



فرهاد و علی رضا در منهن ۳۰ امتیاز

فرهاد و علی رضایک جدول $m \times n$ دارند ($m, n > 1$) و روی آن بازی می کنند. خانه‌ی واقع در سطر i -ام و ستون j -ام جدول را با (i, j) نشان می دهیم. فاصله‌ی دو خانه‌ی (r_1, c_1) و (r_2, c_2) را برابر $|r_1 - r_2| + |c_1 - c_2|$ تعریف می کنیم. برای مثال، در جدول زیر، فاصله‌ی دو خانه‌ی مشخص شده برابر ۵ است:

فرهاد k خانه‌ی a_1, a_2, \dots, a_k از جدول را انتخاب می کند و به علی رضا می گوید؛ سپس علی رضا یک خانه از جدول مانند X را انتخاب می کند و پس از این انتخاب، اعداد b_1, b_2, \dots, b_k را به فرهاد می گوید که b_i فاصله‌ی خانه‌ی X تا خانه‌ی a_i است. در واقع علی رضا به ازای هر خانه‌ی انتخابی فرهاد، فاصله‌ی X را تا آن خانه به فرهاد می گوید. حال باید فرهاد با توجه به این k عدد، خانه‌ی مورد نظر علی رضا (X) را پیدا کند. فرهاد در صورتی می برد که خانه‌ی مورد نظر علی رضا را بفهمد. فرض کنید هر دو نفر به بهترین نحو ممکن بازی می کنند.

اگر k کمترین عددی باشد که فرهاد، روشی برای انتخاب k خانه داشته باشد که ببرد، تعداد روش‌های انتخاب این k خانه که فرهاد با انتخاب آن‌ها، به هدفش می رسد را حساب کنید. توجه کنید تنها با یافتن k ، می توانید ۱۵ نمره بگیرید.

**زبان اعصاب ۵۰ امتیاز**

فرهاد هم‌واره دوست داشت که توابع را به صورت ساده بیان کند. به همین دلیل، امروز به این نتیجه رسید که اکثر توابع را می‌توان با تعدادی تابع اولیه و عمل‌گر ساده پیاده‌سازی کرد. از شما می‌خواهیم که به فرهاد در پیاده‌سازی برخی از این توابع کمک کنید. هم‌چنین فرهاد تنها به توابعی علاقه دارد که ورودی و خروجی آن‌ها، اعدادی صحیح و نامنفی هستند. علی‌رضا به فرهاد توابع ساده‌ی اولیه‌ی زیر را پیشنهاد داده است:

۱. **تابع پوچ:** این تابع تنها یک ورودی می‌گیرد و در خروجی، عدد 0 را تحویل می‌دهد. این تابع را با z نشان می‌دهیم. برای مثال $z(10) = 0$

۲. **تابع افزون‌گر:** این تابع تنها یک ورودی می‌گیرد و اگر عدد n در ورودی به آن داده شود، عدد $n + 1$ را به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. این تابع را با inc نشان می‌دهیم. برای مثال $inc(5) = 6$. فرهاد برای سادگی نمادی نیز تعریف کرده است. او به جای $x + 1$ یا همان $inc(x)$ از نماد x' استفاده می‌کند.

۳. **توابع بازتاب:** این توابع به صورت $P_i^n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ هستند که n عدد از ورودی می‌گیرند و i -امین عدد را تحویل می‌دهند. برای مثال تابع P_3^{10} تابعی است که با گرفتن 10 ورودی، هم‌واره سومین ورودی را برمی‌گرداند. به عنوان مثالی دیگر $P_2^3(0, 10, 8) = 10$ است.

با توابع بالا به تنهایی کار خاصی نمی‌توان کرد. به همین دلیل علی‌رضا عمل‌گرهای زیر را نیز به فرهاد پیشنهاد داده است. فایده‌ی این عمل‌گرها این است که با گرفتن چند تابع می‌توان توابع جدید ساخت.

۱. **عمل‌گر ترکیب:** این عمل‌گر یک تابع اصلی f می‌گیرد. فرض کنید f ، m ورودی بگیرد. سپس این عمل‌گر توابع g_1, g_2, \dots, g_m را نیز از ورودی تحویل می‌گیرد که g_i -ها ورودی‌های یک‌سانی می‌گیرند (مثلن x_1, x_2, \dots, x_n). به

این ترتیب تابع جدید h ساخته می‌شود که $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

را برمی‌گرداند. این عمل‌گر را با

$$CN[f, g_1, g_2, \dots, g_m]$$

نشان می‌دهیم.

۲. **عمل‌گر بازگشت:** این عمل‌گر، دو تابع f, g را می‌گیرد که f تابعی با یک ورودی و g تابعی با سه ورودی است.

سپس این عمل‌گر، تابع بازگشتی h (با دو ورودی) را به صورت زیر می‌سازد:

$$\begin{cases} h(x, 0) = f(x) \\ h(x, y') = g(x, y, h(x, y)) \end{cases}$$



یادآوری می‌کنیم منظور از y' همان $y + 1$ یا $inc(y)$ است. در واقع این عمل‌گر برای محاسبه‌ی $h(x, y')$ مقدار $h(x, y)$ را به صورت بازگشتی محاسبه می‌کند و سپس حاصل $g(x, y, h(x, y))$ را برمی‌گرداند. این عمل‌گر را با $PR[f, g]$ نشان می‌دهیم.

فرهاد که حسابی گیج شده بود، از علی‌رضا خواست تا چند مثال برای او بزند. علی‌رضا دو مثال زیر را برای بهتر فهمیدن فرهاد ارائه کرد:

۱. فرض کنید می‌خواهیم تابع $const_1$ را بسازیم. این تابع باید به ازای هر ورودی x ، هم‌واره عدد 1 را به عنوان خروجی تحویل دهد. قبل از پیاده‌سازی این تابع، به هدف پیاده‌سازی این تابع توجه کنید. توابع و عمل‌گرهای تعریف شده، بسیار ساده و مقدماتی هستند و شما حتی دسترسی مستقیم به یک عدد صحیح ندارید و حتی نمی‌توانید مستقیماً یک عدد صحیح به عنوان ورودی یک تابع بدهید؛ به همین دلیل برای ساختن عدد 1، این تابع را می‌سازیم. پس از پیاده‌سازی این تابع، دسترسی به عدد 1 خواهیم داشت. علی‌رضا روش زیر را برای پیاده‌سازی این تابع، پیشنهاد کرد:

$$const_1 = CN[inc, z]$$

این تابع در واقع با گرفتن عدد x ، ابتدا آن را به تابع z و حاصل یا همان صفر را به تابع inc می‌دهد و در انتها خروجی 1 برگردانده می‌شود.

فرض کنید $const_i$ تابعی باشد که با گرفتن هر عدد x ، عدد ثابت i را برگرداند. علی‌رضا به این نکته توجه کرد که به ازای هر c ثابت، با داشتن تابع $const_{c-1}$ ، تابع $const_c$ را می‌توان به صورت زیر، پیاده‌سازی کرد:

$$const_c = CN[inc, const_{c-1}]$$

سپس با استقرا نتیجه گرفت به ازای هر c ثابت، تابع $const_c$ را می‌توان پیاده‌سازی کرد.

۲. فرض کنید می‌خواهیم تابع جمع (sum) را بسازیم. این تابع باید با گرفتن دو ورودی x, y ، جمع آن‌ها $(x + y)$ را تحویل دهد. علی‌رضا برای پیاده‌سازی این تابع به صورت زیر استدلال کرد:

«در صورتی که $y = 0$ باشد، آن‌گاه حاصل $x + y$ برابر x می‌شود؛ در غیر این صورت، حاصل $x + y$ برابر $sum(x, (y - 1)) + 1$ است. پس می‌توان به صورت بازگشتی، این تابع را پیاده‌سازی کرد و کافی است دو تابع f, g را برای عمل‌گر بازگشت، تعریف کنیم:

- از آنجایی که $sum(x, 0) = x$ ، پس باید تابع f را طوری تعریف کنیم که $f(x) = x$ شود. تابع بازتاب P_1^1 با گرفتن یک ورودی، همان را برمی‌گرداند؛ پس اگر قرار دهیم $f(x) = P_1^1(x)$ ، تابع مطلوب f را ساخته‌ایم. پس

$$f = P_1^1$$

- داریم $sum(x, y') = sum(x, y) + 1$ و باید $sum(x, y') = g(x, y, sum(x, y))$ شود. با استفاده از تابع بازتاب P_3^3 روی ورودی‌های تابع g ، می‌توانیم ورودی سوم آن یا همان $sum(x, y)$ را به دست آوریم. سپس اگر حاصل را به تابع inc بدهیم، مقدار مورد نظر یا همان $sum(x, y')$ ساخته می‌شود؛ پس اگر قرار دهیم

$$g(x, y, sum(x, y)) = inc(P_3^3(x, y, sum(x, y)))$$

تابع مطلوب g را ساخته‌ایم. پس $g = CN[inc, P_3^3]$

پس توابع f, g را برای پیاده‌سازی توسط عمل‌گر بازگشت، ساختیم.»



علی رضا پس از استدلال بالا، پیاده‌سازی زیر را ارائه داد:

$$sum = PR[P_1^1, CN[inc, P_3^3]]$$

حال برای پیاده‌سازی توابع زیر، به فرهاد کمک کنید. توجه کنید فقط باید از توابع و عمل‌گرهای گفته شده، استفاده کنید. برای ساده نوشتن، می‌توانید چند تابع کمکی تعریف کرده و پیاده‌سازی کنید و در پیاده‌سازی تابع خواسته شده، از آن‌ها استفاده کنید. در هر قسمت توضیحی کوتاه (در حد چند جمله) نیز برای پیاده‌سازی خود بدهید.

الف) تابع ضرب (*mul*) را پیاده‌سازی کنید. این تابع باید دو عدد x, y به عنوان ورودی بگیرد و $x \times y$ را به عنوان خروجی تحویل دهد. در واقع باید $mul(x, y) = x \times y$ شود. (۱۰ امتیاز)

ب) تابع *poly* را پیاده‌سازی کنید. این تابع باید یک عدد x به عنوان ورودی بگیرد و $x^2 + x + 2$ را به عنوان خروجی تحویل دهد. در واقع باید $poly(x) = x^2 + x + 2$ شود. (۱۰ امتیاز)

پ) تابع فاکتوریل (*fact*) را پیاده‌سازی کنید. این تابع باید عدد n را به عنوان ورودی بگیرد و $n!$ را به عنوان خروجی تحویل دهد. در واقع باید $fact(n) = n!$ شود. (۱۰ امتیاز)

ت) تابع مینیمم (*min*) را پیاده‌سازی کنید. این تابع باید عدد x, y را به عنوان ورودی بگیرد و عدد کوچک‌تر را از میان دو عدد x, y تحویل دهد. برای مثال اگر 3,4 به عنوان ورودی به این تابع داده شوند، باید عدد 3 و اگر 7,7 داده شوند، باید عدد 7 به عنوان خروجی داده شود. (۲۰ امتیاز)



این قسمت محل سرنویس است و نباید در آن چیزی نوشته شود

توپ‌های بهروز ۳۵ امتیاز

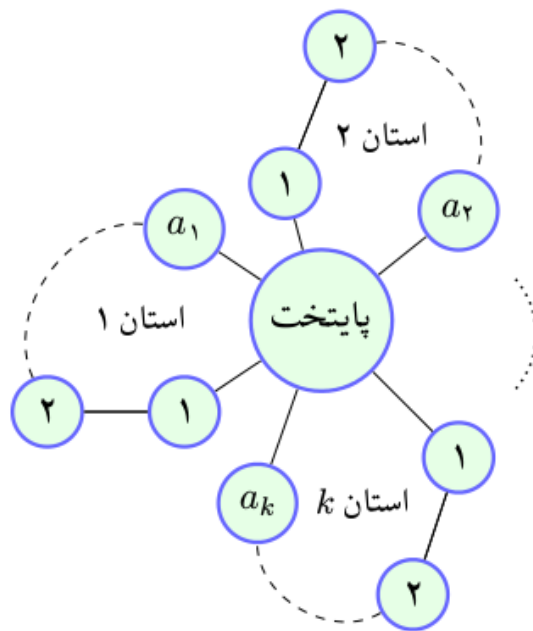
بهروز b جعبه و n نوع توپ دارد ($b \geq n$). در هر جعبه، تعدادی توپ وجود دارد. توجه کنید یک نوع توپ می‌تواند در چند جعبه وجود داشته باشد. می‌دانیم هر n جعبه‌ای را در نظر بگیریم، می‌توان از هر کدام، یک توپ انتخاب کرد؛ طوری که هیچ دو توپی از n توپ انتخاب شده، هم‌نوع نباشند. فرض کنید مجموع تعداد توپ‌های جعبه‌ها s باشد. کمینه‌ی ممکن s را بیابید (در واقع شما باید یک s پیدا کنید که حالتی با s توپ داشته باشیم؛ ولی هیچ حالتی با $s - 1$ توپ وجود نداشته باشد).



بمب‌گذاری واس‌اوناس! ۶۵ امتیاز

در یک دنیا، هر کشور تعدادی شهر دارد و بین هر دو شهر، یا جاده‌ی مستقیم دوطرفه وجود دارد یا وجود ندارد. دو شهر را **مجاور** می‌گوییم، اگر با جاده‌ی مستقیم به هم وصل باشند. می‌دانیم از هر شهر می‌توان با طی کردن تعدادی جاده، به هر شهر دیگر رسید. **فاصله‌ی** بین دو شهر را کم‌ترین تعداد جاده‌هایی در نظر می‌گیریم که برای رفتن از یکی از این دو شهر به دیگری باید طی کرد.

الف) علی‌رضا و فرهاد، در کشور **واس‌ماس** زندگی می‌کنند. این کشور از یک پایتخت و k استان با شماره‌های $1, 2, \dots, k$ تشکیل شده است. استان i ، a_i شهر با شماره‌های $1, 2, \dots, a_i$ دارد. در هر استان i ، شهرهای 1 و 2 به هم، شهرهای 2 و 3 به هم، ... و شهرهای 1 و $a_i - 1$ و a_i به هم جاده دارند. هم‌چنین در هر استان i ، شهرهای 1 و a_i به پایتخت جاده دارند. در واقع جاده‌های این کشور مانند شکل زیر است:



یک تروریست در یکی از شهرهای این کشور، بمب‌گذاری کرده است. علی‌رضا و فرهاد که به تازگی پلیس شده‌اند، برای پیدا کردن شهر بمب‌گذاری شده، مأمور شده‌اند. آن‌ها یک دست‌گاه بمب‌یاب دارند. اگر در شهری مانند T این دست‌گاه را استفاده کنند، چنان‌چه شهر T بمب‌گذاری شده باشد، دست‌گاه به ما می‌گوید و اگر شهر T بمب‌گذاری نشده باشد، دست‌گاه در میان شهرهای مجاور T ، شهری را نشان می‌دهد که کم‌ترین فاصله را با شهر بمب‌گذاری شده دارد (اگر چند شهر با این خاصیت وجود داشت، دست‌گاه به طور تصادفی یکی از آن‌ها را نشان می‌دهد). استفاده از این دست‌گاه، بسیار هزینه‌بر است؛ پس علی‌رضا و فرهاد می‌خواهند با کم‌ترین تعداد استفاده از دست‌گاه، شهر بمب‌گذاری شده را پیدا کنند. کم‌ترین تعداد دفعاتی که آن‌ها باید از دست‌گاه استفاده کنند تا بتوانند بمب را پیدا کنند، چقدر است؟ پاسخ را بر حسب اعداد a_1, a_2, \dots, a_k بیان کنید. (۱۰ امتیاز)



ب) اتفاق ناگوار بمب‌گذاری، در کشور ماس‌ماس نیز رخ داد. پادشاه کشور ماس‌ماس تصمیم گرفته است از گروهی زبده برای خنثی کردن این بمب استفاده کند. پس از عمل کرد فوق‌العاده‌ی علی‌رضا و فرهاد در خنثی کردن بمب کشور واس‌ماس، پادشاه کشور ماس‌ماس تصمیم گرفت مأموریت را به این دو نفر و دست‌گاه عجیب‌شان بسپارد. پادشاه کشور ماس‌ماس به هر شهر، یک عدد نسبت داده است و آن عدد برابر با فاصله‌ی دورترین شهر کشور تا شهر مذکور است. علی‌رضا و فرهاد، اطلاعاتی در مورد تعداد شهرها و نحوه‌ی جاده‌کشی کشور ماس‌ماس ندارند. آن‌ها فقط می‌دانند کم‌ترین عدد نسبت داده شده به شهرها، r است. علی‌رضا و فرهاد ادعا می‌کنند پس از گرفتن نقشه‌ی جاده‌کشی کشور، خواهند توانست با حداکثر $f(r)$ بار استفاده از دست‌گاه، شهر بمب‌گذاری شده را پیدا کنند. پادشاه نیز پس از شنیدن این حرف، نقشه را به آن‌ها می‌دهد. با توجه به این که فرهاد و علی‌رضا هنگام بیان ادعا، تعداد شهرها و نقشه‌ی جاده‌کشی آن‌ها را نمی‌دانند، کمینه‌ی $f(r)$ را بیابید. (۲۵ امتیاز)

ج) عصبانیت بمب‌گذاران پس از خنثی شدن دو اقدام قبلی، دو چندان شد و آن‌ها این بار تصمیم گرفتند در کشور دوست و هم‌سایه (باس‌ماس) بمب‌گذاری کنند! این کشور n شهر دارد. ثابت کنید هر گونه شهرهای این کشور جاده‌کشی شده باشند، علی‌رضا و فرهاد می‌توانند با کم‌تر از $1 + [lg(n)]$ بار استفاده از دست‌گاه، شهر بمب‌گذاری شده را پیدا کنند. توجه: منظور از $lg(n)$ ، لگاریتم n در مبنای ۲ است. برای مثال $lg(1024) = 10$ و $lg(20) = 4.32192 \dots$ است. هم‌چنین منظور از $[x]$ ، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نیست. برای مثال $[2.3] = 2$ و $[5] = 5$ است. (۳۰ امتیاز)