث" و مساله های مربوط به مثلث ارتباط داشته است . در واقع پیدایش و پیشرفت مثلثات را باید نتیجه ای از تلاش های ریاضی دانان در جهت رفع دشواری های مربوط به محاسبه هایی دانست که در هندسه و در اخترشناسی رو به روی دانشمندان بوده است . در ضمن دشواری های هندسی ، خود ناشی از مساله هایی بوده است که دانشمندان در اخترشناسی با آن رو به رو می شده اند و بیشتر جنبه ای محاسباتی داشته اند . پس احتمالاً مثلثات برای استفاده از ستاره شناسی (اخترشناسی) ایجاد شده و کاربرد های اولیه آن نیز در همین باره بوده است . در اخترشناسی اغلب به مساله هایی برخورد می کنیم که برای حل آن ها به مثلثات و دستورهای آن نیازمندیم . ساده ترین این مسائل، پیدا کردن یک کمان دایره (برحسب درجه) است ، وقتی که شعاع دایره و طول وتر این کمان معلوم باشد یا برعکس ، پیدا کردن طول وتری که طول شعاع دایره و اندازه کمان آن معلوم باشد . کهن ترین جداولی که از دانشمندان قدیمی به جای مانده است ، متعلق به اخترشناسان و ریاضی دانان سده ای دوم میلادی است و شاید بتوان این جداول را نخستین گام در پیدایش مثلثات دانست ولی همهی کارهای این ریاضی دانان و اخترشناسان که یونانی بوده اند، در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم های اصلی مثلثات نرسیده اند .

نخستین گام های اصلی به وسیله‌ی آریابهاتا ریاضی دان هندی سده‌ی پنجم میلادی برداشته شد که در واقع تعریفی برای نیم و تریک کمان داد . از این به بعد به تقریب همه کارهای مربوط به شکل‌گیری مثلثات (چه در روی صفحه و چه در روی کره) به وسیله‌ی دانشمندان ایرانی انجام گرفت .

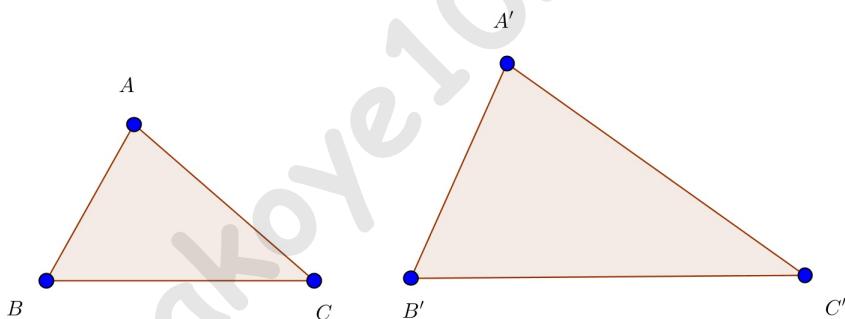
خوارزمی نخستین جدول های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه‌ی ریاضی دانان ایرانی گام هایی در جهت تکمیل جدول ها و گسترش مفهوم های مثلثاتی برداشتند . احمدابن عبدالله حبس حاسب جدول سینوس ها را تقریباً 30° درجه به 30° درجه تنظیم کرد و برای گسترش و برای نخستین بار به دلیل نیاز های اخترشناسی مفهوم " تانزانت " را تعریف کرد . جدی ترین تلاش ها بوسیله‌ی ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت که توانستند مثلثات را تا جایی پیش ببرند که مثلث کروی را هم حل کنند . ابوالوفا با روش جالبی به یاری نابرابری ها توانست مقدار سینوس کمان 30° دقیقه را پیدا کند و سرانجام خواجه نصیرالدین طوسی با

جمع بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود ، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت^۱ . بعد از طوسی جمشید کاشانی ریاضی دان ایرانی زمان تیموریان با روش زیبایی که برای حل معادله‌ی درجه سوم پیدا کرده بود ، توانست راهی برای محاسبه‌ی کمان یک درجه با هر دقیقت دلخواه پیدا کند.

پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سده‌ی پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت . یک نمونه از مواردی که ایرانی بودن این دانش را نشان میدهد از این قرار است : ریاضی دانان ایرانی برای سینوس از واژه‌ی «جیب» و برای کسینوس از واژه‌ی «جیب تمام» استفاده می‌کردند . وقتی نوشه‌های ریاضی دانان به ویژه خوارزمی به زبان لاتین و زبان اروپایی ترجمه شد ، معنای واژه‌ی جیب را در زبان خود به جای آن گذاشتند سینوس . این کلمه در لاتین همان معنای جیب را در عربی دارد .

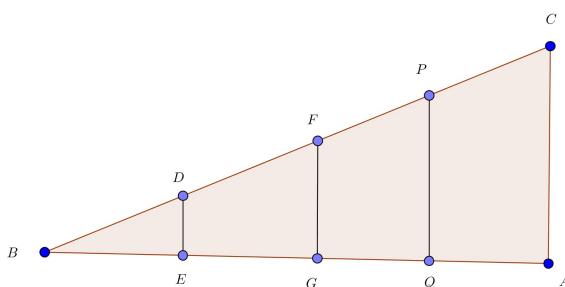
۱.۲ نسبت‌های مثلثاتی

از کلاس نهم می‌دانید چنانچه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند دو مثلث متشابه‌اند . در شکل زیر دو مثلث ABC ، $A'B'C'$ متشابه‌اند .



$$\begin{cases} \angle A = \angle A' \\ \angle B = \angle B' \end{cases} \implies \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

حال در دو مثلث قائم‌الزاویه برابری تنها یک زاویه حاده از مثلث اولی با یک زاویه حاده از مثلث دومی برای تشابه دو مثلث کفایت می‌کند . (چرا؟)



در شکل بالا داریم $\angle A = \angle E = \angle G = \angle Q = 90^\circ$ ولذا مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در راس B مشترکند متشابه

^۱ نام این کتاب کشف القناع فی اسرار شکل القطاع می‌باشد.

هستند. حال اگر نسبت تشابه را در این مثلث‌ها بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{DE}{BE} = \frac{FG}{BG} = \frac{PQ}{BQ} = \frac{CA}{BA}$$

پس برای زاویه B همه این نسبت‌ها مقداری ثابت است . برای این نسبت ثابت نامی انتخاب می‌کنیم. این نام تانژانت زاویه B است. پس داریم:

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

عكس نسبت تانژانت را کتانژانت می‌نامیم. پس داریم:

$$\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

به همین ترتیب در این مثلث‌های متشابه نسبت‌های زیر نیز ثابت‌اند و باید نامی برای آنها انتخاب کرد.

$$\frac{DE}{BD} = \frac{FG}{BF} = \frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BG}{BF} = \frac{BQ}{BP} = \frac{AB}{BC}$$

و

اولی را سینوس و دومی را کسینوس می‌نامند. پس داریم:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$$

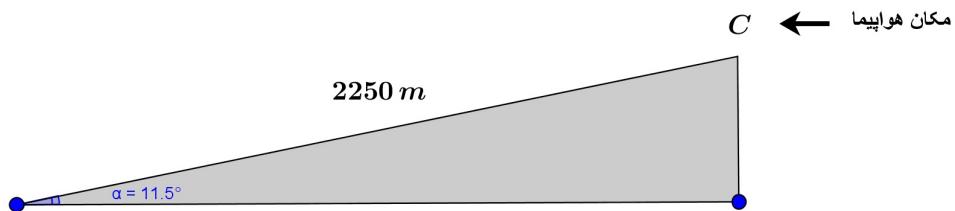
تعريف ۱.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه نسبت‌های ، سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

مثال ۱.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع زاویه قائمه ۱۲ و ۵ واحد تمام نسبت‌های مثلثاتی زوایای حاده را محاسبه کرده و مقایسه کنید.

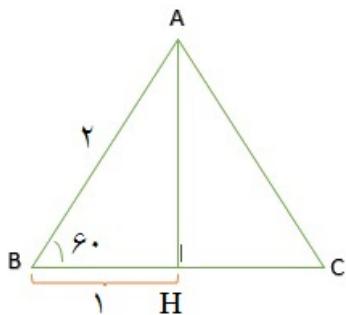
مثال ۲.۲. در مثلث قائم‌الزاویه $(\angle A = 90^\circ)$ داریم: $\sin B = \frac{1}{3}$ ، $AC = 2$ مطلوبست $\cos B$ ، $\tan B$

مثال ۳.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه طول وتر برابر 10 واحد است و تانژانت یکی از زوایای حاده برابر $\frac{3}{4}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بدست آورید.

مثال ۴.۲. مطابق شکل زیر هواپیمایی در نقطه C در آسمان با خطی سیری که با افق زاویه‌ی 115° درجه می‌سازد به سمت فرودگاه در حال کاهش ارتفاع است. اگر هواپیما در امتداد مایل خط سیر خود 2250 m طی کند تا در نقطه B در ابتدای باند به زمین بنشیند، معین کنید هواپیما در چه ارتفاعی در نقطه C قرار داشته است. ($\tan 115^\circ \approx -0.5$)

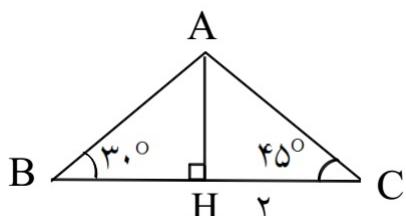


مثال ۵.۲. به کمک یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد و رسم یک ارتفاع آن نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° و 60° درجه را محاسبه کنید.



مثال ۶.۲. یک مربع به ضلع یک رسم کرده و با رسم قطر آن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 45° درجه را محاسبه کنید.

مثال ۷.۲. با توجه به شکل زیر مقدار BH را محاسبه کنید.



تمرین ۱.۲. در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم: $\angle A = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 5$ مطلوبست محاسبه: $\sin B - \cos B$

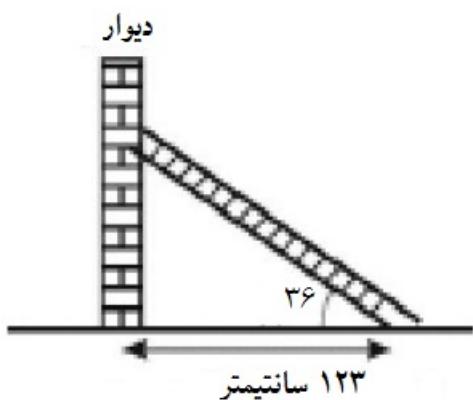
تمرین ۲.۲. مقدار عددی عبارات زیر را بدست آورید

$$\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = ? \quad .1$$

$$\cdot \frac{\tan 45^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 45^\circ \times \tan 60^\circ} = ? \quad .2$$

$$1 + \sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ + 4 \sin 30^\circ \cos 60^\circ = ? \quad .3$$

تمرین ۲.۳. در شکل رو برو طول نردبان را بیابید. ($\cos 36^\circ \approx 0.8$)

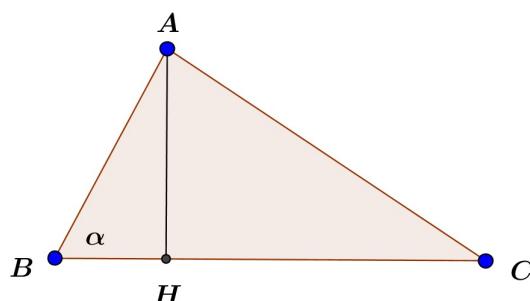


تمرین ۴.۲. سکوی پرتاپ موشکی در ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین قرار دارد. موشک تحت زاویه ۶۰ درجه پرتاپ می‌شود و به حرکت خود تحت همین زاویه ادامه می‌دهد. اگر سایه موشک روی سطح زمین ۱۰۰۰ متر طی کرده باشد خود موشک در چه ارتفاعی است و چه مسافتی در امتداد خط سیر خود طی کرده است؟

مساحت مثلث بر حسب نسبت‌های مثلثاتی

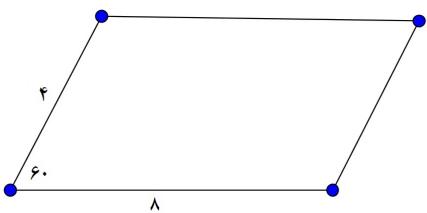
از گذشته می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده‌ی نظیر به آن ارتفاع. حال در شکل زیر می‌خواهیم مساحت مثلث ABC را محاسبه کنیم. برای این منظور می‌نویسیم:

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times \sin \alpha \times BC}{2} = \frac{1}{2} AB \times BC \sin \alpha$$

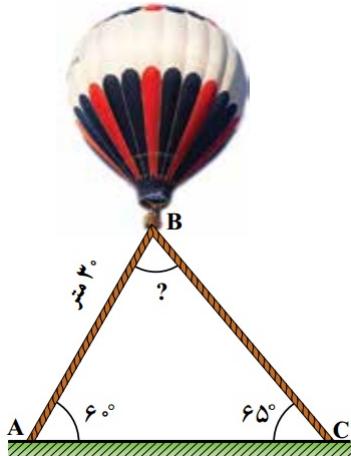


$$AH = AB \times \sin B = AB \times \sin \alpha$$

مثال ۸.۲. مساحت متوازی‌الاضلاع زیر را بدست آورید.



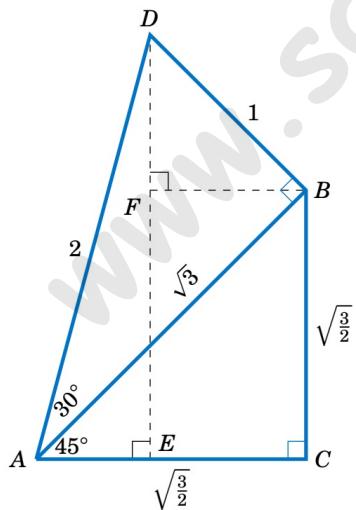
مثال ۹.۲. در شکل زیر بالنی تبلیغاتی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول طناب دوم را بیابید.



بحث نسبت‌های مثلثاتی را با ارائه چند مثال کاربردی و متنوع پی می‌گیریم.

مثال ۱۰.۲. زاویه حاده A در مثلثی چنان است که $\sin A = \frac{2}{3}$ مطلوبست محاسبه سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه.

مثال ۱۱.۲. با توجه به شکل زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه 75° را بدست آورید.

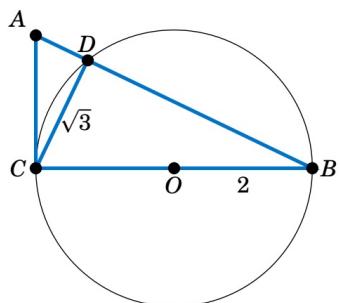


مثال ۱۲.۲. ثابت کنید در یک مثلث قائم‌الزاویه با دو زاویه حاده B ، C همواره داریم: $\sin B = \cos C$ و همین‌طور $\tan B = \cot C$.

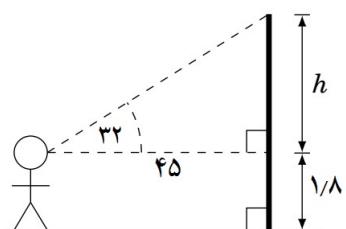
مثال ۱۳.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه حاده A داریم: $\tan A = 3$. مطلوبست محاسبه سایر

نسبت‌های مثلثاتی زاویه A .

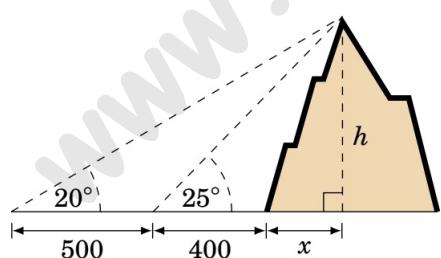
مثال ۱۴.۲. در شکل زیر CB قطر دایره‌ای است به شعاع ۲. مثلث ABC در راس C قائم است و $\sin A$ را بدست آورید. ثانیا طول دو پاره خط $AC = \sqrt{3}$ ، $AD = \sqrt{3}$ را محاسبه کنید. ثالثاً مساحت ABC را به طریق معمول و مثلثاتی بیابید.



تمرین ۵.۲. شخصی روی یک پرچم ایستاده است و به بالاترین نقطه پرچم نگاه می‌کند. زاویه دید چشمی این شخص برابر 32° درجه است. (زاویه‌ی دید که نسبت به سطح افق و بالاترین نقطه میله پرچم است) ارتفاع چشم این شخص از سطح زمین برابر $1/8$ متر است و فاصله این شخص تا میله پرچم 45 متر. طول میله پرچم را بیابید.



تمرین ۶.۲. شخص در فاصله 400 متری کوهی ایستاده است و به بلندترین نقطه از کوه نگاه می‌کند. زاویه دید این شخص نسبت به افق برابر 25° درجه است. وی سپس به اندازه 500 متر به عقب بر می‌گردد و باز هم به بالاترین نقطه قله نگاه می‌کند و این‌بار زاویه دید برابر 20° درجه است. ارتفاع کوه را با توجه به شکل بیابید.

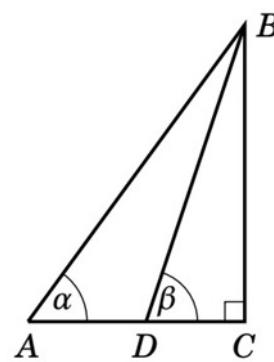


تمرین ۷.۲. با توجه به شکل زیر موارد خواسته شده را ثابت کنید.

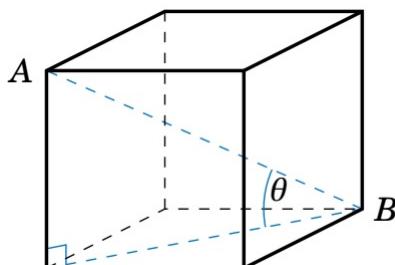
$$(a) BC = \frac{AD}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

$$(b) AC = \frac{AD \cdot \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

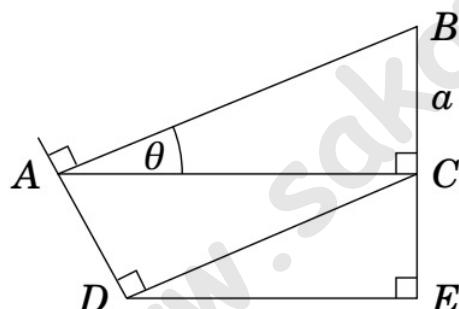
$$(c) BD = \frac{AD \cdot \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$



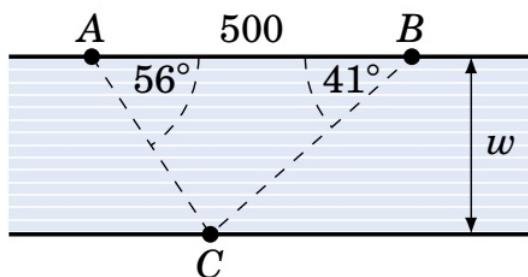
تمرین ۸.۲. مطابق شکل زیر مکعبی به ضلع a مفروض است. اولاً طول قطر مکعب را بیابید. ثانیاً اندازه زاویه θ را محاسبه کنید.



تمرین ۹.۲. در شکل زیر مقادیر a , θ , را معلوم فرض کنید و طول های AC, AB, AD, DC, CE, DF را بحسب این دو مقدار معلوم یعنی a , θ بیابید.

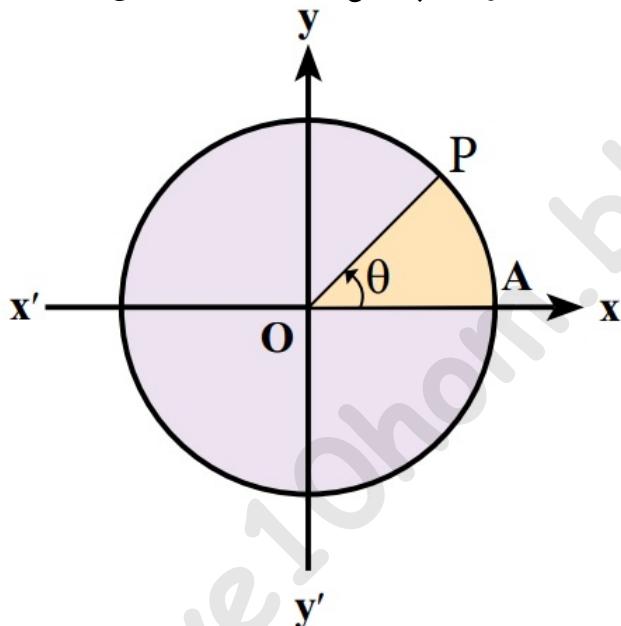


تمرین ۱۰.۲. در شکل زیر دو ساحل رودخانه موازی اند. با توجه به اطلاعات داده شده عرض رودخانه را بدست آورید.

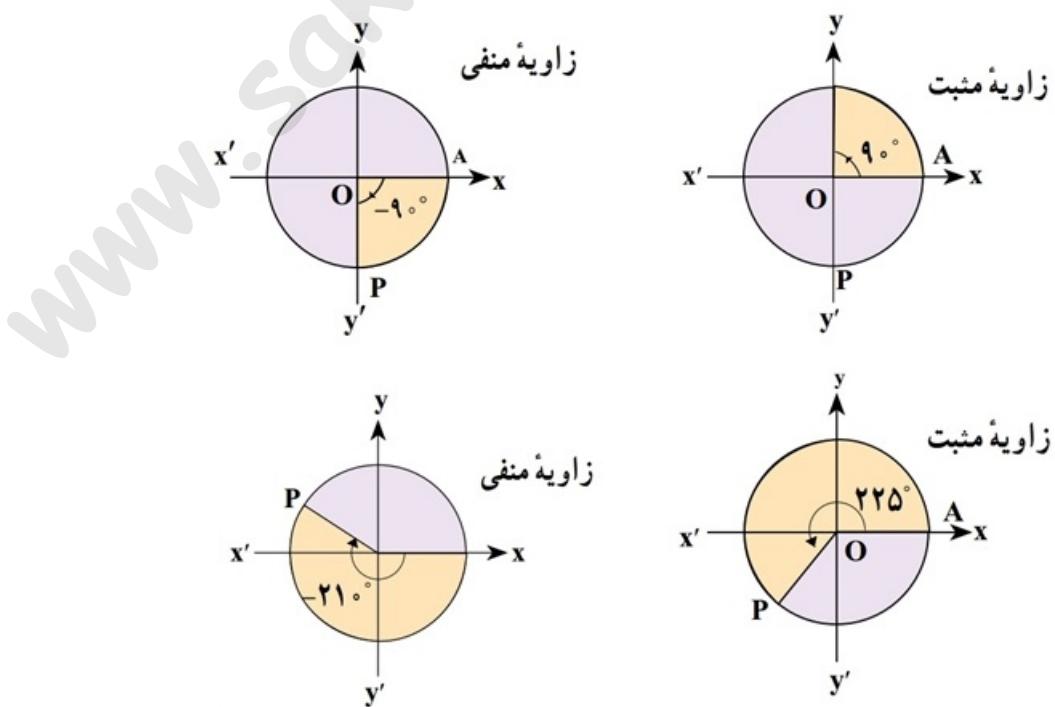


۲۰۲ دایره مثلثاتی

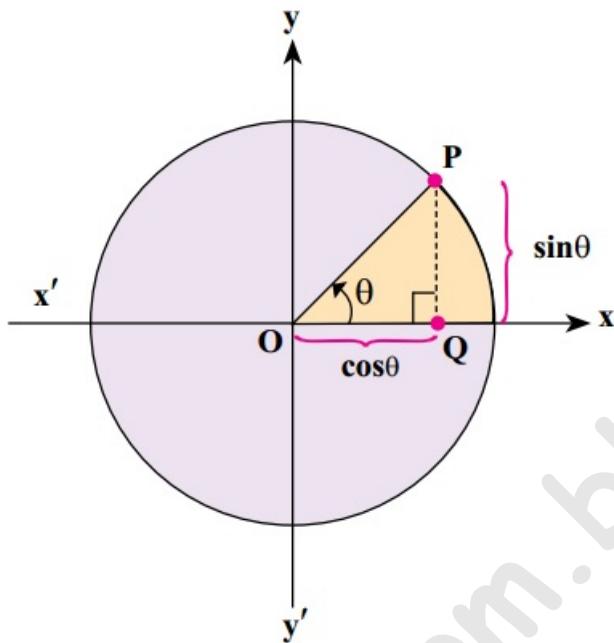
پرسشی که بطور طبیعی به ذهن می‌رسد این است که نسبت‌های مثلثاتی در مورد زوایای غیرحاذه تعریف می‌شود؟ مثلاً برای زاویه 150° درجه می‌توان سینوس تعریف کرد و چگونه؟ جواب مثبت است. اما مثلث قائم‌الزاویه دیگر جوابگوی این تعریف نیست. دایره مثلثاتی را برای این منظور معرفی می‌کنیم. دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدأ مختصات. اگر از نقطه $A(1, 0)$ و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت سریع به حرکت کنیم زاویه‌ای مثبت تولید خواهد شد. در صورت چرخش در جهت عقربه‌های ساعت زاویه‌ی منفی حاصل می‌شود.



در شکل زیر چند زاویه مثبت و منفی در دایره مثلثاتی دیده می‌شود.

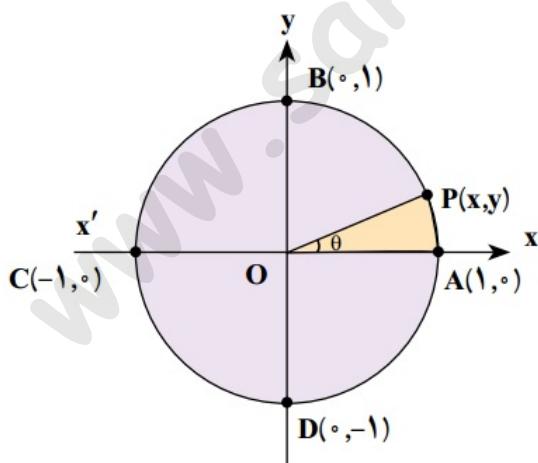


حال نقطه (x, y) را در نظر بگیرید. از نقطه p عمودی بر محور طول‌ها رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی حاصل نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را محاسبه می‌کنیم.



$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{PQ}{OP} = y & \cos \theta &= \frac{OQ}{OP} = x \\ \tan \theta &= \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} & \cot \theta &= \frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{y}\end{aligned}$$

مثال ۱۵.۲. در دایره مثلثاتی زیر نقاط D, C, B, A به ترتیب متناظر به زوایای $270^\circ, 180^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ هستند. نسبت‌های مثلثاتی این زوایا را بدست آورید.

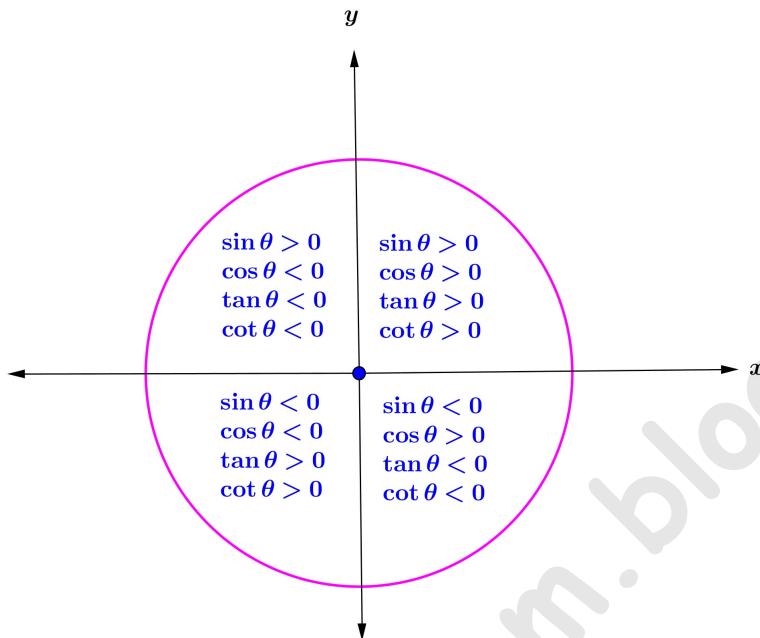


مثال ۱۶.۲. نسبت‌های مثلثاتی زاویه 225° درجه را بیابید.

مثال ۱۷.۲. زاویه θ در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است و $\sin \theta = \frac{5}{\sqrt{14}}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بدست آورید.

چند تذکر مهم:

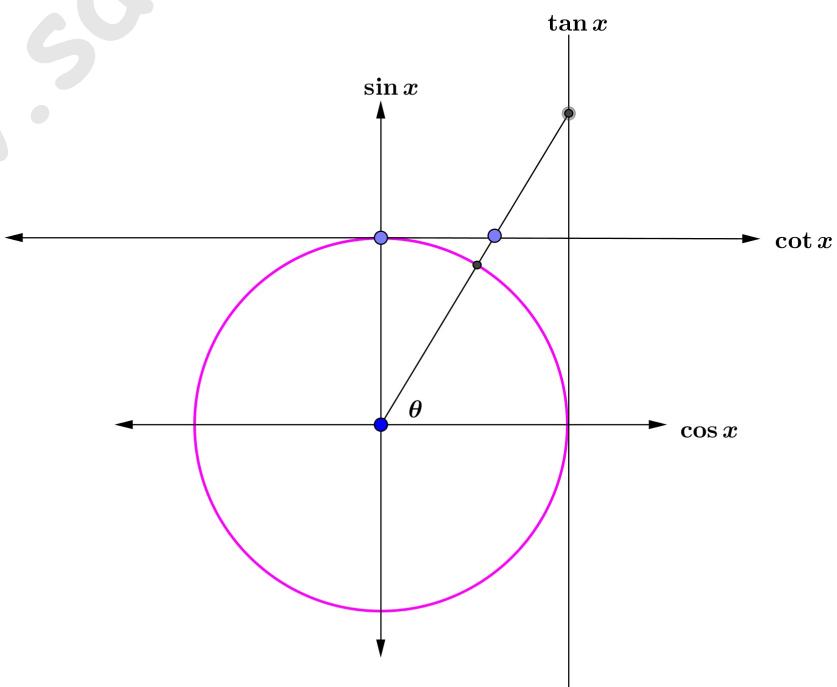
۱. علامت نسبت‌های مثلثاتی با توجه به هر ناحیه در جدول زیر گردآوری شده است.



۲. با توجه به دایره مثلثاتی و تعریف نسبت‌های مثلثاتی متوجه می‌شویم که همواره $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ و $-1 \leq \cos \theta \leq 1$. اما در مورد دو نسبت دیگر یعنی $\tan \theta$, $\cot \theta$ این‌گونه نیست. در واقع این دو نسبت هر مقداری می‌توانند باشند، چه مثبت و چه منفی. به زبان ریاضی:

$$\sin \theta \in [-1, 1], \cos \theta \in [-1, 1], \tan \theta, \cot \theta \in (-\infty, +\infty)$$

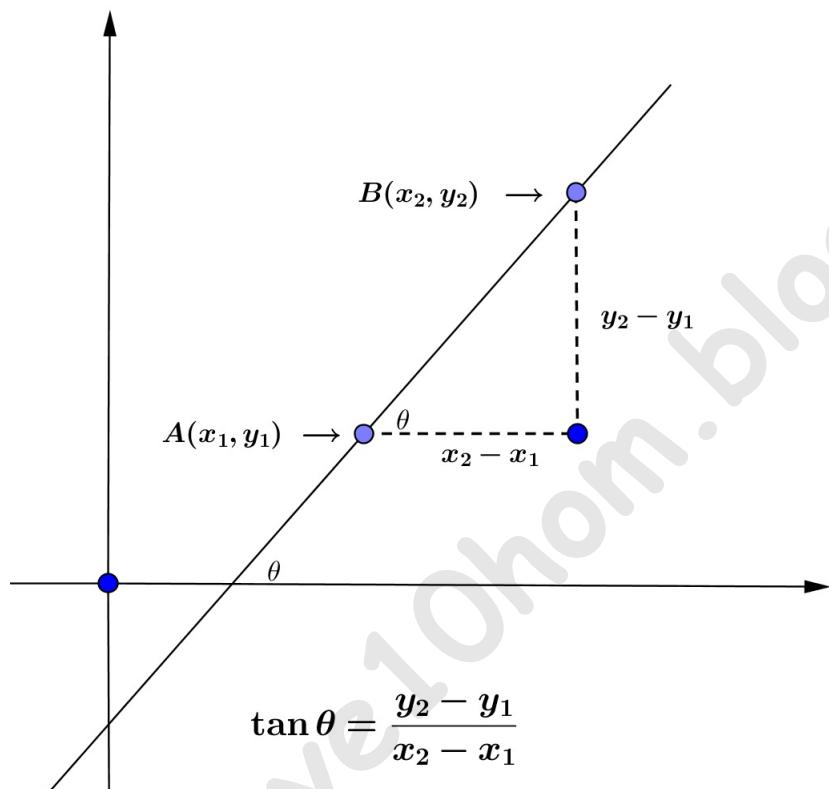
۳. شکلی دیگری از دایره مثلثاتی نیز مرسوم است که در آن چهار محور به نام نسبت‌های مثلثاتی بصورت زیر وجود دارد.



از روی شکل فوق بهتر متوجه خواهید شد که چرا مثلاً $\tan \theta$ می‌تواند هر مقداری را اختیار کند.

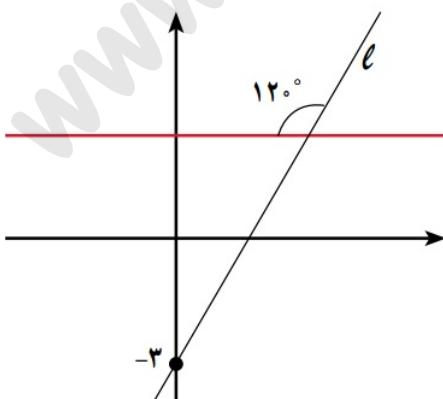
۴. در کلاس نهم معادله خط و مفهوم شیب را خوانده اید. برای یک خط که از نقاط (x_1, y_1) , $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد شیب چنین تعریف می‌شود:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{تفاصل عرض‌ها}}{\text{تفاصل طول‌ها}}$$



همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد برابر شیب خط است. از این نکته می‌توان در نوشتن معادله خط استفاده کرد.
درس را با حل مثال‌های متنوع پی می‌گیریم.

مثال ۱۸.۲. با توجه به شکل معادله خط ℓ را بنویسید.



مثال ۱۹.۲. اگر انتهای کمان α در ناحیه چهارم باشد و $\tan \alpha = -\frac{5}{3}$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

مثال ۲۰.۲. زاویه α به گونه‌ای است که $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بیابید.

مثال ۲۱.۲. فرض کنید $60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ باشد حدود تغییرات m را بیابید.

مثال ۲۲.۲. کمترین و بیشترین مقدار عبارت $\frac{1}{4 + 3 \sin x}$ را بدست آورید.

۳.۲ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

شاید تا الان متوجه شده باشید که چهار نسبت مثلثاتی علیرغم نام‌های متفاوت با هم ارتباط نزدیکی دارند. این روابط را در زیر فهرست کردہ‌ایم و به دنبال آن دلیل درستی آن‌ها را ذکر خواهیم کرد.

$$1) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2) \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$3) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$4) 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$5) 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

مثال ۲۳.۲. فرض کنید $\cos x = -\frac{1}{3}$ باشد و انتهای کمان x در ناحیه سوم باشد. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بدست آورید.

مثال ۲۴.۲. ثابت کنید همواره رابطه $(1 - \sin x)(1 + \sin x)(1 + \tan^2 x) = 1$ برقرار است.

مثال ۲۵.۲. فرض کنید $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد در این صورت مقدار عبارت $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin x - \cos x}$ را بیابید.

مثال ۲۶.۲. درستی رابطه $\frac{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha} = \tan^4 \alpha$ را بررسی کنید.

مثال ۲۷.۲. ثابت کنید رابطه زیر همواره برقرار است.

$$\cos^4 x(1 + 2 \tan^2 x) + (\cos x - 1)(\cos x + 1) = 1$$

مثال ۲۸.۲. درستی رابطه زیر را ثابت کنید. (مسابقات ریاضی دبیرستانی آمریکا ۲۰۰۲)

$$\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$$

مثال ۲۹.۲. اگر $\frac{5}{3} < 1 - \cos \theta < 1$ باشد معین کنید انتهای کمان θ در کدام ناحیه است؟

تمرین ۱۱.۲. ثابت کنید رابطه زیر همواره درست است.

$$3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$$

تمرین ۱۲.۲. درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} - 2 \tan^2 \alpha = 2$$

تمرین ۱۳.۲. درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1 + \cos x}{\sin^4 x} = \frac{1}{\sin x(1 - \cos x)}$$

تمرین ۱۴.۲. درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\sin^4 x} - \frac{1}{\sin^2 x} - \cot^4 x = \cot^2 x$$

تمرین ۱۵.۲. درستی رابطه زیر را تحقیق کنید.

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

تمرین ۱۶.۲. اگر $\frac{3}{4} < \cot x < \frac{4}{3}$ باشد حاصل را بیابید.

تمرین ۱۷.۲. اگر $\frac{1}{3} < \sin x < 1$ باشد و $0^\circ < \cos x < 1$ ، مقدار $\sin x$ را بیابید.

تمرین ۱۸.۲. کدام نامساوی درست است؟

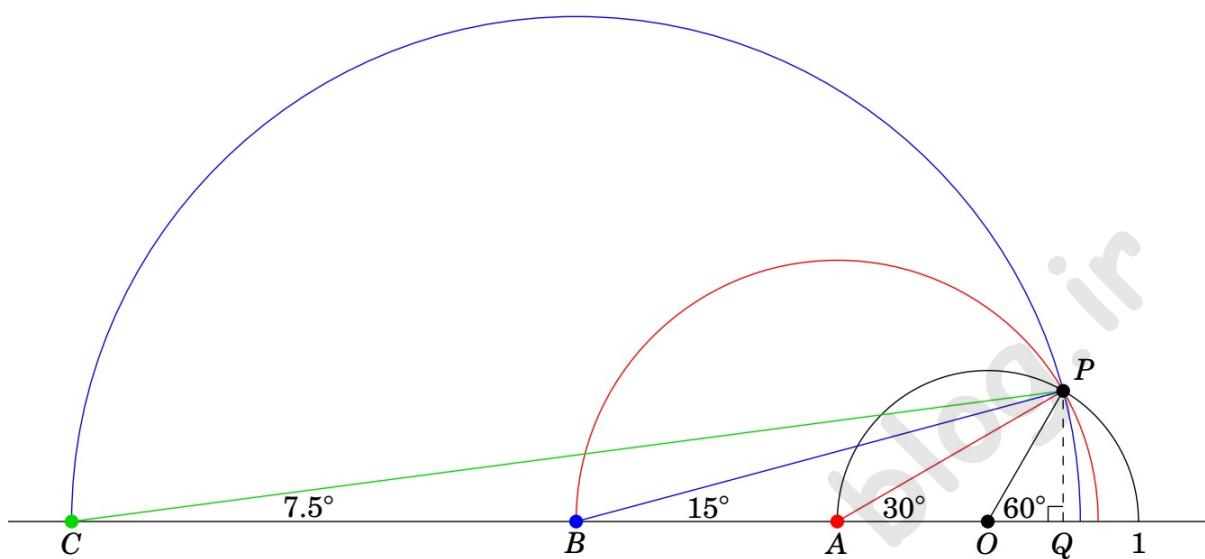
۱. $\sin 5^\circ < \sin 4^\circ$

۲. $\cos 5^\circ < \cos 4^\circ$

۳. $\tan 5^\circ < \tan 4^\circ$

۴. $\cot 4^\circ < \cot 5^\circ$

تمرین ۱۹.۲. به شکل زیر به دقت نگاه کنید. در این شکل ارتباط بین یک زاویه و نصف آن زاویه دیده کی شود. به کمک این شکل نسبت مثلثاتی زاویه 15° درجه را بیابید.



۴.۲ تست‌های فصل دوم

۱- ساده شده‌ی عبارت $(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta)$ کدام است؟

$1 - 2\sin^2 \theta$ (۴)

$1 - 2\cos^2 \theta$ (۳)

$2\tan^2 \theta$ (۲)

$2\cot^2 \theta$ (۱)

۲- حاصل $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$ کدام است؟

$\cot^2 \theta$ (۴)

$\tan^2 \theta$ (۲)

$\cos^2 \theta$ (۲)

$\sin^2 \theta$ (۱)

۳- با فرض $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ حاصل عبارت $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{4}{9}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

۴- حاصل عبارت $\frac{1 + \cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{1}{\sin \theta (1 - \cos \theta)}$ کدام است؟

$\cos \theta$ (۴)

$\sin \theta$ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

۵- حاصل $\left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) - 2\tg^2 \theta$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۰ (۲)

-۱ (۱)

۶- اگر θ زاویه‌ی شعاع \overrightarrow{OM} با جهت مثبت محور X ها باشد، $\sin \theta$ کدام است؟ (O مبدأ مختصات است).

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۷- اگر $\cos 2x = \frac{m-1}{2}$ باشد، گزاره‌ی $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ به ازای چه مقادیری از m برقرار است؟

$0 < m < 1$ (۴)

$0 < m \leq 2$ (۳)

$-1 < m \leq +1$ (۲)

$2 < m \leq 3$ (۱)

۸- ساده شده‌ی عبارت $(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tg^2 \theta)$ کدام است؟

$1 - 2\sin^2 \theta$ (۴)

$1 - 2\cos^2 \theta$ (۳)

$2\tg^2 \theta$ (۲)

$2\cot^2 \theta$ (۱)

۹- حاصل $2\sin^{30^\circ} - \sin^{30^\circ}$ - ۱ برابر با کدام است؟

$\tg 45^\circ$ (۴)

$\cos 60^\circ$ (۳)

$\sin 60^\circ$ (۲)

$\cos 45^\circ$ (۱)

۱۰- عبارت $\frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\operatorname{Sin}^2 \theta + \operatorname{tg} \theta}$ برابر با کدام گزینه است؟

$2 \operatorname{Sin}^2 \theta \cdot \operatorname{tg} \theta$ (۴) $\operatorname{Sin}^2 \theta$ (۳) $\operatorname{Sin}^2 \theta + \operatorname{tg} \theta$ (۲) $2 \operatorname{Sin}^2 \theta$ (۱)

۱۱- اگر $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ باشد، آن‌گاه حدود m کدام است؟

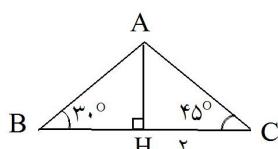
$m < \frac{2}{3}$ (۴) $m > \frac{2}{3}$ (۳) $m > 1$ (۲) $m > \frac{3}{2}$ (۱)

۱۲- اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد کدام نتیجه‌گیری درست است؟

$\operatorname{Sin} x > x > \operatorname{tan} x$ (۴) $\operatorname{Cos} x < \frac{\operatorname{Sin} x}{x}$ (۳) $\frac{\operatorname{Sin} x}{x} > 1$ (۲) $\operatorname{Cos} x > \frac{\operatorname{Sin} x}{x}$ (۱)

۱۳- اگر $x = \frac{\pi}{18}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\operatorname{Sin} 2x}{\operatorname{Cos} 6x} + \frac{\operatorname{Cos} 4x}{\operatorname{Sin} 5x}$ کدام است؟

۲ (۴) ۱ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)



۱۴- در شکل مقابل، مقدار BH کدام است؟

$3\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۱)

۱۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $\hat{A} = 90^\circ$ و $BC = 5$ ، $\operatorname{AC} = 3$ و $\operatorname{Cos} B - \operatorname{Sin} B$ می‌باشد. حاصل $\operatorname{Cos} B - \operatorname{Sin} B$ کدام است؟

$\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۱)

۱۶- حاصل $\operatorname{tg}^2 30 + \operatorname{Sin}^2 45 + \operatorname{Cos}^2 60$ کدام است؟

$\frac{8}{12}$ (۴) $\frac{13}{12}$ (۳) $\frac{10}{12}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۱)

۱۷- اگر $\operatorname{tan} \theta = -\frac{1}{2}$ و انتهای کمان θ در ربع چهارم واقع باشد، $\operatorname{Sin} \theta$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۴) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۱)

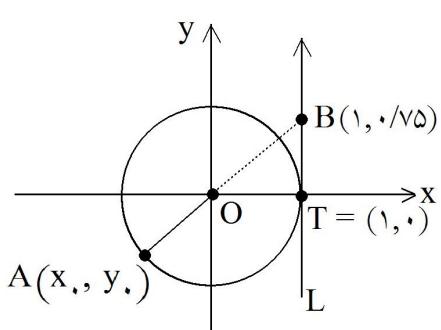
۱۸- عبارت $(\theta \neq \frac{k\pi}{2})$ برابر با کدام گزینه است؟ $\tan\theta(\tan\theta + \cot\theta)$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} \quad (3)$$

$$\cos^2\theta \quad (2)$$

$$\sin^2\theta \quad (1)$$



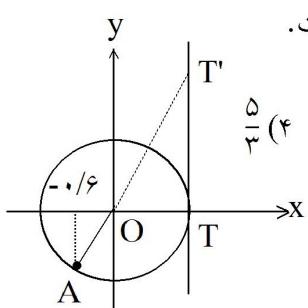
۱۹- مطابق شکل، نقطه‌ی A(x, y) روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد و
امتداد پاره‌خط واصل مبدأ مختصات و نقطه‌ی A خط L را که در نقطه‌ی
T(1, 0) بر دایره مماس است در نقطه‌ی (1, ۰/۷۵) قطع کرده است. حاصل x + y کدام است؟

$$-0/8 \quad (1)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$-1/2 \quad (3)$$

$$-1/4 \quad (4)$$



۲۰- در شکل مقابل، طول نقطه‌ی A که روی دایره‌ی مثلثاتی واقع است، برابر (-۰/۶) است.
طول پاره‌خط TT' کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

۲۱- ساده شده‌ی عبارت $a = \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x \cos x} - \tan x$ همواره کدام است؟

$(\sin x \neq -1, \cos x + \sin x \cos x \neq 0)$

$$-2\tan x \quad (4)$$

$$\frac{\cos^2 x}{\sin x} \quad (3)$$

$$\frac{-\sin^2 x}{\cos x} \quad (2)$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} \quad (1)$$



۲۲- در شکل مقابل، $\cos C-hat$ و $\cos A-hat = 30^\circ$ کدام است.

$$\sqrt{3}/4 \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

۲۳- حاصل $\sin^2 x(1 + \cos^2 x) + \cos^2 x(1 - \sin^2 x)$ همواره کدام است؟

$$\sin^2 x \quad (4)$$

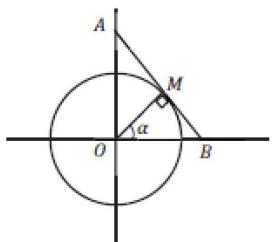
$$\cos^2 x \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۲۴- حاصل $\sin 30^\circ \tan 60^\circ$ برابر است با:

$$\sqrt{3} \cos^2 30^\circ \quad (4) \quad 2 \cos 30^\circ \tan 30^\circ \quad (3) \quad \sqrt{3} \sin^2 45^\circ \quad (2) \quad \sin^2 45^\circ \quad (1)$$



۲۵- با توجه به دایره‌ی مثلثاتی زیر کدام پاره خط برابر $\frac{1}{\sin \alpha}$ می‌باشد؟

$$OA \quad (2) \quad OB \quad (1) \\ MB \quad (4) \quad AB \quad (3)$$

۲۶- اگر $\cos \theta = \frac{5}{3}$ و $\tan \theta > 0$ باشد انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟

$$(4) \text{ چهارم} \quad (3) \text{ سوم} \quad (2) \text{ دوم} \quad (1) \text{ اول}$$

۲۷- حاصل عبارت $\cos^2 \theta (1 + 2 \tan^2 \theta) + (\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$ کدام است؟

$$(2) \quad (4) \quad (1) \quad (3) \quad (2) \text{ صفر} \quad (1) \quad (-1)$$

۲۸- اگر $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin x - \cos x}$ باشد، حاصل $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ کدام است؟

$$-\sqrt{2} \quad (4) \quad \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (3) \quad \sqrt{2} \quad (2) \quad (1) \text{ صفر}$$

۲۹- اگر $\sin x = 2 \cos x$ باشد، حاصل $\cot x$ کدام است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (4) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad -2 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

۳۰- اگر $\tan x \sin x < 0$ و $\cot x \cos x > 0$ ، آنگاه انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

$$(4) \text{ چهارم} \quad (3) \text{ سوم} \quad (2) \text{ دوم} \quad (1) \text{ اول}$$

۳۱- اگر $x < 30^\circ < 25^\circ < 20^\circ$ و $\cos 2x = \frac{2m-1}{2}$ ، آنگاه حدود تغییرات m در کدام فاصله است؟

$$(\frac{1}{2}, \cos 50^\circ) \quad (4) \quad (1, \frac{3}{2}) \quad (3) \quad [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \quad (2) \quad (1, \frac{3}{2}) \quad (1)$$

۳۲- اگر $\sin \alpha > 0$ و $\tan \alpha + \sin \alpha < 0$ ، آنگاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

$$(4) \text{ چهارم} \quad (3) \text{ سوم} \quad (2) \text{ دوم} \quad (1) \text{ اول}$$

۳۳- فرض کنیم مکان یک جسم غوطه‌ور در آب نسبت به زمان با معادله‌ی $h = \sin^2 t + 2 \sin t + 9$ تغییر کند که در آن h ارتفاع جسم از کف استخرا بر حسب متر و t زمان است. اختلاف بیشترین و کمترین ارتفاع جسم از کف استخرا چند متر است؟

۲(۴)

۸(۲)

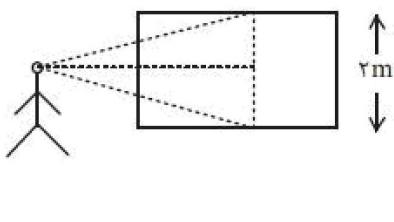
۴(۲)

۹(۱)

۳۴- اگر $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ ، کدام‌یک از رابطه‌های زیر درست است؟

$$\operatorname{Cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \quad (۴) \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{Cotg} \beta \quad (۲) \quad \operatorname{Sin} \alpha = \operatorname{Cos} \beta \quad (۲) \quad \operatorname{Cos} \alpha = \operatorname{Sin} \beta \quad (۱)$$

۳۵- در یک نمایشگاه نقاشی زهره مقابله یک تابلوی ۲ متری ایستاده است. اگر او سر خود را تکان ندهد بالای تابلو را تحت زاویه‌ی 45° و پایین آن را تحت زاویه‌ی 30° می‌بیند. فاصله‌ی زهره تا تابلو چند متر است؟



۱) $3 - \sqrt{3}$

۲) $\sqrt{3} - 1$

۳) $6 - \sqrt{3}$

۴) $\sqrt{6} - 1$

۳۶- در مثلث ABC بین اضلاع رابطه‌ی $\hat{AB} = 2\hat{BC}$ برقرار است و $\angle A = 30^\circ$. آن‌گاه نوع مثلث کدام است؟

(۱) متساوی‌الساقین

(۲) قائم‌الزاویه

(۳) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین

(۴) منفرجه‌الزاویه

۳۷- در یک متوازی‌الاضلاع یکی از زاویه‌ها 120° و طول اضلاع مجاور ۳ و ۵ سانتی‌متر است. مقدار عددی نسبت قطر بزرگ به مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $\frac{2}{105\sqrt{3}}$ (۴)

۲) $\frac{28}{15\sqrt{3}}$ (۳)

۳) $\frac{4}{105\sqrt{3}}$ (۲)

۴) $\frac{14}{15\sqrt{3}}$ (۱)

۳۸- اگر $\sin^2 x \cdot \cot x < 0$ باشد، انتهای کمان X در کدام ناحیه دایره‌ی مثلثاتی واقع نیست؟

(۱) دوم یا چهارم

(۲) اول یا چهارم

(۳) اول یا دوم

(۴) اول یا سوم

(۱) چهارم

(۲) سوم

(۳) دوم

(۴) اول

۳۹- در کدام ناحیه از دایره‌ی مثلثاتی، $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$ و $\alpha > 0$ است؟

(۱) اول

(۲) سوم

(۳) دوم

(۴) اول

۴۰- در مثلثی $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$ و $b = 6\sqrt{3}$ ، $a = 6$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی C کدام است؟

$\frac{\pi}{6}$ یا $\frac{\pi}{2}$ (۴)

$\frac{2\pi}{3}$ یا $\frac{\pi}{2}$ (۳)

$\frac{\pi}{2}$ فقط (۲)

$\frac{\pi}{3}$ فقط (۱)

۴۱- اگر $\sin \alpha > 0$ ، آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

(۴) چهارم (۳) سوم (۲) دوم (۱) اول

۴۲- حاصل عبارت $\operatorname{tg} \frac{\pi}{13} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{13} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{13} + \dots + \operatorname{tg} \frac{13\pi}{13}$ کدام است؟

۲ (۴)

$2\operatorname{tg} \frac{\pi}{13}$ (۳)

۲ صفر (۲)

۱ (۱)

۴۳- اگر $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ و $2m - 1 < \cos 3x = 2m$ باشد، m کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{3}{7}$ (۲)

$\frac{5}{4}$ (۱)

۴۴- کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

$\cot 5^\circ < \tan 84^\circ$ (۴) $\sin 5^\circ > \sin 10^\circ$ (۳) $\cos 5^\circ > \sin 84^\circ$ (۲) $\cos 5^\circ < \cos 10^\circ$ (۱)

۴۵- اگر $\pi < \theta < \frac{7\pi}{6}$ حاصل $A = \sqrt{\sin^2 \theta (1 + \operatorname{Cotg} \theta) + \cos^2 \theta (1 + \operatorname{tg} \theta)}$ است؟

$\sin \theta + \cos \theta$ (۲)
 $-\sin \theta + \cos \theta$ (۴)

$-(\sin \theta + \cos \theta)$ (۱)
 $\sin \theta - \cos \theta$ (۳)

۵.۲ کلید تست های فصل دوم

۴	۳	۲	۱	- ۳۷	۴	۳	۲	۱	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
			<input checked="" type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۰
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۱
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲
			<input checked="" type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۵
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۶
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
			<input checked="" type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۸
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۰
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۲
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۷
			<input checked="" type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۰
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۱
			<input checked="" type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۲
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۶

فصل ۳

توان های گویا و عبارات جبری

۱.۳ ریشه و توان اعداد حقیقی

در سال گذشته با ریشه های دوم و سوم عددها آشنا شده اید. ریشه و توان رابطه دو سویه ای با هم دارند.

$$\frac{\text{توان سه}}{\text{ریشه سوم}} = -27 \quad \text{یا} \quad (-3)^3 = -27 \longleftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$$

مثال ۱.۳. در هر مورد جاهای خالی را پر کنید.

$$2^4 = 16 \longleftrightarrow$$

$$11^2 = 121 \longleftrightarrow$$

$$(0,25)^2 = 0,0625 \longleftrightarrow$$

$$(0,5)^2 = 0,25 \longleftrightarrow$$

$$(-9)^4 = 81 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{81} = 9 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{27} = 3 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{100} = 10 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{1000} = 10\sqrt{10} \longleftrightarrow$$

مثال ۲.۳. حجم یک مکعب برابر 50 cm^3 است. ضلع مکعب با دقت یک رقم اعشار چقدر است؟

در حالت کلی توان و ریشه رابطه‌ی عکس با هم دارند. مطالب مطرح شده در بالا را بصورت دقیق‌تر در تعریف زیر آورده‌ایم.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $n \geq 2$ عددی طبیعی باشد. در این صورت عدد حقیقی b را یک ریشه n ام عدد حقیقی a گوییم هرگاه $b^n = a$ باشد.

مثلاً ۳ - ریشه پنجم $-243 = -3^5$ است چرا که همچنین دو عدد ۲ و -2 - ریشه چهارم $16 = 2^4$ باشند چراکه $16 = 2^4$ است. اگر n زوج باشد عدد حقیقی و مثبت a دارای دو ریشه n ام می‌باشد که قرینه یکدیگرند. در این حالت ریشه n ام مثبت را ریشه n ام اصلی می‌نامیم و با نماد $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم. پس حاصل عبارت $\sqrt[3]{81}$ فقط برابر ۳ است و هیچگاه از عبارت نادرست $= -\sqrt[3]{81}$ استفاده نمی‌کنیم. اعداد منفی دارای ریشه n ام زوج نیستند ولی ریشه n ام فرد دارند. مثلاً $\sqrt[3]{-32} = -2$ وجود ندارد اما

مثال ۳.۳. کامل کنید.

$$1) \sqrt[3]{64} =$$

$$2); \sqrt[4]{64} =$$

$$3) \sqrt[5]{1024} =$$

$$4) \sqrt[4]{0,0625} =$$

$$5) \sqrt{\frac{121}{100}} =$$

$$6) \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}} =$$

$$7) \sqrt{\frac{36}{25}}$$

$$8) \sqrt[3]{2\frac{1}{27}}$$

$$9) \sqrt[3]{(2\sqrt{2})^2}$$

$$10) \sqrt{8\sqrt{4\sqrt[3]{64}}}$$

مهمترین خواص رادیکال‌ها در زیر فهرست کرده‌ایم.

$$1) \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد} \\ |a| & \text{زوج} \end{cases}$$

$$2) \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{ واضح است که باید } a, b \text{ مثبت باشند.}$$

$$3) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$4) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[mn]{a^m} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad a \geq 0.$$

$$5) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad a \geq 0.$$

$$6) a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} & n > 1 \text{ فرد} \\ \sqrt[n]{a^n b} & b \geq 0, \quad a \geq 0 \text{ زوج} \\ -\sqrt[n]{a^n b} & b \geq 0, \quad a \leq 0 \text{ زوج} \end{cases}$$

$$7) \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a} \quad a > 0, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

یادداشت تاریخی: رسم عدد $\sqrt[3]{2}$ روی محور یا کلا رسم پاره خطی با طول $\sqrt[3]{2}$ یکی از قدیمی‌ترین مسائل در تاریخ ریاضیات است. این مسئله به تضعیف مکعب معروف است. داستانی نقل می‌کنند که یکی از فراعنه مصر که مقبره‌ای برای فرزندش می‌ساخته (مقبره به شکل مکعب مستطیل بوده است. البته مدفن اصلی مقبره) به مهندسان دستور داده که مقبره کوچک است و آن را دو برابر کنید. مهندسان به اشتباه اضلاع مکعب را دو برابر کرده‌اند و مقبره بسیار بزرگتر از انتظار پادشاه بود. در واقع مکعب مستطیلی که حجم آن دو برابر دیگری باشد نیاز به ترسیم و استفاده از عدد $\sqrt[3]{2}$ دارد. اما به کمک خط‌کش و پرگار ساده‌این کار امکان‌پذیر نیست. در این زمینه می‌توانید مسئله تضعیف مکعب را در گوگل جستجو کنید. حال ممکن است این سوال به ذهنتان خطور کند که از کجا بدانیم چه اعدادی را می‌شود با خط‌کش و پرگار ترسیم کرد. پاسخ دقیق به این پرسش درحال حاضر با اطلاعات شما غیرممکن است اما بطور خلاصه می‌توان گفت تمام اعداد گویا ترسیم پذیرند. عددی حقیقی چون ۲ ترسیم پذیر با خط‌کش و پرگار است هرگاه بتوان با تعداد متناهی عملیات جمع یا تفریق یا ضرب یا تقسیم و یا ریشه دوم گرفتن از اعداد صحیح حاصل شود. پس با این حساب چون ۲ و ۳ ترسیم پذیرند پس عدد $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}$ نیز ترسیم پذیر است.

تذکر مهم: آیا بدون استفاده از ماشین حساب می‌توان مقدار تقریبی (اما با دقت بالا) رادیکال‌ها را بدست آورد؟ پاسخ مثبت است. دستور زیر در این ارتباط بسیار مفید است:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n \pm b} \approx a \pm \frac{b}{na^{n-1}}$$

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{4^3 + 1} \approx 4 + \frac{1}{3 \times 4^2} = 4 + 0,02 = 4,02$$

$$\sqrt[5]{30} = \sqrt[5]{25 - 2} \approx 2 - \frac{2}{5 \times 2^4} = 2 - 0,02 = 1,98$$

مثال ۴.۳. درست و نادرست را مشخص کنید.

- ۱ - هر عدد حقیقی دو ریشه پنجم دارد که قرینه یکدیگرند.
- ۲ - ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ دو عدد $\sqrt[4]{16} \pm \sqrt[4]{16}$ می‌باشند.
- ۳ - هر عدد همواره ریشه n ام دارد.
- ۴ - هر عدد فرد همواره دارای ریشه هفتم است.

مثال ۵.۳. آیا رابطه $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ درست است؟ چرا؟

مثال ۶.۳. آیا رابطه $a = (\sqrt[n]{a})^n$ همیشه درست است؟ چرا؟

مثال ۷.۳. اگر $x = \sqrt[n]{a}$ باشد و فرجه n را افزایش دهیم برای مقدار x چه اتفاقی می‌افتد؟ بزرگتر می‌شود یا کوچکتر می‌شود؟

مثال ۸.۳. از دو عدد $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[4]{3}$ کدام بزرگتر است؟

مثال ۹.۳. عدد $\sqrt[3]{321}$ مابین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

مثال ۱۰.۳. کامل کنید.

$$1) \sqrt[3]{125} =$$

$$2) \sqrt[5]{-32} =$$

$$3) \sqrt[7]{128} =$$

$$4) \sqrt[8]{256} =$$

$$5) \sqrt[9]{-1} =$$

$$6) \sqrt[4]{625} =$$

$$7) -\sqrt[4]{16} =$$

$$8) \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} =$$

$$9) \sqrt[3]{-0.001} =$$

$$10) \sqrt[6]{0} =$$

$$11) \sqrt[4]{(-2)^4} =$$

$$12) \sqrt[5]{(-2)^5} =$$

$$13) \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} =$$

$$14) a^{\frac{1}{4}} \bigcirc a^{\frac{3}{4}} \quad 0 < a < 1$$

$$15) \sqrt{a} \bigcirc \sqrt[3]{a} \quad 0 < a < 1$$

$$16) \sqrt[3]{a} \bigcirc \sqrt[5]{a} \quad 0 < a < 1$$

$$17) (\sqrt[4]{16})^4 =$$

$$18) (\sqrt[3]{-8})^2 =$$

$$19) \sqrt{150} =$$

$$20) \sqrt{486} =$$

$$21) \sqrt[3]{1080} =$$

$$22) \sqrt[5]{800} =$$

$$23) \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \times \sqrt[3]{\frac{9}{16}} =$$

$$24) \sqrt[12]{128 \times 314}$$

مثال ۱۱.۳. حاصل عبارات زیر را تا سرحدامکان ساده کنید.

$$۱) \sqrt[۴]{\frac{(a+b)^۴}{(a-b)^۴}} =$$

$$۲) \sqrt[۴]{x^۲ + x + ۱} =$$

$$۳) \frac{\sqrt[۴]{x^۳y^۳}}{\sqrt{xy}}$$

$$۴) ۲\sqrt{۲۷} \times ۳\sqrt{۱۲} =$$

$$۵) \sqrt[۳]{a^۲} \times \sqrt[۴]{a^۳} =$$

$$۶) \sqrt[۵]{a^۳} \times \sqrt[۶]{a^۵} \times \sqrt[۳]{a^۲} =$$

$$۷) \sqrt[۴]{۴ - ۲\sqrt{۲}} \times \sqrt[۴]{۶ + ۴\sqrt{۲}} =$$

$$۸) \sqrt[۳]{۲\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲}}} =$$

$$۹) \sqrt[۴]{۶ + ۴\sqrt{۲}} \times \sqrt{۲ - \sqrt{۲}} =$$

$$۱۰) \sqrt{(c-۱)^۲} - \sqrt{(۱+c)^۲} = , c \in [-۱, ۱]$$

$$۱۱) (۲\sqrt{۲} - \sqrt{۵} + ۳\sqrt{۲})(\sqrt{۱۸} - \sqrt{۲۰} + ۲\sqrt{۲})$$

تمرین ۱.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$1) \sqrt[5]{-32(x-y)^{10}} =$$

$$2) \sqrt[3]{-(x-y)^6} =$$

$$3) \sqrt[3]{27c^7} =$$

$$4) \sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{2} =$$

$$5) \mp \sqrt{6/25} =$$

$$6) \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} =$$

$$7) \sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{11+4\sqrt{6}} =$$

$$8) \sqrt{31} \times \sqrt{6-\sqrt{5}} \times \sqrt{3+\sqrt{3-\sqrt{5}}} \times \sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{5}}} =$$

$$9) \sqrt{11-2\sqrt{2}} =$$

$$10) \sqrt{13+\sqrt{48}} =$$

$$11) \sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \times$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} =$$

$$12) \sqrt[4]{\frac{-243}{x^4 - \sqrt{x^4 + 8x^2 + 9}}} =$$

$$13) x\sqrt{-x} \times \sqrt[3]{x} =$$

۲.۳ توان های گویا

از کلاس نهم برخی مطالب را در مورد توان می‌دانید. با اینحال جهت مرور، مطالب زیر را آورده‌ایم.

تعریف ۲.۳. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ باشد و $a \in \mathbb{R}$ عددی دلخواه. عدد a^n را بصورت:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ مرتبه}}$$

تعریف می‌کنیم. برای اعداد صحیح منفی نیز این تعریف قابل تعمیم است. a^{-n} را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

در نهایت $1 = a^0$ تعریف می‌شود و حال a^n را برای تمام اعداد صحیح تعریف کرده‌ایم. مهمترین خواص توان عبارتند از:

$$\cdot a^n \times a^m = a^{m+n} \quad ۱ - \text{همواره}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad ۲ - \text{همواره}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad ۳ - \text{همواره}$$

پرسش: آیا دو مقدار a^{m^n} و $(a^m)^n$ مساوی‌اند؟ چرا؟

حال می‌خواهیم توان را به اعداد گویا تعمیم دهیم.

گازی با فشار وارد یک مخزن می‌شود. در هر دقیقه فشار گاز دو برابر می‌شود تا به فشار معینی برسد.

دقیقه	۱	۲	۳	...	n
فشار	۲	2^2	2^3	...	2^n

حال پرسش این است که در ۳۰ ثانیه پس از دقیقه دوم فشار گاز چقدر خواهد بود؟ واضح است که جواب عددی چون a است که $2^3 < a < 2^2$. چون زمان دقیق را داریم پس می‌توان ادعا کرد که $a = 2^{\frac{5}{4}}$ که البته درست است اما چه معنایی می‌دهد؟ اگر تصور کنیم مقدار فشار در هر ۳۰ ثانیه x برابر می‌شود پس باید بعد از ۱ دقیقه $x \times x = x^2$ برابر شود اما بعد از یک دقیقه دو برابر فشار داریم یعنی $2 = x^2$ و لذا $x = \sqrt{2}$. حال کل زمان دو نیم دقیقه شامل ۵ زمان ۳۰ ثانیه است پس فشار می‌شود $x^5 = \sqrt[4]{2^5}$ یعنی $a = x^5 = \sqrt[4]{2^5}$. بعه عبارت بهتر باید داشته باشیم

$$2^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{2^5}$$

حال می‌توان در حالت کلی توان گویای یک عدد حقیقی را تعریف کرد.

تعريف ۳.۳. فرض کنید a عددی حقیقی باشد. اگر $m, n \in \mathbb{N}$ باشند تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال ۱۲.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $(-\lambda)^{\frac{1}{3}} =$

۲) $\lambda^{\frac{1}{3}} =$

۳) $(\lambda)^{-\frac{1}{3}} =$

۴) $(-\lambda)^{\frac{1}{4}} =$

۵) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[5]{y}}{\sqrt[6]{z}}} =$

۶) $(\lambda^2)^{\frac{3}{2}} =$

۷) $\sqrt[5]{\lambda} + (\sqrt[3]{\sqrt[2]{\lambda}})^3 - \lambda^{\frac{3}{2}} - \lambda^{\frac{1}{4}} =$

تمرین ۲۰.۳. درستی روابط حاکم بر اعداد تواندار که قبلا در مورد توان های صحیح گفته شده را در مورد توان های گویا تحقیق کنید. بعنوان نمونه

$$\begin{aligned} a^r \times a^s &= a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{pn}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{qm+pn}} \\ &= a^{\frac{pn+qm}{nq}} \\ &= a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \\ &= a^{r+s} \end{aligned}$$

مثال ۱۳.۳. آیا تساوی $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ درست است؟ در مورد جواب بحث کنید.

مثال ۱۴.۳. هرگاه $a > 1$ باشد ثابت کنید $a^{n-1} < a^n < a^{n+1}$. در حالتی که $0 < a < 1$ باشد چه حکمی می‌توان کرد؟ ادعای خود را ثابت کنید.

مثال ۱۵.۳. آیا محاسبه زیر درست است؟

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = \left[(-3)^4 \right]^{\frac{1}{4}} = \left[(-3)^{\frac{1}{4}} \right]^4 = (-3)^{\frac{1 \times 4}{4}} = (-3)^1 = -3$$

مثال ۱۶.۳. نیلوفر و کیوان هر کدام عبارت $\sqrt[3]{a^2}$ را ساده کرده اند. جوابهای آنها بصورت زیر است. جواب کدام دقیق تر است؟ چرا؟

$$\text{راه حل کیوان} \longrightarrow \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3 \times 2]{a^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$\text{راه حل نیلوفر} \longrightarrow \sqrt[3]{a^2} = \begin{cases} \sqrt[3]{a} & a > 0 \\ \sqrt[3]{-a} & a < 0 \end{cases}$$

مثال ۱۷.۳. از رابطه $(\frac{1}{2})^{2\alpha-3} = 4 \times 16^\alpha$ مقدار α را بیابید.

تمرین ۳۰.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$1) (\frac{3}{8})^{-\frac{2}{3}}$$

$$2) \left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}} \right)^2 \times \sqrt{\frac{1}{xy}} \times \left(\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \right)^{-1}$$

$$3) \left(a^{\frac{5}{4}} \right)^{\circ 7} \div \left(d^{-\frac{1}{4}} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$4) \left(a^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{6}{5}} \times a^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{4}{5}}$$

$$5) \left(\sqrt[3]{32 \sqrt[4]{16 \sqrt[5]{128}}} \div \sqrt[4]{1024 \sqrt[5]{256 \sqrt[3]{64}}} \right)^{-\frac{3}{53}} \quad 6) 0.027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6} \right)^{-2} + 256^{0.75}$$

$$7) \frac{\sqrt{\frac{x}{y} \sqrt{\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x}{y}}}}}{\sqrt{\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x}{y} \sqrt{\frac{y}{x}}}}}$$

$$8) \left(\frac{1}{3} \right)^{p+2} \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} \geq 9 \longrightarrow p = ?$$

۳.۳ عبارت‌های جبری

در این بخش به معرفی چند اتحاد جبری دیگر و استفاده از آنها در تجزیه عبارت‌های جبری می‌پردازیم. از کلاس نهم با اتحاد‌ها آشنا شده‌اید. یک تساوی که به ازای تمامی مقادیر متغیر موجود در آن تساوی درست باشد را یک اتحاد گوییم. به دو تساوی زیر دقت کنید.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (1.3)$$

$$x^2 - 5 = 4 \quad (2.3)$$

تساوی (۱.۳) به ازای تمامی مقادیر x, y درست است و لذا به آن اتحاد گوییم. در حالیکه تساوی (۲.۳) به ازای دو مقدار $x = -3, x = 3$ درست است و لذا به آن معادله گوییم. از کلاس نهم با برخی اتحادها آشنا شده‌اید. در اینجا آن اتحادها را بازنویسی می‌کنیم.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

حال آماده هستیم تا چند اتحاد جدید معرفی کنیم. اولین اتحاد، اتحاد مربع سه جمله‌ای است. یعنی هدف یافتن حاصل $(x + y + z)^2$ است. به کمک اتحادهای بالا عبارت فوق را تا سرحد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= (x + y)^2 \times (x + z) \\ &= (x^2 + 2xy + y^2) \times (x + z) \\ &= x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + y^2x + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه حاصل بصورت زیر بدست می‌آید:

$$(x + y + z)^2 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

اگر در رابطه فوق $(-b) \rightarrow b$ تبدیل شود اتحاد زیر حاصل می‌شود:

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

در نهایت اگر از xy در جملات دوم و سوم فاکتور بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ x^3 - y^3 &= (x - y)^3 + 3xy(x - y) \end{aligned}$$

مثال ۱۸.۳. به کمک آخرين رابطه عبارت هاي $x^3 - y^3$ و $x^3 + y^3$ را تجزيه کنيد.

نتيجه مثال بالا به قدری اهمیت دارد که به آنها اسم اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات بدھيم:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\ x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

مثال ۱۹.۳. حاصل عبارات زير را به کمک اتحادها بدست آوريد.

$$1) (2x - y^2)^2 =$$

$$2) (\frac{x}{4} - \frac{y}{3})^2 =$$

$$3) (x - y)(x + y)(x^2 + x^1y^1 + y^2) = \quad 4) (2x - 1)^3 =$$

$$5) (1 + x^1 + x^2)(1 - x^1) =$$

$$6) (101)^3 =$$

$$7) (x - \frac{1}{r})(\lambda x^2 + 2)(2x + 1) =$$

$$8) (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - 8y^3 =$$

$$9) \frac{(x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 3(x + 1) - 1}{(x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1} \quad 10) (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)$$

$$11) (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)(\lambda x^3 + y^3) \quad 12) (a - b - c)^2 - (a - b + c)^2$$

مثال ۲۰.۳. فرض کنید $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$. باشد. حاصل عددی عبارات زیر را بدست آورید.

$$1) x^2 + \frac{1}{x^2} =$$

$$2) x^3 + \frac{1}{x^3} =$$

$$3) x^4 - \frac{1}{x^4} =$$

$$4) x^5 - \frac{1}{x^5} =$$

$$5) x^6 + \frac{1}{x^6} =$$

مثال ۲۱.۳. به کمک اتحادها عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$1) x^6 - y^6 =$$

$$2) x^3 - 125$$

$$3) 27x^3 + 1$$

$$4) 4a^2 - b^2 - 2b + 4a =$$

$$5) 9x^2 - 3x - 2 =$$

$$6) x^3 - x^2 - x + 1 =$$

$$7) a^4 - 2a^2 + 49 =$$

$$8) x^2y^2 - x^2y^3 - 1 + y =$$

$$9) 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 =$$

$$10) 4a^4 - 64 =$$

$$11) (x + 1)^3 + 8 =$$

$$12) x^5 + x + 1 = \quad (hint : x^2 - x^4)$$

$$13) 4x^4 + 1$$

$$14) 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 =$$

تمرین ۴.۳. به کمک اتحادها حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $(x - 2y^2)^2 - (x + 2y^2)^2$

۲) $(\frac{3}{2}xy - \frac{1}{2}y)^2$

۳) $(2m - n)(4m^2 + 2mn + n^2)$

۴) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$

۵) $(2 + x)(4 - 2x + x^2)(8 - x^3)$

۶) $(x - y)^3 - (x + y)^3$

۷) $(2x - y)(4x^2 + y^2)(2x + y) + y^4$

۸) $(a - b + c)(a - b - c)$

تمرین ۵.۳. تجزیه کنید.

۱) $ab - a^2b^2$

۲) $a + b + a^2 - b^2$

۳) $a^2 - b^2 + a^3 - b^3$

۴) $x^6 - (yz)^6$

۵) $36a^4b - 16b^5$

۶) $a^2c^2 + b^2d^2 - b^2c^2 - a^2d^2 - 4abcd$

۷) $c^5 + p^5$

۸) $x^3 + 64m^3$

۹) $(a + b)^3 - (a - b)^3 - 2b$

۱۰) $(a + b)^3 + (a - b)^3 - 3a$

کاربرد تجزیه در یافتن ب م و ک م م چندجمله‌ایها

یک چندجمله‌ای مثل $a + b$ را در نظر بگیرید. اگر این دو جمله‌ای را در اعداد صحیح یا هر چندجمله‌ای دیگری ضرب کنیم، حاصل را مضربی از $a + b$ گوییم. پس عبارات زیر همگی مضارب $a + b$ هستند.

$$2(a + b), (a^2 - b^2), (a^3 - b^3) \dots$$

همچنین عبارت $a + b$ مقسوم علیه مشترک هر سه عبارت فوق است. بطور کلی برای یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عبارت جبری ابتدا آنها را تجزیه کرده و سپس برای ب م عوامل مشترک با کمترین توان در تجزیه را منظور می‌کنیم و برای ک م هم عوامل مشترک را با بزرگترین توان در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم. به عنوان یک مثال ساده فرض کنید هدف یافتن ب م و ک م دو عبارت جبری $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$ است. با تجزیه کردن آنها داریم:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \\ a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{cases}$$

پس با این حساب ب م م برابر $a - b$ است و ک م م برابر $(a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)$. یکی از فواید محاسبه ک م م در مخرج مشترک گرفتن برای جمع و تفریق عبارات گویاست. در قسمت بعد عبارات گویا را بررسی می‌کنیم.

عبارات گویا

تعریف ۴.۳. منظور از یک عبارت گویا عبارتی است که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشند. اگر $q(x)$ ، $p(x)$

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

را یک عبارت گویا گوییم. شرط تعریف چنین عبارتی آنست که $q(x) \neq 0$ باشد.

مثال ۲۲.۳. معین کنید هر عبارت گویا به ازای چه مقادیری از متغیرش تعریف شده است؟ (دامنه‌ی تعریف آن را بیابید)

$$1) f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

$$2) g(x) = \frac{3y}{y^2 - 4}$$

$$3) h(x) = \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1}$$

$$4) k(x) = \frac{z}{2z^2 - 7z + 5}$$

$$5) \ell(x) = \frac{x}{x}$$

$$6) u(x) = \frac{3}{2x^2 + 2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x}$$

مثال ۲۳.۳. عملیات‌های خواسته شده بر عبارات گویا را انجام دهید. اگر تنها یک کسر در صورت مسئله است هدف ساده کردن آن است.

$$1) \frac{6x^2 + 7x - 3}{2x^2 - x - 6}$$

$$2) \frac{13}{2x - 6} - \frac{2x}{x^2 - 9}$$

$$3) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \div (x + y)$$

$$4) \frac{m^3 - n^3}{(mn - n^2)^2} \div \frac{mn + m^2}{m^2 - n^2}$$

$$5) a \div \frac{a - 1}{2} - \frac{a^3 + 3a(a - 1) - 1}{2a^2 + 2a} \times \frac{-4a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{4a^2}{a^2 - 1}$$

$$6) \left(\frac{n}{m-n} + \frac{m}{m+n} \right) \left(\frac{m+n}{m^2 + n^2} \right) \left(\frac{m-n}{m+n} \right)$$

حذف رادیکال از عبارات جبری

در اتحاد $a = \sqrt[3]{x}$, $b = 1$ اگر قرار دهیم $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ آنگاه:

$$(\sqrt[3]{x})^3 - 1 = \underbrace{(x - 1)}_{\text{بدون رادیکال}} = \underbrace{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}_{\text{عبارت شامل رادیکال‌ها}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید با ضرب دو عبارت در هم حاصل یک عبارت فارغ از رادیکال است. این کار اغلب به گویا کردن معروف است و یک دلیل ساده این کار این است که کلا کار با چند جمله‌ایها و عملیات بر آنها بسیار ساده‌تر از کار با عبارات رادیکالی است. بویژه زمانی که عبارت رادیکالی در مخرج باشد، از بین بردن رادیکال آن امری مستحب است. به عنوان مثال ساده مخرج عبارت $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ را گویا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} \end{aligned}$$

مثال ۲۴.۳. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$1) \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{y}}$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$$

$$3) \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}$$

$$4) \frac{1}{a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}$$

$$5) \frac{a - 1}{\sqrt{a - 1} - \sqrt{a + 2}}$$

$$6) \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1}$$

$$7) \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

تمرینات تكمیلی

تمرین ۶.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$1) \left(\frac{1}{\epsilon}x^{-1}y^3\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-4}$$

$$2) 125 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^p \leq 3125 \rightarrow p = ?$$

$$3) 10^{20} \square 20^{10}$$

$$4) 20^{2303} \square 30^{3202}$$

$$5) \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{8}} \times \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{48}}$$

$$6) \left(27^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} \times 32^{\frac{2}{5}} \times 81^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$7) (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})(\sqrt{4 - \sqrt{15}})$$

$$8) \sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$$

تمرین ۷.۳. عبارت‌هایی که بصورت مجموع چندجمله‌اند را تجزیه‌کنید و آنهایی که بصورت حاصلضرب چند پرانتز هستند به کمک اتحادها ضرب کرده و ساده کنید. عملیات بر عبارات گویا را نیز انجام دهید.

$$1) (1 + x + x^2)(1 - x)(1 + x)(1 - x + x^2) \quad 2) p^4 - 6p^2q + 9q^2$$

$$3) x^3y^3 + 6x^2y^2 + 12xy + 8 \quad 4) (x + 3z - y)(x - y - 3z)$$

$$5) (a^6 - 3a^3 + 9)(a^3 + 3) \quad 6) x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$7) 2 - b^3y^3 - by \quad 8) x^3 - 8 + (x + 2)^2 - 2x$$

$$9) 8 - 2x - x^2 \quad 10) \frac{3x^2 + 12x + 9}{x^6 + 5x^3 + 6}$$

$$11) \frac{a^2 - 1}{a} \times \frac{a^3}{a - 1} \times \frac{1}{a + 1} \quad 12) \left(\frac{x^2}{x - y} - y\right) \left(x + \frac{y^2}{x + y}\right)^{-1}$$

$$13) \frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{2a}{a^2 + 4a + 3} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6} \quad 14) \frac{y}{x + z} - \frac{1}{y(yxz + x + z)}$$

$$15) \frac{1}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} \quad \text{گویا کنید,}$$

$$16) \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$17) \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{y}}$$

$$18) \frac{1}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

۴.۳ تست‌های فصل سوم

۱- اگر $x = 7$ و $y = 5$ باشد، حاصل $x^3 + y^3$ کدام است؟

۲۶۴ (۴) ۲۴۴ (۳) ۲۳۸ (۲) ۲۱۶ (۱)

۲- در تجزیه‌ی عبارت $(x^2 - 6x - 4)^2$ کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

$x+2$ (۴) $x-4$ (۲) $x-8$ (۱)

۳- حاصل $\sqrt{\frac{19}{6}} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}}$ کدام است؟

۲ (۴) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

۴- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو چندجمله‌ای $x^2 - 10x + 21$ و $x^2 - 12x + 35$ را برابر با $x^2 - 8x - 15$ مقسوم‌علیه مشترک آنها تقسیم کرده‌ایم، حاصل تقسیم کدام است؟

$x^2 + 8x - 15$ (۴) $x^2 + 8x + 15$ (۳) $x^2 - 8x + 15$ (۲) $x^2 - 8x - 15$ (۱)

۵- حاصل عبارت $(\sqrt{\frac{2}{4}} - \sqrt{\frac{3}{9}}) \sqrt{\frac{6}{50}}$ کدام است؟

$\frac{1}{20}$ (۴) $\frac{1}{20}$ (۳) $\frac{1}{15}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۱)

۶- به ازای چه مقدار m ، عبارت $4x^2 - 6x + m$ مربع کامل است؟

$\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۱)

۷- حاصل $999^2 - 1001^2$ کدام است؟

۶۰۰۰ (۴) ۴۰۰۰ (۳) ۲۰۰۰ (۲) ۱۰۰۰ (۱)

۸- در تجزیه‌ی عبارت $4a^2 - 4a - b^2 - 4b$ کدام عامل وجود دارد؟

$2a + b + 1$ (۴) $2a + b - 3$ (۳) $2a - b + 1$ (۲) $2a + b + 3$ (۱)

۹- حاصل عبارت $(x^2 + x + 1)(x^2 - 1)$ کدام است؟

$x^6 - 1$ (۴) $x^3 - 1$ (۳) $(x - 1)^3(x^3 + 1)$ (۲) $(x - 1)^2(x^2 + x + 1)$ (۱)

۱۰- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ کدام است؟

-۳ (۴) ۳ (۳) ۱ (۲) ۱) صفر (۱)

۱۱- اگر عبارت $4x^2 - 3x + A$ مربع دوجمله‌ای باشد، A کدام است؟

$\frac{9}{16}(4)$

$\frac{9}{4}(3)$

$\frac{3}{4}(2)$

$\frac{3}{2}(1)$

۱۲- اگر $x = 4$ باشد، حاصل $\sqrt{(-x)^2} + \sqrt{(1-x)^4}$ کدام است؟

$-7(4)$

$7(3)$

$-9(2)$

$9(1)$

۱۳- اگر عبارت $4x^2 - 3x + A$ مربع دوجمله‌ای باشد، A کدام است؟

$\frac{9}{16}(4)$

$\frac{9}{4}(3)$

$\frac{3}{4}(2)$

$\frac{3}{2}(1)$

۱۴- عبارت $6 - 5x - 6x^2$ بر کدام عبارت زیر بخش‌پذیر است؟

$3x + 4(4)$

$2x - 3(3)$

$2x + 3(2)$

$3x - 2(1)$

۱۵- عبارت $\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x - 5}$ بر کدام دوجمله‌ای بخش‌پذیر نیست؟

$x + 5(4)$

$x - 2(3)$

$x + 2(2)$

$x - 2(1)$

۱۶- در کدام گزینه فاکتورگیری درست انجام نشده است؟

$$3x^2a + 9a^2x = 3ax(x + 3a) \quad (1)$$

$$49x^2yz + 14x^3y^2 = 7x^2y(7z + 2xy) \quad (2)$$

$$19xab + 38a^2x + 2xa = 19xa(b + 2a + 2) \quad (3)$$

$$18x^2ab + 15x^3a + 3x^2a = 3x^2a(6b + 5x + 1) \quad (4)$$

۱۷- اگر $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ ، ($a > 1$) باشد، حاصل $a + \frac{1}{a}$ برابر کدام است؟

$2(4)$

$2(3)$

$\frac{4\sqrt{3}}{3}(2)$

$\frac{2\sqrt{3}}{2}(1)$

۱۸- ساده شده‌ی عبارت $\sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{27}}$ کدام است؟

$-3\sqrt{2}(4)$

$\sqrt[4]{2}(3)$

$6\sqrt{3}(2)$

$-2\sqrt[4]{3}(1)$

۱۹- حاصل عبارت $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{4}{x}\left(x^2 + \frac{1}{16}\right)$ کدام است؟ (۰) (۴) (۳) (۲) (۱)

۲۰- اگر $a + b = 3$ و $ab = 2$ باشد، مقدار $a^3 + b^3$ کدام است؟ (۰) (۴) (۳) (۲) (۱)

۲۱- عبارت $(a - 2)(a + 2)(a^4 + 4a^2 + 16)$ با کدام عبارت زیر برابر است؟
 $(a^3 - 8)(a^3 + 8)$ (۲) $a^6 + 64$ (۱)
 $a^8 - 64$ (۴) $(a^3 - 4)(a^3 + 4)$ (۳)

۲۲- در تجزیه‌ی $4a^4 - 64$ کدام عامل وجود ندارد؟
 $a^2 - 8$ (۴) $a - 2$ (۳) $a + 2$ (۲) $a^2 + 4$ (۱)

۲۳- در تجزیه‌ی عبارت $x^2 - 1 + (x - 1)(y + 1)$ کدام عامل وجود دارد؟
 $x + y$ (۴) $x - y + 1$ (۳) $x + y - 1$ (۲) $x + y + 2$ (۱)

۲۴- کدام عامل در تجزیه‌ی عبارت $3x^2 - 5x - 2$ وجود دارد؟
 $x + 2$ (۴) $x - 1$ (۳) $3x + 1$ (۲) $3x - 1$ (۱)

۲۵- حاصل عبارت $\sqrt[3]{3} + \sqrt{\sqrt{18}} - \frac{(\sqrt[3]{24} - \sqrt{32})}{2}$ کدام است؟
 $2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ (۴) $-2\sqrt[3]{2}$ (۳) $5\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)

۲۶- حاصل $A = \frac{9}{\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\right)}$ کدام است؟
 $9\sqrt[8]{3^7}$ (۴) $2\sqrt[8]{3^8}$ (۳) $3\sqrt[8]{3^7}$ (۲) $\sqrt[8]{3^7}$ (۱)

۲۷- مقدار عبارت $-1 - 12x^3 - 48x^2 + 64x^3$ به ازای $x = \frac{1}{\lambda}$ کدام است؟
 $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{5}$ (۳) $-\frac{1}{\lambda}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۱)

-۲۸ در حالت کلی، کدام عامل زیر در تجزیه‌ی عبارت $y^2 - 1 + xy$ وجود ندارد؟
 $xy + 1$ (۴) $xy - 1$ (۳) $1 + y$ (۲) $1 - y$ (۱)

-۲۹ در تجزیه‌ی عبارت $14 - 25x^2 - 25x$ همواره کدام‌یک از عامل‌های زیر وجود دارد؟
 $5x - 7$ (۴) $5x - 2$ (۳) $5x + 14$ (۲) $5x + 1$ (۱)

-۳۰ در تجزیه‌ی عبارت $x^2 + (x - 1)^2$ همواره کدام عامل زیر وجود دارد؟
 $2x$ (۴) $x + 1$ (۳) $2x + 1$ (۲) $2x - 1$ (۱)

-۳۱ در تجزیه‌ی عبارت $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$ کدام عامل ضرب وجود دارد؟
 $x + 3$ (۴) $x + 2$ (۳) $x - 2$ (۲) $x - 4$ (۱)

-۳۲ مقدار x در تساوی $\sqrt[4]{x} \sqrt[3]{x} \sqrt{x} = \sqrt[8]{8}$ کدام است؟
 4 (۴) $\sqrt[3]{4}$ (۳) 2 (۲) $\sqrt[7]{2}$ (۱)

-۳۳ حاصل $(\sqrt{32} + \sqrt{22} - \sqrt{50})^{13}$ کدام است؟
 4 (۴) صفر 1 (۳) $(\sqrt{2})^{13}$ (۲) $(2\sqrt{2})^{13}$ (۱)

-۳۴ اگر x باشد، حاصل $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ کدام است؟
 10 (۴) 16 (۳) 14 (۲) 12 (۱)

-۳۵ عبارت $6x^3 + 7x^2 + 2x$ را تجزیه نموده‌ایم. یکی از عوامل تجزیه همواره کدام است؟
 $2x + 3$ (۴) $x + 2$ (۳) $2x - 1$ (۲) $3x + 2$ (۱)

-۳۶ اگر a باشد، مقدار $a(a - 3)(a + 4)$ کدام می‌تواند باشد؟
 32 (۴) 21 (۳) 12 (۲) -45 (۱)

-۳۷ حاصل $\sqrt[3]{32} - \frac{1}{2}\sqrt{200} + \sqrt{8}$ کدام است؟
 $6\sqrt{2}$ (۴) $7\sqrt{2}$ (۳) $8\sqrt{2}$ (۲) $9\sqrt{2}$ (۱)

-۳۸ در تجزیه‌ی عبارت $2x^2 - 5x - 3$ کدام دوجمله‌ای وجود دارد؟
 $2x + 1$ (۳) $2x + 1$ (۲) $x + 3$ (۱)

۳۹- حاصل $100^2 \times 998$ را با استفاده از کدام اتحاد می‌توان به سهولت محاسبه نمود؟

$$(x + a)(x + b) \quad (4)$$

$$(a + b)(a - b) \quad (3)$$

$$(a - b)^2 \quad (2)$$

$$(a + b)^2 \quad (1)$$

۴۰- کسر $\frac{4}{\sqrt[4]{8}}$ با کدام عدد زیر برابر است؟

$$2\sqrt[4]{4} \quad (4)$$

$$4\sqrt[4]{2} \quad (3)$$

$$\sqrt[4]{2} \quad (2)$$

$$2\sqrt[4]{2} \quad (1)$$

۴۱- در حاصل عبارت $(2x^2 - 3x - 2)$ ضریب x^3 کدام است؟

$$-12 \quad (4)$$

$$12 \quad (3)$$

$$-6 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۴۲- عبارت $6 - 5x^2 - 6x$ بر کدام عبارت زیر بخش‌پذیر است؟

$$2x - 1 \quad (4)$$

$$3x + 2 \quad (3)$$

$$2x + 3 \quad (2)$$

$$3x - 1 \quad (1)$$

۴۳- با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ مربع یک دوجمله‌ای حاصل می‌شود؟

$$12 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$\frac{15}{4} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۴۴- حاصل عبارت $\sqrt{6}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{50} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ برابر کدام است؟

$$\sqrt{12} \quad (4)$$

$$\sqrt{8} \quad (3)$$

$$\sqrt{6} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \quad (1)$$

۴۵- در تجزیه عبارت $a(a - 3)(a - 4) - 12a + 36$ کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

$$a + 2 \quad (4)$$

$$a - 2 \quad (3)$$

$$a - 3 \quad (2)$$

$$a - 6 \quad (1)$$

۴۶- حاصل عبارت $\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt[4]{4}) + 8^{-\frac{1}{3}}$ کدام است؟

$$\frac{25}{2} \quad (4)$$

$$\frac{33}{2} \quad (3)$$

$$\frac{29}{4} \quad (2)$$

$$\frac{33}{4} \quad (1)$$

۴۷- حاصل $\frac{4\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{300}}{\sqrt{3}}$ کدام است؟

$$4 \text{ صفر} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$A = \frac{\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}} \times \left(\sqrt{(32)^{-1}} \right)$$

- ۴۸- ساده شده‌ی عبارت A کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{4} (4)$$

$$-\sqrt{2} (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (2)$$

$$\sqrt{2} (1)$$

- ۴۹- کدام عامل زیر در تجزیه‌ی هر دو عبارت $2 - 3x^2 + 12x + 2$ و $9x^2 + 18x + 1$ ، به‌طور مشترک، وجود دارد؟

$$3x - 1 (4)$$

$$3x + 1 (3)$$

$$3x + 2 (2)$$

$$3x - 3 (1)$$

- ۵۰- اگر $B = \sqrt{27} + 5$ و $A = (2 - \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})$ باشند، حاصل ۱ کدام است؟

$$1 + \sqrt{3} (4)$$

$$1 - \sqrt{3} (3)$$

$$2\sqrt{3} (2)$$

$$\sqrt{3} (1)$$

۵.۳ کلید تست‌های فصل سوم

۴	۳	۲	۱	- ۳۷	۴	۳	۲	۱	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۶
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۸
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۲
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۶

فصل ۴

معادلات و نامعادلات

در این فصل بسیار مهم با حل انواع معادلات و نامعادلات آشنا می‌شویم. در ابتدا حل معادله درجه دوم را بررسی کرده و سپس یک منحنی مرتبط با معادله درجه دوم یعنی سهمی‌ها را بررسی کرده، و در نهایت تعیین علامت عبارات جبری را که نقشی کلیدی در حل نامعادلات دارند را بررسی می‌کنیم.

۱.۴ معادله درجه دوم و روش‌های حل آن

معادله درجه دوم چیست؟ فرض کنید هدف یافتن عددی است که وقتی با مربعش جمع می‌شود حاصل برابر ۶ شود. برای یافتن جواب می‌توان آزمون-خطا کرد و با چندبار امتحان عدد ۲ را یافت که در شرایط صدق می‌کند. اما فقط عدد ۲ جواب است؟ اگر بخواهیم بازهم آزمون-خطا کنیم این بار به سادگی دفعه قبل نمی‌توان جواب را یافت که البته عدد ۳ – است. حال فرض کنید بخواهیم مسئله را بدون آزمون-خطا حل کنیم. بدین منظور فرض کنید عدد مورد نظر را با x نشان دهیم. پس باید داشته باشیم $6 = x^2 + x$. حال معادله را بصورت $0 = x^2 + x - 6$ مینویسیم. چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟ پاسخ تجزیه است. داریم:

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0 \implies (x + 3)(x + 2) = 0 \implies x = 2 \text{ & } x = -3$$

معادله شکل گرفته در بالا یک معادله درجه دوم است چرا که مجهول ما یعنی x در این معادله دارای توان ۲ است.

تعريف ۱.۴. به معادله $0 = ax^2 + bx + c$ یک معادله درجه دوم گوییم بشرطی که $a \neq 0$ باشد. اعداد $c, b, a \in \mathbb{R}$ را ضرائب معادله می‌نامیم. x مجهول معادله است و منظور از حل معادله فوق یعنی یافتن تمام اعداد حقیقی چون x که در معادله صدق کنند. با این حساب عدد λ جواب معادله است هرگاه:

$$0 = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

حال به معرفی روش‌های حل این معادله می‌پردازیم^۱. برای این منظور با توجه به وضعیت ضرائب معادله

^۱ محمد ابن موسی خوارزمی ریاضیدان نامی ایران و جهان در قرن هشتم و نهم میلادی است. خوارزمی بحق از نوادر تاریخ ریاضیات

روش‌هایی ارائه می‌شود.

روش ریشه‌گیری

اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ & $c \leq 0$ آنگاه با یک ریشه‌گیری جواب معادله بدست می‌آید. مثلا برای حل معادله $4x^2 - 16 = 0$ داریم:

$$4x^2 - 16 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

روش فاکتورگیری

اگر در معادله درجه دوم داشته باشیم $b = 0$ با یک فاکتورگیری ساده معادله حل می‌شود. به عنوان یک مثال ساده برای حل معادله $3x^2 + 12x = 0$ داریم:

$$3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 3x(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \& x = -4$$

روش تجزیه

چنانچه هیچ یک از ضرائب صفر نباشد به کمک تجزیه کردن سه جمله‌ای می‌توان معادله را حل کرد. در این مورد توجه داریم که از یکی از خواص اعداد حقیقی استفاده می‌کنیم که قبلاً به آن اشاره کرده ایم :

$$\text{if } ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0$$

به یک مثال ساده برای حل معادله $x^2 - x - 12 = 0$ داریم:

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

تمرین ۱۰.۴. معادلات زیر را حل کنید.

$$1) 9x^2 - 25 = 0$$

$$2) 4x^2 + 16 = 0$$

$$3) 25x^2 + 5x = 0$$

$$4) -\frac{1}{2}x = \frac{8}{3}x^2$$

$$5) x^2 + 11x + 30 = 0$$

$$6) 6x^2 + x = 2$$

$$7) x^2 + 9x - 136 = 0$$

$$8) x^3 + x^2 = 56x$$

است و وی را پدر جبر نام نهاده‌اند. وی معادله درجه دوم را طبقه بندی کرد و برای هر کدام روش حل ارائه داد.

روش مربع کامل کردن

تصور کنید می‌خواهید جواب معادله $x^2 + 2x - 1 = 0$ را بدست آورید. هرچه تلاش کنید، معادله به روش‌های معمول اشاره شده در بالا حل نخواهد شد. پس باید راهکار تازه‌ای بکار برد. بدین منظور می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x = 1 &\implies x^2 + 2x + 1 = 1 + 1 \\ &\implies (x + 1)^2 = 2 \\ &\implies x + 1 = \pm\sqrt{2} \\ &\implies x = \sqrt{2} - 1 \quad \& \quad x = -\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

اگر خوب به محاسبات نگاه کنید هدف از اضافه کردن عدد ۱ به طرفین تساوی این بوده است که یک طرف معادله مربع کامل شود تا بتوان از طرفین جذر گرفت و جواب را یافت. چرا عدد ۱؟ جواب در محاسبه زیر نهفته است. در حالت کلی برای اینکه عبارت $x^2 + bx$ را به عبارتی تبدیل کنیم که شامل مربع کامل باشد به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$x^2 + bx = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

به عنوان مثالی دیگر فرض کنید می‌خواهیم جواب معادله $3x^2 - 9x + 3 = 0$ را حل کنیم. برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 9x + 3 = 0 &\implies x^2 - 3x + 1 = 0 \\ &\implies x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 = 0 \\ &\implies \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - 1 \\ &\implies x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \\ &\implies x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \& \quad x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

روش کلی حل معادله درجه دوم

همان‌طور که مثال‌های حل شده بالا ملاحظه کردید، روش مربع کامل کردن کمی وقت‌گیر و پر محاسبه است. به همین دلیل یکبار روش مربع کامل را روی فرم کلی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بکار می‌بریم تا دستوری کلی بر حسب رادیکال‌ها بیابیم و بعد از آن برای حل از دستور یافت شده استفاده کنیم. قبل از شروع محاسبات مبین معادله درجه دوم را بصورت $\Delta = b^2 - 4ac$ تعریف می‌کنیم. Δ یک عدد حقیقی است و لذا هر سه حالت $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$ ممکن است اتفاق بیافتد.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ &\implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\implies x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\implies x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

به این ترتیب با فرض اینکه $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو جواب می‌باشد. اگر $\Delta = 0$ باشد هر دو جواب برابرند و داریم $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ و سرانجام اگر $\Delta < 0$ باشد گوییم معادله جواب حقیقی ندارد.

$$\Delta : \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} & \text{معادله دو ریشه حقیقی دارد} \\ \Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} & \text{معادله ریشه مضاعف دارد} \\ \Delta < 0 \Rightarrow & \text{معادله جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$$

درس را با ارائه‌ی مثال‌های کلی از مطالب مطرح شده پی می‌گیریم.

کلمه حقیقی اشاره به اعداد حقیقی دارد. در واقع در حالتی که $\Delta < 0$ است باز هم معادله جواب دارد اما این جواب‌ها عدد حقیقی نیستند بلکه اعداد مختلط هستند که در فصل یک به ان‌ها اشاره‌ای داشته‌ایم. کارل فردیش گاووس در پایان نامه دوره‌ی دکتری خود ثابت کرد که یک معادله از درجه n حداقل n ریشه حقیقی دارد.

مثال ۱.۴. معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

$$1) 4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \text{تجزیه}$$

$$2) 8x^2 - 7x - 1 = 0 \quad \text{تجزیه}$$

$$3) x^2 + 5x = 1 \quad \text{مربع کامل}$$

$$4) 3x^2 + 2x = 5 \quad \text{مربع کامل}$$

$$5) 4x^2 + 4x - 7 = 0 \quad \text{روش دلتا}$$

$$6) 20x + 1 = 21x \quad \text{روش دلتا}$$

مثال ۲.۴. یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 3a - 5 = 0$ برابر ۱ است. ریشه دیگر معادله را بدست آورید.

مثال ۳.۴. مقدار a را به گونه‌ای بیابید که معادله $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد و سپس آن ریشه مضاعف را بدست آورید.

مثال ۴.۴. از چه عدد مثبتی اگر معکوس آن کم شود باقیمانده برابر $\frac{5}{6}$ می‌شود؟

مثال ۵.۴. طول مستطیلی سه برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۵۸۸ واحد باشد، محیط مستطیل را بدست آورید.

مثال ۶.۴. طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر $2x + 1, 2x + 2, 2x + 3$ است. محیط این مثلث چند واحد است؟

مثال ۷.۴. جواب معادله $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 6}$ را بیابید.

مثال ۸.۴. حاصل عبارت $A = 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{\dots}}}$ را بیابید.

تمرین ۲.۴. حاصل عبارت $A = \sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\sqrt[3]{\dots}}}}$ را بدست آورید.

تمرین ۳.۴. معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

$$1) 5x^2 + 6x - 8 = 0 \quad \text{مربع کامل}$$

$$2) 7x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{روش دلتا}$$

تمرین ۴.۴. معادله $x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} (x - \frac{1}{x}) = 5$ را حل کنید.

تمرین ۵.۴. معادله $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 1 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۶.۴. معادله $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ را حل کنید.

تمرین ۷.۴. معادله $x^4 + 25 = 26x^2$ را حل کنید.

تمرین ۸.۴. معادله‌ی $x^4 - 17x^3 + 16 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۹.۴. یک درهم را بین چند مرد تقسیم کرده ایم ولی چون یک مرد به آن‌ها اضافه شده است، تقسیم را دوباره بین همه‌ی مرد‌ها انجام داده‌ایم. معلوم شد در تقسیم دوم به هر مرد $\frac{1}{6}$ درهم کمتر از تقسیم اول رسیده است. در آغاز چند مرد بوده است؟ (مسئله خوارزمی)

تمرین ۱۰.۴. معادله‌ی $x^3 - 2\sqrt{2}(2 + 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

تمرین ۱۱.۴. یک قالی دراتاقی به ابعاد ۶ متر در ۴ متر قرار دارد به طوری که فاصله هر طرف آن تا کنار دیوار اتاق یکسان است. اگر مساحت قالی ۸ متر مربع باشد فاصله هر طرف قالی را تا دیوار حساب کنید.

تمرین ۱۲.۴. حدود m را طوری بیابید تا معادله‌ی درجه دوم $(2m - 1)x + m - 2 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد.

تمرین ۱۳.۴. اختلاف مربع عدد $\frac{3}{7}$ از خود $\frac{3}{7}$ برابر اختلاف مربع چه کسری از خود آن کسر است؟

تمرین ۱۴.۴. ثابت کنید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ روابط زیر برقرار است.

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 0 \implies x_1 = 1 \& x_2 = \frac{c}{a} \\ a + c = b \implies x_1 = -1 \& x_2 = -\frac{c}{a} \end{array} \right.$$

تمرین ۱۵.۴. معادلات داده شده را به روش دلخواه حل کنید.

$$1) 148x^2 + 2x = 150$$

$$2) \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{5} = 0$$

$$3) (1 + \sqrt{2})x^2 = x + \sqrt{2}$$

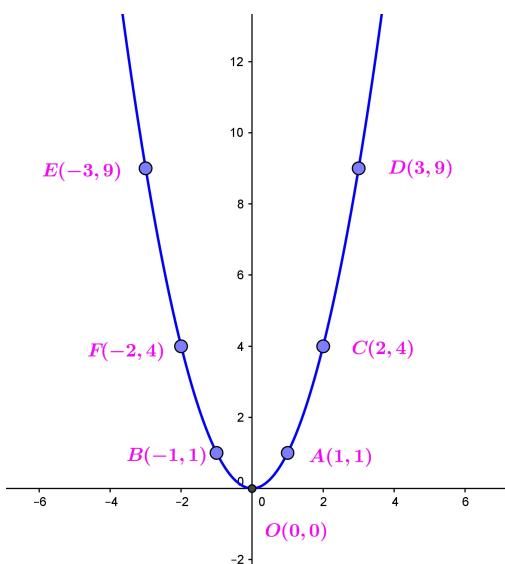
$$4) 1395x^2 - 1394x - 1 = 0$$

$$5) x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$6) x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$$

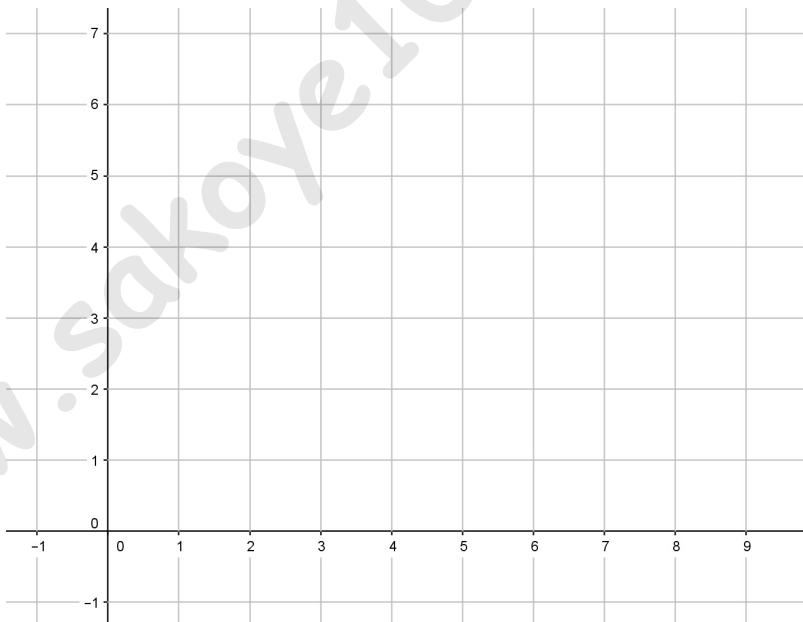
۲.۴ سهمی‌ها

یکی از کاربردی‌ترین منحنی‌ها در زندگی روزمره ما سهمی است. سهمی که سه بعدی شده سهمی است، امروزه نقش اصلی در ارسال و دریافت اطلاعات از طریق هوایی را دارد. نام امروزی سهمی (parabola) را آپولونیوس معرفی کرد و نیوتون اولین بار خاصیت همگرایی نور در کانون سهمی را بررسی کرد. ساده‌ترین سهمی دارای معادله‌ی $y = x^2$ است. اگر به متغیر x مقدار دهیم می‌توانیم نمودار آن را رسم کنیم. مثلاً با فرض $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ مقادیر حاصل عبارتند از $y = 1, 4, 9$. اگر این نقاط را روی محورهای مختصات مشخص کنیم و نقاط حاصل را به هم وصل کنیم شکل زیر حاصل می‌شود.



ذکرچند نکته ضروری است. اول اینکه پایین‌ترین نقطه سهمی در شکل فوق مبدأ مختصات است. نقطه (\circ, \circ) را مینیم (کمینه) سهمی گوییم. دوم اینکه محور عرض‌ها سهمی را به دو قسمت یکسان تقسیم کرده است. محور عرض‌ها $x = \circ$ را محور تقارن سهمی گوییم.

مثال ۹.۴. سهمی $y = x^2 - 4x + 5$ را رسم کنید.



تعريف ۲.۴. منظور از یک سهمی معادله‌ای بصورت $y = ax^2 + bx + c$ است که $a, b, c \in \mathbb{R}$ باشد.

مربع کامل کردن این عبارت بصورت:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

درمی‌آید که در این حالت راس سهمی یا مینیم سهمی نقطه $M(h, k)$ است و خط $x = h$ را محور تقارن سهمی گوییم. اگر $a > 0$ باشد دهانه سهمی رو به بالا باز می‌شود و اگر $a < 0$ باشد دهانه سهمی رو به پایین باز می‌شود.

مثال ۱۰.۴. راس سهمی‌های زیر را بیابید و سپس نمودار آن‌ها را رسم کنید.

$$1) y = 2x^2 + 1$$

$$2) y = -x^2 + 4$$

$$3) y = x^2 + 4x + 3$$

$$4) y = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$5) y = 1 - 4x - 2x^2$$

$$6) 3y = x^2 - 4x + 7$$

رسم سهمی ساده‌تر می‌شود اگر بتوانیم دستوری صریح از راس سهمی بدست آوریم. برای این منظور داریم :

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &\implies y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &\implies y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &\implies y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &\implies y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

با این حساب راس سهمی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\text{راس سهمی} \rightarrow M \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

به این ترتیب با داشتن راس سهمی کافیست یک یا دو نقطه قبل و بعد از آن را در معادله منحنی جایگذاری کنیم تا عرض آن نقاط حاصل شده و سپس سهمی را رسم کنیم. همچنین توجه کنید که اگر $a > 0$ باشد سهمی مینیمم دارد و اگر $a < 0$ باشد سهمی ماکزیمم(بیشینه) دارد.

مثال ۱۱.۴. نمودار سهمی $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}$ را رسم کنید.

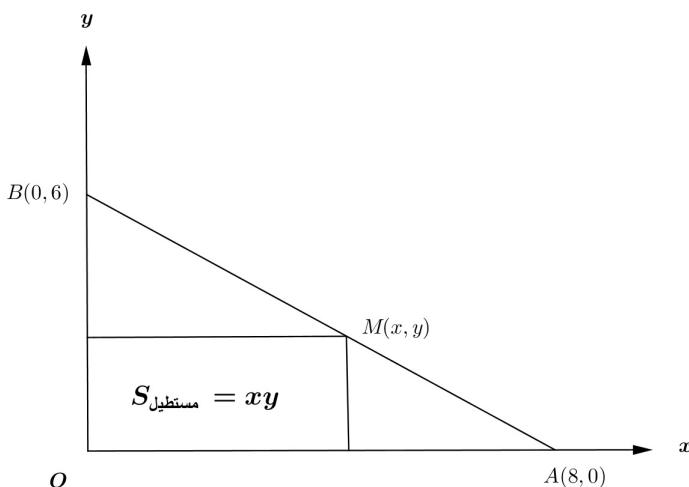
مثال ۱۲.۴. مجموع دو عدد مقدار ثابت ۲۰ است. بیشترین مقدار حاصلضرب این دو عدد را بدست آورید.

مثال ۱۳.۴. مستطیلی به اضلاع ۲۰ و ۶۰ واحد مفروض است. اگر یک واحد به عرض آن اضافه کنیم دو واحد از طول آن کم می‌شود. در بین مستطیل‌هایی که به این ترتیب ساخته می‌شود کدامیک بیشترین مساحت را دارد؟

مثال ۱۴.۴. یک طناب به طول ۸۸ متر در دسترس است. با این طناب قرار است زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن رودخانه است حصار شود. بیشترین مساحتی که می‌توان با این طناب حصار کرد چقدر است؟

مثال ۱۵.۴. مقدار a را به گونه‌ای بباید تا ماکزیمم سهمی $y = ax^2 + 4x + 5$ برابر ۹ شود.

مثال ۱۶.۴. بیشترین مساحت ممکنه برای مستطیل زیر را بباید.



مثال ۱۷.۴. موشکی با زاویه معینی به هوا شلیک شده است و ارتفاع موشک t ثانیه پس از پرتاب از دستور $y = -5t^2 + 50t + 55$ بدست می‌آید. معین کنید پس از چند ثانیه موشک به بیشترین ارتفاع خود می‌رسد.

پس از چند ثانیه موشک به زمین می‌خورد؟

تمرین ۱۶.۴. سهمی‌های زیر را رسم کنید.

$$1) y = \frac{1}{3}x^2 - 3$$

$$2) y = 6x^2 - 24x + 24$$

$$3) y = 4 - 2x - 2x^2$$

$$4) y = 4x^2 + 28x = 49$$

$$5) y = 2x - 3 - x^2$$

$$6) y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{12}x - 1$$

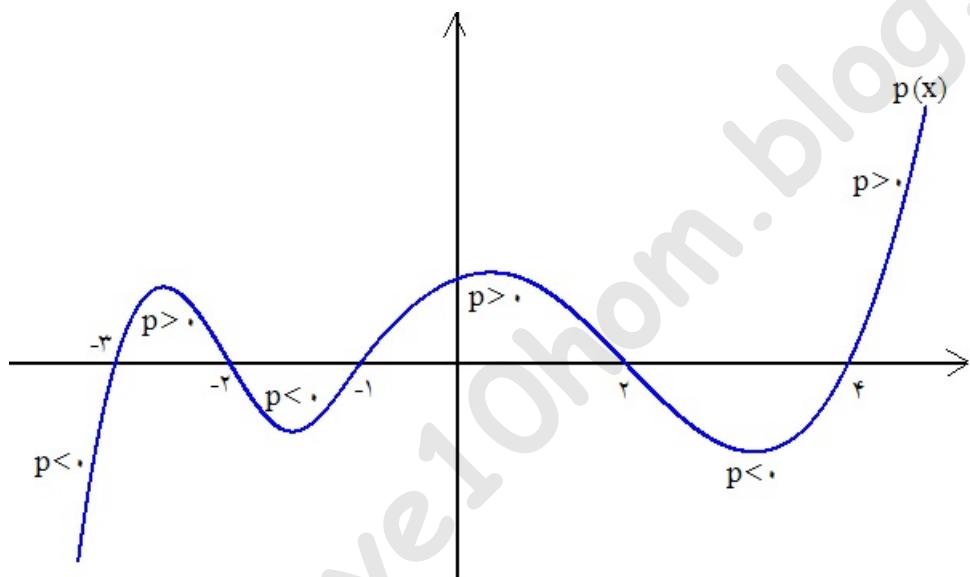
تمرین ۱۷.۴. بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن رودخانه است و با طناب می‌توان حصار کرد ۶۴۸ متر است. طول طناب را بباید.

تمرین ۱۸.۴. دو ضلع مستطیلی روی محورهای مختصات در ناحیه اول و زیر خط $\frac{6-x}{2} = y$ واقع است. یک راس آن روی مبداء و راس مقابلش M روی خط $\frac{6-x}{2} = y$ قرار دارد. بیشترین مساحت مستطیل وقتی روش اشاره شده حرکت می‌کند را بباید.

تمرین ۱۹.۴. اگر $x + 2y = 30$ باشد ماکزیمم مقدار حاصلضرب xy را بدست آورید.

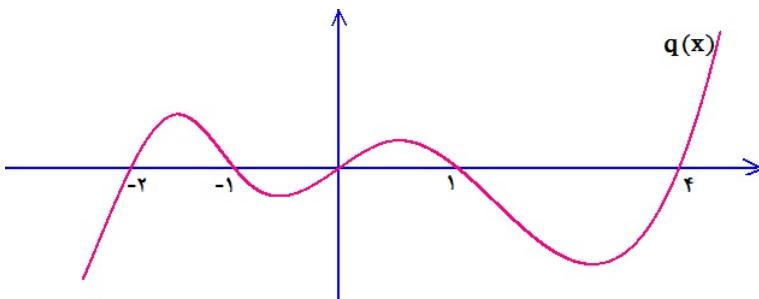
۳.۴ تعیین علامت چندجمله‌ایها

به دقت به شکل زیر نگاه کنید. نمودار یک منحنی در دستگاه مختصات ترسیم شده است. نام منحنی $p(x)$ است و در برخی بازه‌ها بالای محور x هاست و لذا مثبت است و در برخی بازه‌ها زیر محور x هاست و لذا منفی است. اگر دقت کنید نقاطی که منحنی محور طولها را در آن‌ها قطع کرده است نقشی اساسی در تعیین اینکه p مثبت است یا منفی بازی می‌کند. چنین نقاطی را ریشه‌های p گوییم. در حالت کلی نقاط حاصل از حل معادله $= 0$ را ریشه‌های p گوییم.



$$\left\{ \begin{array}{ll} x < -3 \Rightarrow p(x) < 0 & \text{گوییم عبارت منفی است} \\ -3 < x < -2 \Rightarrow p(x) > 0 & \text{گوییم عبارت مثبت است} \\ -2 < x < -1 \Rightarrow p(x) < 0 & \\ \vdots & \\ x > 4 \Rightarrow p(x) > 0 & \end{array} \right.$$

مثال ۱۸.۴. با توجه به شکل علامت منحنی $q(x)$ را تعیین کنید.

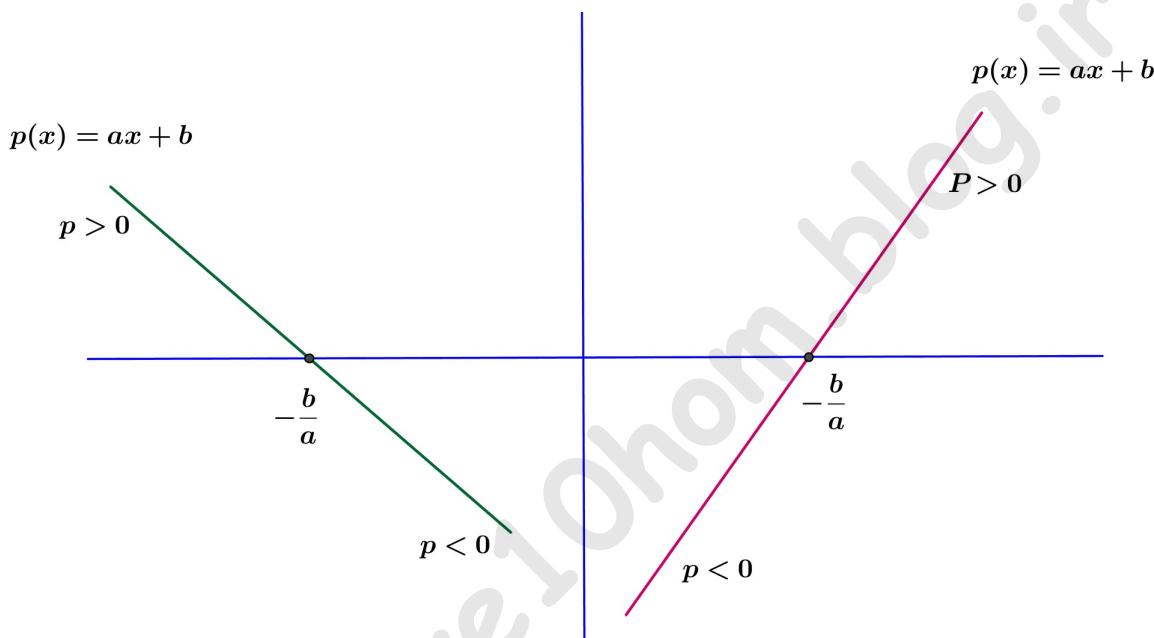


۱.۳.۴ تعیین علامت دو جمله‌ای درجه اول

می‌خواهیم عبارت $p(x) = ax + b$ را تعیین علامت کنیم. ابتدا ریشه‌های آن را بدست می‌آوریم:

$$p(x) = 0 \implies ax + b = 0 \implies x = -\frac{b}{a}$$

در حالت کلی نمودار $p(x) = y = ax + b$ یکی از دو حالت زیر را دارد:



از نمودار فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} a > 0 \implies \begin{cases} x < -\frac{b}{a} \implies p < 0 \\ x > -\frac{b}{a} \implies p > 0 \end{cases} \\ a < 0 \implies \begin{cases} x < -\frac{b}{a} \implies p > 0 \\ x > -\frac{b}{a} \implies p < 0 \end{cases} \end{cases}$$

خلاصه بحث فوق در جدول زیر که آنرا جدول تعیین علامت می‌نامیم آمده است.

x	$\frac{b}{a}$
$p(x) = ax + b$	
مخالف علامت	موافق علامت

مثال ۱۹.۴. علامت عبارات $3 - 2x$ و $p(x) = 2x - 4$ را تعیین کنید.

تذکر مهم: چنانچه بخواهیم علامت یک عبارت جبری را که شامل چند دوجمله‌ای درجه اول است را تعیین کنیم، می‌توانیم در یک جدول همه‌ی دوجمله‌ایها را نوشت و ریشه‌های آنها را یافته و هر کدام را تعیین علامت کنیم و دست آخر با ضرب علامت‌ها درهم علامت کل عبارت را بیابیم. مثال زیر را که به همین طریق حل می‌شود به دقت نگاه کنید.

مثال ۲۰.۴. عبارت $A = (x - 1)(x + 2)(x - 3)^5$ را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۱.۴. چندجمله‌ای $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ را تعیین علامت کنید.

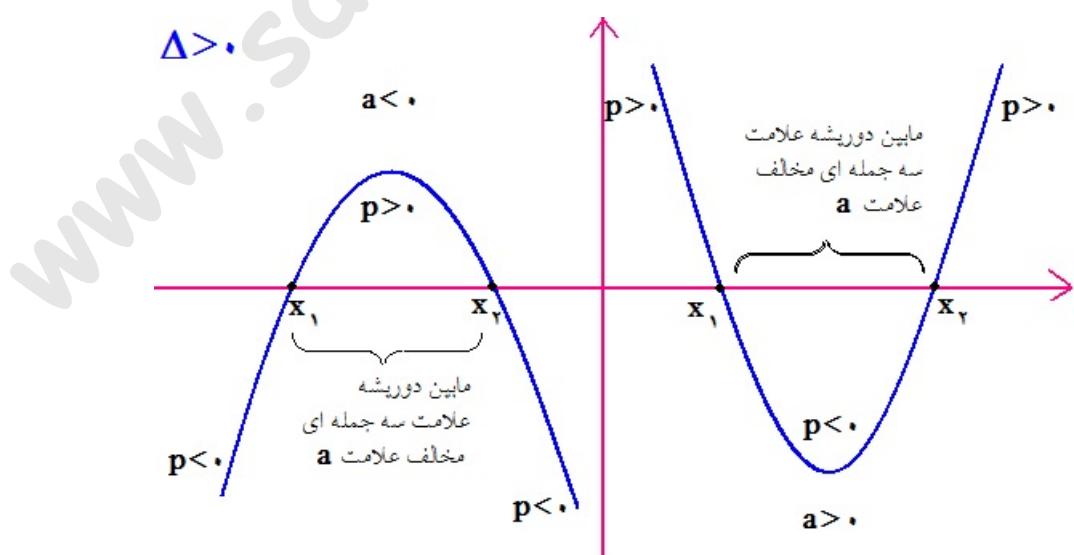
مثال ۲۲.۴. عبارت $A = \frac{(1-x)(x+2)}{(x+1)(x-3)^2}$ را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۳.۴. سهمی $y = x^2 - 2x - 8$ مفروض است. معین کنید در چه بازه‌ای سهمی زیر محور طولها و در چه بازه‌ای بالای محور طولهاست؟

۲۰.۳.۴ تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم

همان‌طور که تا الان متوجه شدید یک سه‌جمله‌ای درجه دوم را می‌توان با تجزیه به عامل‌های درجه اول تعیین علامت کرد. اما این زمانی شدنی است که عبارت تجزیه شود. در صورتیکه عبارت تجزیه نشود راه حل چیست؟ راه حل یافتن روشی است که به کمک آن بتوان سه‌جمله‌ای‌ها را مستقیماً تعیین علامت کرد. در حالت کلی یک سه‌جمله‌ای درجه دوم یا همان سهمی به یکی از صورت‌های زیر است:

الف: اگر $\Delta > 0$



ب : اگر $\Delta = 0$

$$\Delta = 0 \quad a < 0$$

علامت سه جمله‌ای
موافق علامت a

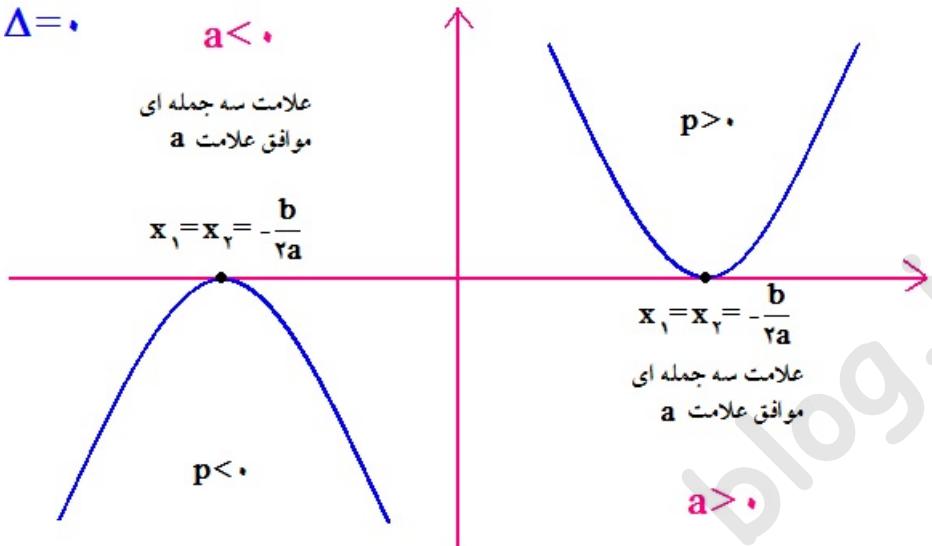
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$$p < 0$$

$$p > 0$$

علامت سه جمله‌ای
موافق علامت a

$$a > 0$$



ج: اگر $\Delta < 0$

$$\Delta < 0 \quad a < 0$$

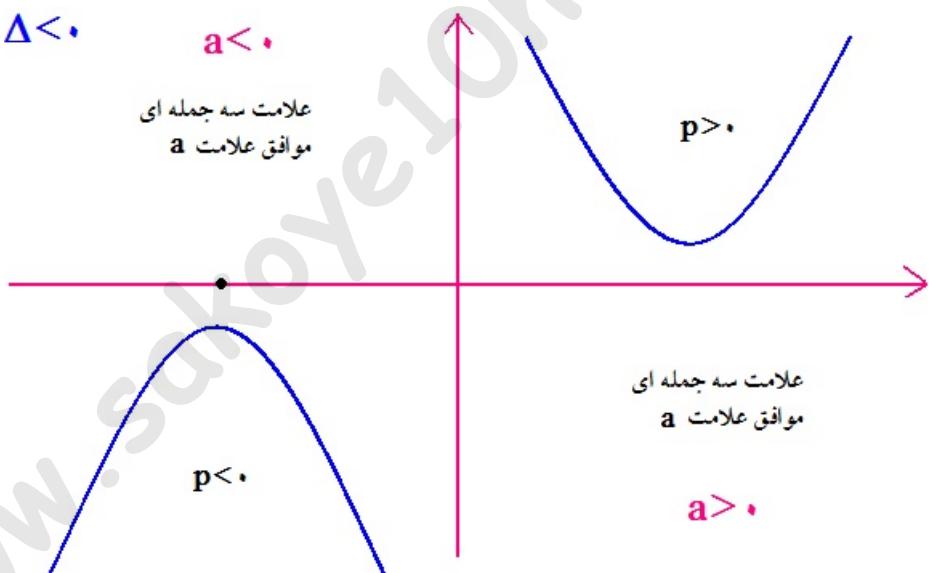
علامت سه جمله‌ای
موافق علامت a

$$p < 0$$

$$p > 0$$

علامت سه جمله‌ای
موافق علامت a

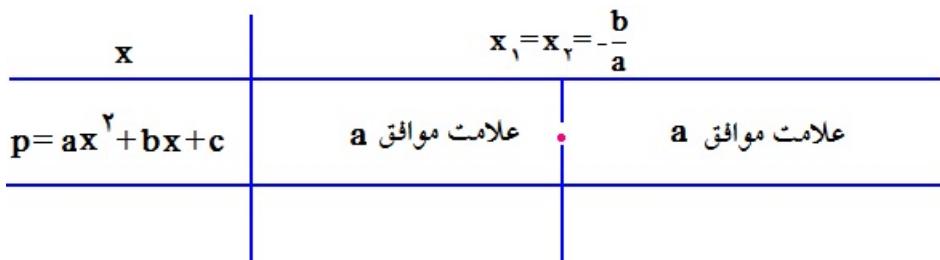
$$a > 0$$



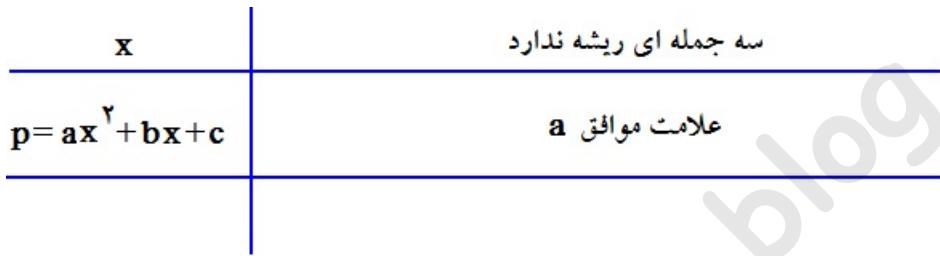
پس برای تعیین علامت سه جمله‌ای $p(x) = ax^2 + bx + c$ ابتدا باید $\Delta = b^2 - 4ac$ را حل کنیم. پس اولین گام یافتن مبین معادله درجه دوم است یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ است که بسته به علامت Δ یکی از جداول زیر را تشکیل می‌دهیم.
اگر $\Delta > 0$ باشد:

x	x_1	x_2
$p = ax^2 + bx + c$	علامت موافق a	علامت مخالف a علامت a علامت موافق a

اگر $\Delta = 0$ باشد:



اگر $\Delta < 0$ باشد:



تذکر: نتایج حاصل از بررسی نمودارهای یک سه‌جمله‌ای درجه دوم را می‌توان از روی معادله سه‌جمله‌ای درجه دوم $p(x) = ax^2 + bx + c$ نیز بدست آورد. برای این منظور فرم تبدیل شده‌ی عبارت p را که قبلاً محاسبه کردۀ‌ایم بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \\ \implies \frac{p(x)}{a} &= \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

حال اگر $\Delta < 0$ باشد عبارت $\frac{p(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ همواره مثبت است پس $\frac{p(x)}{a}$ هم مثبت است و این یعنی اگر a مثبت باشد آنگاه $p(x)$ هم مثبت است. و اگر a منفی باشد آنگاه $p(x)$ هم منفی است.

حال اگر $\Delta = 0$ باشد عبارت حاصل بصورت $\frac{p(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ مثبت است و مانند حالت قبل نتیجه حاصل می‌شود.

سرانجام اگر $\Delta > 0$ باشد پس $\sqrt{\Delta}$ با معنی است و داریم:

$$\frac{p(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \quad (*)$$

عبارت‌های داخل پرانتز که بلافاصله بعد از x آمده‌اند همان ریشه‌های معادله $p(x) = 0$ هستند. اگر قرار

دهیم:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

آنگاه معادله (*) بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{p(x)}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$$

بدون آنکه استدلال دچار نقصان شود می‌توان فرض کرد $x_2 < x_1$ است. (چرا) حال برای بررسی علامت $\frac{p(x)}{a}$ باید حالات زیر را بررسی کرد.

۱. اگر $x_2 < x < x_1$ باشد عبارت $\frac{p(x)}{a}$ منفی است ولذا $(x - x_1)(x - x_2)$ منفی است و این یعنی $p(x)$ و a از نظر علامت مخالف هم هستند. (این همان عبارت جدول تعیین علامت است)

۲. اگر $x < x_2 < x_1$ باشد و یا $x < x_1 < x_2$ باشد عبارت $(x - x_1)(x - x_2)$ مثبت است ولذا $\frac{p(x)}{a}$ هم مثبت است و این یعنی $p(x)$ و a هم علامت هستند.

همان‌طور که مشاهده کردید نتایج بدست آمده در این حالت منطبق بر نتایج بدست آمده از نمودارهای هندسی است.

درس را با بررسی چند مثال پی می‌گیریم.

مثال ۲۴.۴. عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $p = 2x^2 - x - 3$

۲) $p = -x^2 + x + 2$

۳) $A = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$

۴) $p = (x^2 - 9)(3x - 1)$

۵) $B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$

۶) $C = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)(x - 3)}$

تمرین ۲۰.۴. تعیین علامت کنید.

۱) $p = \frac{1}{4}x - 1$

۲) $p = (6 - 3x)(2 + 2x)$

۳) $A = \frac{(1-x)(2-x)(3-x)}{(4-x)(5-x)}$

۴) $B = \frac{x^2 + x + 2}{4 - 3x - x^2}$

۵) $C = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$

۶) $D = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x(x^2 + 4x + 4)}}$

۴.۴ نامعادله

یکی از مهم‌ترین کاربردهای تعیین علامت حل نامعادلات جبری است. برای یافتن مقادیری از x که در شرط $p(x) > 0$ صدق می‌کند تنها راه تعیین علامت p است. حتی ممکن است p لزوماً چندجمله‌ای نباشد. قبل از هر چیز خواص مقدماتی نامساوی‌ها را بیان می‌کنیم.

خواص اصلی نامساوی‌ها

$$1) a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$2) a \leq b \implies \begin{cases} c > 0 \Rightarrow ac \leq bc \\ c < 0 \Rightarrow ac \geq bc \end{cases}$$

$$3) a \leq b \ \& \ b \leq c \implies a \leq c$$

$$4) 0 < a \leq b \implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$$

$$5) a \leq b < 0 \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$$

$$6) a < 0 < b \implies \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$$

مثال ۲۵.۴. نامساوی $2 - 8x + 3(x - 2) > -x + 1$ را حل کنید و مجموعه جواب آن را بصورت بازه نمایش دهید.

مثال ۲۶.۴. نامعادله‌ی $\frac{2x+3}{5} \leq \frac{2}{3}$ را حل کنید.

مثال ۲۷.۴. حدود پارامتر m را طوری تعیین کنید تا معادله‌ی درجه دوم $x^2 + mx + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشد.

مثال ۲۸.۴. سهمی $y = x^2 + ax + b$ محور طولها را در دو نقطه با طول‌های ۱ و ۵ قطع می‌کند. اولاً مقادیر a ، b را بباید و ثانیاً معین کنید که نمودار این سهمی در چه بازه‌ای زیر خط $y = 3$ قرار می‌گیرد.

مثال ۲۹.۴. نامعادله‌ی $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \geq 0$ را حل کنید.

مثال ۳۰.۴. نامعادله‌ی $\frac{x}{x-5} > \frac{1}{2}$ را حل کنید.

مثال ۳۱.۴. نامعادله‌ی $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x}$ را حل کنید.

مثال ۳۲.۴. دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x - 3 \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} \geq 1 \end{cases}$$

مثال ۳۳.۴. نامعادله‌ی $\frac{(x-4)(x^2-5x+6)(x^2+x+2)}{(-2x^2+x-5)(x^2-2x+1)} < 0$ را حل کنید.

مثال ۳۴.۴. حدود m را چنان تعیین کنید تا عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ برای هر مقدار x مثبت باشد.

مثال ۳۵.۴. نامعادله‌ی $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} < 1$ را باشرط $x > 0$ حل کنید.

تمرین ۲۱.۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x+1}{1-x} \leq -1$ را بیابید.

تمرین ۲۲.۴. حدود m را چنان بیابید که نابرابری زیر همواره درست باشد.

$$\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1} > -1$$

تمرین ۲۳.۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{3}{x} < (2-\sqrt{3})^{2+x}$ باشرط $x > 0$ را بدست آورید.

تمرین ۲۴.۴. نامعادلات زیر را حل کنید.

$$1) \frac{3-x^2}{x} > 2$$

$$2) \frac{2x-1}{x} < 1$$

$$3) \frac{3x^2-3x}{x^3-1} > 1$$

$$4) -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2}$$

$$5) \frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2$$

$$6) \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x+4}$$

$$7) \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} > \frac{2x+4}{x-2}$$

$$8) (x+\sqrt{x})(2x^2+x-15) < 0$$

تمرین ۲۵.۴. اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ برای هر مقدار x منفی باشد حدود تغییرات a را بدست آورید.

تمرین ۲۶.۴. نامعادله $2x-1 \leq 3x+1 \leq \frac{5}{2}x+2$ را حل کنید.

تمرین ۲۷.۴. نامعادله‌ی $\frac{1}{2x^2+x+1} \geq \frac{1}{x^2+1}$ را حل کنید.(بینید امکان معکوس کردن طرفین نامعادله وجود دارد؟)

۵.۴ قدرمطلق و معادلات و نامعادلات قدرمطلقی

در کلاس نهم با قدرمطلق آشنا شده‌اید. یادآوری می‌کنیم که قدرمطلق بصورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۴. قدر مطلق x را که با نماد $|x|$ نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال ۳۶.۴. قدرمطلق عبارت‌های زیر را حساب کنید.

۱) $|1 + \sqrt{2}|$

۲) $|1 + t^2|$

۳) $|1 - \sqrt{2}|$

۴) $\left|1 - \frac{\pi}{3}\right|$

مهم‌ترین خواص قدرمطلق ها

۱) $|u| = 0 \implies u = 0$

۲) $|u| = a \implies u = \pm a, a > 0$

۳) $|u| \leq a \implies -a \leq u \leq a, a > 0$

۴) $|u| \geq a \implies u \geq a \text{ یا } u \leq -a, a > 0$

۵) $u^r \leq a^r \iff |u| \leq a \iff -a \leq u \leq a, a > 0$

۶) $u^r \geq a^r \iff |u| \geq a \iff u \geq a \text{ یا } u \leq -a, a > 0$

۷) $\begin{cases} |u| = u \iff u \geq 0 \\ |u| = -u \iff u \leq 0 \end{cases}$

۸) $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \quad \text{نامساوی مثلثی}$

۹) $|ab| = |a||b| \quad \& \quad \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$

مثال ۳۷.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$1) |x^3 - 9x| = 0$$

$$2) |3x - 5| = 4$$

$$3) |2x - 1| < 1$$

$$4) |1 - x| \geq 2$$

$$5) |x^2 + x - 2| = 2 - x - x^2$$

$$6) |2x - 1| < x$$

مثال ۳۸.۴. ثابت کنید $|a - b| = |b - a|$

مثال ۳۹.۴. فرض کنید $|a - c| < 10$, $|b - 1| < 10$, $|a| < 1$. با این مفروضات ثابت کنید $|ab - c| < 20$.

مثال ۴۰.۴. در نامساوی مثلثی چه زمانی تساوی رخ می‌دهد؟ یعنی تحت چه شرایطی روی a, b, c نتیجه می‌شود:
• $|a + b| = |a| + |b|$

مثال ۴۱.۴. معادله $1) |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1$ را حل کنید.

مثال ۴۲.۴. معادله $2) |x - 1| + |x + 1| = 2$ را حل کنید.

مثال ۴۳.۴. نامعادله $x^3 - x \leq x$ را حل کنید.

مثال ۴۴.۴. مجموعه جواب نامعادله $2) |x - 1| + |x + 3| > 2$ را بدست آورید.

تمرین ۲۸.۴. حاصل قدر مطلق‌های زیر را بدست آورید.

$$1) |\sqrt{7} - 3|$$

$$2) |\sqrt{2} + \sqrt{3} - \pi|$$

$$3) |\sqrt{10} - 3|$$

$$4) |\sqrt{2} - 1/41|$$

$$5) |\pi - 3/14|$$

$$6) |1 - 2^{0.2}|$$

تمرین ۲۹.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$1) |b(b - 1)| = b$$

$$2) |b| + |b - 1| = 0$$

$$3) |b - 1| + |b| = b$$

$$4) |x^2 - 1| < 1$$

$$5) 2 \leq |b| \leq 4$$

$$6) |x| + x = 2$$

تمرین ۳۰.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |x| - x = ۳$$

$$۲) |x| + ۱ = ۱$$

$$۳) |x| + x = ۱$$

$$۴) |x| > x + ۲$$

$$۵) |x| - |x + ۱| = ۱$$

$$۶) |x| + |x + ۲| = ۳$$

$$۷) |x| = \frac{۱}{x}$$

$$۸) |x^2 - x| < x$$

$$۹) \left| a - \frac{۱}{a} \right| = |a - ۱|$$

$$۱۰) |3x - ۵| = |x + ۲|$$

تمرین ۳۱.۴. به ازای چه مقدار m همواره رابطه $mx^2 - ۲(m - ۱)x + ۱ > ۰$ برقرار است؟

تمرین ۳۲.۴. به کمک تعیین علامت نامساوی بسیار مهم و کلیدی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{cases} x > ۰ \implies x + \frac{۱}{x} \geq ۲ \\ x < ۰ \implies x + \frac{۱}{x} \leq -۲ \end{cases}$$

تمرین ۳۳.۴. به کمک رابطه‌ی تمرین قبل کمترین مقدار عبارات زیر را بیابید.

$$A = \frac{x^4 + ۲x^2 + ۲}{x^2 + ۱} \quad B = \frac{x^4 + ۲}{\sqrt{x^4 + ۱}}$$

تمرین ۳۴.۴. حل کنید.

$$۱) \frac{۱}{x - x^2} > ۴$$

$$۲) ۴ + x^2 > ۳۰ - x^2$$

$$۳) \frac{x^2 - ۲x}{\sqrt{x+1}}$$

$$۴) (x^2 + ۲\sqrt{۲}x + ۲)(x^2 - ۴) \leq ۰$$

$$۵) m^2x^2 + mx + \frac{۱}{m} < ۰ \rightarrow m = ?$$

$$۶) ۲x^2 - (a - ۴)x + \frac{۱}{a} > ۰ \rightarrow a = ?$$

$$۷) x^3 - ۴x^2 - x + ۴ < ۰$$

$$۷) x^4 - ۳x^2 < ۴$$

$$۹) \frac{x^2 + x - ۲}{x^2 + ۵x + ۶} < ۰$$

$$۱۰) x(x+1)(x+2)(x+3) \leq ۲۴$$

۶.۴ تست‌های فصل چهارم

۱- مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} |x| < 2 \\ 2x - 1 < |x| \end{cases}$ کدام است؟
 (۱) $\{x: -1 < x < 1\}$ (۲) $\{x: -2 < x < 2\}$ (۳) $\{x: 0 < x < 2\}$ (۴) $\{x: -2 < x < 1\}$

۲- در کدام فاصله نامساوی $x - 1 > 0$ برقرار است؟
 (۱) $-2 < x < -1$ (۲) $x < 1$ (۳) $x > 2$ (۴) $1 < x < 2$

۳- اگر $A = \{x | x < -1\}$ و $B = \{x | x > 5\}$ کدام است؟
 (۱) برعهایی و برعهایی (۲) برعهایی و برعهایی (۳) برعهایی و برعهایی
 (۴) برعهایی و برعهایی هر دو مثبت

۴- جوابهای معادله $\frac{1 - 2x}{x + 2} + \frac{x + 1}{x - 2} = 0$ کدام است؟
 (۱) $1, -1$ (۲) صفر، 1 (۳) صفر، -1 (۴) $1, -1$

۵- به ازای چه مقادیری از x نامعادله $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} < 0$ برقرار است؟
 (۱) $-2 < x < -1$ (۲) $1 < x < 2$ (۳) $-1 < x < 2$ (۴) $-2 < x < 1$

۶- اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - (4a+2)x + (3a^2 + 6a + 2) = 0$ برابر ۲ باشد ریشه دیگر کدام است؟
 (۱) -6 (۲) -3 (۳) 3 (۴) 6

۷- به ازای کدام مقدار a ریشه‌های معادله $x^2 - (3a+1)x + x+2a^2 + 2 = 0$ با هم برابرند؟
 (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۸- جوابهای دستگاه نامعادلات $\begin{cases} 2x - \frac{x}{3} < 1 \\ \frac{x}{2} - 2 < x \end{cases}$ کدام است؟
 (۱) $x > -4$ (۲) $x < \frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{5} < x < 4$ (۴) $-4 < x < \frac{3}{5}$

۹- محل تلاقی خط $y = x$ و سهمی $y = x^2$ کدام است؟
 (۱) $(0, 0)$ (۲) $(1, 1)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(1, 1)$ و $(0, 0)$

۱۰- ریشه‌های معادله $7x^2 + 6x + 5 = 3x^2 + 6x + 4 = 0$ کدام اند؟
 (۱) $-\frac{1}{2}, 1$ (۲) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

۱۱- اگر یک ریشه معادله $7x^2 - ax + 357 = 0$ برابر ۱۷ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

۹ (۴) ۷ (۳) ۵ (۲) ۳ (۱)

۱۲- عدد $\frac{2}{3}$ یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + bx - 4 = 0$ است ریشه دیگر کدام است؟

-۶ (۴) -۳ (۳) ۶ (۲) ۳ (۱)

۱۳- مجموعه جواب دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases} 5x - 2 > 3 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$ کدام است؟

{ $x | 1 < x < 4$ } (۴) { $x | x > 1$ } (۳) { $x | x < 4$ } (۲) { $x | x > 4$ } (۱)

۱۴- کدام مجموعه، جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} 10 - 5x < 0 \\ \frac{x}{2} + 2 > x \end{cases}$ است؟

{ $x : 5 < x < 10$ } (۴) { $x : 4 < x < 5$ } (۳) { $x : 2 < x < 5$ } (۲) { $x : 2 < x < 4$ } (۱)

۱۵- اگر $c < d < 0$ ، $a > b > 0$ کدام نامساوی همواره صحیح است؟

$ad > bc$ (۴) $ad < bc$ (۳) $ac < bd$ (۲) $ac > bd$ (۱)

۱۶- ۴ برابر عددی از ۱۲ برابر آن عدد ۹ واحد کمتر است معکوس آن عدد کدام است؟

$\frac{-9}{8}$ (۴) $\frac{-8}{9}$ (۳) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{8}{9}$ (۱)

۱۷- در معادله درجه دوم $mx^2 - 20 = 0$ یکی از ریشه‌ها برابر $\frac{5}{3}$ است ریشه دیگر کدام است؟

۴ (۴) ۲ (۳) -۲ (۲) -۴ (۱)

۱۸- مجموعه همه جوابهای نامعادله $\frac{2\sqrt{x} + 2}{3\sqrt{x} + 1} > 1$ در کدام فاصله است؟

[۰, ۱) (۴) (۰, ۱) (۳) (-∞, ۱) (۲) (-∞, ۱] (۱)

۱۹- اگر به ازای همه مقادیر m ، $4x^2 - 2mx + 4m^2 \geq 0$ باشد، آنگاه حدود m کدام است؟

$|m| \geq 2$ (۴) $|m| \leq 2$ (۳) \emptyset (۲) R (۱)

۲۰- فرض کنیم a و b مختلف العلامه باشند و $a < b$ در این صورت کدام نامساوی همواره برقرار است؟

$b^3 < a^3$ (۴) $b^2 < a^3$ (۳) $a^3 < b^2$ (۲) $a^2 < b^2$ (۱)

۲۱- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x+1)} \geq 0$ کدام است؟

$\{x | x > 1\}$ (۴)

$\{x | x \geq 1\}$ (۳)

$\{x | x < 1\}$ (۲)

$\{x | x \leq 1\}$ (۱)

۲۲- فرض کنید p و q و r اعداد حقیقی و آنگاه همواره: $pr > qr$, $pq \neq 0$, $r < 0$
 $p > q$ (۴) $q > -p$ (۳) $-p > q$ (۲) $-p > -q$ (۱)

۲۳- مجموع مربعات دو عدد صحیح متولی ۹۲۵ است مجموع این دو عدد کدام است?
 ۴۷ (۴) ۴۵ (۳) ۴۳ (۲) ۴۱ (۱)

۲۴- نسبت دو عدد برابر $\frac{3}{5}$ و مجموع مربعاتشان ۱۶۶۶ است. مجموع دو عدد کدام است؟

۶۵ (۴)

۵۶ (۳)

۵۴ (۲)

۴۵ (۱)

۲۵- اگر معادله درجه دوم $(m+2)x^2 + 4x + (m-1) = 0$ دارای دو جواب حقیقی باشد، مقادیر m کدام است?
 $-3 \leq m \leq 2$ (۴) $-2 \leq m \leq 2$ (۳) $1 \leq m \leq 2$ (۲) $-2 \leq m \leq 1$ (۱)

۲۶- مجموعه جوابهای حقیقی نامعادله $\frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 > \frac{3}{2}(x-1)^2$ کدام است؟

$\{x : -3 < x < -1\}$ (۴)

$\{x : x < -2\}$ (۳)

$\{x : x < -1\}$ (۲)

$\{x : x > -3\}$ (۱)

۲۷- دو برابر مقدار مثبتی از ثلث مربع آن مقدار ۹ واحد کمتر است. این مقدار کدام است?
 ۱۸ (۴) ۱۵ (۳) ۱۲ (۲) ۹ (۱)

۲۸- تعداد جوابهای معادله $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{2-x}$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

۲۹- حاصلضرب دو عدد طبیعی متولی از ۵ برابر عدد کوچکتر ۳۲ واحد بیشتر است مجموع آن دو عدد کدام است?
 ۱۵ (۴) ۱۷ (۳) ۱۹ (۲) ۲۱ (۱)

۳۰- حاصلضرب دو عدد فرد متولی ۳۲۳ است مجموع این دو عدد کدام است؟

۳۶ (۴)

۳۵ (۳)

۳۴ (۲)

۳۲ (۱)

۳۱- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند به طوری که $y < x < 0$ آنگاه:

$\frac{-1}{y} < \frac{-1}{x}$ (۴)

$-x + y < 0$ (۳)

$-x < -y$ (۲)

$\frac{-1}{x} < \frac{-1}{y}$ (۱)

۳۲- اگر a و b متحددالعلامه و نااصر باشند، حاصل عبارت $4 - (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ همواره کدام است؟
 (۱) مثبت (۲) منفی
 (۳) کوچکتر یا مساوی صفر (۴) بزرگتر یا مساوی صفر

۳۳- مجموعه جوابهای نامعادله $|x|^2 - 3x + 2 < 0$ کدام است؟
 (۱) $[1, 2]$ (۲) $\{0\} \cup [1, 2]$ (۳) $[-2, -1]$ (۴) $\{0\}$

۳۴- مجموعه جوابهای $x^4 - 1 < 0$ کدام است؟
 (۱) $(-\infty, +1)$ (۲) $[-1, +1]$ (۳) $[-1, +1]$ (۴) $[-1, +\infty)$

۳۵- عدد ۳۶ را به دو قسمت چنان تقسیم کردایم که حاصلضرب آن دو ماقزیم است. آن دو قسمت کدامند؟
 (۱) ۲۴ و ۱۲ (۲) ۲۰ و ۱۶ (۳) ۱۸ و ۱۴ (۴) ۲۲ و ۱۴

۳۶- مجموعه جوابهای نامعادله $(x^2 + \sqrt{2}x + 2)(x^2 - 4) < 0$ کدام است؟
 (۱) $[-2, 2]$ (۲) $[-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty]$ (۳) $[-\infty, -2] \cup [2, \infty]$
 (۴) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

۳۷- حدود تغییرات X ، در نامعادله $(x^2 + x + 1)(x^2 - 4x + 3) > 0$ کدام است؟
 (۱) $1 < x < 3$ (۲) $-3 < x < -1$ (۳) $x > 3$ یا $x < -3$ (۴) $x > -1$ یا $x < -1$

۳۸- کمترین مقدار عبارت $x^2 - x + 2$ وقتی که X تغییر می‌کند، کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{7}{4}$

۳۹- کسر $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ در کدام فاصله زیر منفی است؟
 (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(2, 3)$ (۳) $(3, 4)$ (۴) $(2, \infty)$

۴۰- جواب نامعادله $x^4 + x^2 < 4x^2 + 4$ کدام است؟
 (۱) $-4 < x < 4$ (۲) $-2 < x < 2$ (۳) $x > 2$ یا $x < -2$ (۴) $x > 4$ یا $x < -4$

۴۱- جوابهای نامعادله $\frac{3x^2 - 3x}{x - 1} > 1$ کدام است؟
 (۱) $R - \{1\}$ (۲) \emptyset (۳) $\{x : x > 1\}$ (۴) $\{x : x < 1\}$

۴۲- حاصل ضرب یک عدد مثبت در خودش از سه برابر آن عدد، ۴۰ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

-۴۳- اگر $x \geq 3$ ، مجموعه جوابهای نامعادله $21 - 2|3 - x| \leq 0$ کدام است؟
 $\{x : x \geq 5\}$ (۴) $\{x : x \leq 4\}$ (۳) $\{x : 3 \leq x \leq 5\}$ (۲) $\{x : 3 \leq x \leq 4\}$ (۱)

-۴۴- اگر $\forall a, b \in \mathbb{R} ; a < b < 0$ $a^{2n} > b^{2n}$ (۲) $a^{2n+1} > b^{2n+1}$ (۱)
 $-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$ (۴) $\sqrt{-a} > \sqrt{-b}$ (۳)

-۴۵- مجموعه جواب نامعادله $8 - |x - 1| > 0$ کدام است؟
 $\{x : x > 9\}$ (۲) $\{x : x > 7\}$ (۱)
 $\{x : x > 9 \text{ یا } x < 1\}$ (۴) $\{x : x > 7 \text{ یا } x < 1\}$ (۳)

-۴۶- اگر $|a| < |b|$ و b^3 منفی باشد، آنگاه همواره:
 $a^3 > b^3$ (۴) $a > b$ (۳) $a < b$ (۲) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (۱)

-۴۷- در معادله درجه دوم $x^2 + bx + c = 0$ ، با شرط $b = c + 1$ ، یکی از ریشه‌های آن به کدام صورت است؟
 c (۴) $\frac{b}{2}$ (۳) $2b - 1$ (۲) $-c$ (۱)

-۴۸- رابطه بین x ، y به صورت $y = 2x + 16$ است. بیشترین مقدار xy وقتی x تغییر می‌کند، کدام است؟
 42 (۴) 32 (۳) 28 (۲) 24 (۱)

-۴۹- جواب دستگاه نامعادلات
 $\begin{cases} \frac{2x+1}{3} \geq x-1 \\ x(x-4) \leq x^2 - 16 \end{cases}$ کدام است؟
 $\{x : x \leq 4\}$ (۴) $\{x : x \geq 4\}$ (۳) \emptyset (۲) $\{4\}$ (۱)

-۵۰- در بازه‌ای، مقادیر تابع با ضابطه $y = x^2$ کمتر از مقادیر تابع با ضابطه $y = |x - 2|$ است، آن بازه کدام است؟
 $(0, 1)$ (۴) $(-1, 0)$ (۳) $(-2, 1)$ (۲) $(-2, 0)$ (۱)

-۵۱- دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است، اگر حاصلضرب آنها می‌نیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟
 $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱)

-۵۲- جواب نامعادله‌ی $\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3}$ کدام است؟
 $x < \frac{5}{4}$ (۴) $x > \frac{7}{6}$ (۳) $x > \frac{3}{4}$ (۲) $x < \frac{2}{3}$ (۱)

۶)

۵)

۴)

۳)

-۵۳- در معادله‌ی $\frac{2x - 4}{x + 1} = \frac{x + 1}{2x - 4}$ مجموع ریشه‌ها کدام است؟

$-2 < x < 3$

$2 < x < 3$

$1 < x < 3$

$x < 3$

-۵۴- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x - 1} > \frac{1}{x - 3}$ به کدام صورت است؟

$\{x : -2 < x < -1\}$

$\{x : -1 < x < 1\}$

$\{x : x > -1\}$

$\{x : x < -1\}$

-۵۵- در یک قطعه زمین اگر ۲۰ درخت میوه با فاصله‌های مساوی کاشته شود، پس از رشد کافی از هر درخت به طور متوسط ۶۰ کیلوگرم میوه برداشت می‌شود، به ازای هر درخت اضافی که کاشته شود، دو کیلوگرم از متوسط محصول آن کم می‌شود. حداقل برداشتی با این فرضیه کدام است؟

۱۲۸۰

۱۲۵۰

۱۲۴۰

۱۲۰۰

-۵۶- جواب نامعادله زیر کدام است؟ $-1 \leq 3x - 2 \leq 1$

$-2 \leq x \leq 1$

$-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$

$-1 \leq x \leq 1$

$\frac{1}{3} \leq x \leq 1$

-۵۷- به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m-1)x^3 + 6x + 2m + 1$ ، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

$1 < m < 2/5$

$1 < m < 2$

$m > 2/5$

$m < -2$

-۵۸- اگر عبارت $1 - (a-1)x + (a-1)x^2 + (a-1)x^3$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

R

\emptyset

$\{a : a < 1\}$

$\{a : 1 < a < 5\}$

-۵۹- جواب مشترک دو نامعادله $\frac{3x + 5}{2} - \frac{2x - 4}{3} > \frac{1}{2}$ و $\frac{4x - 1}{3} > 3x - 2$ به کدام صورت است؟

$-4 < x < 2$

$-2 < x < 1$

$-4 < x < 1$

$-2 < x < 2$

-۶۰- بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

۹۸۸

۹۷۸

۹۶۸

۹۵۸

-۶۱- مجموعه جواب نامعادله $|x - 2| - 2x < x^2$ ، به صورت کدام بازه است؟

(۱, ۲)

(۰, ۲)

(-۱, ۲)

(-۱, ۱)

-۶۲- مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x - 2$ کدام بازه است؟

(۱, ۳)

(۱, ۲)

(۰, ۲)

(۰, ۱)

۷.۴ کلید تست‌های فصل چهارم

۴	۳	۲	۱	۴	۳	۲	۱	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۵
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۶
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۷
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۸
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۳
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۷
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۸
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۲
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۴
		<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۵
		<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۶

فصل ۵

تابع

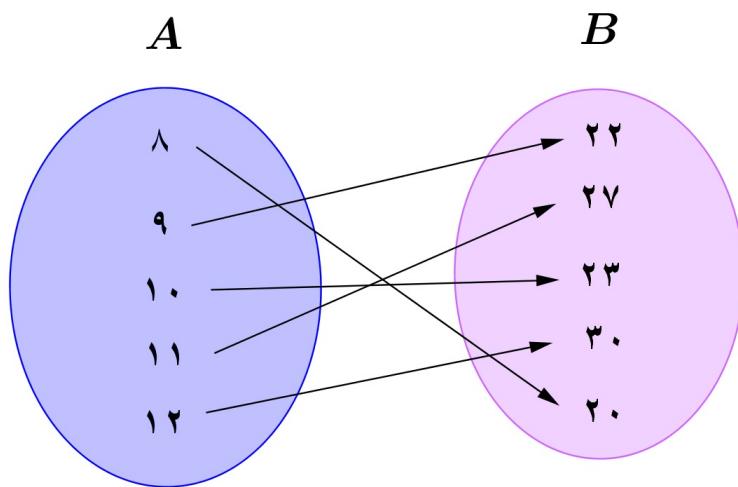
۱.۵ مفهوم تابع و روش‌های نمایش آن

در این فصل با مفهوم تابع آشنا خواهید شد. مفهومی که نقشی کلیدی در تمام شاخه‌های علوم دارد. در واقع تابع را می‌توان در زیست‌شناسی، علوم مهندسی، جغرافیا، فیزیک، شیمی و... دید. این دامنه کاربرد نشان از اهمیت تابع دارد. از نظر تاریخی نمی‌توان بطور دقیق پیدایش تابع را بررسی کرد چرا که در کتبیه‌های به جای مانده از بابلیان می‌توان تناول بین اعداد طبیعی و مرتع های آن ها و مکعب های آن ها را دید که به تعبیری تابع است. افراد دیگری هم مفهوم تابع را به کار برده‌اند که عبارتند از گالیله، دکارت، جان برنولی، گاتتفورد لایبنیتز، اویلر، دالمبر، کوشی، دیریکله، ژوزف فوریه و کارل وارشتراس. شاید از دوره وایرشتراس به بعد مفهوم تابع بی‌عیب و نقص و کامل مانند آنچه امروز هست معرفی شد. تمامی افراد نامبرده از بزرگان تاریخ ریاضیات هستند و هر کدام در تکمیل مفهوم تابع نقش داشته‌اند.

اتفاقی که در آن نشسته را در نظر بگیرید. راس هر ساعت دمای اتاق را اندازه‌گیری کنید و در یک جدول یادداشت کنید مشخصاً در یک لحظه معین دمای اتاق دو مقدار ندارد. فرض کنید جدول زیر نمایش این اعداد باشد.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۲۰	۲۲	۲۳	۲۷	۳۰

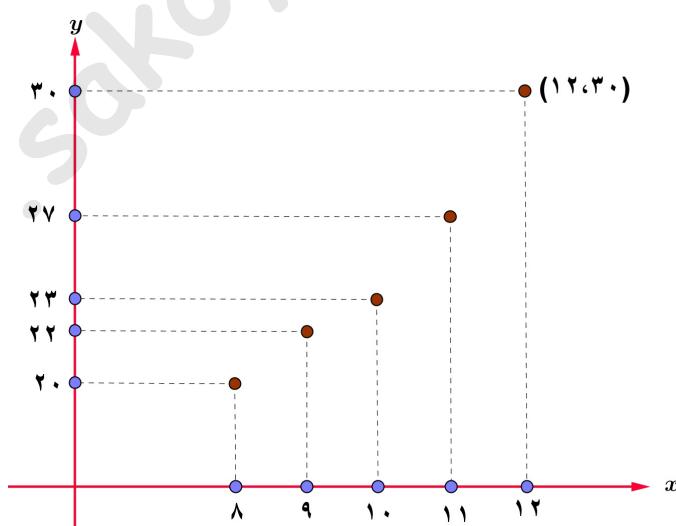
یک راه دیگر نمایش این رابطه‌ی بین زمان و درجه حرارت اتاق استفاده از نمودار ون هست. در شکل زیر این نمایش را می‌بینید. مجموعه A نشان‌دهنده‌ی زمان، و مجموعه دوم یعنی B نشان‌دهنده‌ی درجه حرارت هست. رابطه‌ی بین این‌ها با یک پیکان جهت دار نمایش داده شده است. اولاً از هر عضو مجموعه‌ی اول یک پیکان خارج شده است و هر پیکان به یک و فقط یک عضو از مجموعه‌ی B نظیر شده است.



یک راه دیگر نمایش رابطه فوق استفاده از زوج مرتب است. منظور از یک زوج مرتب نمادی بصورت (a, b) است که در آن a را مولفه اول و b را مولفه دوم گوییم. کلمه مرتب اشاره به آن دارد که ترتیب مولفه‌ها مهم است. یعنی در حالت کلی $(a, b) \neq (b, a)$. رابطه‌ی فوق بصورت زوج مرتب در زیر نمایش داده شده است:

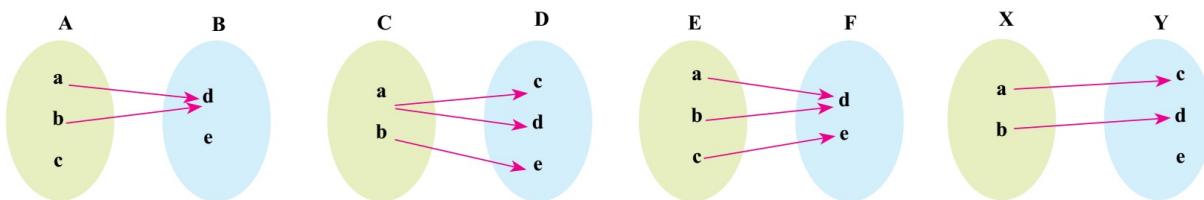
$$f = \{(8, 20), (9, 22), (10, 23), (11, 27), (12, 30)\}$$

زمانی که مولفه‌ها عدد حقیقی باشند هر زوج مرتب نشانگر نقطه‌ای روی دستگاه مختصات است. مولفه اول معرف طول و مولفه دوم معرف عرض نقطه است. نمایش رابطه‌ی فوق در دستگاه مختصات را در شکل زیر می‌بینید.



تعریف ۱.۵. یک تابع بین دو مجموعه A و B رابطه‌ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود.

مثال ۱.۵. از نمودارهای ون زیر کدام تابع است و کدام نیست؟



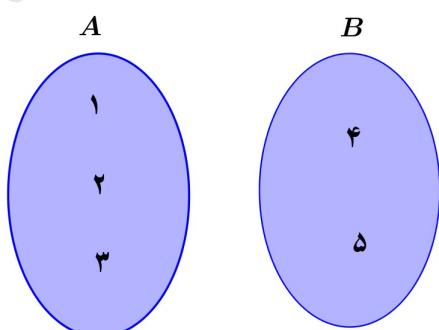
مثال ۲.۵. یپکان‌های از A به B طوری رسم کنید تا رابطه‌ی ایجاد شده تابع باشد. برای X, Y طوری رسم کنید که رابطه تابع نباشد.



مثال ۳.۵. تابع بودن روابط زیر را بررسی کنید.

۱. رابطه‌ای که به هر شخصی قد او را نسبت می‌دهد.
۲. رابطه‌ای که به هر شخصی وزن وی را نسبت می‌دهد.
۳. رابطه‌ای که به هر شخص غذای مورد علاقه‌اش را نسبت می‌دهد.
۴. رابطه‌ای که به هر چند ضلعی محدب مساحت آن را نسبت می‌دهد.
۵. رابطه‌ای که به هر عدد مقسوم‌علیه‌های آن عدد را نسبت می‌دهد.
۶. رابطه‌ای که به هر دو عدد طبیعی دلخواه حاصل جمع آنها را نسبت می‌دهد.

مثال ۴.۵. رابطه‌ی متفاوت بین دو مجموعه‌ی A و B زیر بنویسید که تابع باشند.



مثال ۵.۵. فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد . از رابطه‌های زیر کدام تابع است و کدام نیست؟

- ۱) $\{(1, 2), (2, 4), (3, 5)\}$
- ۲) $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$
- ۳) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
- ۴) $\{(2, 1), (3, 5), (2, 2), (1, 3)\}$
- ۵) $\{(1, 3), (2, 4)\}$
- ۶) $f = \{\} = \emptyset$

در مثال بالا مجموعه‌های A ، B کاملا مشخص شده‌اند. چنانچه در مسئله‌ای فقط زوج‌های مرتب نوشته شده باشند شما می‌توانید مجموعه مولفه‌های اول را A و مجموعه مولفه‌های دوم را B می‌گیریم.

مثال ۵.۶. روابط زیر که با زوج مرتب بیان شده‌اند را بررسی کنید. کدام تابع است . کدام نیست.

$$f = \{(2, -1), (3, -1), (4, -1), (5, -1)\}$$

$$g = \{(-1, 2), (4, 4), (3, -1), (2, 2), (\sqrt{2}, \sqrt{3}), (7, -1), (-1, \sqrt{4}), (10, -1)\}$$

$$h = \{(1, 1)\}$$

$$m = \{(2, -1), (3, 4), (-2, \sqrt{2}), (3, 7), (2, \sqrt[3]{-1})\}$$

مثال ۷.۵. رابطه‌ی $f = \{(2, 4), (3, -1), (5, -1), (2, a^3 + 3a)\}$ معرف تابع است. مقدار a را بدست آورید.

تذکر مهم: همان‌طور که در مثال بالا دیده شد یک مجموعه شامل زوج‌های مرتب زمانی تابع است که در آن هیچ دو زوج مرتبی با مولفه اول یکسان وجود نداشته باشدو چنانچه دو مولفه اول یکسان باشند بنایاً (برای تابع بودن) مولفه‌های دوم آن‌ها نیز یکسان باشند.

مثال ۸.۵. مقادیر a, b را طوری بیابید تا رابطه‌ی f زیر تابع باشد.

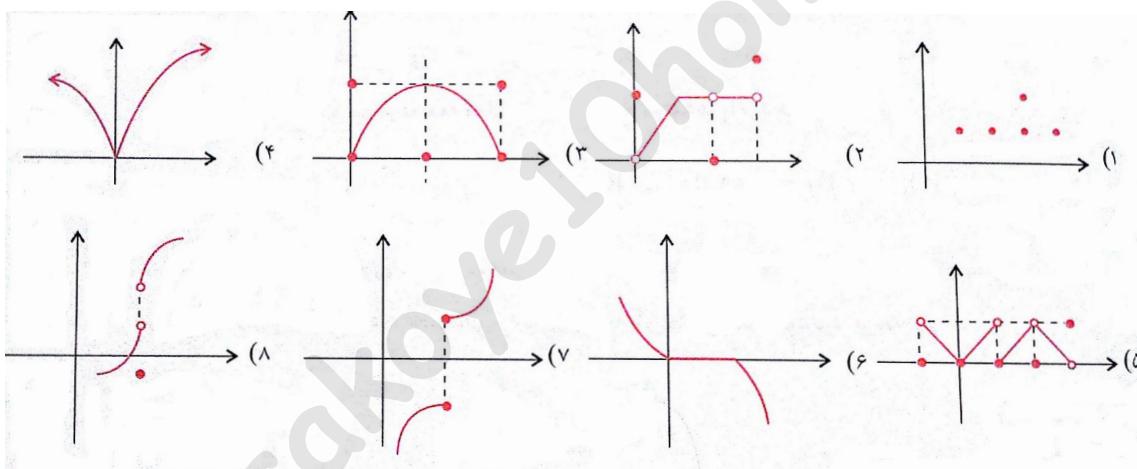
$$f = \{(a^3 + a, 1), (0, b + 4), (1, a^3 + 2b), (0, a^3 + b), (\frac{2-a}{4}, a-b)\}$$

تشخیص تابع بودن یک رابطه از روی نمودار مختصاتی آن

تاکنون متوجه شده‌اید یک نمودار پیکانی ون زمانی معرف تابع است که از هر عضو مجموعه اول یک و تنها یک پیکان به مجموعه دوم خارج شده باشد. در مورد روابطی که بصورت زوج مرتب بیان می‌شوند نیز متوجه شده‌اید که شرط تابع بودن، نبودن دو زوج مرتب متفاوت با مولفه‌های اول یکسان است. همچنین متوجه شده اید که روابطی که بصورت زوج‌های مرتب بیان می‌شوند و مولفه‌های آن اعداد حقیقی‌اند دارای نموداری در دستگاه مختصات هستند. حال پرسش اینجاست که اگر تنها یک نمودار به ما داده باشند چگونه از روی نمودار تشخیص دهیم که آن نمودار معرف تابع است یا خیر؟

یک نمودار در دستگاه مختصات معرف تابع است هرگاه هر خطی که به موازات محور عرض‌ها رسم شود نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال ۹.۵. کدام نمودار تابع است؟



۲.۵ دامنه و برد توابع

دامنه و برد یک تابع را در مثال‌های بالا دیده و بکاربرده‌ایم ، بدون اینکه متوجه شده باشید. در واقع مولفه‌های اول زوج‌های مرتب در هر تابع را دامنه تابع و مولفه‌های دوم زوج‌های مرتب را برد تابع می‌نامند. دامنه‌ی تابعی چون f را با D_f و برد آن را با R_f نشان می‌دهیم. در اینجا برای سادگی قواردادی را معرفی می‌کنیم. اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد و عضو $b \in B$ به عضو $a \in A$ نسبت داده شده باشد یعنی $a \rightarrow b$ اغلب این عبارت را با نماد $b = f(a)$ خلاصه نویسی می‌کنیم. گاهی اوقات هم گوییم تصویر a تحت f برابر b است. مثلا در تابع :

$$f = \left\{ (2, -1), (\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}), \left(\pi, \frac{1}{\pi}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right) \right\}$$

می‌نویسیم:

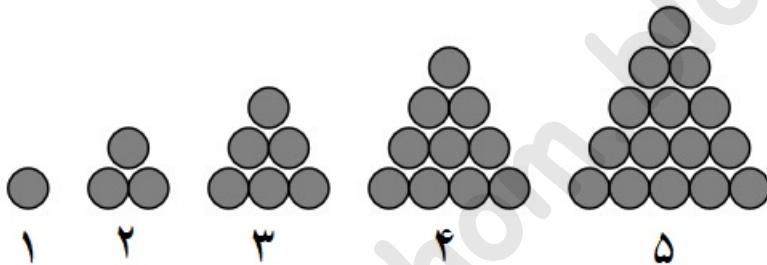
$$f(2) = -1, f(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}, f(\pi) = \frac{1}{\pi}, f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

واضح است که در اینجا :

$$D_f = \{2, \sqrt{2}, \pi, \frac{1}{5}\} \quad R_f = \{-1, 1 - \sqrt{2}, \frac{1}{\pi}, \frac{2}{5}\}$$

مثال ۱۰.۵. در شکل زیر هر قسمت دارای شماره است. در شماره ۱ ما یک دایره داریم و در شکل ۲ ما سه دایره داریم و قس علی‌هذا. تابع f را اینگونه تعریف می‌کنیم که به هر مرحله تعداد دایره‌های سیاهرنگ را نسبت دهد. با این حساب :

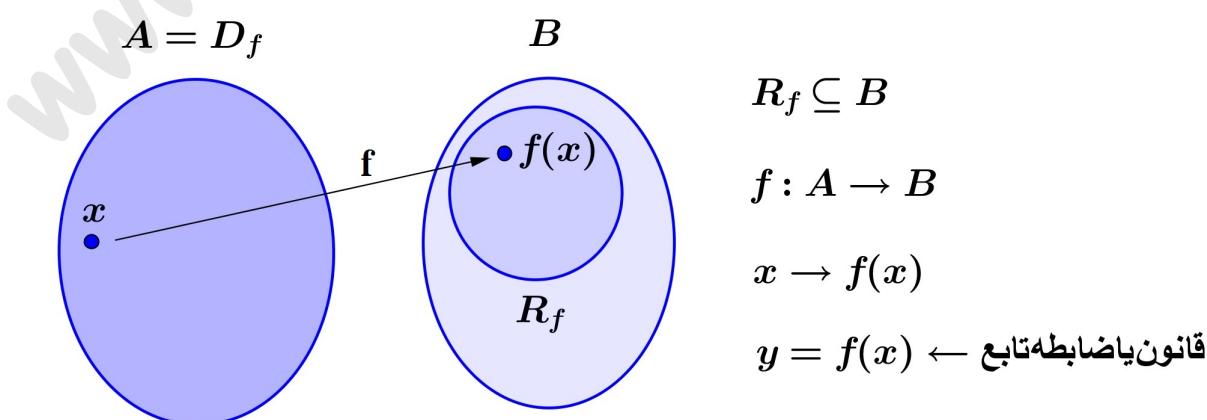
$$1 \xrightarrow{f} 1 \quad 2 \xrightarrow{f} 3 \quad 3 \xrightarrow{f} 6 \dots$$



اگر مراحل شکل بالا بی‌وقفه ادامه یابند به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

- ۱ . دامنه تابع را بنویسید و تابع را بصورت زوج‌های مرتب نمایش دهید. آیا نوشتان تمام اعضای تابع شدنی است؟ در حالت کلی عدد $n \in \mathbb{N}$ به چه عددی تصویر می‌شود؟ دستوری برای $f(n)$ بیابید.
- ۲ . در مرحله دهم چند دایره داریم؟ در مرحله ۲۲ ام چندتا؟
- ۳ . در چه مرحله‌ای تعداد دایره‌های سیاهرنگ به ۶۶۶ می‌رسد؟
- ۴ . برد این تابع چیست؟

در شکل زیر شناسنامه‌ی یک تابع را نوشتیم.



وقتی می‌نویسیم $\begin{cases} f : A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \text{ یا } y = f(x) \end{cases}$ منظور از A دامنه تابع است. اما B لزوماً برد f نیست

و همان‌طور که از شکل مشخص است همواره $R_f \subseteq B$ است.^۱ به $y = f(x)$ ضابطه یا قانون تابع گویند. مجموعه B را اغلب هم دامنه تابع f می‌نامیم.

مثال ۱۱.۵. تابع $f : \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{Z}$ مفروض است. برای این تابع و نمودار

مختصاتی آن رارسم کنید.

تعريف ۲.۵. به هر تابع به صورت $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع خطی گوییم.

$$x \mapsto ax + b \text{ یا } y = ax + b$$

تذکر: در تابع خطی لزومی ندارد که دامنه تمام اعداد حقیقی باشد. ممکن است دامنه‌ی یک تابع خطی یک مجموعه متناهی، یا مجموعه اعداد طبیعی و یا مجموعه اعداد صحیح باشد.

مثال ۱۲.۵. تابع خطی $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ چنان است که $f(1) = 2$, $f(2) = 5$. ضابطه‌ی این تابع را بدست آورید.

مثال ۱۳.۵. تابع خطی $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ چنان است که $f(1) \leq f(2)$, $f(3) \geq f(4)$, $f(5) = 5$. ضابطه‌ی این تابع را بدست آورید.

مثال ۱۴.۵. تابع خطی $f(x) = 2x - 4$ مفروض است. نمودار مختصاتی تابع را در حالتی که دامنه داده شده است رسم کنید و برای تابع را تعیین کنید.

۱. اگر دامنه تابع $\left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$ باشد. $D_f = \left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$ باشد.
۲. اگر دامنه تابع $[1, 4]$ باشد. $D_f = [1, 4]$ باشد.

مثال ۱۵.۵. در مثلث ABC اندازه‌ی زاویه A برابر 60° درجه است و اندازه‌ی دو زاویه‌ی C, B اعداد طبیعی بر حسب درجه هستند. رابطه‌ای بنویسید که اندازه‌ی زاویه C را بر حسب اندازه زاویه B مشخص کند. آیا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد آن را بدست آورید. این رابطه چند عضو دارد؟

مثال ۱۶.۵. طول مستطیلی ۵ واحد بیشتر از عرض آن است. تابعی بنویسید که محیط مستطیل را بر حسب عرض آن نشان دهد. تابع حاصل چه نوع تابعی است؟ حال تابعی بنویسید که مساحت مستطیل را بر حسب عرض آن نشان دهد. ضابطه‌ی تابع آشنا نیست؟

^۱ در سالهای بعد خواهید دید به توابعی که در آنها $R_f = B$ رخ می‌دهد تابع پوشانه گویند. و دلیل انتخاب این نام هم واضح است. تابع توانسته است تمام مجموعه B را پوشش دهد.

مثال ۱۷.۵. تابع f از \mathbb{N} به این صورت تعریف شده است که اگر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ زوج باشد آنرا به نصفش یعنی $\frac{n}{2}$ نسبت می‌دهد و اگر $n \in \mathbb{N}$ فرد باشد آنرا به $1 - \frac{n}{2}$ نسبت می‌دهد. جدول زیر را کامل کنید. دامنه و برد تابع را بنویسید و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

x	1	2	3	4	5	6	7	...	n	n	...
y							

چنین توابعی را توابع چندضابطه‌ای گویند. در اینجا تابع دو ضابطه‌ای است و دستور آن بصورت زیر است.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 1 - \frac{n}{2} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

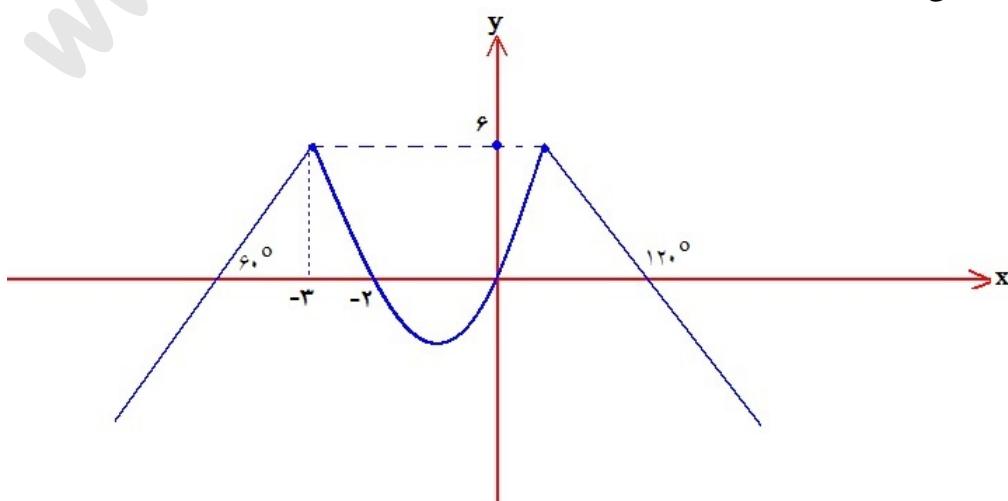
مثال ۱۸.۵. تابع سه ضابطه‌ای زیر مفروض است. نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < -1 \\ -x & -1 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

مثال ۱۹.۵. نمودار تابع دو ضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq -2 \\ 2x + 8 & x < -2 \end{cases}$$

مثال ۲۰.۵. نمودار تابعی بصورت زیر است. ضابطه‌ی آن را بنویسید.



۳.۵ انواع توابع

در این بخش پایانی به بررسی چند نوع تابع خاص و پرکاربرد می‌پردازیم.

تابع ثابت

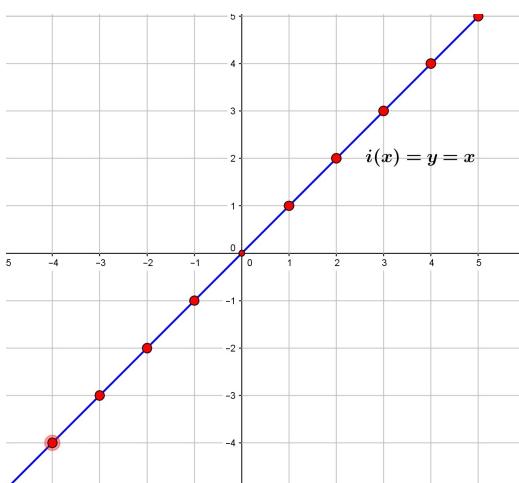
تابع ثابت تابعی است که تمام اعضای دامنه را به یک و فقط یک عضو از برد نظیر کند. توابع ذکر شده در زیر همگی تابع ثابت هستند.

- ۱) $f = \{(a, a), (b, a), (c, a), (d, a)\}$
- ۲) $g = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5), (7, 5), (100, 5)\}$
- ۳) $h : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{N}, h(x) = 3$
- ۴) $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, q(x) = \sqrt{3}$

نمودار چنین توابعی وقتی دامنه بصورت بازه باشد خطی موازی محور طول هاست و اگر دامنه زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد بصورت نقاطی در دستگاه مختصات است که همگی روی خطی موازی محور طول ها قرار دارند.

تابع همانی

تابع $i : A \rightarrow A$ را تابع همانی گوییم هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم $i(x) = x$. به عبارت بهتر هر عضو از دامنه به خودش نظیر می‌شود. در حالتی که دامنه \mathbb{R} باشد، تابع همانی همان خط $y = x$ ، نیمساز ناحیه اول و سوم است.



توابع چندجمله‌ای

فرض کنید مربعی به ضلع x دارد. مساحت این مربع بر حسب ضلع آن برابر است با: $S(x) = x^2$. همچنین مساحت دایره‌ای به شعاع r برابر است با $S(r) = \pi r^2$. حجم مکعبی به ضلع x برابر است با $V(x) = x^3$ و حجم کره‌ای به شعاع r برابر $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ است. اینها همه نمونه‌هایی از توابع چندجمله‌ای هستند. در حالت کلی توابعی که ضابطه‌ی جبری آن‌ها یک چندجمله‌ای از یک متغیر باشد را تابع چندجمله‌ای گوییم. شکل کلی یک تابع چندجمله‌ای بصورت زیر است:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

آشناترین تابع چندجمله‌ای تابع دوجمله‌ای درجه اول $f(x) = ax + b$ یا همان تابع خطی است و تابع سه جمله‌ای درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که همان سه‌می است. از این تابع در ضابطه‌های توابع چندضابطه‌ای زیاد استفاده می‌کنیم. برای نمونه در تابع سه ضابطه‌ای زیر هر ضابطه به تنها یک تابع چندجمله‌ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & x < 0 \\ 2x - 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{3} & x > 2 \end{cases}$$

در حالت کلی در معرفی یک تابع باید دامنه آن مشخص شده باشد. در غیراین صورت بزرگترین مجموعه ممکن را به عنوان دامنه تابع اختیار می‌کنیم. تابع چندجمله‌ای چنانچه دامنه مشخصی نداشته باشند دامنه آن‌ها را برابر \mathbb{R} در نظر می‌گیریم.

تابع قدرمطلق

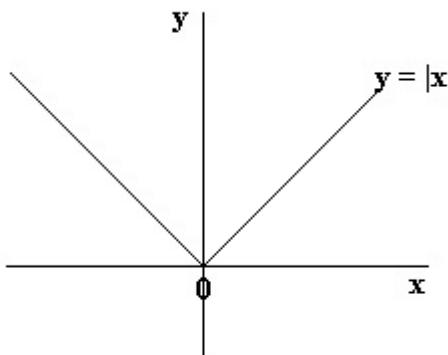
در فصل قبل با قدرمطلق و خواص آن آشنا شدیم. در حالت کلی تابع قدرمطلق بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow |x|, f(x) = |x| \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

نمودار تابع $|x| = f(x)$ یکی از مهمترین نمودارهاست و بصورت زیر است:



مثال ۲۱.۵. نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \leq 1 \\ 2 - x & x > 1 \end{cases}$$

مثال ۲۲.۵. تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x < 0 \\ x^2 - 2x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

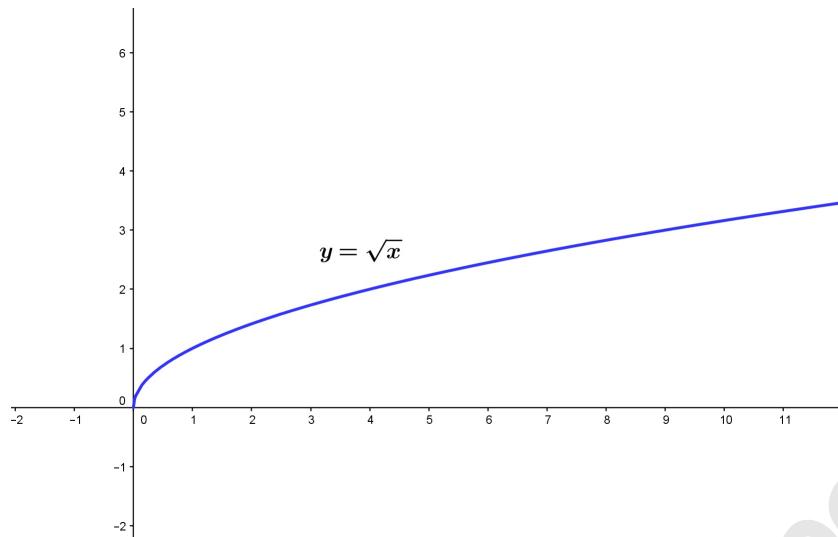
مطلوبست محاسبه $f(-5), f(\sqrt{2} - 1), f\left(\frac{2+x^2}{1+x^2}\right)$

معرفی دو تابع رادیکالی مهم

اولین تابع رادیکالی که می‌خواهیم بررسی کنیم تابع:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \sqrt{x} \end{cases}$$

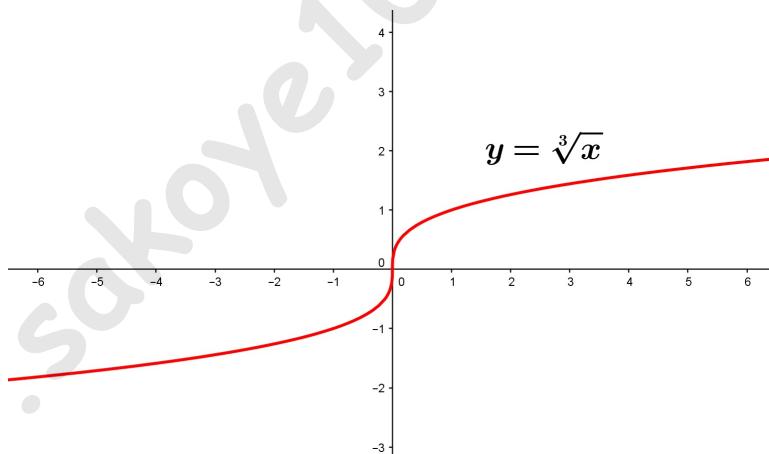
با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ است. این تابع داری دامنه‌ای بصورت $(0, +\infty)$ است و برد آن نیز است. نمودار این تابع را در شکل زیر می‌بینید.



تابع رادیکالی دیگری که قصد معرفی آن را داریم تابع ریشه سوم است:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

ضابطه‌ی این تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است. نمودار آن را در زیر می‌بینید:

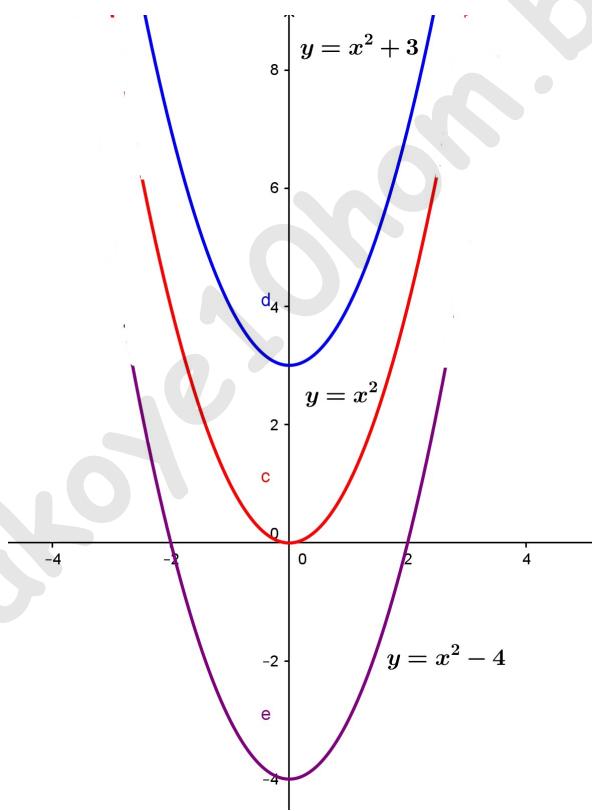
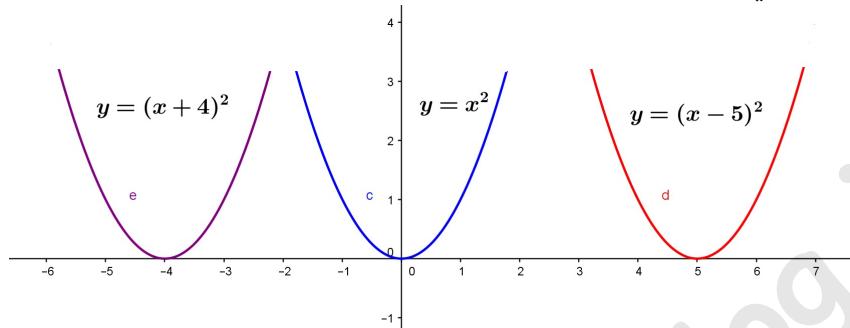


مثال ۲۳.۵. نمودار تابع زیر را رسم کنید

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} & x < 0 \end{cases}$$

۴.۵ ترسیم با انتقال

در این قسمت می‌خواهیم به کمک انتقال نمودارهای جدیدی را به کمک نمودارهای قبلی رسم کنیم. به دقت به شکل‌های زیر نگاه کنید.



همان‌طور که دیده می‌شود با تبدیل شدن $y = x^2$ به $y = x - 5$ واحد در جهت مثبت روی محور طول‌ها جابجا شده است و با تبدیل $y = x^2$ به $y = x + 4$ واحد در جهت منفی روی محور طول‌ها جابجا شده است.

همچنین با تبدیل $y = x^2$ به $y = f(x) + 3$ واحد در جهت مثبت محور عرض‌ها به بالا حرکت کرده و با تبدیل $y = x^2$ به $y = f(x) - 4$ واحد روی محور عرض‌ها به پایین حرکت کرده است.

در حالت کلی همین روابط درست است. نمودار $y = f(x)$ به $y = f(x - a)$, $a > 0$ واحد در جهت مثبت محور طول‌ها حرکت کرده است و $y = f(x + a)$ همان تغییر منتها در جهت منفی به همین

ترتیب $f(x) \pm a$, $a > 0$ هم تغییرات روی محور عرض‌هاست.

مثال ۲۴.۵. به کمک انتقال نمودارهای زیر را رسم کنید.

$$1) y = (x + 3)^2$$

$$2) y = x^2 + 3$$

$$3) y = (x - 2)^2 + 3$$

$$4) y = 4 - (x - 2)^2$$

$$5) y = |x - 3|$$

$$6) y = |2 + x|$$

$$7) y = -|x - 2|$$

$$8) y = 1 - |1 + x|$$

$$9) y = \sqrt{x - 3}$$

$$10) y = \sqrt{x + 3} + 2$$

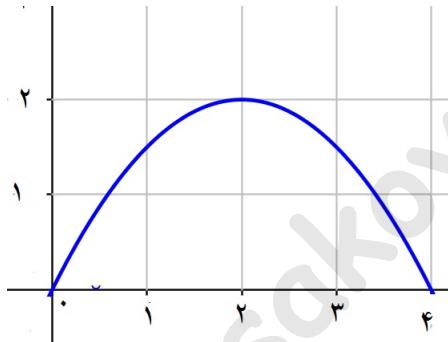
$$11) y = \sqrt[3]{x} + 2$$

$$12) y = \sqrt{-x}$$

$$13) y = \sqrt{2 - x}$$

$$14) y = \sqrt[3]{x - 2} + 1$$

مثال ۲۵.۵. نمودار تابع $y = f(x)$ بصورت مقابل است. نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



$$1) y = f(x + 2)$$

$$2) y = f(x - 1)$$

$$3) y = 3f(x)$$

$$4) y = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$$

$$5) y = |f(x) - 1|$$

$$6) y = f(-x)$$

$$7) y = -f(x)$$

$$8) y = -f(-x)$$

$$9) y = f(|x|)$$

$$10) y = |f(x + 2) - 2|$$

بررسی تابع بودن یک رابطه‌ی جبری

در این قسمت این موضوع مهم را بررسی می‌کنیم که یک ضابطه‌ی جبری به تنها ی چه زمانی معرف تابع است. به عنوان یک مثال ساده فرض کنید هدف بررسی عبارت $x = |y|$ است. آیا این ضابطه می‌تواند معرف یک تابع باشد. یعنی به ازای هر مقدار x دقیقاً یک مقدار y بدست می‌آید؟ با قرار دادن $1 = x$ نتیجه می‌شود $1 = |y|$ و لذا $y = \pm 1$ و این یعنی هم $1 \rightarrow 1$ و هم $-1 \rightarrow 1$ و این یعنی این رابطه نمی‌تواند یک تابع باشد. البته برای اثبات اینکه رابطه‌ای تابع است، مثال کفاایت نمی‌کند و باید ثابت کنید رابطه تابع است. برای این منظور باید گزاره‌ی زیر را در مورد آن رابطه یا ضابطه ثابت کنید.

$$\begin{cases} (x, y) \in f \\ (x, z) \in f \end{cases} \implies y = z$$

مثال ۲۶.۵. ثابت کنید رابطه‌ی $x + y^3 = y$ معرف تابع است.

مثال ۲۷.۵. روابط زیر را بررسی کنید. هر کدام که ادعا می‌کنید و هر کدام که ادعا می‌کند تابع نیست با مثال نقض نشان دهید.

۱) $x^2 + y^2 = 5$

۲) $|x| + |y| = 3$

۳) $x = \sin y$

۴) $y^2 = x$

۵) $|x - 2| + |y - 3| = 0$

۶) $\sin y + \cos x = 1$

تمرینات فصل تابع

تمرین ۱.۵. فرض کنید دو مجموعه A ، B بصورت زیر تعریف شده باشند:

$$A = \{ \text{اصفهان, بندرعباس, رشت, شیراز, مشهد} \}$$

$$B = \{ \text{مازندران, گیلان, اصفهان, هرمزگان, فارس} \}$$

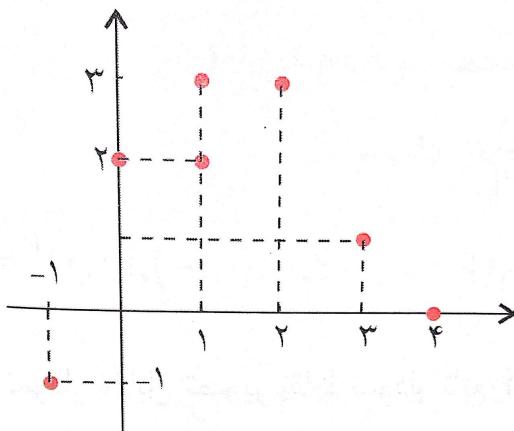
رابطه‌ی $f : A \rightarrow B$ را اینگونه تعریف می‌کنیم که $a \in A$ مرکز استان $b \in B$ باشد. f را بصورت زوج‌های مرتب بنویسید.

تمرین ۲.۵. اگر دو زوج مرتب $(1, a^3 + b)$ و $(20, a^3 + 2b)$ برابر باشند a و b را بیابید.

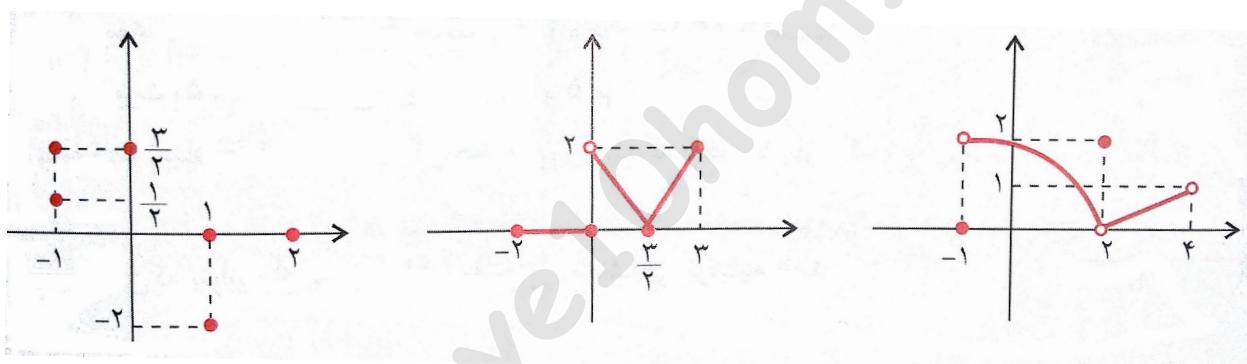
تمرین ۳.۵. اگر رابطه‌ی f زیر تابع باشد مقدار $(m+12)f(m)$ را بیابید.

$$f = \left\{ (\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3} - \sqrt{2}, 2), (m^2, 3), \left(\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}, m - 2 \right), (0, m) \right\}$$

تمرین ۴.۵. نمودار یک رابطه بصورت مقابله است. این رابطه را بصورت زوج مرتب بنویسید. آیا رابطه تابع است؟



تمرین ۵.۵. از نمودارهای زیر کدام تابع است؟ دامنه و برد آنها را بنویسید.



تمرین ۶.۵. رابطه‌های زیر را بصورت زوج مرتب بنویسید. هر کدام تابع است دامنه و بردش را تعیین کنید.

$$1) f_1 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 10\}$$

$$2) f_2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 10, x < y\}$$

$$3) f_3 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x < y, xy \leq 6\}$$

تمرین ۷.۵. تابع f یک تابع خطی است و برای هر x داریم $f(x+2) + f(x-3) = 4x + 8$ ضابطه‌ی تابع را بیابید.

تمرین ۸.۵. تابعی مثل بزنید که دامنه آن نامتناهی بوده و برد آن یک عضو داشته باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند.

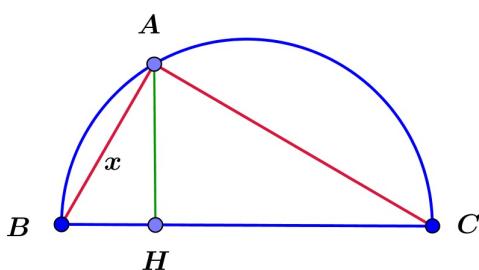
تمرین ۹.۵. تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ مفروض است. مقادیر $f(\sqrt{10}), f(3), f(5)$ را بیابید. به ازای چه مقادیری از x داریم $f(x) = 2$ و یا 3 . آیا می‌توان $f(x) = 0$ را بدست آورد؟ دامنه تابع

چیست؟

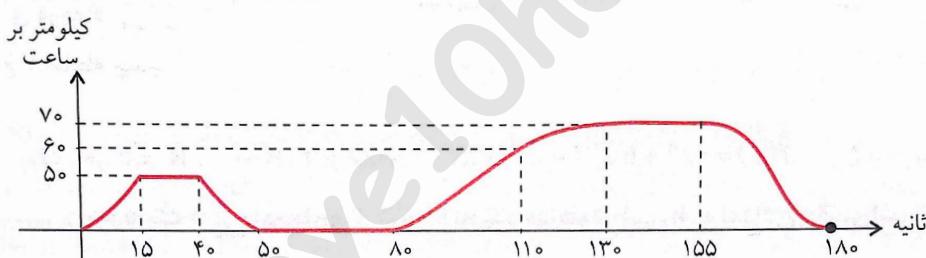
تمرین ۱۰.۵. اگر $f(x) = x^2 + x$ باشد و $D_f = \{0, 1, -1, 2, 4\}$ باشد، R_f را بدست آورید.

تمرین ۱۱.۵. اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ باشد دامنه تابع را بدست آورید.

تمرین ۱۲.۵. دایره‌ای به قطر ۶ مفروض است. راس A از مثلث قائم‌الزاویه ABC روی نیم‌دایره تغییر می‌کند. اگر اندازه ضلع $AB = x$ باشد تابعی بنویسید که اندازه ضلع AC را بر حسب x بیان کند. همچنین ضابطه‌ی تابعی را بیابید که اندازه ارتفاع AH را بر حسب x نشان دهد. دامنه این دو تابع چیست؟



تمرین ۱۳.۵. خانمی برای خرید از منزل با اتومبیل خارج شده است. نمودار زیر



نمودار سرعت زمان ($v(t)$) او را از لحظه حرکت نشان می‌دهد زمان شروع را O مبدأ در نظر می‌گیریم. او پس از حرکت و مدت زمانی که در شکل نشان داده شده به یک چراغ قرمز می‌رسد و پس از سبز شدن چراغ دوباره به حرکت ادامه می‌دهد تا این که پس از ۱۸۰ ثانیه در پارکینگ فروشگاه توقف می‌کند.

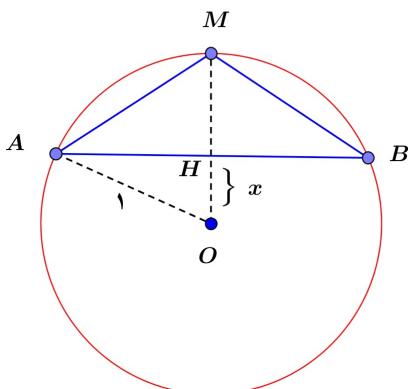
۱. آیا نمودار $y = v(t)$ یک تابع است؟ آیا می‌توانید دامنه و برد آن را پیدا کنید.

۲. در چه زمانی‌هایی سرعت او ثابت است. چه مدت او پشت چراغ قرمز می‌ایستد؟

۳. پس از ۴۵ ثانیه و همچنین ۱۲۰ ثانیه پس از حرکت سرعت آن تقریباً چقدر است؟

۴. $v(60)$ و $v(40)$ و $v(130)$ و $v(180)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱۴.۵. در شکل زیر تابعی بیابید که مساحت $\triangle ABC$ را بر حسب x بیان کنید. (MH ارتفاع)



تمرین ۱۵.۵. کدام رابطه بیان‌گر یک تابع است؟

$$y^2 - 2xy - 1 = 0 \quad (۴) \quad |y| + x = 0 \quad (۳) \quad y^2 + |x^3 - 4x| = 0 \quad (۲) \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \quad (۱)$$

تمرین ۱۶.۵. ضابطه‌های زیر را بررسی کنید. نمودار آنها را رسم کنید و تعیین کنید کدام‌ها تابع است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} |x| & -1 < x < 1 \\ 2 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} x & x \geq 2 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

تمرین ۱۷.۵. به ازای چه مقادیر a, b , $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{bx^2 + 2x + 4}$ تابع b, a ثابت تبدیل می‌شود؟

تمرین ۱۸.۵. به ازای چه مقادیری از a, b , $f(x) = \frac{bx + a^2 - 4}{(a - 2)x + 3}$ تابع a, b همانی تبدیل می‌شود؟

تمرین ۱۹.۵. به ازای چه مقدار a, b , $f(x) = ax^3 + (b - 1)x + 2$ تابع b, a ثابت صفر تبدیل می‌شود؟

تمرین ۲۰.۵. اگر $I = \{(1, a^2), (a+1, b), (b^2, c-2), (d^2, d+c)\}$ تابع همانی باشد d را بیابید.

تمرین ۲۱.۵. نمودار تابع $y = |x - 2|$ را در بازه‌ی $[1, 5]$ رسم کرده و برد آن را بیابید.

تمرین ۲۲.۵. برد تابع $y = |x + 5| - 3$ را در هریک از حالات زیر رسم کرده و برد آن را بیابید.

$$D_f = [-4, 0] \quad (۴) \quad D_f = [-4, 10] - \{5\} \quad (۳) \quad D_f = [-6, 10] \quad (۲) \quad D_f = \mathbb{R} \quad (۱)$$

تمرین ۲۳.۵. نمودار توابع زیر را رسم کرده و برد هر یک را مشخص کنید.

$$1) f(x) = x^2 - 4$$

$$2) f(x) = x^2 - x$$

$$3) f(x) = 4x - x^2$$

$$4) f(x) = -2x^2 + 8x - 3$$

$$5) f(x) = |x^2 - 4x|$$

$$6) f(x) = |x^2 - 1|$$

$$7) f(x) = \sqrt{|x|}$$

$$8) f(x) = x^2 - 2|x|$$

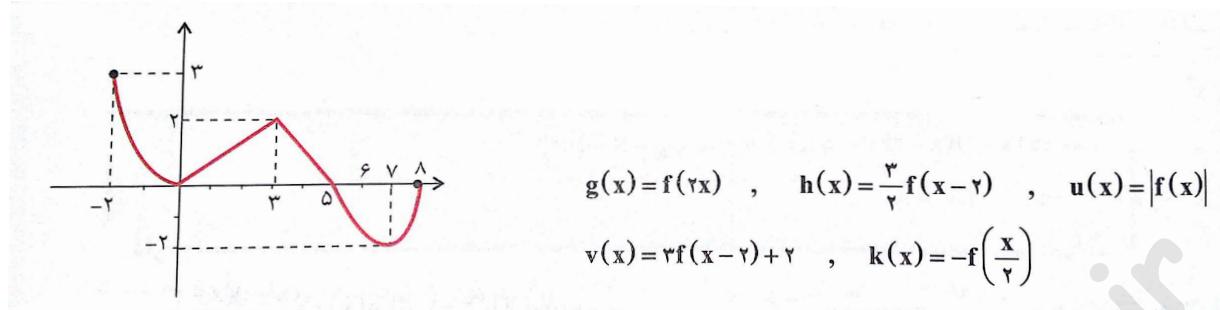
$$9) f(x) = ||x| - 1|$$

$$10) f(x) = |x - 1| + |x + 1|$$

$$11) f(x) = |x - 1| - |x + 1|$$

$$12) f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1|$$

تمرین ۲۴.۵. نمودار تابع f بصورت مقابل است. دامنه و برد تابع را بباید و توابع خواسته شده در زیر را رسم کرده و دامنه و برد هر کدام را بدست آورید.



تمرین ۲۵.۵. نمودارهای زیر را رسم کنید.

$$1) |y| = x$$

$$2) |y| = x + 2$$

$$3) |y| = x^2 - 1$$

$$4) |y - 1| = x$$

بیشتر بدانیم

۱. **تابع گویا :** به هر تابعی کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد، یک تابع گویا گوییم. اگر دامنه تعریف چنین تابعی در تعریف تابع مشخص نشده باشد، باید بزرگترین مجموعه ممکن را به عنوان دامنه آن در نظر بگیریم. چنین تابعی در تمام \mathbb{R} تعریف شده‌اند الا در جاهایی که مخرج صفر می‌شود. مثلًا تابع $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + x - 2}$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ است.

۲. **تابع یک به یک:** برخی توابع دارای ویژگی‌های خاصی هستند. همان‌طور که می‌دانید هر عضو دامنه تنها به یک عضو هم‌دامنه نظیر می‌شود. با این حال ممکن است دو عضو دامنه به یک عضو هم‌دامنه نظیر شود. چنانچه این اتفاق برای تابعی چون f رخ ندهد یعنی هر عضو برد متناظر به یک و فقط یک عضو دامنه باشد تابع f را یک به یک گوییم. به زبان ریاضی تعریف تابع یک به یک چنین است:

$$f(a) = f(b) \implies a = b \quad \leftarrow \quad \text{تعریف تابع یک به یک}$$

به عنوان یک مثال ساده تابع x^2 یک به یک نیست چرا که $f(-1) = f(1) = 1$ است در حالی که $-1 \neq 1$ است.

از طرفی تابع گویای $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ دارای دامنه $\mathbb{R} - \{-2\}$ است و یک به یک است چرا که

داریم:

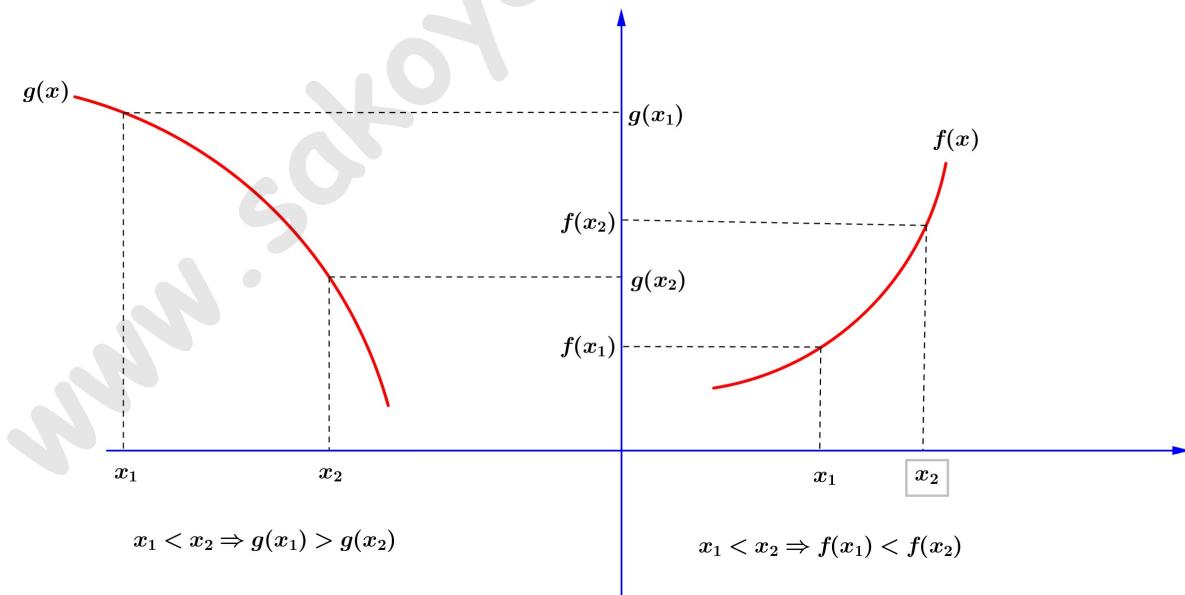
$$\begin{aligned}
 f(a) = f(b) &\iff \frac{2a - 1}{3a - 6} = \frac{2b - 1}{3b - 6} \\
 &\iff 6ab - 12a - 3b + 6 = 6ab - 3a - 12b + 6 \\
 &\iff 9a = 9b \\
 &\iff a = b
 \end{aligned}$$

۳. توابع پوشایش: قبله دیدیم که برای هر تابع f همواره $R_f \subseteq B$ است که در آن $f : A \rightarrow B$ است. حال اگر داشته باشیم $R_f = B$ گوییم تابع f پوشایست. پس پوشایش بودن ارتباط زیادی با همدامنه دارد. دو تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \sqrt{x}, f(x) = \sqrt{x} \end{cases} \quad \begin{cases} g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \rightarrow \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

می‌دانیم که $\sqrt{x} \geq 0$ است پس $R_g = \mathbb{R}^+$ است. حال $R_f = R_g = [0, +\infty)$ است و f پوشایست در حالیکه g پوشایش نیست اگرچه ضابطه و دامنه هر دو تابع یکسان است.

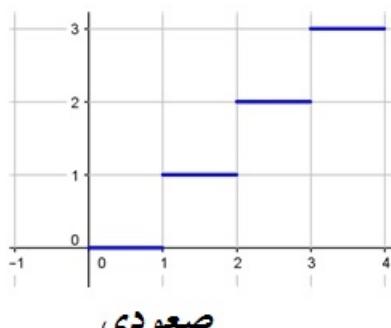
۴. توابع یکنواخت: ابتدا به شکل زیر دقت کنید.



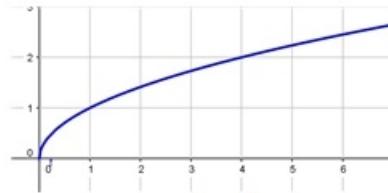
در شکل ۱ با افزایش مقدار x مقدار تابع y همان $f(x)$ هم مرتب افزایش می‌یابد. چنین توابعی را اکیدا صعودی گوییم. در شکل ۲ اما داستان برعکس است. با افزایش x مقدار تابع y همان $f(x)$ مرتب کاهش می‌یابد. چنین توابعی را اکیدا نزولی گوییم. چنانچه با افزایش مقدار x کاهش نیابد، تابع را صعودی گوییم و چنانچه با افزایش x مقدار تابع افزایش نیابد تابع را نزولی گوییم.

تابعی که اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد را اکیدا یکنواخت گوییم. تابعی که صعودی یا نزولی باشد را یکنواخت گوییم.

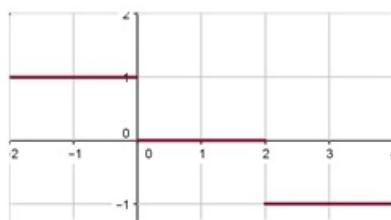
گوییم. در شکل زیر چند تابع با این ویژگی‌ها رسم شده‌اند.



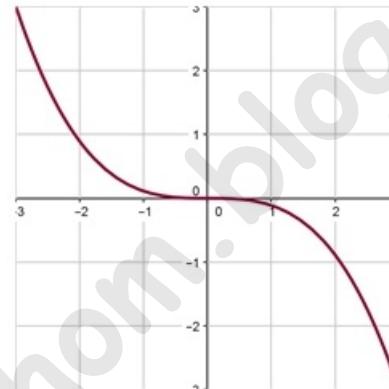
صعودی



اکیدا صعودی



نزولی



اکیدا نزولی

۵. یافتن دامنه توابع از روی ضابطه: گاهی اوقات دامنه یک تابع در زمان معرفی تابع معین نمی‌شود. در این حالت باید بزرگترین دامنه ممکن را به عنوان دامنه تابع در نظر گرفت. برای این منظور توجه به دو نکته، اساسی است اول: توابعی که کسری هستند نباید مخرجشان صفر شود. دوم: توابع رادیکالی با فرجه زوج زمانی تعریف شده هستند که زیر رادیکال مثبت باشد. به مثال زیر دقت کنید:
مثال. دامنه توابع زیر را بیابید.

$$1) f(x) = \frac{2+x^2}{x^2+x-2}$$

$$2) g(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$$

$$3) h(x) = \sqrt[3]{\frac{2x}{x^2-1}}$$

$$4) \ell(x) = \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}}$$

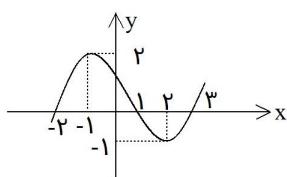
۵.۵ تست‌های فصل پنجم

۱- نمودار تابع با ضابطه $y = |x| - 2$ از کدام نواحی مختصات می‌گذرد؟
 ۴) سوم و چهارم ۳) اول و سوم ۲) دوم و سوم ۱) اول و دوم

۲- در تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ ، مقدار $f(4) - f(9)$ برابر کدام است؟
 ۴) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۱) $-\frac{1}{3}$

۳- به ازای کدامیک از مقادیر x عبارت $\sqrt{(x-3)^2} = 3$ همواره برقرار است؟
 ۴) $x \geq 3$ ۳) $x < 3$ ۲) $x \leq 3$ ۱) $-1 < x < 1$

۴- کدام یک از روابط زیر به ازای $m = 1$ یک تابع است؟
 ۲) $\{(m, 2m), (3m, -1), (-1, 3m)\}$ ۱) $\{(m, 2m), (2m, m), (-1, 3m)\}$ ۳) $\{(m, 2m), (2m, m), (3, m)\}$ ۴) $\{(m, 2m), (2m, m), (2m, -2)\}$



۵- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد (۱) چقدر است؟
 ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) صفر

۶- اگر $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 2}$ باشد، مقدار $f(2) - f(-2)$ کدام است؟

۴) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۲) $\frac{8}{6}$ ۱) $\frac{10}{6}$

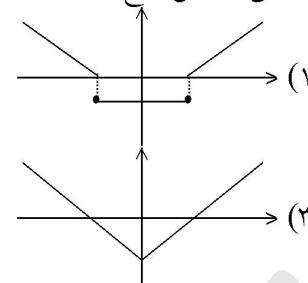
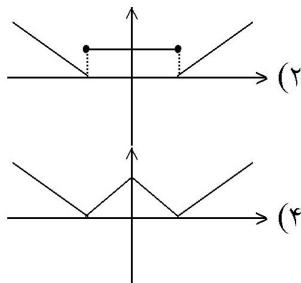
۷- مساحت محدود بین دو نمودار تابع $y = 2 - |x|$ و $y = |x - 1|$ کدام است؟
 ۴) ۳ ۳) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۱) $\frac{3}{2}$

۸- به ازای هر $x \in [1, \infty)$ ، مقدار $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ کدام است؟
 ۴) x ۳) $3x - 2$ ۲) $2 - 3x$ ۱) $-x$

۹- مجموعه جوابهای معادله $|x - 1| + |x - 3| = 1$ کدام است؟
 ۴) $R - (1, 3)$ ۳) $[1, 3]$ ۲) R ۱) \emptyset

۱۰- اگر $a < b$ و $|a| > |b|$ آنگاه حاصل عبارت $|a + b| + |a| + |b|$ برابر کدام است؟
 ۴) $2b$ ۳) $2a$ ۲) $-2a$ ۱) $-2b$

۱۱- منحنی نمایش تابع $f(x) = ||x| - 2|$ کدام است؟



$$[-2, 0] \quad (4)$$

$$[-2, 0] \quad (3)$$

۱۲- مجموعه جوابهای $|x| + |x + 2| = 2$ چیست؟

$$\{-2, 0\} \quad (2)$$

$$\emptyset \quad (1)$$

۱۳- دامنه تابع $f = \left\{ (x, y) : y = \sqrt{\frac{1 - |x|}{1 + |x|}} \right\}$ کدام مجموعه است؟

$$\{x : -1 \leq x \leq 1\} \quad (4)$$

$$\{x : x \geq 1\} \quad (3)$$

$$\{x : x \leq 1\} \quad (2)$$

$$\mathbb{R} \quad (1)$$

۱۴- دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ با ضابطه کدام فاصله است؟

$$[2, 3] \quad (4)$$

$$[1, 2] \quad (3)$$

$$[0, 3] \quad (2)$$

$$[0, 1] \quad (1)$$

۱۵- اگر $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \sqrt{2x-1}$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)$ کدام فاصله است؟

$$[1, \infty] \quad (4)$$

$$[-1, 1] \quad (3)$$

$$[0, 1] \quad (2)$$

$$[-1, 0] \quad (1)$$

۱۶- مساحت محدود به نمودار تابع با ضابطه $y = |x - 3|$ و محور x ها کدام است؟

$$9 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$7 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۱۷- حاصل $|x - 1| + |2x - 1|$ وقتی $-3 < x < 0$ باشد کدام است؟

$$1 + x \quad (4)$$

$$-3 + 3x \quad (3)$$

$$3 - 3x \quad (2)$$

$$-3 - 3x \quad (1)$$

۱۸- اگر $f(x+1) = x^2 - 2x + 1$ باشد، تابع $f(x)$ کدام است؟

$$x^2 - 2x \quad (3)$$

$$(x-1)^2 \quad (2)$$

$$(x-2)^2 \quad (1)$$

۱۹- اگر $|x + 1| < 2$ ، آنگاه x در کدام نامساوی صدق می‌کند؟

$$1 < x < 3 \quad (4)$$

$$-1 < x < 3 \quad (3)$$

$$-3 < x < 1 \quad (2)$$

$$-3 < x < -1 \quad (1)$$

۲۰- معادله $3 = |x + 1| + |x - 3|$ در دامنه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$4 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

۲۱- تعداد جواب‌های معادله $|x + 1| + |x - 3| = 2$ کدام است؟
 ۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) ۱) صفر

۲۲- مجموعه جواب نامعادله $2 < 3x + 5$ کدام است؟

$\left\{ x : \frac{-7}{3} < x < 1 \right\}$ (۲) $\left\{ x : \frac{-7}{3} < x < -1 \right\}$ (۱)

$\left\{ x : \frac{-4}{3} < x < -1 \right\}$ (۴) $\left\{ x : \frac{-4}{3} < x < 1 \right\}$ (۳)

۲۳- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} & x \geq 1 \end{cases}$ کدام است؟
 f($f\left(\frac{3}{4}\right)$) مفروض است.

$\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۱)

۲۴- در تابع $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ، $f(x) = 4x - \sqrt{1+2x}$ ، مقدار کدام است؟
 ۵ (۴) ۳ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)

۲۵- در بازه‌ای، مقادیر تابع با ضابطه $y = x^2$ کمتر از مقادیر تابع با ضابطه $|y - x| = 2$ است، آن بازه کدام است؟
 (۰, ۱) (۱) (۲) (-۱, ۰) (۳) (-۲, ۱) (۴)

۲۶- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x - 1), x \in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟
 ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۲۷- دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x - 1|}$ کدام است؟
 R - $\{\pm 1\}$ (۴) $(1, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 1)$ (۲) R - $\{1\}$ (۱)

۲۸- دامنه تعریف تابع $y = \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{a-x}}$ کدام است؟
 \emptyset (۴) $\{a\}$ (۳) $(-\infty, a)$ (۲) $(a, +\infty)$ (۱)

۲۹- اگر $f(x + \sqrt{x+5}) = x^2 - 1$ باشد، آنگاه مقدار $f(7)$ کدام است؟
 ۹ (۴) ۱۱ (۳) ۱۳ (۲) ۱۵ (۱)

۳۰- با فرض آنکه $f(x) + f(2) = x^2 + 4$ برابر کدام عدد می‌باشد؟
 ۱۲ (۴) صفر (۳) -۴ (۲) ۴ (۱)

۳۱- اگر $y = f(x+1) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$ دامنه تعریف تابع (۱ - x) است؟
 (۴, ∞) (۴) (۳, ∞) (۳) (۱, ∞) (۲) (۲, ∞) (۱)

۳۲- حدود x کدام باشد که نمودار $y = |1 + 2x| + |x - 1| - x$ به خط افقی تبدیل گردد؟
 $x \leq 1$ (۴) $x \leq \frac{-1}{2}$ (۳) $x \geq 1$ (۲) $\frac{-1}{2} \leq x \leq 1$ (۱)

۳۳- اگر $g\left(\frac{x}{2}\right) + 2f(2x)$ دامنه تابع $D_g = [1, 2]$ و $D_f = [2, 4]$ کدام است؟
 [۱, ۴] (۴) [۱, ۳] (۳) [۱, ۲] (۲) {۲} (۱)

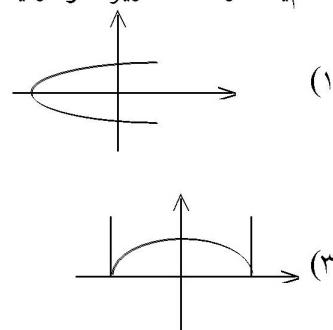
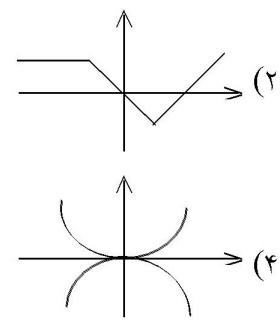
۳۴- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 3 - 2x & x < 1 \end{cases}$ حاصل $(-f(2))$ کدام است؟
 ۶۴ (۴) ۱۲۱ (۳) ۱۴۴ (۲) ۸۱ (۱)

۳۵- دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{\frac{3+|x|}{3-|x|-1}}$ کدام است؟
 (-۲, ۴) (۴) (-۳, ۳) (۳) (-۴, ۰) (۲) (-۴, ۱) (۱)

۳۶- کدام ضابطه تابع نمی‌باشد؟
 $|x| + y^3 = 2$ (۴) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$ (۳) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ (۲) $x + |y| = 2$ (۱)

۳۷- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $|x - 1| = x + 2|x - 1|$ کدام است؟
 ۴ (۴) صفر (۳) ۱ (۲) ۱ (۱)

۳۸- کدامیک از اشکال زیر نمودار یک تابع است؟



-۳۹- دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{3x}{x-5}$ کدام است؟
 $x \neq 0, 3 \leq x < 5$ (۴) $x \neq 5, x \geq 3$ (۳) $x = 5, x \leq 3$ (۲) $x \geq 3, x \neq 0$ (۱)

-۴۰- هرگاه $f(x) = \begin{cases} 3x+a & x \geq -1 \\ ax+4 & x \leq -1 \end{cases}$ کدام است؟
 ۱۱ (۴) -۳ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۱)

-۴۱- هرگاه دو تابع $g(x) = ax^3 - (b+1)x + 3$ و $f(x) = x^2 + bx + 4$ یکدیگر را در نقطه‌ای به طول یک واقع بر نیمساز ناحیه چهارم قطع کنند، مقدار a کدام است؟
 -9 (۴) -۳ (۳) ۳ (۲) ۹ (۱)

-۴۲- دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x-3}}$ کدام است؟
 R (۴) $x \geq 3$ (۳) $x > 3$ (۲) $R - \{3\}$ (۱)

-۴۳- به فرض آن که $y = f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ دامنه تابع f کدام است؟
 $[0, 1)$ (۴) $(1, +\infty)$ (۳) $(0, 1)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۱)

-۴۴- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ دامنه تابع f کدام است؟
 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ (۲) $(-1, 3)$ (۱)
 $(-\infty, 3]$ (۴) $[-1, +\infty)$ (۳)

-۴۵- اگر برد تابع $f(x) = \frac{2}{x+2}$ به صورت مجموعه $\{-1, 1, 2\}$ باشد، دامنه این تابع برابر کدام مجموعه است؟
 $\{4, -1, 1\}$ (۴) $\{-4, -1, 0\}$ (۳) $\{3, -2, 0\}$ (۲) $\{-4, -2, 0\}$ (۱)

-۴۶- دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$ برابر است با:
 $R - \{2, 3\}$ (۴) $R - \{1, 2\}$ (۳) $R - \{1\}$ (۲) $R - \{-3, 1\}$ (۱)

-۴۷- دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{3x-1} + \sqrt{3-x}$ کدام است؟
 $(-\infty, 0) - \left(\frac{-1}{3}\right)$ (۴) $(-\infty, 3] - \left(\frac{1}{3}\right)$ (۳) $R - \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$ (۲) $[3, +\infty)$ (۱)

۴۸- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2(2-x)$ حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟

$4x^2$ (۴) $2x^2$ (۳) $4x$ (۲) (۱) صفر

۴۹- نمودار تابع $y = \frac{x+1+|x-1|}{2}$ تشکیل زاویه با کدام مقدار زیر می‌دهد؟

$\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۱)

۵۰- برد تابع $y = \frac{x^2+2x+1}{x-2}$ شامل کدام عدد زیر نمی‌شود؟

-۲ (۴) ۱ (۳) -۱ (۲) (۱) صفر

۵۱- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt[3]{2x+5} + \frac{x+3}{x+2}$ کدام مجموعه است؟

$\left\{ x \mid x \geq -2 \right\}$ (۲) $\{x \mid x \geq -2\}$ (۱)

$\left\{ x \mid -\frac{5}{2} < x < -2 \right\}$ (۴) $\left\{ x \mid x \geq -\frac{5}{2}, x \neq -2 \right\}$ (۳)

۵۲- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\frac{3}{x+5}} + \sqrt{\frac{-3}{x+2}}$ کدام است؟

$x < -2$ (۴) $-5 < x < -2$ (۳) $x > 5$ و $x < -2$ (۲) $x > -5$ (۱)

۵۳- اگر مجموعه‌ی $\{(1,3), (-2,1), (1,a), (1-a,m)\}$ کدام است؟

-۳ (۴) ۲ (۳) -۱ (۲) ۱ (۱)

۵۴- اگر $f(g(-1)) = 6$, $g(x) = x^2 + 2x + 3$, $f(x) = 2x - a$ باشد، a کدام است؟

-۲ (۴) ۲ (۳) -۱۰ (۲) ۱۰ (۱)

۵۵- اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x+2}{x+ax+b}$ برابر $\{-1\}$ باشد، $a+b$ چه قدر است؟

۵ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

۵۶- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{|x-1|-4}$ کدام است؟

$x \leq -3$ یا $x \geq 5$ (۴) $x \leq 3$ یا $x > 1$ (۳) $-1 \leq x \leq 3$ (۲) $x \leq -4$ (۱)

۵۷- اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$, آن‌گاه $f(\lambda)$ کدام است؟

۸ (۴) ۷ (۳) ۳ (۲) ۵ (۱)

۵۸- اگر رابطه‌ی $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$ به رابطه‌ی تساوی تبدیل شود، الزاماً سه عدد غیرصفر x و y و z چگونه‌اند؟

(۴) منفی

(۳) مثبت

(۲) هم علامت

(۱) مساوی هم

۵۹- دامنه‌ی تعریف $f(x) = \frac{3}{2x - 1} + \frac{x + 2}{5x}$ عبارتست از:

$$R - \left\{ 0, \frac{1}{2}, -2 \right\} \quad (4) \quad R - \left\{ -2, \frac{1}{2} \right\} \quad (3) \quad R - \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} \quad (2) \quad R - \{0, -2\} \quad (1)$$

۶۰- دامنه‌ی تعریف تابع $g(x) = \sqrt{\frac{-x + 3}{|x + 2|}}$ کدام است؟

$$R - \{-2, 3\} \quad (4) \quad (-\infty, 2) - \{-3\} \quad (3) \quad [3, +\infty) - \{-2\} \quad (2) \quad (-\infty, 3] - \{-2\} \quad (1)$$

۶۱- دامنه‌ی تابع $\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$ کدام است؟

$$(-\infty, 1) \quad (4) \quad [0, +\infty) - \{1\} \quad (3) \quad R - \{-1\} \quad (2) \quad (0, +\infty) \quad (1)$$

۶۲- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$ کدام است؟

$$(-1, 2] - \{1\} \quad (4) \quad (-1, 2) - \{1\} \quad (3) \quad (-2, 1] - \{-1\} \quad (2) \quad (-2, 1) - \{0\} \quad (1)$$

۶۳- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ عبارت است از:

$$(1, +\infty) \quad (4) \quad (-\infty, 1) \quad (3) \quad [0, +\infty) \quad (2) \quad (-\infty, 0] \quad (1)$$

۶۴- دامنه‌ی تعریف تابع کسری $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x^2 - 5x + 6}$ عبارتست از:

$$x > 3 \quad (4) \quad R - \{-2, -3\} \quad (3) \quad x \geq 2 \quad (2) \quad R - \{2, 3\} \quad (1)$$

۶۵- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\frac{-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{3}}$ عبارتست از:

$$x > 3 \quad (4) \quad 2 \leq x \leq 3 \quad (3) \quad 3 \leq 2 \quad (2) \quad \emptyset \quad (1)$$

۶۶- دامنه‌ی تعریف تابع $y = x^{-3} + 2$ کدام است؟

$$R - \{-3\} \quad (4) \quad R - \{2\} \quad (3) \quad R \quad (2) \quad R - \{0\} \quad (1)$$

۶۷- دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{\frac{-5}{x-3}}$ کدام است؟

$x > 0 \quad (4)$

$x < 0 \quad (3)$

$x < 3 \quad (2)$

$x > 3 \quad (1)$

۶۸- کدامیک از اعداد زیر متعلق به دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{\frac{2x}{1-x^2}}$ می‌باشد؟

$\frac{-1}{2} \quad (4)$

$\frac{1}{2} \quad (3)$

$1 \quad (2)$

$-1 \quad (1)$

۶۹- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x-2}{(x+2)(x-3)}$ عبارتست از:

$R - \{2, -3\} \quad (4)$

$R - \{-2, 3\} \quad (3)$

$R - \{2, -2, -3\} \quad (2)$

$R - \{2, -2, 3\} \quad (1)$

۷۰- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{-2x+5}}$ عبارت است از:

$2 \leq x < \frac{5}{2} \quad (4)$

$x < \frac{5}{2} \quad (3)$

$x > \frac{5}{2} \quad (2)$

$2 < x < \frac{5}{2} \quad (1)$

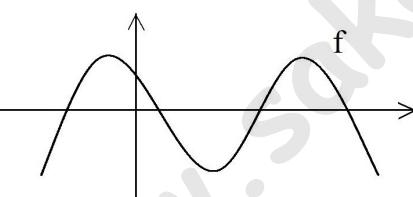
۷۱- تمام دامنه‌ی تعریف $f(x) = \frac{\sqrt[3]{4x-x^3}}{|x|-x}$ کدام است؟

$(0, -2] \cup \{-2\} \quad (4)$

$[-2, 0) \quad (3)$

$(-\infty, -2] \quad (2)$

$[-2, 2] - \{0\} \quad (1)$



۷۲- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. معادلات $y = f(|x|)$ و $y = f(|x|) = 0$ به ترتیب چند ریشه دارد؟

$4 \text{ و } 3 \quad (1)$

$3 \text{ و } 4 \quad (2)$

$4 \text{ و } 6 \quad (3)$

$3 \text{ و } 2 \quad (4)$

۷۳- فرض کنیم $\{(2,2), (3,5), (-1,-1)\}$, $f = \{(1,2), (-1,-1), (5,3)\}$, $g = \{(2,2), (3,5), (-1,-1)\}$, $f \cup g$ چند تا از تابع‌های

یک به یک می‌باشد؟

$4 \text{ صفر} \quad (4)$

$3 \quad (3)$

$2 \quad (2)$

$1 \quad (1)$

۷۴- اگر $y = f(x+1) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$, f دامنه تعریف تابع $y = f(x+1)$ کدام است؟

$(-\infty, +\infty) \quad (4)$

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad (3)$

$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \quad (2)$

$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \quad (1)$

۷۵- فرض کنیم $f(x) = ax^2 + bx + c$ کدام است؟

$$f(4) = 4 \quad -f(4) = 3 \quad -f(0) = 2 \quad f(0) = 1$$

۷۶- دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{x + \sqrt{-x}}$ کدام است؟

$$\{0\} = 4 \quad R = (-1, 0) = 3 \quad [-1, 0] = 2 \quad (-\infty, 0] = 1$$

۷۷- اگر داشته باشیم $f(x) = x^2 - 6x$ با کدام برابر است؟

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) + 4 = 2 \quad f\left(x - \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{12}{x} + 4 = 4 \quad f\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{12}{x} + 4 = 3$$

۷۸- تابع $f = \{(x, y) \mid y = \frac{x+6}{x}, x, y \in N\}$ چند عضو دارد؟

$$2 = 3 \quad 3 = 2 \quad 4 = 1$$

نامحدود = 4

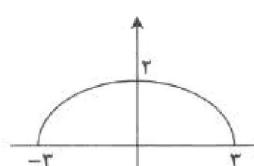
۷۹- اگر $f = \{(1, a+b), (2, b+c), (3, c+a)\}$ تابع همانی باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

$$-2 = 4 \quad -1 = 3 \quad 1 = 2 \quad 3 = 1$$

۸۰- نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را، ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم.

نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟

$$-2/5 = 3 \quad -3/2 = 5$$



۸۱- کدام ضابطه برای نمودار مناسب است؟

$$y = 2\sqrt{9-x^2} = 2 \quad y = -2\sqrt{9-x^2} = 1$$

$$y = 2 - \frac{x^2}{9} = 4 \quad y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} = 3$$

۸۲- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \frac{\sqrt{4x-x^3}}{\sqrt{|x|-x}}$ کدام است؟

$$(0, 2] = 4 \quad [-2, 0) = 3 \quad (-\infty, -2] = 2 \quad [-2, 2] - \{0\} = 1$$

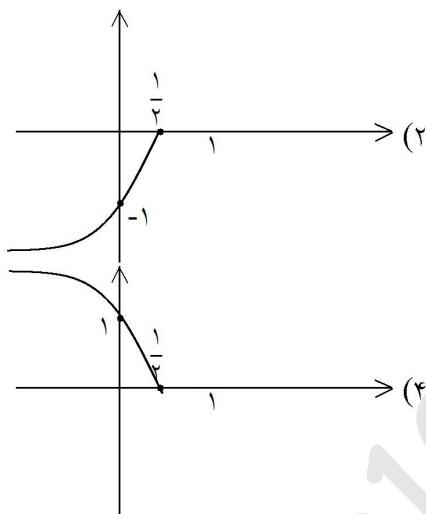
۸۳- اگر $f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos x & x > 1 \\ \frac{2x+1}{3-2x} & x = 1 \\ 4\sin x - \tan \frac{rx}{\pi} & x < 1 \end{cases}$ کدام است؟

۴) تعریف نشده

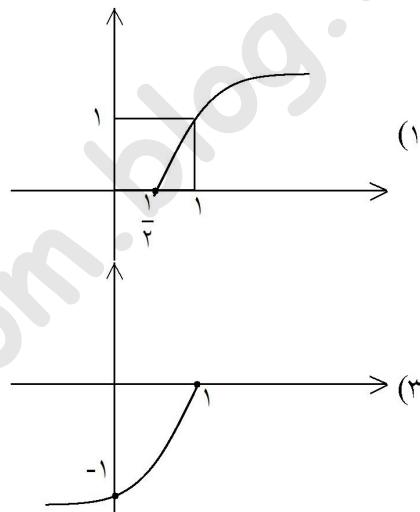
$$\frac{\pi\sqrt{3}}{12} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$



۸۴- نمودار تابع $y = -\sqrt{1-2x}$ کدام است؟



۸۵- چند تا از مجموعه‌های زیر تابع می‌باشند؟

الف) $f = \{(1, 5) \text{ و } (2, 5) \text{ و } (3, 5)\}$

ب) $g = \{(1, 3) \text{ و } (4, \frac{1}{4}) \text{ و } (1, 3)\}$

ج) $h = \left\{ \left(\sqrt{5}-1, 0\right) \text{ و } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ و } (3, 9) \text{ و } \left(\frac{4}{\sqrt{5}+1}, 7\right) \right\}$

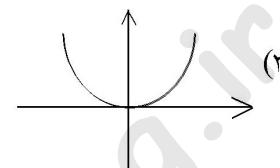
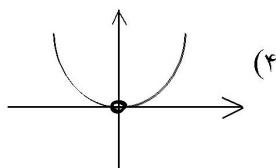
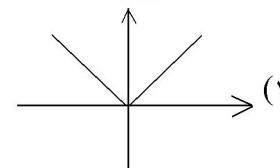
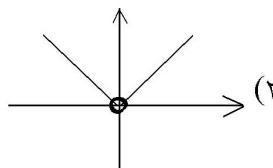
۴) صفر

$$3 \quad (3)$$

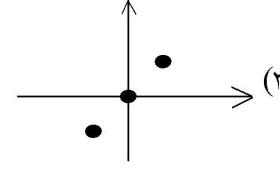
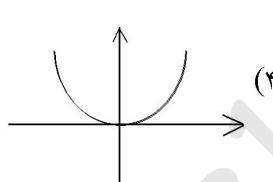
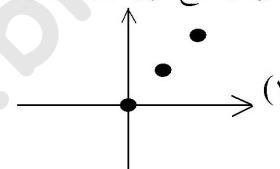
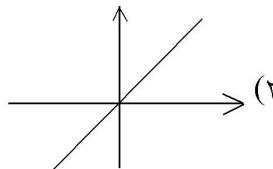
$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

-۸۶- نمودار تابع $y = \frac{|x|^2}{|x|}$ کدام است؟



-۸۷- نمودار تابع $f = \{(1,2), (2,1), (0,0)\}$ کدام است؟



-۸۸- اگر $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ باشد، به ازای کدام مقدار k معادله $f(x) = k$ دقیقاً یک ریشه دارد؟

۱ (۴)

-۳ (۳)

۳ (۲)

-۲ (۱)

-۸۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x - a & , x \geq -2 \\ 2ax - 3 & , x \leq -2 \end{cases}$ کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

$-\frac{8}{3}$ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

-۹۰- دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{\frac{3 + |x|}{3 - |x - 1|}}$ کدام است؟

(-۲, ۴) (۴)

(۱, ۴) (۳)

(-۴, ۲) (۲)

(-۴, ۱) (۱)

-۹۱- رابطه‌ی $R = \{(x,y) \mid x, y \in Z, |x| + |y| = 2\}$ چند عضو زوج مرتب دارد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

۹۲- اگر $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

(۱) تعریف نشده

۹۳- دو تابع f و g به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب بیان شده‌اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع باشد؟

fog (۴)

$f - g$ (۲)

$f \cap g$ (۲)

$f \cup g$ (۱)

۹۴- رابطه‌ی $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m ، یک تابع است؟
۴) هیچ مقدار m (۲) (۳) (۱) (۲) (۱) (۰)

۹۵- بازای کدام مقدار b ، رابطه‌ی $f = \{(1, 3), (2, 4), (1, b^2 - 1), (b, 6), (3, 1)\}$ تابع است؟
۴) هیچ مقدار b (۲) فقط -2 (۳) ± 2 (۱) (۰)

۹۶- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{x - 1}}$ کدام است؟

$[1, 10]$ (۴)

$[10, +\infty)$ (۳)

$(-\infty, 10]$ (۲)

$[1, +\infty)$ (۱)

۹۷- بازای کدام مقادیر m معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - mx + m = 0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟
 \emptyset (۴) $0 < m < 4$ (۳) $m < 0$ (۲) $m < 4$ (۱)

۹۸- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟
 $x^2 + 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۳) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۱)

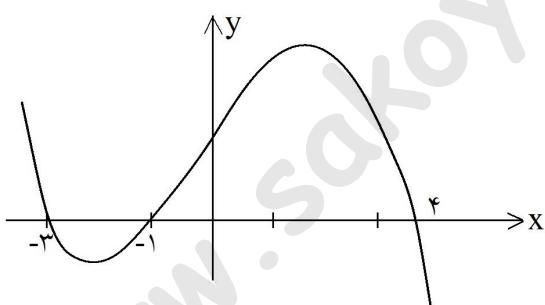
۹۹- شکل رویه‌رو، نمودار تابع $y = f(x - 2)$ است: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

$[-1, 1] \cup [0, 6]$ (۱)

$[-3, 1] \cup [0, 2]$ (۲)

$[-5, -3] \cup [-1, 2]$ (۳)

$[-5, -3] \cup [0, 2]$ (۴)



۶.۵ کلید تست‌های فصل پنجم

۴	۳	۲	۱	۴	۳	۲	۱	۴	۳	۲	۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲				
<input type="checkbox"/>	- ۱۳										
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۴
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۵									
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۶
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۸
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱				
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۳
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۷
<input type="checkbox"/>	- ۲۸										
<input type="checkbox"/>	- ۲۹										
<input type="checkbox"/>	- ۳۰										
<input type="checkbox"/>	- ۳۱										
<input type="checkbox"/>	- ۳۲										
<input type="checkbox"/>	- ۳۳										
<input type="checkbox"/>	- ۳۴										
<input type="checkbox"/>	- ۳۵										
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۶

فصل ۶

آنالیز ترکیبی

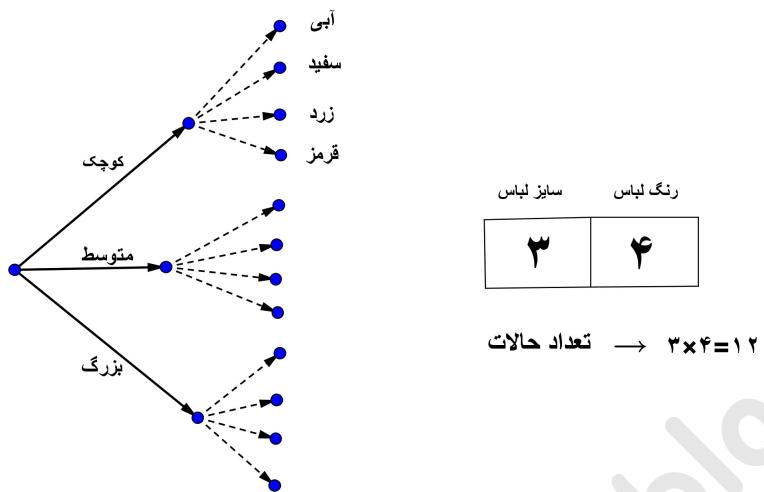
انسان قبل از اینکه نوشتن و خواندن بیاموزد با شمارش سروکار داشته است. در آنالیز ترکیبی یا ترکیبات با شمارش سروکار داریم اما نه شمارش معمولی. در واقع شمارش در اینجا حالت تخصصی‌تری به خود می‌گیرد. حدود ۲۰۰ سال از عمر این شاخه از ریاضیات می‌گذرد و بیشترین پیشرفت ترکیبات در ۵۰ تا ۶۰ سال گذشته شکل گرفته است. با پیدایش کامپیوتر و ساده شدن محاسبات طولانی به کمک آن، برخی مسائل که قبلا حلشان دشوار می‌نمود. رابطه‌ی کامپیوتر و ترکیبات رابطه‌ی دوسویه بوده است.^۱ خیلی از الگوریتم‌هایی که در کامپیوتر اجرا می‌شوند به مدد ترکیبات نوشته شده‌اند. در این فصل ابتدا اصول مقدماتی شمارش را بیان کرده و جایگشت و ترکیب را در ادامه فصل بررسی می‌کنیم.

۱.۶ اصل ضرب و جمع

برای روشن شدن مطلب اجازه دهید مثالی ساده را بررسی کنیم.

۱ در این زمینه قضیه چهارنگ مثالی جالب است. قضیه چهارنگ از مسائل مشهور و قدیمی ریاضیات است که سال‌ها اثبات نشده مانده بود. به بیان ساده (و نادقیق) این قضیه می‌گوید: «برای رنگ کردن هر نقشه به طوری که کشورها و نواحی همسایه در نقشه هم‌رنگ نباشند فقط چهار رنگ کافی است». سه رنگ برای نقشه‌های ساده تر کافیست ولی یک رنگ چهارم اضافی برای برخی نقشه‌ها لازم است. قضیه ۵ رنگ که اثباتی کوتاه و ابتدایی دارد، بیان می‌کند که ۵ رنگ برای رنگ آمیزی نقشه کافیست. این قضیه در اواخر قرن ۱۹ اثبات شده است (هیووو ۱۸۹۰). اثبات اینکه ۴ رنگ کافیست بسیار سخت تر است. این مسئله به صورت معادله ابتدا در سال ۱۸۵۲ عنوان شد و سرانجام در سال ۱۹۷۶ با کمک رایانه توسط کنت اپل و لفگانگ هیکن حل شد. این اولین قضیه مهمی بود که با استفاده از کامپیوتر به اثبات رسید. آنها نشان دادند که مجموعه‌ای از ۱۹۳۶ نقشه وجود دارد که هیچ کدام از آنها نمی‌توانند قسمتی از یکی از کوچکترین مثال نقض‌های قضیه چهار رنگ باشند. اپل و هیکن از یک برنامه کامپیوتری خاص استفاده کردند تا ثابت کنند هیچ کدام از این نقشه‌ها از این قاعده مستثنی نیستند. علاوه بر این هر نقشه‌ای فارغ از این که مثال نقض هست یا نه، حتماً قسمتی را شامل می‌شود که شبیه یکی از آن ۱۹۳۶ نقشه می‌باشد و اثبات این نیاز به صدها صفحه تحلیل دست نویس بود. اپل و هیکن نتیجه گرفتند که اگر بخواهد کوچکترین مثال نقضی وجود داشته باشد باید شامل یکی از آن ۱۹۳۶ نقشه باشد. این تناقض به این معنی بود که هیچ مثال نقضی وجود ندارد و قضیه درست می‌باشد. در ابتدا اثبات آنها از طرف همه ریاضیدان‌ها مورد تایید واقع نشد، چرا که چک کردن یک اثبات کامپیوتری توسط انسان امکان پذیر نبود.

مثال ۱.۶. یک شرکت تولید پوشاک ورزشی لباس‌های ورزشی را در ۳ اندازه، کوچک، متوسط و بزرگ و در ۴ رنگ سفید، قرمز، آبی و زرد تولید می‌کند. این تولیدی در مجموع چند نوع لباس متفاوت تولید می‌کند؟



در شکل بالا می‌توان با شمارش مستقیم تعداد لباس‌های تولیدی را یافت. راه دیگر شمارش حرفه‌ای است. دو خانه بهم چسبیده را که یکی مربوط به اندازه و دیگری مربوط به رنگ می‌باشد رسم می‌کنیم. در خانه اولی سه امکان (سه سایز) و در دومی ۴ انتخاب (۴ رنگ) وجود دارد و تعداد کل انتخاب‌ها برابر ۱۲ است.

اصل ضرب : فرض کنید کاری به دو جزء تقسیم شده است، چنانکه جز اول به m طریق انجام شدنی است و جزء دوم مستقل از اولی به n طریق انجام شدنی است. در این صورت این کار به mn طریق انجام شدنی است. البته این اصل قابل تعمیم است. اگر کاری به k طریق مجزا تقسیم شده باشد بطوریکه اولی به m_1 طریق انجام شدنی باشد، دومی به m_2 طریق انجام شدنی باشد و ... و k امی به m_k طریق انجام شدنی باشد آنگاه کل کار به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق شدنی است.

مثال ۲.۶. از شهر A به شهر B سه راه و از شهر B به شهر C چهار راه وجود دارد.
 الف: به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت؟ به چند طریق می‌توان از شهر B به شهر C رفت؟ به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟
 ب: به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و به شهر A برگشت، بطوریکه هر جاده حداقل یک بار طی شود؟

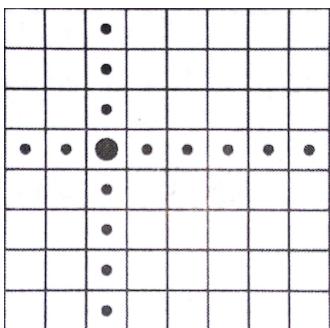
مثال ۳.۶. به چند طریق می‌توان یک کمیته دو نفره از بین ۸ مرد و ۹ زن تشکیل داد؟

مثال ۴.۶. از بین ده زوج (زن و شوهر) چگونه می‌توان یک گروه دونفره تشکیل داد که یک مرد و یک زن در آن باشد و در عین حال این دو زن و شوهر نباشند؟

مثال ۵.۶. چند کلمه سه‌حرفی با حروف a, b, c, d, e می‌توان ساخت؟ در چند کلمه حروف مجاور متمایزند؟ در چند کلمه هر سه حرف متمایزند؟

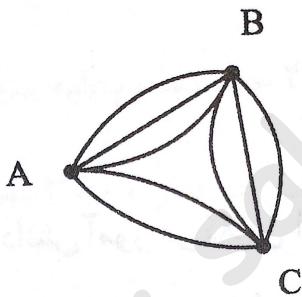
مثال ۶.۶. چند عدد فرد سه رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

مثال ۷.۶. به چند طریق می‌توان یک رخ سفید و یک رخ مشکی را در یک صفحه شطرنجی 8×8 قرار داد بطوری‌که یکدیگر را تهدید نکنند؟ (رخ همان قلعه است و صرفاً افقی و عمودی حرکت می‌کند.)



اصل جمع: فرض کنید کاری را بتوان به دو روش انجام داد طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب موجود باشد. در این صورت برای انجام این کار $m + n$ روش وجود دارد. مثل اصل ضرب این اصل نیز قابل تعمیم است.

مثال ۸.۶. بین شهرهای A , B , C سه جاده، بین C , B ۲ جاده و بین A , C سه جاده احداث شده است. به چند طریق می‌توان با طی حداقل دو جاده از A به B رفت؟



مثال ۹.۶. کمیسیون ورزش ۸ عضو و کمیسیون اقتصاد ۱۲ عضو دارد که ۳ عضو آنها مشترک است. می‌خواهیم از بین اعضای هر کمیسیون یک نفر را به عنوان نماینده کمیسیون انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم به طوری‌که نمایندگان دو کمیسیون دو فرد مختلف باشند؟

مثال ۱۰.۶. با استفاده از ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند عدد طبیعی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

مثال ۱۱.۶. چند عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد؟

مثال ۱۲.۶. روی تخته سیاه تمام کلمات سه حرفی با استفاده از حروف a, b, c, d, e نوشته‌ایم. چندبار حرف a روی تخته سیاه نوشته شده است؟

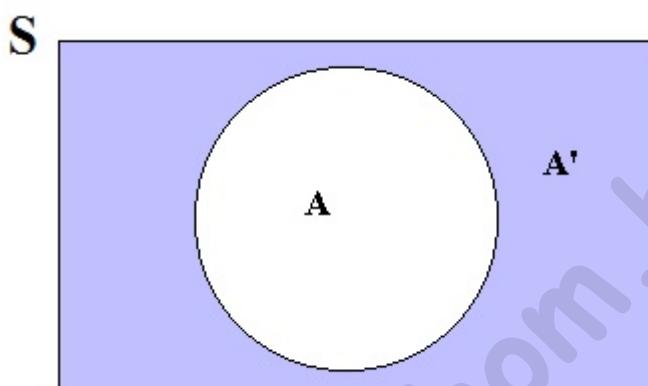
مثال ۱۳.۶. با ارقام $\{7, 0, 2, 3\}$ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت به طوری‌که:
الف: تمام ارقام متمایز باشند.

ب: عدد سه رقمی و فرد با ارقام متمایز باشد.

ج: عدد زوج و سه رقمی با ارقام متمایز باشد.

مثال ۱۴.۶. در چند عدد ۴ رقمی رقم ۵ وجود دارد؟

تذکر مهم: تکنیک به کار رفته در حل مسئله فوق ، استفاده از اصل متمم است. گاهی اوقات شمارش خاصیت ذکر شده در مسئله‌ای به مراتب مشکل‌تر از شمارش اعضا‌ی است که خاصیت ذکر شده را ندارند. در این حالت بهتر است آنها بی که آن ویژگی معین را ندارند (متمم) شمارش شده و از کل اعضا مجموعه اصلی کم شوند.



$$|S| = |A| + |A'|$$

مثال ۱۵.۶. در چند کلمه ۴ حرفی با حروف f, e, d, c, b, a حرف تکراری وجود دارد؟

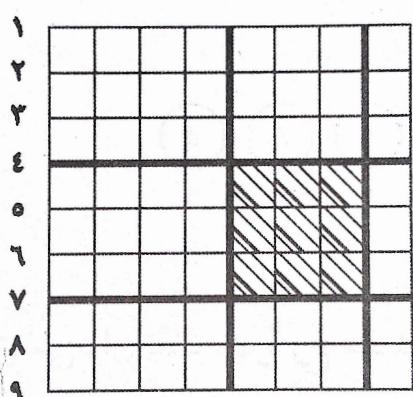
مثال ۱۶.۶. در چند عدد ۴ رقمی بزرگ‌ترین رقم برابر ۶ است؟

تمرین ۱.۶. به چند طریق می‌توان یک نفر را از بین ۶ زن و ۸ مرد انتخاب کرد؟

تمرین ۲.۶. به چند طریق می‌توان ۲ نفر را از بین ۵ کلاس اولی، ۷ کلاس دومی و ۶ کلاس سومی انتخاب کرد بطوریکه این دو نفر هم کلاس نباشند؟

تمرین ۳.۶. چند عدد فرد چهار رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

تمرین ۴.۶. چند مربع 3×3 در یک صفحه شطرنجی 8×8 وجود دارد؟



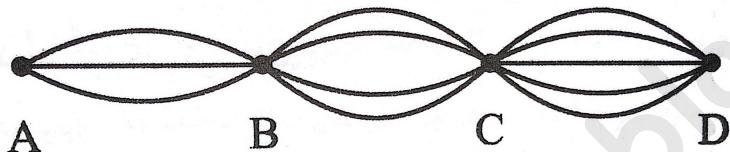
تمرین ۶.۵. الف: به چند طریق می‌توان یک مهره سفید و یک مهره سیاه را در دو خانه از صفحه شطرنجی $\times 8 \times 8$ قرار داد بطوری‌که در یک سطر یا یک ستون باشند؟

ب: به چند طریق می‌توان ۳ مهره‌ی متمايز را درسه خانه از صفحه شطرنجی $\times 8 \times 8$ قرار داد بطوری‌که هیچ دوتایی در یک سطر یا ستون قرار نگیرند؟

تمرین ۶.۶. الف: با توجه به شکل زیر به چند طریق می‌توان از A به D رفت؟

ب: به چند طریق می‌توان از A به D رفت و به A برگشت؟

ج: در چند مسیر از مسیرهای قسمت «ب» هر جاده حداقل یک بار طی شده است؟



تمرین ۷.۶. دو خانه از خانه‌های شطرنج را مجاور گوییم هرگاه حداقل یک راس مشترک داشته باشند. به چند طریق می‌توان یک مهره سفید و یک مهره‌ی سیاه را در دو خانه مجاور از صفحه شطرنجی $\times 8 \times 8$ قرار داد؟

تمرین ۸.۶. در چند عدد ۵ رقمی حداقل یکی از دو رقم ۱ و ۲ وجود دارد؟

تمرین ۹.۶. در چند عدد ۶ رقمی، رقم تکراری وجود ندارد؟

تمرین ۱۰.۶. چند زیر مجموعه از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ حداقل دو عضو دارند؟

۲.۶ جایگشت

سه نفر به چند صورت متفاوت می‌توانند در یک ردیف کنار هم ایستاده و عکس بگیرند؟ اگر این سه شخص را با حروف لاتین a, b, c نمایش دهیم، تمام حالات ممکنه در زیر آمده است:

$abc, acb, bca, bac, cab, aba$

هر یک از این ۶ حالت را یک جایگشت از سه حرف $\{a, b, c\}$ گوییم. حال اگر ۴ نفر بخواهند در یک ردیف و کنار هم عکس بگیرند چند حالت متفاوت پدید می‌آید؟

$abcd, abdc, acbd, acdb, adcb, adbc$

$bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca$

$cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba$

$dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba$

به کمک اصل ضرب می‌توان تعداد جایگشت‌ها را بدون رسم کردن بدست آورد. تعداد جایگشت‌های ۴ شیء برابر است با $2 \times 1 = 2$ و تعداد جایگشت‌های ۳ شیء برابر است با $2 \times 1 = 2$. در حالت کلی اگر n شیء متمایز داشته باشیم در این صورت تعداد جایگشت‌های این n شیء برابر است با $n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$:

معرفی یک نماد: حاصلضرب $1 \times 2 \times \dots \times n$ را با نماد $n!$ نشان می‌دهیم و n فاکتوریل خوانده می‌شود.

مثال ۱۷.۶. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$1) \frac{8!}{5!}$$

$$3) \frac{7! 4!}{10!} \left(\frac{8!}{3! 5!} - \frac{9!}{2! 7!} \right)$$

$$5) \frac{n!}{(n - 3)!}$$

$$7) \frac{5!}{m(m + 1)} \times \frac{(m + 1)!}{(m - 1)! 3!}$$

$$2) \frac{10!}{8! 2!}$$

$$4) \frac{n!}{(n - 2)!}$$

$$6) \frac{n!}{(n - k)!}$$

$$8) \frac{m! - (m - 1)!}{(m + 1)!} = \frac{1}{6} \rightarrow m = ?$$

مثال ۱۸.۶. الف: ثابت کنید $20! = 19! + 19!$. ب: عبارت $24 \times 23 \times \dots \times 8 \times 9 \times \dots \times 24$ را به نماد فاکتوریل بنویسید. ج: عبارت $40 \times 39 \times \dots \times 2 \times 3 \times \dots \times 4 \times 6 \times \dots \times 40$ را به نماد فاکتوریل بنویسید. د: عبارت $39 \times 38 \times \dots \times 5 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ را به نماد فاکتوریل بنویسید.

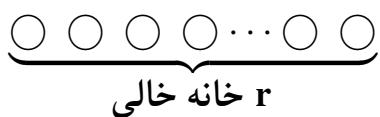
حال تصور کنید هفت شیء متمایز $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ داشته باشیم. می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های بطول ۳ (یعنی با سه شیء) را که می‌توان از ۷ شیء فوق ساخت محاسبه کنیم. یک جایگشت بطول ۳ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

○ ○ ○

اولین خانه به هفت طریق، دومین خانه به ۶ طریق و سومین خانه به ۵ طریق پر می‌شود. پس طبق اصل ضرب تعداد چنین جایگشت‌هایی برابر $5 \times 6 \times 7$ است. می‌توان این عبارت را طور دیگری هم نوشت:

$$7 \times 6 \times 5 = 7 \times 6 \times 5 \times \frac{4!}{4!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7 - 3)!}$$

عدد ۳ و ۷ که نقشی اصلی در مسئله داشتند را در آخرین کسر می‌بینیم. در حالت کلی اگر $n \leq r$ باشد و بخواهیم تعداد جایگشت‌های r شیء را از n شیء بیابیم همانند مثال بالا عمل می‌کنیم:



اولین خانه دارای n انتخاب، دومین خانه $(n - 1)$ انتخاب، سومین خانه $(n - 2)$ انتخاب ... و r امین خانه دارای $(n - r + 1)$ انتخاب است. حال حاصلضرب این اعداد برابر است با:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = p(n,r)$$

عبارت $p(n,r)$ را برای تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء انتخاب کرده‌ایم. پس تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء یا $p(n,r)$ برابر است با :

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ۱۹.۶. چند جایگشت از حروف کلمه *table* با حرف t شروع می‌شود؟

مثال ۲۰.۶. چند جایگشت از حروف کلمه *nature* به حروف صدادار ختم می‌شوند؟

مثال ۲۱.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *logarithm* عبارت *log* وجود دارد؟

مثال ۲۲.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *triangle* حروف صدادار مجاورند؟ در چند جایگشت ۵ حرفی با استفاده از حروف این کلمه حرف اول بی‌صدا است؟

مثال ۲۳.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *flexicam* هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند؟

مثال ۲۴.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *talking* بین دو حرف t, k دقیقاً دو حرف قرار دارد؟

مثال ۲۵.۶. ۴ معلم و ۳ دانشآموز به چند طریق می‌توانند در یک ردیف باشند که هیچ دو معلمی مجاور یکدیگر نباشند؟

مثال ۲۶.۶. با حروف کلمه جهانگردی و بدون تکرار حروف:

۱. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها به «ی» ختم می‌شود؟

۲. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار گرفته باشند؟

۳. چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟

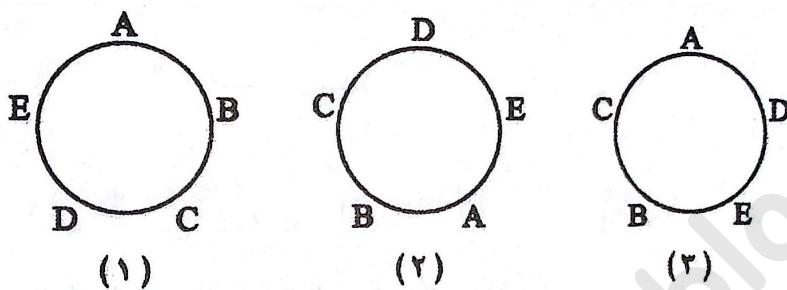
۴. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» ۴ حرف اول باشند؟

۵. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند؟

۶. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حروف نقطه‌دار شروع شوند؟

جایگشت‌های دوری

به هر روش قرار گرفتن n شیء دور یک دایره یک جایگشت دوری آن n شیء گوییم، با این ویژگی که اگر یک آرایش از دوران یک آرایش دیگر بدست آید این دو آرایش را همارز گوییم. در شکل زیر آرایش‌های ۱ و ۲ از جایگشت‌های دوری A, B, C, D, E همارزنند اما این دو با ۳ همارزن نیست.



قضیه: تعداد جایگشت‌های دوری n شیء برابر است با $(n - 1)$.

مثال ۲۷.۶. در چند جایگشت دوری از حروف کلمه‌ی *triangle* حروف صدادار مجاورند؟

مثال ۲۸.۶. سه معلم و هشت دانشآموز به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند بطوریکه هیچ دو معلمی کنار یکدیگر نباشند؟

مثال ۲۹.۶. پنج زوج به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند بطوریکه هر فرد کنار همسر خود نشسته باشد؟

تمرین ۱۱.۶. ۶ دکتر و ۵ مهندس را در نظر بگیرید.

۱. به چند طریق می‌توانند کنار هم بنشینند؟

۲. در چند حالت دکترها مجاور هدیگرند؟

۳. در چند حالت هیچ دو دکتری مجاور یکدیگر نیستند؟

۴. در چند حالت هم دکترها مجاورند و هم مهندسین؟

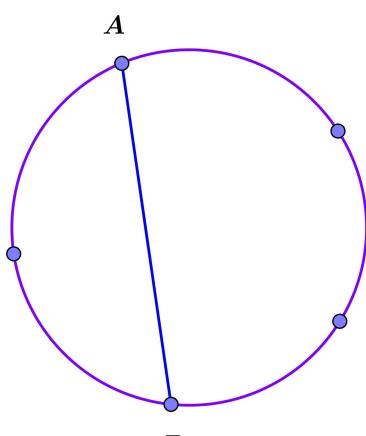
تمرین ۱۲.۶. ۱۱ مرد و ۱۴ زن به چند طریق می‌توانند تشکیل ۱۱ زوج بدهند؟

تمرین ۱۳.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه *triangle* حرف t قبل از حرف n قرار دارد؟

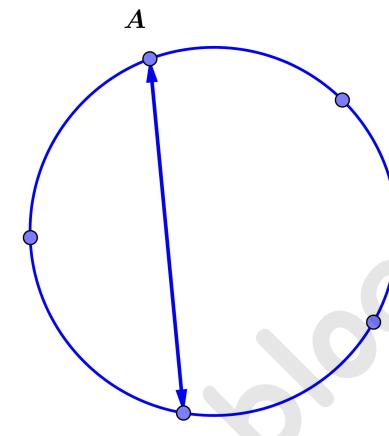
تمرین ۱۴.۶. چند جایگشت دوری شامل ۶ حرف از حروف کلمه‌ی *Logarithm* وجود دارد؟ در چندتا از این جایگشت‌ها حرف t وجود دارد؟ در چندتا هر سه حرف صدادار وجود دارد؟ در چندتا حداقل یکی از حروف m و t وجود دارد؟

۳.۶ ترکیب

به دقت به شکل زیر نگاه کنید.



$$AB = BA$$



$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$$

پنج نقطه روی دایره انتخاب شده‌اند. با این پنج نقطه ده پاره خط متمایز چون AB می‌توان ساخت، اما دو برابر

$$\text{این تعداد یعنی } 2^5 \text{ بردار چون } \overrightarrow{AB} \text{ می‌توان رسم کرد. در واقع } 2^5 = \frac{5!}{3!} = P(5, 2).$$

در این دو مسئله به ظاهر یکسان ترتیب انتخاب بسیار تاثیرگذار است. در انتخاب پاره خط ما با انتخاب هر دو نقطه از بین این ۵ نقطه روی محیط دایره یک پاره خط داریم و این مانند انتخاب زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه ۵ عضوی است که مثلاً مجموعه‌های $\{A, B\}$, $\{B, A\}$ یکی هستند. اگر در انتخاب r شیء از میان n شیء $n \leq r$ ترتیب انتخاب مهم نباشد با مسئله ترکیب روبرو هستیم. تعداد راه‌های انتخاب r شیء بدون اهمیت ترتیب آنها را ترکیب r شیء از n شیء گوییم و با نماد $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ۳۰.۶. به چند طریق می‌توان از بین ده عضو شورای شهر دو نفر را به عنوان رئیس و معاون انتخاب کرد؟

مثال ۳۱.۶. یک هفت ضلعی منتظم مفروض است. تمام قطرهایش را رسم کرده‌ایم. کلا چند قطر رسم شده است؟ اگر بدانیم هیچ سه قطری در یک نقطه متقطع نیستند، تعداد محل‌های برخورد این قطرها را بیابید.

مثال ۳۲.۶. شانزده تیم فوتبال بصورت دوره‌ای باهم بازی می‌کنند. کلا چند بازی در این دوره انجام می‌شود؟

مثال ۳۳.۶. به ازای کدام مقدار n داریم: $\binom{n}{2} = 21$.

مثال ۳۴.۶. ثابت کنید: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

مثال ۳۵.۶. به کمک مثال بالا ثابت کنید :

الف: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های $n - r$ عضوی برابر است.

$$\cdot \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\cdot \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

مثال ۳۶.۶. از بین شش کتاب مفروض :

۱. به چند طریق می‌توان ۴ تا را در یک قفسه کنار هم چید؟

۲. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب به یک کتابخانه هدیه داد؟

برای جمع بندی تمام مطالب فصل مثال‌های متنوع زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳۷.۶. پنج ماشین پژو و سه ماشین بنز به چند طریق در یک ردیف می‌توانند کنار هم پارک کنند که

ماشین‌های بنز کنار هم و ماشین‌های پژو هم کنار هم باشند؟

مثال ۳۸.۶. چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز باستفاده از ارقام مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ می‌توان

ساخت بطوری‌که دو عدد مضرب ۳ همواره کنار هم باشند؟

مثال ۳۹.۶. مجموعه ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ مفروض است. چند عدد ۸ رقمی با ارقام متمایز با

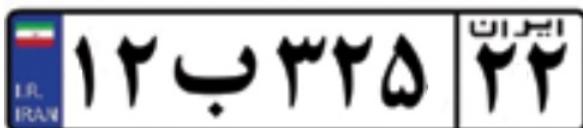
استفاده از این ارقام می‌توان نوشت بطوری‌که هیچ دو عدد فرد اول این مجموعه کنار هم نباشند؟

مثال ۴۰.۶. یک پلاک ماشین بصورت شکل زیر است. ارقامی که درست راست پلاک استفاده می‌شود از

مجموعه $\{99, 11, 22, 000\}$ است. ارقام سمت چپ از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ انتخاب می‌شود

و حروف بین ارقام سمت چپ تنها ۱۳ حرف از حروف الفبای فارسی است. معین کنید به این ترتیب چند

پلاک ماشین می‌توان ساخت؟

**مثال ۴۱.۶.** تعداد کلماتی یازده حرفی که با حروف کلمه‌ی *Mississippi* می‌توان نوشت را بیابید.**مثال ۴۲.۶.** چند کلمه ده حرفی با حروف a, b, c می‌توان ساخت بطوری‌که دقیقاً شامل سه حرف a باشد؟

جایگشت با تکرار

اگر مثال ۴۱ را با دقت بیشتری بررسی کنید و ترکیب‌های در راه حل را به فاکتوریل تبدیل کنید به نتیجه‌ی جالبی بین تعداد اشیاء تکراری و تعداد کل و جواب مسئله می‌رسید. اثبات این مطلب در حالت کلی هم چندان مشکل نیست. فرض کنید m_1 شیء از نوع a_1 و m_2 شیء از نوع a_2 و ... و m_k شیء از نوع a_k داریم که $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. در اینصورت هر چندن این n شیء را یک جایگشت با تکرار می‌نامیم. تعداد این جایگشت‌ها برابر است با :

$$\frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!}$$

با این حساب در مثال ۴۱ می‌توان تعداد جواب‌ها را از دستور یافت که برابر است با : $\frac{11!}{1! 4! 2! 4!}$.

مثال ۴۳.۶. چند عدد ده رقمی با استفاده از سه رقم ۴ و دو رقم ۲ و پنج رقم ۸ می‌توان نوشت؟

تمرین ۱۵.۶. ده نقطه روی محیط یک دایره داده شده است. کلیه‌ی وترهای بین دوبعدی این نقاط را رسم می‌کنیم.

الف: چند وتر رسم شده است؟

ب: تعداد مثلث‌هایی را بیابید که رئوس آنها روی محیط دایره و اضلاع آنها روی وترهای رسم شده باشد.

تمرین ۱۶.۶. به چند طریق می‌توان ۷ کتاب یکسان را بین ده نفر توزیع کرد بطوریکه به هر نفر حداقل یک کتاب برسد؟

تمرین ۱۷.۶. در چند زیر مجموعه ۵ عضوی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ حداقل سه عدد فرد وجود دارد؟

تمرین ۱۸.۶. مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 19, 20\} = A$ مفروض است.

۱. مجموعه A چند زیرمجموعه ۸ عضوی دارد؟

۲. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی اعداد ۱، ۲ و ۳ وجود دارند؟

۳. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی هیچ یک از اعداد ۱، ۲ و ۳ وجود ندارند؟

۴. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی حداقل یکی از اعضای $\{1, 2, 3\}$ وجود دارند؟

۵. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی، عددی بزرگتر از ۱۵ وجود دارد؟

۶. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی کوچکترین عضو ۵ و بزرگترین ۱۵ است؟

۷. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی اختلاف بزرگترین عضو از کوچکترین عضو برابر ۱۰ است؟

۸. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی حداقل ۶ عدد فرد وجود دارد؟

۹. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی حداقل ۳ عدد فرد و حداقل ۳ عدد زوج وجود دارد؟

تمرین ۱۹.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *Gallery* حروف / غیرمجاوند؟

تمرین ۲۰.۶. در یک جمع ۹ زوج (زن و شوهر) حضور دارند. به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر از این جمع انتخاب کرد طوری که در بین آنها دقیقاً ۳ زوج حضور داشته باشند؟

تمرین ۲۱.۶. در یک کلاس ۳۰ دانشآموز وجود دارد. می‌خواهیم ۶ نفر از این دانشآموزان را برای تیم والیبال و ۸ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کنیم بطوری که تمام اعضای تیم والیبال از اعضای تیم فوتبال بلندتر باشد. به چند طریق این کار شدنی است؟

تمرین ۲۲.۶. در یک صفحه شطرنجی 6×4 چند مستطیل دیده می‌شود؟

تمرین ۲۳.۶. در چند عدد ۸ رقمی با ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ دقیقاً ۵ رقم فرد وجود دارد؟

تمرین ۲۴.۶. در چند جایگشت ۶ حرفی از حروف کلمه‌ی *logarithm* دقیقاً دو حرف صدادار وجود دارد؟

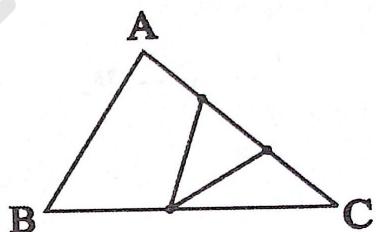
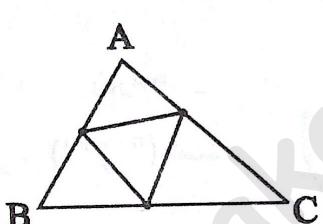
تمرین ۲۵.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *computers* حروف صدادار به ترتیب الفایی وجود دارند و همچنین حرف *p* جلوتر از حرف *c* قرار دارد؟

تمرین ۲۶.۶. در چند کلمه‌ی ده حرفی با حروف *c, b, a* سومین حرف *a* در مکان هفتم کلمه آمده است؟

تمرین ۲۷.۶. ده نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۵ نفره *A, B* تقسیم کرد؟

تمرین ۲۸.۶. ده نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟

تمرین ۲۹.۶. روی هر ضلع مثلث *ABC* پنج نقطه را علامت گذاشته‌ایم. چند مثلث وجود دارد که رئوس هریک متعلق به این ۱۵ نقطه باشد؟



۴.۶ تست‌های فصل ششم

۱- سه نوع کتاب علمی و ۴ نوع کتاب ادبی را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که ابتدا کتابهای علمی یک در میان قرار گیرند؟

۷۲ (۴) ۹۶ (۳) ۱۲۰ (۲) ۱۴۴ (۱)

۲- با حروف کلمه بلوچستان چند کلمه ۲ حرفی بدون توجه به معنا می‌توان ساخت به طوری که حرفی در هر یک از آنها تکرار نشده باشد؟

۸! (۴) $\frac{8!}{3!}$ (۳) $\frac{8!}{5!}$ (۲) $\frac{8!}{5!3!}$ (۱)

۳- با چهار رقم ۰,۱,۲,۳ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱۰ (۴) ۱۵ (۳) ۲۰ (۲) ۱۸ (۱)

۴- مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ چند زیر مجموعه ۲ عضوی دارد؟

۱۵ (۳) ۲۰ (۲) ۲۵ (۱)

۵- برای مسافت از شهری به شهر دیگر ۵ نوع وسیله نقلیه موجود است. تعداد صورت‌هایی که می‌توان از شهر A به شهر B با عبور از دو شهر متواتی C, D رفت به طوری که از هر نوع وسیله نقلیه حداقل بکار استفاده شده باشد کدام است؟

۱۲۵ (۴) ۹۰ (۳) ۸۰ (۲) ۶۰ (۱)

۶- با ارقام ۳، ۲، ۱ و ۰ چند عدد سه رقمی که تکرار ارقام مجاز باشد می‌توان نوشت؟

۴۸ (۴) ۳۶ (۳) ۲۴ (۲) ۹ (۱)

۷- از بین ۶ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۵ دانش‌آموز کلاس سوم می‌خواهیم انجمنی را با ۴ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۲ دانش‌آموز کلاس سوم تشکیل دهیم این عمل به چند طریق ممکن است؟

۴۲۰ (۴) ۳۳۰ (۳) ۱۵۰ (۲) ۲۵ (۱)

۸- دانش‌آموزی باید به ۱۸ سوال از ۲۰ سوال امتحان به دلخواه پاسخ دهد. به چند طریق می‌تواند این ۱۸ سوال را انتخاب کند؟

۲۸۰ (۴) ۱۹۰ (۳) ۲۰ (۲) ۱۸ (۱)

۹- با چهار عدد ۰, ۹, ۶, ۵ چند عدد چهار رقمی (بدون تکرار) می‌توان ساخت؟

۳۲ (۴) ۲۴ (۳) ۱۸ (۲) ۶ (۱)

۱۰- با ارقام ۵, ۴, ۰, ۱ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۲۴ (۴) ۱۸ (۳) ۲۰ (۲) ۱۰ (۱)

۱۱- شخصی از میان ۱۰ کتاب خود می‌خواهد دو کتاب را انتخاب نموده و به یکی از دوستانش هدیه کند چند صورت ممکن است؟

(۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۹۰ (۴) ۲۰

۱۲- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۲۰

۱۳- سه کتاب ریاضی و دو کتاب اقتصاد که با هم متفاوتند را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتابهای هم موضوع همواره کنار هم باشند؟

(۱) ۲۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۲۰ (۴) ۶۰

۱۴- مجموعه اعداد چهار رقمی که با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ بدون تکرار رقم می‌توان نوشت، چند عضو دارد؟

(۱) ۲۴۰ (۲) ۲۶۰ (۳) ۲۸۰ (۴) ۳۰۰

۱۵- یک مجموعه ۸ عضوی چند زیر مجموعه ۴ عضوی دارد؟

(۱) ۸۴ (۲) ۷۰ (۳) ۵۶ (۴) ۴۲

۱۶- به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را یک در میان در قفسه‌ای چید؟

(۱) ۱ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۱۱ (۵) ۱۱ (۶) ۱۱ (۷) ۱۱ (۸) ۱۱

۱۷- یک قفل رمزی دارای یک رمز سه رقمی فرد با ارقام ۱ و ۲ و ... ۹ می‌باشد اگر رمز این قفل را ندانیم و امتحان کردن هر رمز ۲ دقیقه طول بکشد حداقل چند ساعت طول می‌کشد تا قفل باز شود؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۲/۵ (۳) ۱۳ (۴) ۱۳/۵

۱۸- با حروف کلمه جمهوری به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت بطوریکه حرف اول آنها نقطه‌دار نباشد؟

(۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۶۰ (۴) ۸۰

۱۹- مقدار $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $n(n-1)$ (۴) $\frac{n(n+1)}{2}$

۲۰- حروف کلمه ASSIST را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که S ها یک در میان باشند؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۲۱- بر روی یک دایره ۸ نقطه متمایز وجود دارد، تعداد چهار ضلعی‌های محدب که هر رأس یک چهار ضلعی واقع بر نقاط مفروض باشد، کدام است؟

۷۲ (۴) ۷۰ (۳) ۶۸ (۲) ۵۶ (۱)

۲۲- از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می‌توان سه نفر طوری انتخاب کرد، که همواره یک فرد مورد نظر، بین آن سه نفر باشد؟

۷۲ (۴) ۶۶ (۳) ۵۵ (۲) ۴۵ (۱)

۲۳- از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دسته‌ی ۵ تایی متتشکل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می‌توان انتخاب کرد؟

۴۲۰ (۴) ۲۴۰ (۳) ۵۴۰ (۲) ۴۵۰ (۱)

۲۴- پلاک اتومبیل سواری سری ب در تهران به صورت $\frac{\text{تهران}}{\text{ب}}^{***}$ است که هر ستاره نمایش یک رقم غیر صفر است.

در سری ب و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟
۱۸۲۲۵ (۴) ۱۵۴۸۰ (۳) ۱۴۵۸۰ (۲) ۱۱۶۶۴ (۱)

۲۵- یک مجموعه‌ی n عضوی، 55 زیر مجموعه‌ی $2 - n$ عضوی دارد، کدام است؟

۱۱ (۴) ۱۰ (۳) ۹ (۲) ۸ (۱)

۲۶- ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند تعداد پنج رقمی‌های حاصل کدام است؟

۴۸ (۴) ۳۶ (۳) ۲۴ (۲) ۱۲ (۱)

۲۷- ۴ دانش‌آموز کلاس اول و ۵ دانش‌آموز دوم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند، هرگاه دانش‌آموزان کلاس اول یک در میان باشند؟

$4! \times 5! \times 3!$ (۴) $4! \times 5! \times 3$ (۳) $4! \times 5! \times 2$ (۲) $4! \times 5!$ (۱)

۲۸- ۵ نقطه متمایز بر روی محیط یک دایره قرار دارند. تعداد چند ضلعی‌هایی که رئوس آنها بر این نقاط قرار دارند، کدام است؟

۱۲۰ (۴) ۱۶ (۳) ۱۵ (۲) ۲۶ (۱)

۲۹- با ارقام ۵ و ۳ و ۲ و ۰ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱۲ (۴) ۱۰ (۳) ۹ (۲) ۸ (۱)

۳۰- اگر $P(n, 2) - C(n, 2) = 36$ باشد، حاصل $C(n, 3) - C(n, 2)$ چیست؟

۱۰۸ (۴) ۹۶ (۳) ۸۴ (۲) ۷۲ (۱)

۳۱- به چند طریق از میان ۵ آقا و ۴ خانم می‌توان شورایی متشکل از ۲ آقا و ۳ خانم انتخاب نمود؟
 ۴۰ (۴) ۳۵ (۳) ۳۰ (۲) ۲۵ (۱)

۳۲- ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۳ کتاب فیزیک مختلف داریم، به چند طریق می‌توانیم آنها را در یک ردیف قرار دهیم به نحوی که کتابهای ریاضی در کنار هم باشند؟

$$2 \times 4! \times 4! (4) \quad 3! \times 4! (3) \quad (4!)^2 (2) \quad 2 \times 3! \times 4! (1)$$

۳۳- با حروف کلمه SHOP و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که حتماً شامل حرف S باشد؟
 ۹ (۴) ۱۲ (۳) ۱۸ (۲) ۶ (۱)

۳۴- می‌خواهیم از یک کلاس ۱۰ نفری شامل A و B چهار نفر برای شرکت در یک مسابقه ورزشی انتخاب کنیم به طوریکه شخص A حتماً انتخاب نشود ولی شخص B حتماً انتخاب شده باشد. این عمل به چند شریق امکان‌پذیر است؟

$$84 (4) \quad 56 (3) \quad 28 (2) \quad 186 (1)$$

$$A + nB (4) \quad nA - B (3) \quad A - B (2) \quad A + B (1)$$

: $\binom{n}{K+1}$ حاصل برابر است با $\binom{n+1}{K} = A$ اگر

۳۶- اگر یک مجموعه n عضوی دارای ۱۰ زیر مجموعه ۲ عضوی باشد، دارای چند زیر مجموعه ۳ عضوی است؟
 ۲۰ (۴) ۱۵ (۳) ۵ (۲) ۱۰ (۱)

۳۷- تعداد اعداد ۳ رقمی فرد فاقد رقم ۵ کدام است؟
 ۱۴۴ (۴) ۱۹۲ (۳) ۲۵۶ (۲) ۲۸۸ (۱)

۳۸- در یک شرکت ۶ نفری به چند طریق می‌توان از بین کارکنان شرکت یک رئیس، یک حسابدار و یک منشی انتخاب کرد هرگاه هر فرد فقط یک شغل بتواند اختیار کند؟
 ۷۲ (۴) ۱۲۰ (۳) ۲۰ (۲) ۲۱۶ (۱)

۳۹- با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت هر گاه بر ۵ بخش‌پذیر بوده و از نیز ۳۰۰۰۰ بزرگتر باشد؟
 ۲۴ (۴) ۱۶ (۳) ۱۲ (۲) ۱۸ (۱)

۴۰- حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟
 ۱۴۴۰ (۴) ۷۲۰ (۳) ۵۴۰ (۲) ۳۶۰ (۱)

۴۱- با فرض آنکه $P(n, 2) = \binom{n}{3}$ عدد طبیعی n کدام است؟

۵ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۱۰ (۱)

۴۲- تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر است. تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی عضوی آن چندتاست؟

۱۸ (۴)

۲۴ (۳)

۴۲ (۲)

۲۱ (۱)

۴۳- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ چند زیرمجموعه‌های ۳ عضوی دارد که شامل ۱ باشد اما ۲ را نداشته باشد؟

۹ (۴)

۱۰ (۳)

۶ (۲)

۱۲ (۱)

۴۴- با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چه تعداد عدد ۳ رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۳۲ (۴)

۴۸ (۳)

۳۶ (۲)

۶۰ (۱)

۴۵- از بین ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی سفید می‌خواهیم ۳ مهره را انتخاب کنیم. در چند حالت ۲ مهره از یک رنگ و ۱ مهره‌ی دیگر به رنگی متفاوت می‌باشد؟

۵۰ (۴)

۴۰ (۳)

۷۰ (۲)

۶۰ (۱)

۴۶- چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۵ وجود دارد که در آنها رقم ۳ حداقل یکبار ظاهر شود؟

۱۸۰۲ (۴)

۲۱۰۱ (۳)

۸۶۶ (۲)

۱۷۳۲ (۱)

۴۷- از میان هفت پرستار مرد و پنج پرستار زن به چند طریق می‌توان ۲ پرستار مرد و ۳ پرستار زن انتخاب نمود؟

۲۱۰ (۴)

۱۸۹ (۳)

۱۶۹ (۲)

۱۴۴ (۱)

۴۸- در مجموعه‌ای با افزایش ۳ عضو تعداد زیرمجموعه‌ها ۱۱۲ واحد اضافه می‌شود. در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی چند واحد افزایش می‌یابد؟

۳۱ (۴)

۳۵ (۳)

۴۲ (۲)

۲۷ (۱)

۴۹- با ارقام ۲، ۱، ۰ چند عدد ۶ رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۴۸۶ (۳)

۱۶۲ (۲)

۷۲۹ (۱)

۵۰- حاصل $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{3}$ کدام است؟

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} (۲)$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} (۱)$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} (۴)$$

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3} (۳)$$

۵۱- اگر بخواهیم ۴ دانش آموز کلاس اول و ۳ دانش آموز کلاس دوم را در یک ردیف کنار هم بنشانیم، در چند حالت دانش آموزان کلاس دوم کنار هم هستند؟

$$1) \quad 3!5! \quad 2) \quad 3!4! \quad 3) \quad 4!4! \quad 4) \quad 4!5!$$

۵۲- با حروف کلمه‌ی «ایرانیان» چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

$$1) \quad 1680 \quad 2) \quad 3360 \quad 3) \quad 40320 \quad 4) \quad 6720$$

۵۳- ۱۰ نقطه‌ی متمایز بر روی محیط یک دایره قرار گرفته‌اند. تعداد چهار ضلعی‌هایی که رئوس آنها بر این ده نقطه قرار دارد، چه تعداد از مثلث‌هایی که رئوس آنها بر این ۱۰ نقطه قرار دارد بیشتر است؟

$$1) \quad 120 \quad 2) \quad 100 \quad 3) \quad 110 \quad 4) \quad 90$$

۵۴- مجموع جواب‌های معادله‌ی $\binom{2x}{x+1} = \binom{2x}{3}$ کدام است؟

$$1) \quad 2 \quad 2) \quad 4 \quad 3) \quad 6 \quad 4) \quad 8$$

۵۵- به چند طریق می‌توان از بین ۵ نفر دانش آموز کلاس اول و ۴ نفر دانش آموز کلاس دوم، ۴ نفر که حداقل ۳ نفر در آنها کلاس دومی باشند انتخاب کرد و به آنها ۴ جایزه مختلف اهداء نمود؟

$$1) \quad 20 \quad 2) \quad 21 \quad 3) \quad 480 \quad 4) \quad 504$$

۵۶- با ده، نقطه‌ی A, B, ..., J که روی یک دایره قرار دارند، چند مثلث می‌توان ساخت که شامل راس G باشند؟

$$1) \quad 45 \quad 2) \quad 36 \quad 3) \quad 120 \quad 4) \quad 112$$

۵۷- اگر داشته باشیم $n! = 2^7 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$ ، مقدار $\binom{n}{2}$ کدام است؟

$$1) \quad 15 \quad 2) \quad 36 \quad 3) \quad 21 \quad 4) \quad 28$$

۵۸- پنج نفر قرار است در یک سمینار سخنرانی کنند. اگر ترتیب آنها مهم باشد، به چند طریق ممکن است که شخص A پیش از شخص B سخنرانی کند؟

$$1) \quad 60 \quad 2) \quad 80 \quad 3) \quad 100 \quad 4) \quad 120$$

۵۹- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که ۲ رقم زوج کنار هم باشند؟

$$1) \quad 24 \quad 2) \quad 48 \quad 3) \quad 72 \quad 4) \quad 96$$

۶۰- حاصل $\binom{17}{5} + \binom{17}{4}$ کدام است؟

$$1) \quad 18 \quad 2) \quad 5 \quad 3) \quad 17 \quad 4) \quad 9$$

۶۱- با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که شامل رقم ۴ باشد

و یکان آن ۶ نباشد؟

(۱) ۳۱۲ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۱۲ (۴) ۲۸۰

۶۲- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کردند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۰

۶۳- با ارقام ۹, ۷, ۵, ۳, ۱ چند عدد سه رقمی با شرط «رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان» می‌توان نوشت؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۶۴- از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان ۳ نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به طوری که لااقل دو نفر آنان دانش‌آموز تجربی باشند؟

(۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

۶۵- از هریک از مدارس A و B و C و D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

(۱) ۱۶۰ (۲) ۲۲۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۵۴۰

۶۶- از هریک از ۶ منطقه‌ی کشوری، ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فهنه‌گی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند انتخاب کرد؟

(۱) ۵۷۶۰۰ (۲) ۶۷۵۰۰ (۳) ۷۵۶۰۰ (۴) ۷۶۵۰۰

۶۷- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه SYSTEM به طوری که S‌ها کنار هم نباشند، کدام است؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۳۶۰

۶۸- از هر یک از ۸ مدرسه علاقه‌مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفری انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود. به طوری که هر دو نفر همیار هم، از یک مدرسه باشند؟

(۱) ۴۲۰۰ (۲) ۵۴۰۰ (۳) ۵۶۰۰ (۴) ۶۳۰۰

۶۹- با حروف کلمه‌ی جمهوری چند کلمه‌ی سه حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴) ۴۰

۷۰- چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز و فرد که بزرگ‌تر از ۵۰۰ باشد، وجود دارد؟

(۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۴۸ (۴) ۹۶

۷۱- دو سرباز و دو افسر به چند طریق می‌توانند کنار هم باشند که دو افسر کنار هم نباشند؟

(۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۷۲- از بین ۵ جفت کفش به چند طریق می‌توان ۳ لنگه انتخاب کرد که یک جفت در میان آن‌ها باشد؟
 ۱) ۴۰ ۲) ۵۶ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۸

۷۳- چند عدد ۳ رقمی بیشتر از ۵۰۰ با ارقام ۲، ۴، ۶ و ۸ وجود دارد؟ (تکرار با ارقام مجاز است).
 ۱) ۳۲ ۲) ۶۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۵۰۰

۷۴- حروف کلمه‌ی PANAMA را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد که هر ۳ حرف A مجاور باشند؟
 ۱) ۲!۳! ۲) ۳!۲! ۳) ۴! ۴) ۴!۳!

۷۵- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت به طوری که ارقام فرد یکی در میان باشند؟
 ۱) ۷! ۲) ۴!۳! ۳) ۴! ۴) ۴!۳!

۷۶- از هر یک از تیم‌های ملی فوتبال، والیبال، بسکتبال و هندبال، ۵ نفر به جلسه‌ای دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ نفر که دو به دو هم تیمی نباشند، انتخاب کرد؟
 ۱) ۳۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۶۰۰

۷۷- چند عدد چهار رقمی با ارقام غیر صفر وجود دارد که از ۴۰۰۰ کم‌تر و فرد باشند؟
 ۱) ۱۲۰۰ ۲) ۱۲۱۵ ۳) ۱۶۲۰ ۴) ۱۵۰۰

۷۸- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟
 ۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

۷۹- با ارقام ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج رقمی ساخت، به‌طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟
 ۱) ۶۴۰۰ ۲) ۷۲۰۰ ۳) ۸۴۰۰ ۴) ۹۶۰۰

۸۰- با ارقام متمایز ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ به چند طریق می‌توان یک عدد چهار رقمی ساخت. به‌طوری که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟
 ۱) ۶۴۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۷۸۰ ۴) ۹۶۰

۵.۶ کلید تست‌های فصل ششم

۴	۳	۲	۱	۴	۳	۲	۱	۴	۳	۲	۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۷۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۴	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۰	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۴	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۰	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۴	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۸	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷۱	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۷۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

فصل ۷

آمار و احتمال

۱.۷ احتمال و اندازه‌گیری شانس

تاریخچه‌ی دقیقی از شروع احتمال در گذر زمان در دسترس نیست. از دوران یونان باستان آنها درباره‌ی شانس صحبت کرده‌اند و به مسئله کمی بعد متافیزیکی داده‌اند. نخستین مطالعه‌ی جدی در باب احتمال در قرن شانزدهم و ابتدای قرن هفدهم توسط جیرولامو کاردانو ($1501-1576$) ایتالیایی صورت گرفت.

تنها یک مسئله است که آن را ریشه‌ی شاخه‌ی احتمالات می‌دانند و به مسئله امتیازها معروف است. در این مسئله چگونگی تقسیم جایزه‌ی بازی شانسی نیمه تمام بین دو بازیکن فرضی همقدرت، با داشتن امتیازهای دو بازیکن در موقع قطع بازی و تعداد امتیازهای لازم برای بردن بازی خواسته شده است. این مسئله را کاردانو و تارتالگلیا نیز مورد بررسی قرار داده بودند، اما پیشترفت واقعی در سال 1954 رخ داد. یک قمارباز حرفه‌ای زیرک طی نامه‌ای به بلز پاسکال علت عدم تطبیق تجربه شخصی با واقعیت تئوری این مسئله را جویا شده بود. پاسکال به مسئله علاقمند شد و طی نامه‌ای آن را به اطلاع پی‌بر فرما رساند. از اینجا به بعد مکاتبات زیادی بین این دو بزرگ مرد تاریخ ریاضیات شکل گرفت که شالوده‌ی احتمالات را تشکیل دادند. فرما و پاسکال مسئله را جداگانه حل کردند با این تفاوت که پاسکال مسئله را در حالت کلی حل کرد. پدیده‌های پیرامون ما در حالت کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

$$\left. \begin{array}{c} \text{نتیجه از قبل قابل پیش بینی است} \\ \text{نتیجه از قبل غیرقابل پیش بینی است} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{پدیده‌های قطعی} \\ \text{پدیده‌های تصادفی} \end{array}$$

در بحث احتمال پدیده‌های تصادفی بررسی می‌شوند و با پدیده‌های قطعی کاری نخواهیم داشت. منظور از یک آزمایشی تصادفی در تمام این فصل آزمایشی است که نتیجه‌ی آن از قبل قابل پیش بینی نباشد. در هر آزمایش تصادفی مجموعه‌ای وجود دارد که شامل تمام نتایج ممکنه در آن آزمایش تصادفی است. به چنین مجموعه‌ای فضای نمونه گوییم.

تعریف ۱.۷. در هر آزمایش تصادفی به مجموعه‌ای که شامل تمام حالات ممکنه از آن آزمایش تصادفی باشد فضای نمونه گوییم و آنرا با حرف S نشان می‌دهیم. همچنین به هر زیرمجموعه دلخواه از S یک پیشامد یا رخداد گوییم. پس A یک پیشامد است هرگاه: $A \subseteq S$ باشد.

مثال ۱.۷. فضای نمونه هر یک از آزمایش‌های تصادفی ذکر شده در موارد زیر را معین کنید.

۱. فضای نمونه پرتاپ یک سکه.
۲. فضای نمونه پرتاپ دو سکه.
۳. فضای نمونه پرتاپ سه سکه.
۴. فضای نمونه پرتاپ یک تاس.
۵. فضای نمونه پرتاپ دو تاس.
۶. فضای نمونه برای جنسیت فرزندان یک خانواده سه فرزندی.
۷. فضای نمونه پرتاپ یک سکه و یک تاس.
۸. فضای نمونه انتخاب ۲ نفر از بین ۵ نفر.

مثال ۲.۷. در یک خانواده با ۴ فرزند پیشامد داشتن ۳ پسر را تعیین کنید. پیشامد داشتن حداقل ۳ پسر چیست؟ پیشامد برابر بودن تعداد دختران و پسران چیست؟

مثال ۳.۷. در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد. دو مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد اینکه این دو همنگ باشند را بنویسید.

مثال ۴.۷. دو تاس را با هم پرتاپ کرده‌ایم. پیشامدهای زیر را بنویسید.

۱. اعداد رو شده برابر باشند.
۲. مجموع اعداد رو شده ۷ شود.
۳. مجموع اعداد رو شده عددی اول باشد.

عملیات بر پیشامدها

چون پیشامدها زیرمجموعه‌های فضای نمونه هستند، امکان ترکیب کردن آنها و ساختن پیشامدهای جدید وجود دارد.

اشتراک دو پیشامد: اگر $A, B \subseteq S$ دو پیشامد دلخواه باشند $A \cap B$ پیشامد وقوع هردوی A و B بطور همزمان است. مثلا در پرتاپ یک تاس اگر A پیشامد آمدن عدد زوج و B پیشامد اینکه عدد اول بیاید باشد

آنگاه $A \cap B$ به معنای زوج و اول آمدن است. ولذا:

$$A \cap B = \{2\}$$

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ به معنای وقوع A یا B یا هردوی آنهاست. مانند حالت قبل داریم:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ به معنای رخ دادن A و رخ ندادن B است. مانند حالت قبل داریم:

$$A - B = \{4, 6\}$$

متتم یک پیشامد: پیشامد A' به معنای رخ ندادن A است. مانند حالت قبل داریم:

$$A' = \{1, 3, 5\}$$

تفاضل متقارن دو پیشامد: می‌دانیم $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. پس پیشامد $A \Delta B$ به معنای رخ دادن A و رخ ندادن B یا رخ دادن B و رخ ندادن A است. بعبارت دیگر فقط یکی از A یا B رخ دهد. مانند حالت قبل:

$$A \Delta B = \{3, 4, 5, 6\}$$

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم هرگاه:

مثال ۵.۷. دو تیم «الف» و «ب» با دو تیم «ج» و «د» در دو زمین جداگانه بازی می‌کنند. اگر A پیشامد برنده شدن تیم «الف» و B پیشامد برنده شدن «ب» باشد پیشامدهای زیر را تشریح کنید.

$$A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, A' \cup B', A' \cap B', B \cup A'$$

مثال ۶.۷. دو تاس با رنگ‌های آبی و قرمز را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای خواسته شده را بنویسید.

۱. پیشامد A : هر دو تاس فرد باشند.

۲. پیشامد B : مجموع دوتاس عدد ۶ باشد.

۳. پیشامد C : تاس آبی مضرب ۳ بیاید.

۴. پیشامد اینکه هر دو تاس فرد و مجموع ۶ آمده باشد.

۵. پیشامد اینکه هر دو تاس فرد یا مجموع دوتاس ۶ بیاید.

۶. پیشامد $A - C$ چیست؟

۷. پیشامد $C - B$ را توصیف کنید.

۸. آیا پیشامدهای «مجموع دوتاس ۷ بیاید» و «هر دو تاس زوج بیایند» ناسازگارند؟

اندازه‌گیری احتمال

برای اندازه‌گیری شанс در آزمایش تصادفی روش‌های متعددی وجود دارد. یکی از این روش‌ها روش آماری است. به این معنی که آزمایش را به دفعات زیاد انجام می‌دهیم و نتیجه‌های مشاهده شده و مطلوب را بر تعداد کل دفعات آزمایش تقسیم می‌کنیم و عدد حاصل را شанс آن پیشامد در نظر می‌گیریم. یکی دیگر از روشها، روش ذهنی است. کارشناس فوتbal بر اساس تجربیات خود حدس میزند که تیم A به احتمال مثلاً ۶۰٪ برنده خواهد شد. روش دیگر استفاده از اصول موضوعه احتمال و استخراج مابقی قوانین آن از همان چند اصل ابتدایی است که برای اولین آشنایی در احتمال چندان مناسب نیست. اما یکی از مفیدترین و ساده‌ترین روش‌ها محاسبه احتمال از طریق شمارش تعداد اعضای پیشامد و فضای نمونه و تقسیم آنها بر یک دیگر است.

تعريف ۲.۷. فرض کنید S یک فضای نمونه و $A \subseteq S$ یک پیشامد دلخواه باشد. شанс وقوع پیشامد A را که با نماد $P(A)$ نشان می‌دهیم بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد حالات مساعد یا مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ممکنه}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال ۷.۷. فرض کنیم که هر یک از اعداد دورقمری که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم را روی کارت‌های مشابه نوشته و در گیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس یک کارت به تصادف خارج می‌کنیم. شанс بیرون آمدن عدد زوج بیشتر است یا عدد فرد؟

مثال ۸.۷. در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم چقدر احتمال دارد که:

۱. هر سه مهره آبی باشند؟

۲. هر سه مهره همنگ باشند؟

۳. دقیقاً ۲ مهره همنگ باشند؟

مثال ۹.۷. اگر حروف کلمه «جهانگردی» را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد که:

۱. حرف «ی» آخر باشد؟

۲. دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟

۳. با حرف «ج» شروع و به حرف «ی» ختم شود؟

مثال ۱۰.۷. در یک خانواده سه فرزندی احتمال داشتن حداقل ۲ پسر را بیابید.

مثال ۱۱.۷. در پرتاپ دوتاس احتمال اینکه مجموع دوتاس عددی اول باشد را بدست آورید.

ممکن است تا اینجا پرسشی مهم ذهن شما را مشغول کرده باشد. احتمال پیشامدهای مرکب را چگونه محاسبه کنیم. مثلاً $P(A - B)$ و یا $P(A \cup B)$ را چگونه می‌توان بر حسب احتمال (A) و (B) و یا عبارات دیگر بیان کرد. در قسمت بعدی با ارائه اصول کولموگروف به دنبال یافتن پاسخ پرسش‌های بالا هستیم.

در این بخش اشاره‌ای به اصول سه‌گانه کولموگروف ۱ و نتایج آن خواهیم داشت.

اصول کولموگروف

فرض کنید S یک فضای نمونه باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد دخواه . اصول سه‌گانه‌ی کولموگروف عبارتند از:

$$1. \text{ همواره } 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$2. \text{ همواره } P(S) = 1$$

۳. اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند یعنی $A \cap B = \emptyset$ آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

نتایج اصول کولموگروف

قضیه ۱. اگر C, B, A , سه مجموعه دوبدو مجزا باشند یعنی اشتراک هر جفت از آن‌ها تهی باشد ، آنگاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

قضیه ۲. اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ آنگاه:

$$\text{الف. } P(A) \leq P(B)$$

$$\text{ب. } P(B - A) = P(B) - P(A)$$

قضیه ۳. در حالت کلی برای هر دو پیشامد دلخواه داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + p(B) - P(A \cap B)$$

یکی دیگر از نتایج مهم اصول سه‌گانه فوق رابطه‌ی بین یک پیشامد و متمم آن است. پیشامد A و متممش A' را در نظر بگیرید. چون $A \cup A' = S$ است پس $1 = P(A \cup A')$ خواهد بود و لذا:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

مثال ۱۲.۷. اگر $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, $P(A') = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ و $P(A - B)$

آندرهی کولموگروف متولد ۱۹۰۳ در تامبوف روسیه بود. پدرش دانشجوی رشته‌ی کشاورزی بود و در زمان تولد آندرهی تبعید شد. مادرش نیز در بدو تولد وی از دنیا رفت و خاله‌ی وی سرپرستی اش را به عهده گرفت و آندرهی در خانه پدربرگش بزرگ شد. پس از اتمام دوره‌ی دبیرستان وی مدتی سوزن‌بان شرکت راه‌آهن شد و در اوقات فراغت رساله‌ای بر مکانیک نیوتونی نوشت. وی در سال ۱۹۲۰ به دانشگاه مسکو رفت و در ۱۹۲۹ دوره‌ی دکترای خود را تحت نظر یکی از بزرگترین ریاضیدانان آن دوره یعنی لوزین به اتمام رسانید. وی تا سال ۱۹۳۰ مجموعاً ۱۸ مقاله بین المللی نوشت و باعث شد چهره‌ی سرشناصی در دنیا شود. وی در نظریه احتمالات، توبولوژی، آنالیز ریاضی و ... کار کرده است. کولموگروف جوایز متعددی در زمان حیاتش به واسطه‌ی فعالیت‌هایش دریافت کرد و سرانجام در سال ۱۹۸۷ در مسکو از دنیا رفت.

مثال ۱۳.۷. احتمال اینکه شخصی در ریاضی قبول شود ۵۵% و در شیمی ۶۰% است. احتمال اینکه لااقل در یکی از این دو درس قبول شود ۷۵% است. احتمال اینکه در هر دو درس قبول شود را بیابید.

مثال ۱۴.۷. عددی به تصادف از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد بر ۴ بخش پذیر باشد اما بر ۷ بخش پذیر نباشد را بیابید.

مثال ۱۵.۷. در یک خانواده سه فرزندی احتمال اینکه ۲ فرزند پسریا ۳ فرزند دختر باشند را بیابید.

مثال ۱۶.۷. حروف کلمه‌ی *ATAXIA* را بزیده و به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. به چه احتمالی هر سه حرف *A* کنار هم قرار می‌گیرند؟

$$\frac{1}{3}(4)$$

$$\frac{1}{4}(3)$$

$$\frac{1}{5}(2)$$

$$\frac{1}{5}(1)$$

مثال ۱۷.۷. اعداد یک تا شش را روی ۶ کارت یکسان نوشته و به تصادف دو کارت از بین آنها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال جمع این دو کارت زوج است؟

$$\frac{5}{9}(4)$$

$$\frac{2}{5}(3)$$

$$\frac{4}{9}(2)$$

$$\frac{1}{2}(1)$$

مثال ۱۸.۷. از هر ۴ گروه آزمایشی به ترتیب ۳ و ۳ و ۲ و ۱ نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آنها معرفی شوند با کدام احتمال از هر گروه یک نفر معرفی شده‌اند؟

$$\frac{2}{21}(4)$$

$$\frac{3}{14}(3)$$

$$\frac{1}{7}(2)$$

$$\frac{1}{8}(1)$$

مثال ۱۹.۷. پنج مهره‌ی سفید با شماره‌های ۱ تا ۵ و همچنین پنج مهره‌ی سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ که همگی یکسان هستند را در ظرفی قرار می‌دهیم و سپس به تصادف دو مهره از بین آنها بیرون می‌آوریم. اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد با کدام احتمال هر دو مهره همنگ هستند؟

$$\frac{3}{5}(4)$$

$$\frac{5}{9}(3)$$

$$\frac{4}{9}(2)$$

$$\frac{2}{5}(1)$$

تمرین ۱.۷. در پرتاب سه سکه پیشامدهای زیر را بدست آورید.

۱. هر سه سکه یکسان بیابند.
۲. دقیقاً دو سکه پشت بیابند.
۳. اقلاتاً دو سکه پشت بیابند.

تمرین ۲.۷. در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را بیابید.

۱. مجموع شماره‌های رو شده مضرب ۵ باشد.
۲. قدرمطلق تفاضل عددهای رو شده مساوی یک باشد.
۳. یکی از دو عدد رو شده دوباره دیگری باشد.
۴. یکی از دو شماره‌ی رو شده از دوباره دیگری بیشتر باشد.

تمرین ۳.۷. در کیسه‌ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه وجود دارد. دو مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. اولاً پیشامد اینکه هر دو مهره سیاه باشند را بیابید. ثانیاً پیشامد اینکه دو مهره خارج شده همنگ باشند.

تمرین ۴.۷. در کیسه‌ای ۲۰ کارت با شماره‌های ۱ تا ۲۰ نوشته شده است. یک کارت را به تصادف خارج کرده‌ایم. پیشامد اینکه کارت مضرب ۲ یا ۳ باشد را بیابید.

تمرین ۵.۷. از مجموعه $\{100, 101, 102, \dots\}$ یک عدد به تصادف انتخاب کرده‌ایم. به چه احتمالی این عدد مضرب ۵ می‌باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نیست یا مضرب ۵ نیست ولی به ۶ بخش پذیر است؟

تمرین ۶.۷. برای دو پیشامد B, A داریم $P(A \Delta B) = 2P(B) = \frac{8}{10}$, $P(A \cap B') = P(B' \cap A)$ است.

تمرین ۷.۷. اگر داشته باشیم $P(A' \cup B') = \frac{1}{2}$, $P(B) = P(A \cup B)$, $P(A') = \frac{1}{3}$ باشد، مططلوبست محاسبه $P(B)$.

تمرین ۸.۷. ثابت کنید برای هر دو پیشامد دلخواه: $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

تمرین ۹.۷. برای دو پیشامد B, A داریم: $P(B) = 2P(A) = P(A' \cap B')$. مططلوبست محاسبه $P(A \cap B)$.

تمرین ۱۰.۷. از مجموعه $\{1000, 1001, 1002, \dots\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. مططلوبست محاسبه:

۱. احتمال اینکه عدد بر ۳ یا ۵ بخش پذیر باشد.

۲. احتمال اینکه عدد بر ۳ بخشپذیر نباشد و بر ۵ هم بخشپذیر نباشد.

تمرین ۱۱.۷. در یک خانواده سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول دختر است. با کدام احتمال لاقل یکی از فرزندان پسر است؟

$$\frac{3}{4}(4)$$

$$\frac{5}{8}(3)$$

$$\frac{1}{2}(2)$$

$$\frac{1}{3}(1)$$

تمرین ۱۲.۷. در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شود که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنها به تصادف خارج شود با کدام احتمال لاقل بر روی یکی از آن دو آزمون انجام شده است؟

$$\frac{16}{21}(4)$$

$$\frac{5}{7}(3)$$

$$\frac{4}{7}(2)$$

$$\frac{10}{21}(1)$$

تمرین ۱۳.۷. بر روی هر یک از چند کارت یکسان اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه اعداد $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ را نوشته و به تصادف یک کارت از بین انها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دورقم از اعداد این کارت‌ها فرد می‌باشد؟

$$\frac{4}{10}(4)$$

$$\frac{3}{10}(3)$$

$$\frac{25}{100}(2)$$

$$\frac{2}{10}(1)$$

تمرین ۱۴.۷. سه تاس سالم را با هم پرتاپ می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد روشه‌هه مضرب ۳ نیستند؟

$$\frac{2}{3}(4)$$

$$\frac{19}{27}(3)$$

$$\frac{4}{9}(2)$$

$$\frac{8}{27}(1)$$

تمرین ۱۵.۷. هریک از اعداد ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ را روی شش گوی یکسان نوشته‌ایم. بطور تصادفی و متواالیاً گوی‌ها را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می‌شوند؟

$$\frac{2}{10}(4)$$

$$\frac{15}{100}(3)$$

$$\frac{12}{100}(2)$$

$$\frac{1}{10}(1)$$

۲.۷ مقدمه‌ای بر آمار، جامعه‌ونمونه

در زندگی روزمره انسان‌ها به کرات و بدون آنکه متوجه باشند از جملات آماری استفاده می‌کنند. مثلاً در محاوره و درباره‌ی این پرسش که در شبانه‌روز چند ساعت می‌خوابید و پاسخ «بند در هر شب‌انه روز و بطور میانگین حدود ۸ ساعت می‌خوابم» و یا این جمله‌ی «اگر مدت زمان مطالعه را دو برابر کنی شانس قبولی در امتحان پایانی شما ۵۰ درصد افزایش می‌یابد» همگی جملاتی هستند که میان مفاهیم آماری و یا روش آماری هستند. بطورکلی می‌توان علم آمار را مبنی بر ۴ مرحله زیر در نظر گرفت:

۱. طرح و انجام آزمایش برای دستیابی به اطلاعات عددی و یا هر روشی که منجر به گردآوری داده‌ها شود.
۲. جمع بندی و سازماندهی اطلاعات عددی بدست آمده برای درک و فهم بهتر موضوع.
۳. تحلیل و تفسیر و آنالیز دقیق اطلاعات عددی بدست آمده.
۴. نتیجه‌گیری براساس اطلاعات بدست آمده از قسمت‌های فوق و پیش‌بینی آینده‌ی موضوع مورد بحث.

تعريف ۳.۷. تعريف آمار و علم آمار: آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاؤت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

منظور از پیش‌بینی آینده، پیشگوئی‌هایی به سبک نوسترداداموس نیست. در اینجا براساس یک الگوی بدست آمده از اطلاعات عددی بطور تصادفی و نه لزوماً قطعی می‌توان آینده‌ی موضوعی را بررسی کرد. به عنوان مثال نظرسنجی برای تعیین نتیجه‌ی انتخابات در یک کشور، چنانچه بر اساس موازین علمی و درست انجام شود می‌تواند قبل از روز رای‌گیری نتیجه را مشخص کند و در این مورد نمونه‌های بسیار زیادی در دنیا و در کشور خودمان وجود دارد که نتیجه نظرسنجی و رای‌گیری واقعی تقریباً تا ۹۵ درصد و گاهی ۱۰۰ درصد منطبق بوده‌اند.

مثال ۲۰.۷. مدیر یک کارخانه تولید لامپ برای بهبود کیفیت کار تصمیم گرفت که روشی آماری در پیش بگیرد و در چند روز متوالی تعداد لامپ‌های معیوب را شمارش کرده و در جدول زیر گردآوری کرده است.

روزهای کاری	روز کاری اول	روز کاری دوم	روز کاری سوم	روز کاری چهارم	روز کاری پنجم
تعداد لامپ‌های معیوب	۵۰	۷۰	۹۰	۱۲۰	۱۸۰

براساس داده‌های به دست آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان دهنده چه چیزی است؟

ب) در این تمرین چه چیزی به عنوان آمار محسوب می‌شود؟

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه براساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟

□ توقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها □ ادامه خط تولید لامپ‌ها

برای انجام یک کار آماری نیاز به اطلاعات عددی داریم. این اطلاعات عددی چگونه تهیه می‌شوند؟ برای پاسخ به این پرسش نیاز به چند تعریف و اصطلاح داریم، که در زیر به معرفی و بیان آنها می‌پردازیم. اجازه دهید یک کاربرد پزشکی آمار را معرفی کنیم. شاخص توده بدنی یا BMI برای تعیین سلامت وزنی افراد توسط آدولف کوتله بلژیکی در سال ۱۸۵۰ بصورت زیر معرفی شده است:

$$BMI = \frac{W_{kg}}{(h_m)^2} = \frac{\text{وزن به کیلوگرم}}{\text{مربع قد به متر}}$$

نتیجه بدست آمده طبق جدول زیر معین می‌کند که سلامت وزنی شخص چگونه است.

طبقه‌بندی	شاخص توده بدن
کم وزن	کمتر از ۱۸/۵
وزن طبیعی	۲۴/۹ تا ۱۸/۵
اضافه وزن	۲۹/۹ تا ۲۵
چاقی درجه یک	۳۴/۹ تا ۳۰
چاقی درجه دو	۳۹/۹ تا ۳۵
چاقی درجه سه	بیشتر از ۴۰

شما می‌توانید با این دستور جالب می‌توانید شاخص توده بدنی خود و اعضای خانواده را بدست آورید. همچنین می‌توانید در کلاس درس شاخص توده بدنی بچه‌های کلاس را بدست آورید. اما پیدا کردن شاخص توده بدنی کل مدرسه شدنی اما کمی وقت گیرتر است و نهایتاً یافتن شاخص توده بدنی شیرازی‌ها تقریباً غیرممکن است. (چرا؟) پس اگر هدف بررسی میزان سلامت وزنی افراد ساکن شهر شیراز باشد تکلیف چیست؟ در اینجا می‌توان بجای بررسی اطلاعات تمام شیرازی‌ها فقط اطلاعات تعدادی از شیرازی‌ها را بررسی کرد. بر مبنای ضرب المثل مشت نمونه خروار است می‌توان اطلاعات همان تعداد شیرازی محدود را به جای تمام شیرازی‌ها در نظر گرفت. آن تعداد محدود شیرازی را نمونه و ساکنان شیراز را جامعه گوییم. توجه داشته باشید که انتخاب نمونه خود آداب مفصلی دارد. هر چه نمونه را با دقت بیشتری انتخاب کنیم اطلاعات بهتر و دقیق‌تری عایدمان می‌شود.

مثال ۲۱.۷. در هریک از موارد نمونه مناسب و جامعه را تعیین کنید.

تعريف ۴.۷. تعريف جامعه یا جمعیت: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شود و هریک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه مینامند.

تعريف ۵.۷. تعريف اندازه یا حجم جامعه تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه یا حجم جامعه گویند. به عنوان مثال، دانشآموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه باشند و هریک از دانشآموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

تعريف ۶.۷. تعريف نمونه بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گویند.

تعريف ۷.۷. تعريف اندازه یا حجم نمونه تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه یا حجم نمونه گویند. به عنوان مثال دانشآموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانشآموزان مدرسه هستند و هریک از دانشآموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می‌شوند.

نمونه باید اولاً تصادفی انتخاب شود به این معنی که هر عضو جامعه شانس حضور در نمونه را داشته باشد و تعداد اعضای نمونه هم باید به درستی انتخاب شود تا بیانگر ویژگی‌های جامعه باشد. مثلاً در یک کلاس ۳۰ نفری می‌توان یک نمونه ۸ نفری انتخاب کرد ولی نمونه ۸ نفری برای یک مدرسه ۵۰۰ نفری نمونه‌ی خوبی به حساب نمی‌آید.

مثال ۲۲.۷. در هر یک از موارد زیر جامعه و نمونه مناسب را تعیین کنید.

۱. تعیین وزن دانشآموزان دبیرستان غزال.

۲. تعیین میزان تحصیلات والدین دانشآموزان شهر شیراز.

۳. تعیین میزان انتظار بیماران در ملاقات با یک پزشک خاص.

۴. بررسی میزان موالید در ماه‌های مختلف سال در استان فارس.

۵. تعیین میزان درآمد مشاغل آزاد در اصناف حاضر در شهر شیراز.

۳.۷ متغیر و انواع آن

در مثال تعیین قد دانش‌اموزان صفت قد از یک محصل به محصل دیگر تغییر می‌کند و لذا بی مورد نیست که آنرا متغیر بنامیم. اعدادی که نشان دهنده‌ی قد هستند را مقادیر متغیر گوییم.

تعريف ۸.۷. متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند.

برخی متغیرها قابل اندازه‌گیری‌اند مثل قد و وزن و ... و برخی غیرقابل اندازه‌گیری مثل رنگ ماشین، کیفیت یک میوه، گروه خونی و براین اساس باید متغیرها را طبقه‌بندی کنیم. جدول زیر انواع متغیرها را نشان می‌دهد.

→ متغیرها	{	کیفی	دارای هیچ ترتیب طبیعی نیست → اسمی
		کمی	دارای نوعی ترتیب طبیعی است → ترتیبی
	{	اگر دو مقدار گرفت بین آنها را نمی‌تواند بگیرد → گسسته	
		اگر دو مقدار گرفت بین آنها را نیز می‌تواند بگیرد → پیوسته	

تعريف ۹.۷. تعريف متغیرهای کمی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، «متغیرهای کمی» گویند. به عنوان مثال تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیرهای کمی‌اند.

تعريف ۱۰.۷. تعريف متغیرهای کیفی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، «متغیرهای کیفی» گویند. به عنوان مثال گروه خونی افراد و پاسخ سؤال «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهای کیفی‌اند.

تعريف ۱۱.۷. تعريف متغیر پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند. به عنوان مثال وزن یک دانش‌آموز می‌تواند ۴۶ کیلوگرم، ۴۷ کیلوگرم یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

تعريف ۱۲.۷. تعريف متغیر گسسته: متغیر گسسته، متغیری است که پیوسته نباشد. به عنوان مثال تعداد فرزندان یک خانواده متغیر گسسته است.

مثال ۲۳.۷. نوع متغیرهای زیر را بررسی کنید.

۱. مراحل رشد یک انسان(نوزادی-کودکی-نوجوانی...).
۲. نژاد افراد (زردپوست-سفیدپوست-سیاهپوست).
۳. رنگ موی افراد.
۴. میزان محصول برنج کامفیروز.
۵. طول عمر یک ترانزیستور.
۶. تعداد نامه های یک صندوق پستی.
۷. میزان تحصیلات افراد.

مثال ۲۴.۷. جدول زیر را کامل کنید.

نوع متغیر	متغیر
	۱- میزان بارندگی برحسب سانتی متر در یک شهر
	۲- نوع بارندگی (باران، برف)
	۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتایی دارند
	۴- میزان دمای هوای
	۵- شدت آلودگی هوای (زیاد، متوسط، کم)
	۶- انواع وضعیت هوای (آفتایی، ابری، بارانی، برفی)
	۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)

تمرین ۱۶.۷. جدول زیر را کامل کنید.

متغیرهای دانش‌آموزان	متغیر کمی	متغیر کیفی	متغیر گستته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	X					
نمره ریاضی نهم						
جنسیت (دختر و پسر)						
قد						
وزن						
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)	X					
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)						X
شاخص توده بدن						

۴.۷ تست‌های فصل هفتم

۱- به متغیری که هر نوع عدد اعشاری یا صحیح را می‌توان بدان نسبت داد، چه می‌گویند؟

- (۱) متغیر کمی (۲) متغیر کمی (۳) متغیر گسته (۴) متغیر پیوسته

۲- کدام یک از متغیرهای زیر کیفی اسمی است؟

- (۱) دمای بدن (۲) گروه خونی (۳) هوش (۴) مقطع تحصیلی

۳- یکی از روش‌های نمونه‌گیری که در آن همه افراد جامعه برای انتخاب شدن شناس یکسانی دارند، نام دارد.

- (۱) نمونه‌گیری مرحله‌ای (۲) نمونه‌گیری تصادفی ساده (۳) نمونه‌گیری خوش‌آمد (۴) نمونه‌گیری گروهی

۴- کدام یک از متغیرهای زیر کیفی است؟

- (۱) حجم (۲) گروه خونی (۳) قد (۴) دما

۵- کدام یک از متغیرهای زیر یک متغیر گسته است؟

- (۱) فواصل بین منازل دانش‌آموزان یک کلاس تا مدرسه (۲) معدل دانش‌آموزان یک کلاس (۳) طول عمر مفید یک یخچال

۶- خانواده‌ای دارای ۵ فرزند می‌باشد به کدام احتمال این خانواده هم فرزند دختر دارد و هم فرزند پسر؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{3}{32}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{1}{32}$

۷- در پرتاب دو تاس احتمال آنکه مجموع ۵ آید با احتمال آنکه مجموع، کدام عدد آید، برابر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۸- پیشامد A زیر مجموعه پیشامد B است بطوری که $P(A \cup B) = \frac{1}{4}$ و $P(A) = \frac{1}{3}$ مقدار P(B) کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۹- یک عدد دو رقمی که ارقام آن ۲ و ۱ و ۰ و غیر تکراری باشند انتخاب می‌کنیم. به کدام احتمال این عدد بر ۳ بخش پذیر است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۰- در پرتاب دو تاس سالم مجموع چه عددی باشد تا مقدار احتمال بیشترین مقدار ممکن شود؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۱- دو تاس با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال کدام پیشامد بیشترین است؟

- (۱) جمع دو عدد ظاهر شده ۶ باشد. (۲) جمع دو عدد ظاهر شده ۱۰ باشد.
 (۳) جمع دو عدد ظاهر شده ۷ باشد. (۴) جمع دو عدد ظاهر شده ۴ باشد.

۱۲- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. به کدام احتمال این خانواده هم دختر دارد و هم پسر؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{15}{16}$

۱۳- یک عدد طبیعی دو رقمی زوج انتخاب می‌کنیم. به کدام احتمال مضرب ۵ است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{5}$

(۲) $\frac{2}{5}$

(۱) $\frac{1}{10}$

۱۴- تمام ترکیبات دو رقمی مجموعه $\{1, 2, 3\} = A$ (بدون تکرار ارقام) روی کارتهای مختلف نوشته (هر ترکیب روی یک کارت) و یک کارت به تصادف از بین آنها انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی روی آن کارت عدد ۲ را مشاهده می‌کنیم؟

(۴) $\frac{5}{8}$

(۳) $\frac{3}{8}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{2}{3}$

۱۵- سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم به کدام احتمال جمع اعداد ظاهر شده ۵ می‌باشد؟

(۴) $\frac{1}{36}$

(۳) $\frac{1}{18}$

(۲) $\frac{1}{108}$

(۱) $\frac{1}{72}$

۱۶- متغیری که فقط اعداد صحیح را بتوان به آن اختصاص داد، چه نام دارد؟

(۴) کیفی

(۳) کمی

(۲) پیوسته

(۱) گسسته

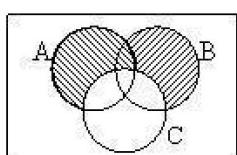
۱۷- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. به کدام احتمال دو عدد ظاهر شده، دو واحد با هم اختلاف دارند؟

(۴) $\frac{2}{9}$

(۳) $\frac{4}{9}$

(۲) $\frac{1}{9}$

(۱) $\frac{1}{9}$



۱۸- اگر C و B و A سه پیشامد در فضای S باشند، شکل مقابله کدام پیشامد را معلوم می‌کند؟

(۱) A و B رخ ندهند اما C رخ ندهد.

(۲) A و C رخ ندهند.

(۳) B و C رخ ندهند.

(۴) A و B رخ ندهند.

۱۹- در پرتاب دو تاس با هم به کدام احتمال شماره‌ی ظاهر شده در تاس اول بزرگتر از شماره‌ی ظاهر شده در تاس دوم است؟

(۴) $\frac{5}{12}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{7}{12}$

۲۰- کدام یک از متغیرهای زیر کیفی است؟

(۱) میزان تحصیلات افراد یک شهر

(۳) میزان بارندگی سالانه‌ی یک شهر

(۲) میزان آلودگی هوای یک شهر

(۴) میزان درآمد سالانه‌ی افراد یک شهر

۲۱- کدام یک از متغیرهای زیر کمی پیوسته است؟

(۱) رنگ اتوبوس‌های شرکت واحد در شهر تهران

(۳) وضعیت تأهل پزشکان یک بیمارستان

(۲) مقاومت یک ترانزیستور

(۴) سن دانشجویان فارغ‌التحصیل یک دانشکده

۲۲- کدام یک از متغیرهای زیر، یک متغیر گسسته محسوب می‌شود؟

(۱) تعداد مکالمات تلفنی یک دیبرستان

(۳) مدت زمان انتظار یک مسافر در ایستگاه مترو

(۲) وزن اوراق امتحانی یک کلاس

(۴) مقدار گوشت مصرفی ماهانه‌ی یک خانوارده

-۲۳- «گنجایش آب یک تانکر» چه نوع متغیری است؟

- ۱) متغیر کیفی اسمی ۲) متغیر کیفی ترتیبی

-۲۴- «گنجایش آب یک تانکر» چه نوع متغیری است؟

- ۱) متغیر کیفی اسمی ۲) متغیر کیفی ترتیبی

-۲۵- کدام یک از متغیرهای زیر گسسته است؟

- ۱) هوش دانش آموزان یک کلاس

- ۳) میزان اضطراب دانش آموزان یک کلاس

-۲۶- کدام یک از متغیرهای زیر، کیفی نیست؟

- ۱) دمای هوا ۲) گروه خونی

-۲۷- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- ۱) داده‌های کیفی فقط می‌توانند پیوسته باشند.

- ۳) متغیرهای اسمی فقط می‌توانند کیفی باشند.

-۲۸- اگر شرکت کنندگان در آزمون سراسری، افراد یک جامعه‌ی آماری در نظر گرفته شوند، کدام یک از صفات این جامعه، یک متغیر پیوسته به شمار می‌رود؟

- ۱) تعداد شرکت کنندگان ۲) تعداد تستهای آزمون

- ۳) طول قد شرکت کنندگان ۴) شماره کارت شرکت کنندگان

-۲۹- «درجه حرارت» جزء کدام دسته از داده‌های زیر است؟

- ۱) اسمی ۲) ترتیبی ۳) پیوسته ۴) گسسته

-۳۰- کلاسی ۳۰ نفر دانش آموز دارد که ۲۰ نفر آن‌ها عضو تیم فوتbal و ۱۵ نفر آن‌ها عضو تیم والیبال هستند و ۳ نفر از دانش آموزان هم در هیچ تیمی بازی نمی‌کنند. اگر ۲ نفر از دانش آموزان این کلاس انتخاب کنیم، احتمال اینکه این دو نفر در هر دو تیم باشند، چقدر است؟

$$\frac{1}{6} \quad \frac{28}{435} \quad \frac{2}{87} \quad \frac{4}{15}$$

-۳۱- سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم پیشامد حداقل دوبار «پشت» آمدن را A و پیشامد آمدن فقط دوبار «رو» را B بنامیم. کدام یک از پیشامدهای زیر رخداده است، در صورتی که بدانیم هر سه بار سکه «رو» آمده است؟

$$A \cap B \quad A \cup B \quad B' - A \quad B - A$$

-۳۲- از کیسه‌هایی که شامل ۴ مهره با شماره‌های ۱ تا ۴ است، دو مهره بی در پی و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مجموع شماره‌های بیرون آمده بزرگ‌تر از ۴ باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{9}{16} \quad \frac{5}{8}$$

-۳۳- از بین سه کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جاگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم با کدام احتمال هر دو کارت همنگ هستند؟

$$\frac{5}{14}(4)$$

$$\frac{3}{7}(3)$$

$$\frac{4}{7}(2)$$

$$\frac{2}{7}(1)$$

-۳۴- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

$$\frac{5}{12}(4)$$

$$\frac{1}{4}(3)$$

$$\frac{5}{18}(1)$$

$$\frac{2}{9}(1)$$

-۳۵- در خانواده‌ای با ۳ فرزند چقدر احتمال دارد حداقل یک فرزند دختر باشد؟

$$\frac{1}{2}(4)$$

$$\frac{3}{8}(3)$$

$$\frac{1}{4}(2)$$

$$\frac{1}{8}(1)$$

-۳۶- در یک فضای نمونه‌ای ۷ عضوی، پیشامدهای A و B دارای ۴ و ۵ عضو و $A \cap B$ دارای سه عضو است. مقدار P(A ∪ B) کدام است؟

$$\frac{5}{7}(4)$$

$$\frac{5}{9}(3)$$

$$\frac{6}{7}(2)$$

$$\frac{7}{9}(1)$$

-۳۷- نوع آلایندگی هوا چگونه متغیری است؟

(۴) کیفی ترتیبی

(۳) کیفی اسمی

(۲) کمی پیوسته

(۱) کمی گسسته

(۴) کمی گسسته

(۳) کمی پیوسته

(۲) کیفی ترتیبی

(۱) کیفی اسمی

-۳۸- میزان تحصیلات افراد یک شهر چه نوع متغیری می‌باشد؟

(۴) کمی گسسته

(۳) کمی پیوسته

(۲) کیفی ترتیبی

(۱) کیفی اسمی

$$\frac{1}{4}(4)$$

$$\frac{1}{3}(3)$$

$$\frac{1}{2}(2)$$

$$\frac{2}{3}(1)$$

-۳۹- دو تاس را با هم می‌اندازیم. چه قدر احتمال دارد که مجموع اعداد رو شده عددی فرد باشد؟

$$\frac{1}{2}(4)$$

$$\frac{1}{3}(3)$$

$$\frac{1}{2}(2)$$

$$\frac{2}{3}(1)$$

-۴۰- در پرتاب سه تاس با هم، چه قدر احتمال دارد که حداقل در دو تاس عدد بزرگ‌تر از ۴ ظاهر شود؟

$$\frac{1}{2}(4)$$

$$\frac{10}{27}(3)$$

$$\frac{2}{9}(2)$$

$$\frac{7}{27}(1)$$

-۴۱- در یک خانواده پنج فرزندی با کدام احتمال خانواده دارای سه دختر متوالی می‌باشد؟

$$\frac{1}{32}(4)$$

$$\frac{3}{32}(3)$$

$$\frac{3}{64}(2)$$

$$\frac{1}{16}(1)$$

-۴۲- در پرتاب دو تاس احتمال این‌که تاس اول عدد زوج و مجموع اعداد رو شده حداقل ۷ باشد چه قدر است؟

$$\frac{1}{4}(4)$$

$$\frac{1}{2}(3)$$

$$\frac{1}{6}(2)$$

$$\frac{5}{12}(1)$$

-۴۳- از بین دانشآموزان سال اول و دوم و سوم دیبرستان به ترتیب ۴ و ۶ و ۵ نفر برای شرکت در آزمون المپیاد ریاضی داوطلب می‌باشند. اگر سه نفر به تصادف از بین آنها انتخاب شوند با کدام احتمال از هر مقطع یک نفر انتخاب شده است؟

$\frac{3}{13}(4)$

$\frac{20}{91}(3)$

$\frac{30}{91}(2)$

$\frac{24}{91}(1)$

-۴۴- در قفسی ۴ کبوتر سفید و ۵ کبوتر سیاه نگهداری می‌شوند. اگر با باز شدن ناگهانی درب قفس ۴ کبوتر به ترتیب خارج شوند با کدام احتمال کبوتر اولی سفید و چهارمی سیاه است؟

$\frac{4}{5}(4)$

$\frac{5}{8}(3)$

$\frac{4}{9}(2)$

$\frac{5}{18}(1)$

-۴۵- از مجموعه اعداد $\{1, 2, \dots, 10\}$ دو عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد دوم ۷ باشد چه قدر است؟

$\frac{1}{10}(4)$

$\frac{9}{10}(3)$

$\frac{90}{91}(2)$

$\frac{1}{9}(1)$

-۴۶- دانشآموزی به ۴ سوال چهار گزینه‌ای به صورت شانسی پاسخ می‌دهد. احتمال این‌که به تمام سوالات پاسخ درست داده باشد چه قدر است؟

$\frac{1}{64}(4)$

$\frac{1}{256}(3)$

$\frac{1}{56}(2)$

$\frac{1}{4}(1)$

-۴۷- خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است که حداقل ۲ تا از آنها پسر هستند. احتمال این‌که هر سه فرزند دختر باشند چه قدر است؟

$\frac{2}{7}(4)$

$\frac{1}{4}(3)$

$\frac{1}{7}(2)$

$\frac{1}{8}(1)$

-۴۸- نوع کدام متغیر تصادفی با بقیه متفاوت است؟

(۱) وضع سواد (باسواد، بی‌سواد)

(۲) گروه خونی

(۳) وضعیت تأهل کارمندان یک مؤسسه

(۴) مراحل زندگی یک انسان

-۴۹- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد رو شده مربع یک عدد طبیعی باشد، کدام است؟

$\frac{9}{36}(4)$

$\frac{8}{36}(3)$

$\frac{7}{36}(2)$

$\frac{1}{6}(1)$

-۵۰- شش نفر که دو نفر آنها برادر یک دیگرند، در یک ردیف می‌ایستند. چه قدر احتمال دارد دو برادر، اول و آخر صفت واقع باشند؟

$\frac{2}{15}(4)$

$\frac{1}{3}(3)$

$\frac{1}{30}(2)$

$\frac{1}{15}(1)$

-۵۱- در پرتاب ۳ تاس، چه قدر احتمال دارد در هر سه تاس یک عدد رو شود؟

$\frac{1}{108}(4)$

$\frac{1}{36}(3)$

$\frac{1}{72}(2)$

$\frac{1}{216}(1)$

۵۲- کدام متغیرها به ترتیب کمی پیوسته و کیفی اسمی هستند؟

- (۱) میزان آلدگی هوا - نوع آلاینده‌ی هوا
 (۲) مراحل رشد
 (۳) نوع آلاینده‌ی هوا - رنگ چشم

۵۳- به مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء که درباره‌ی اعضای آن می‌خواهیم موضوع خاصی را مورد بررسی قرار دهیم، چه می‌گویند؟

- (۱) مدل آماری (۲) نمونه‌ی آماری (۳) جامعه‌ی آماری (۴) مجموعه‌ی آماری

۵۴- متغیرهای کیفی به چه انواعی تقسیم می‌شوند؟

- (۱) فاصله‌ای و ترتیبی (۲) اسمی و ترتیبی (۳) اسمی و نسبی (۴) اسمی و فاصله‌ای

۵۵- متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نبوده و به صورت غیر عددی نشان داده می‌شوند، چه نام دارند؟

- (۱) کمی (۲) کیفی (۳) پیوسته (۴) گسسته

۵۶- مراحل تحصیلی، متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟

- (۱) کمی گسسته (۲) کمی پیوسته (۳) کیفی اسمی (۴) کیفی ترتیبی

۵۷- احتمال این‌که از سه موش انتخاب شده از ۶ موش سفید و ۵ موش سیاه، هر سه موش سفید باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{4}{33}$ (۳) $\frac{5}{32}$ (۴) $\frac{5}{33}$

۵۸- گروه خونی افراد، متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟

- (۱) کمی گسسته (۲) کمی پیوسته (۳) کیفی ترتیبی (۴) کمی گسسته

۵۹- حروف کلمه‌ی ATAXIA را بريده به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گيرند؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۶۰- گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟

- (۱) کیفی- اسمی (۲) کیفی- ترتیبی (۳) کمی- پیوسته (۴) کمی- گسسته

۶۱- اگر اندازه‌ی نمونه برابر اندازه‌ی جامعه باشد، کدام بررسی انجام شده است؟

- (۱) دسته‌بندی (۲) سرشماری (۳) استفاده از متغیر تصادفی (۴) متغیر کیفی

۶۲- در جعبه‌ای ۳ مهره‌ی سفید، ۲ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره همنگ نیستند؟

- (۱) $\frac{28}{45}$ (۲) $\frac{29}{45}$ (۳) $\frac{31}{45}$ (۴) $\frac{32}{45}$

۶۳- با ارقام متمایز ۹, ..., ۱, ۲, ۳, ۴, ۰ به چند طریق می‌توان یک عدد چهار رقمی ساخت. به طوری که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟

- (۱) ۶۴۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۷۸۰ (۴) ۹۶۰

۵.۷ کلید تست های فصل هفتم

۴	۳	۲	۱	- ۳۷	۴	۳	۲	۱	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۴
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۶
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۸
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۶
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۷
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۰
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۱
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۲
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۳
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۴
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۶

کتاب‌نامه

- [۱] ریحانی ابراهیم و دیگران، ریاضی ۱ دوره متوسطه‌ی دوم، انتشارات آموزش و پژوهش تهران ۱۳۹۵
- [۲] شهریاری پرویز، جبر از آغاز تا پایان، انتشارات امیرکبیر، تهران ۱۳۶۳
- [۳] سوالات آزمون‌های سراسری ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۴، انتشارات سازمان سنجش و آموزش کشور، تهران ۱۳۹۴
- [۴] شهریاری پرویز، مسئله‌های دشوار ریاضی، انتشارات انزلی ۱۳۶۷
- [۵] نصیری محمود، ریاضی ۲، انتشارات مبتکران ۱۳۹۴
- [۶] علی‌پور علی‌رضا، آنالیز ترکیبی، انتشارات نشر الگو تهران ۱۳۸۸
- [۷] ایوز هاوارد، تاریخ ریاضیات ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی ۱۳۹۰
- [۸] Micheal Corral, Trigonometry, Schoolcraft College, 2009
- [۹] Titu Andreescu, Mathematical Olympiad Challenges, 2000
- [۱۰] Titu Andreescu, 102 Combinatorial Problems, 2003
- [۱۱] Razvan Gelca and Titu Andreescu, Putnam and Beyond, 2007