



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

Continued Fraction

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$\log(1+x) = \frac{x}{1 + \frac{1^2 x}{2 + \frac{1^2 x}{3 + \frac{2^2 x}{4 + \frac{2^2 x}{5 + \dots}}}}}$$

$$\tanh x = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5 + \frac{x^2}{7 + \dots}}}}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots}}}}$$

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}}$$

هما رودینی
کیانوش شکری



۱. الگوریتم اقلیدس و ارتباط آن با کسر مسلسل

This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

۲. عدد π و تقریب های آن به کمک کسر مسلسل

۳. کسر مسلسل مربوط به ریشه های دوم

۴. معادله پل و ارتباط آن با کسر مسلسل



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

کسر مسلسل

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message



hanging gardens



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

Egypt (1700 BC)

Great Pyramid of Giza





This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

Greece (308544)



Acropolis



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

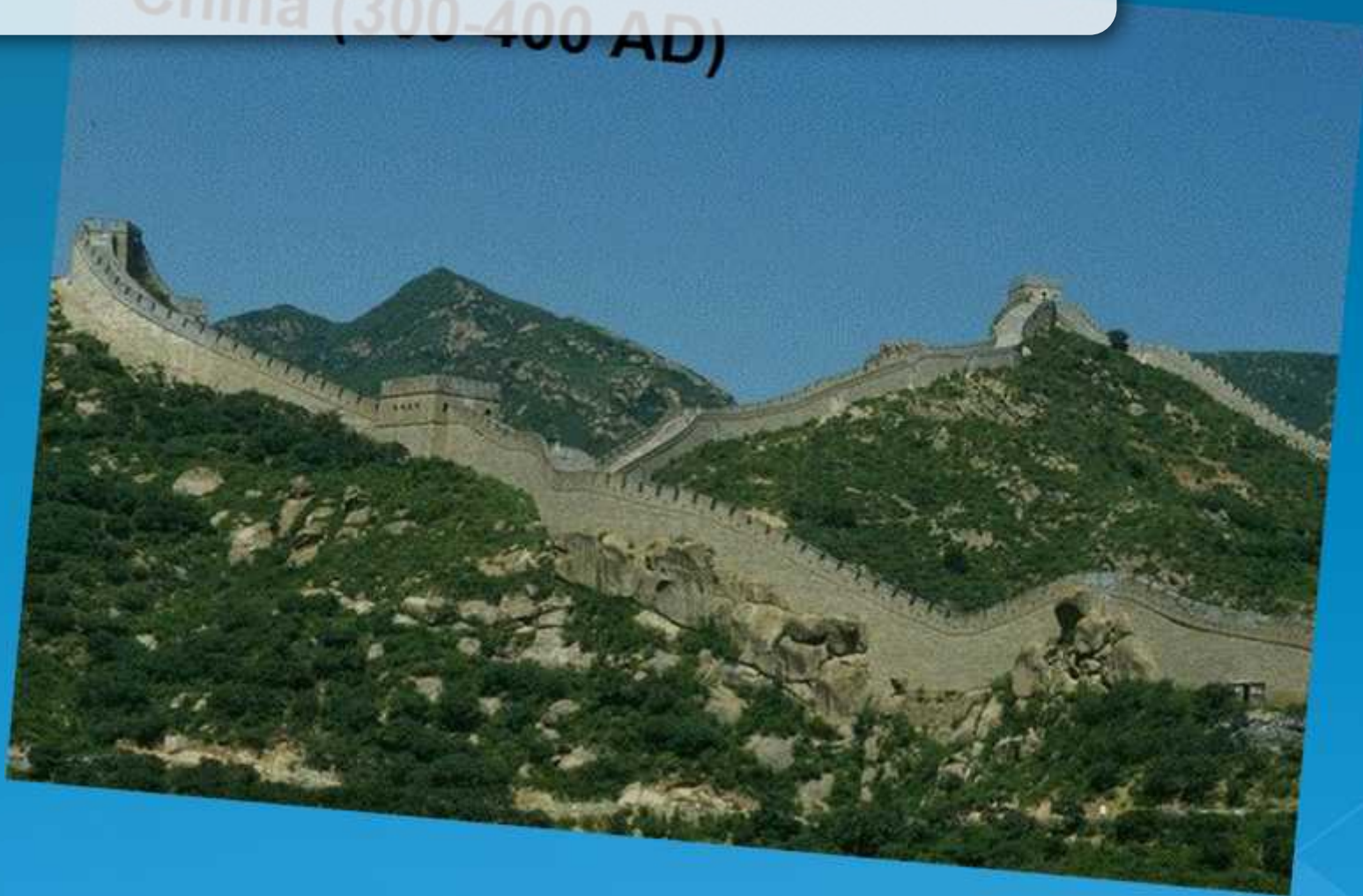
Taj mahal





This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

China (300-400 AD)



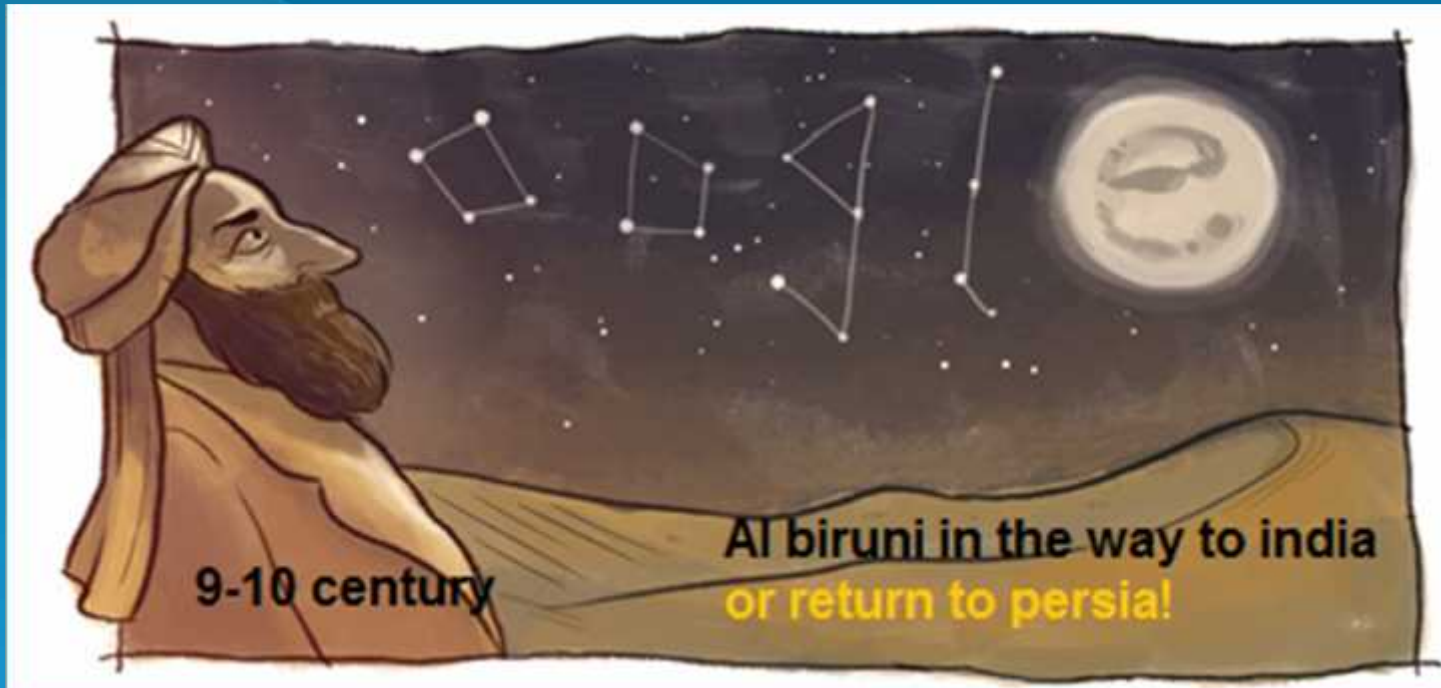


This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message





This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message





This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message



9-10 century



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message



nice, good idea!

that's enough! sit and rest ...

قبل از قرن 16 ...

The English Word



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message





This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message



Italy 16 century



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message



Bombelli (1526- 1572)



Cataldi (1548- 1626)



Brouncker (1620- 1684)



John Wallis (1616- 1703)



Christiaan Huygens
(1629- 1695)



Leonhard Euler (1707- 1783)



Lambert (1728- 1777)



Lagrange (1736- 1813)

$$a_2 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{a_4 + \dots}}}$$

$$c_1 = \frac{a_1}{1}, c_2 = a_1 + \frac{b_1}{a_2} \quad c_3 = a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3}} = \frac{a_3 b_1 + a_1 a_2 a_3 + a_1 b_2}{a_2 a_3 + b_2}$$

به هر c_i ، امین جمله همگرایی کسر مسلسل می گویند .
اثبات همگرایی توسط جان والیس در سال ۱۶۵۵ ارایه شد و در همان
موقع نام کسر مسلسل بیان شد.





This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

الگوریتم اقلیدس و گسترش سلسله

● اقلیدس (۳۰۶، ۲۸۳) قبل از میلاد

در مقاله ۱۰، قضیه ۳ شیوه ای هندسی برای پیدا کردن ب، م، م دو عدد
ارایه می دهد.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message





آوردن ب.م.م دو عدد ۶۷ و ۲۹ به روش اقلیدس اینگونه عمل

This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

برای به دست

میکردیم :

$$67 = 2 \times 29 + 9 \quad \frac{67}{29} = \frac{2 \times 29 + 9}{29} = 2 + \frac{9}{29} = 2 + \frac{1}{\frac{29}{9}}$$

$$29 = 3 \times 9 + 2 \quad \frac{29}{9} = \frac{3 \times 9 + 2}{9} = 3 + \frac{2}{9} = 3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}$$

$$9 = 4 \times 2 + 1 \quad \frac{9}{2} = \frac{4 \times 2 + 1}{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{\frac{2}{1}}$$

$$2 = 2 \times 1 + 0 \quad \frac{2}{1} = \frac{2 \times 1 + 0}{1} = 2$$

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}$$

اقلیدس بدون اینکه بداند ، شیوه ای برای تبدیل

اعداد گویا به کسر مسلسل ارایه داده بود.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

● اویلر در سال ۱۷۳۶ اثبات کرد:

- هر عدد گویا دارای کسر متناهی است.

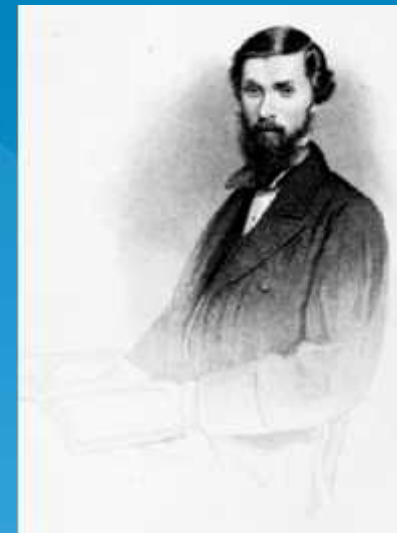
- هر عدد گنگ دارای کسر مسلسل نا متناهی است.



در مسایلی که در لوح های بابلی ها به جا مانده (۱۸۰۰، ۱۶۰۰ قبل از میلاد) π را عدد ۳ تقریب می زدند.



در پاپيروس راین (۱۷۸۸، ۱۵۸۰ قبل از میلاد)، در ۴ مساله مساحت دایره ای با قطر ۹ و در یک مساله مساحت دایره ای با قطر ۱۰ حساب شده است ، با مقایسه آنها با $k_A = kr^2$ تقریبا $3/1605$ به دست می آید.





This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message



*"Give me a lever
long enough and a
fulcrum on which
to place it, and I
shall move the
world. "*

Archimedes





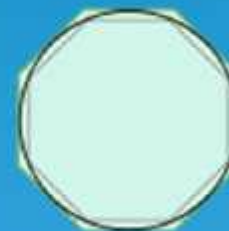
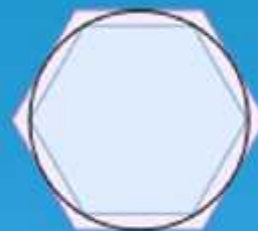
nitro

This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

ارشمیدس (۲۸۷ قبل از میلاد)

- با کار با چند ضلعی های منتظم محیطی و محاطی
- و دو برابر کردن پیوسته تعداد
- ضلع ها، به ۹۶ ضلعی رسید.

$$3 + \frac{1}{7} > \pi > 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{10}$$





This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message



و تنها خط کش و پرگار
برای رسم نازل شد



ببین شاید بشه چیزای دیگه
هم امتحان کرد!





This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

فرانسوا ویت فرانسوی در ۱۵۷۹ از π تا ۳۹۵۲۱۶ رقم اعشار تقریب زد.

لودولف آلمانی در ۱۶۱۰ به کمک 2^{62} ضلعی π را تا ۳۵ رقم اعشار تقریب زد.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

ستاره شناس

که به ترتیب دومین و چهارمین جمله کسر مسلسل

$$\frac{355}{113} \frac{22}{7}$$



π هستند ، استفاده می کرد.

برهماگوپتا (۵۹۸،۶۶۵ میلادی) $\sqrt{10}$ به عنوان π کار می برد.

در ۱۶۵۸ ویلیام برونکر کسر مسلسل π به دست آورد.



$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}}$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

● هایگن (۱۶۲۹-۱۶۹۵) در سال ۱۶۸۲ به کمک رابطه ریبر-کسیر

مسلل π را به دست آورد.

$$T'_n = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi < T_n = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}}$$





هر فهرستی که شامل سه تن از بزرگترین ریاضی دانان تاریخ بشر باشد به طور قطع نام ارشمیدس را شامل می شود.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

کسر مسلسل ریشه های دوم

اولین قاعده برای تقریب ریشه های دوم ، در لوحی مربوط به بابلی ها (۲۱۲۳، ۲۰۸۱ قبل از میلاد) پیدا شده است. این لوح مربوط به پادشاه حمورابی است و در موزه برلین نگهداری می شود و به صورت زیر می باشد.

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$$

بزرگترین عدد صحیح است که $a^2 \leq A$

● برهماگوپتا (۵۹۸،۶۶۵ میلادی) $\sqrt{10}$ به عنوان π کار می برد.

● به نظر می رسد از فرمول زیر استفاده کرده است.



$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + 1}$$

$$a = 3, r = 1 \quad \sqrt{9 + 1} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

● نوشته بخشعلی (Bakhshali manuscript) یک نوشته هندی در حدود ۲۰۰ تا ۴۰۰ میلادی است. توسط یک کشاورز در سال ۱۸۸۱ در روستای بخشعلی نزدیک پیشاور پیدا شده و حاوی تقریب های زیر بوده است.



$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}}$$

کوشیار ابن لبان (کوشیار کیلانی) (۱۰۱۹، ۱۱۷۱ میلادی در کیلان) ●

$$A = a^2 + r, a_1 = a + \frac{r}{2a}, \frac{A}{a_1} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{a}}$$

● در کتاب تلخیص (talkhis) که خلاصه ای از کارهای از دست رفته الحصار (۱۲۶۲)، ابن البنا (۱۲۵۶، ۱۳۲۱) بیان میکند:



$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}}$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

دانشمند اسپانیایی عربی، ال کلسادی (arkalsadi) (فون)
۱۴۸۶ میلادی) در کتاب

(raising of the veil of the science of Gubar) (فون)
تقریب زیر را بیان کرد.

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}$$

عرب ها ریاضی را (که در اصل ریشه یونانی دارد)، به واسطه ایرانی
ها، از معلمان هندی خود آموختند.

How Greeek science passed to the arabs.
DE LACY O'LEARY



© رافایل بامبلی (۱۵۷۲، ۱۵۲۶) مهندس و معمار، علاقه به کار با

This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

کسر مسلسل

که به کسر مسلسل علاقه نشان داده و آن را در جهت ساختار
بخشیدن مطالعه کرده است.

© او نشان داد: $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + x$, $a^2 + r = a^2 + 2ax + x^2$

با صرف نظر از x^2 داریم: $r = 2ax$, $x = \frac{r}{2a}$

با ادامه این روند:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \dots}}}$$

$$\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 4} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \dots}}$$

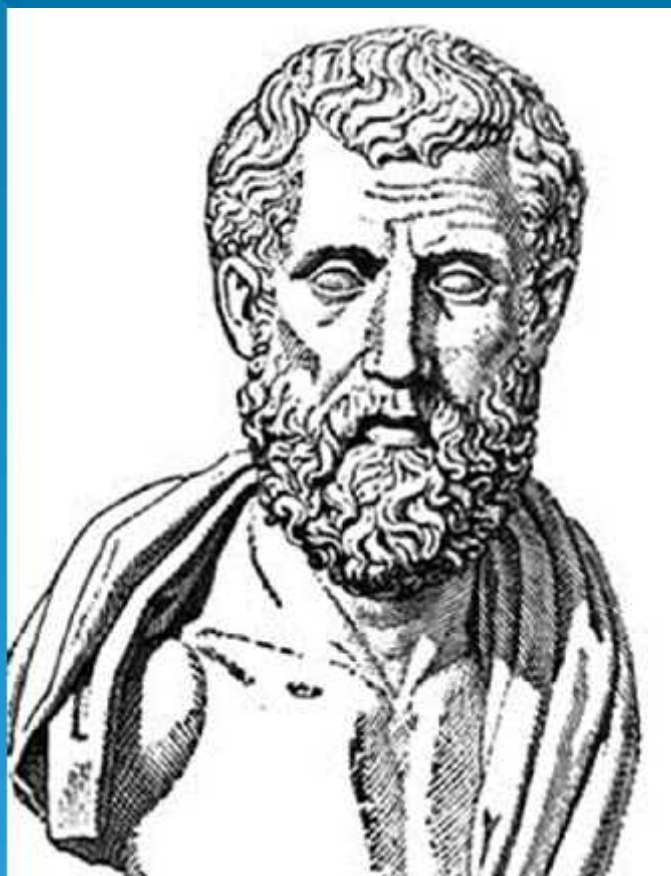




This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

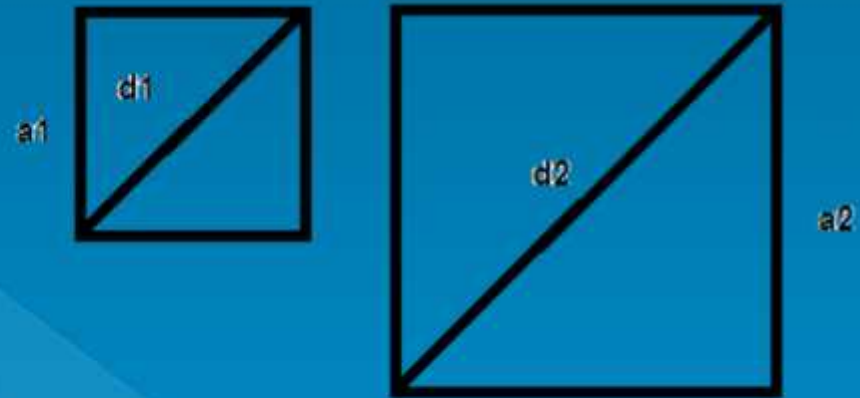
معادله پل و تقریب رینولدز دوم

تئون از سمیرنا (۱۸۰، ۱۳۰) ●



مربع زیر را در نظر می گیریم

$$a_2 = a_1 + d_1$$



$$d_2 = \sqrt{2}(a_1 + d_1)$$

$$= \sqrt{2}a_1 + \sqrt{2}d_1 \xrightarrow{\sqrt{2}a_1 = d_1} d_2 = 2a_1 + d_1$$

$$a_n = a_{n-1} + d_{n-1} \quad (1)$$

$$d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1} \quad (2)$$

اگر ادامه دهیم:



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

ادامه می دهد:

معادله اول را در آن ضرب می کند و معادله دوم را از آن کم می کند
حاصل را در معادله دوم جایگذاری می کند .

$$d_{n+1} = 2d_n + d_{n-1}$$

به دست می آید:

سپس معادله اول و دوم را از هم کم می کند و حاصل را در اولی
جایگذاری می کند.

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$$

نهایتاً

سپس $a_1 = 1, d_1 = 1, n = 1$ پس $d_2 = 2 + 1 = 3, a_2 = 1 + 1 = 2$
داریم:

$$d_n: 1, 3, 7, 17, \dots$$

$$a_n: 1, 2, 5, 12, \dots$$

$$\frac{d_n}{a_n} = \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots \xrightarrow{\text{همگرا}} \sqrt{2}$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

تئون در ادامه بیان می کند:

$$d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1}, d_n^2 = 4a_{n-1}^2 + 4a_{n-1}d_{n-1} + d_{n-1}^2$$

$$a_n = a_{n-1} + d_{n-1}, 2a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 4a_{n-1}d_{n-1} + 2d_{n-1}^2$$

$$d_n^2 - 2a_n^2 = -(d_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2)$$

$$d_0 = 1, a_0 = 0, d_0^2 - 2a_0^2 = 1$$

$$d_n^2 - 2a_n^2 = (-1)^n$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

Constantine NEWS

۱۰ آگوست ۱۷۳۲ به طور اشتباه در نامه ای که اوایل
را به پل (۱۸۶۱-۱۸۶۳) نسبت می دهد.

صفحه دانشمندان

CONSTANTINE
NEWS

گزیده خبرها:

انیشترین راز های بهشت و جهنم را کشف کرد!
در گیری های نیوتن و لایبنیتز همچنان ادامه دارد.
اوایلر به طور اشتباه معادله ای را به پل نسبت داد.
دو عنصر جدید مندلیف!



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

● در سال ۱۷۶۵، اوایلر (۱۷۰۷، ۱۷۸۳) به مطالعه معادله پل پرداخت.

او را به کسر مسلسل تبدیل کرد، شیوه‌ای که امروزه مرسوم

است.

$$\sqrt{30} \rightarrow \sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36}$$

$$\sqrt{30} = 5 + \frac{1}{x_1}, \sqrt{30} - 5 = \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{30} - 5} \cdot \frac{\sqrt{30} + 5}{\sqrt{30} + 5} = \frac{\sqrt{30} + 5}{5}$$

$$\approx 2.095, x_1 = 2 + \frac{1}{x_2}$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

$$\frac{\sqrt{30} + 5}{5} = 2 + \frac{1}{x_2}, \quad \frac{\sqrt{30} + 5}{5} - 2 =$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{30} - 5}{5}$$

$$x_2 = \frac{5}{\sqrt{30} - 5} = \sqrt{30} + 5 = 10.477,$$

$$x_2 = 10 + \frac{1}{x_3}$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

$$\sqrt{29} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \dots}}}}$$

● اوپلر متوجه شد: هر کسر مسلسل ریشه دوم، حالت دوری و قرینه دارد.

$$\sqrt{29} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \dots}}}}}$$

● او فهمید آخرین عدد از هر دور، دو برابر اولین عددی است که در کسر استفاده می شود.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message





مرحله اول شعبده بازی: اوایلر معادله را به تماشاچیان نشان می دهد

This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

$$x^2 - 30y^2 = 1$$

مرحله دوم شعبده بازی: او به کمک ابزاری که فقط خودش از آن سر

در می آورد، کار غیر معمولی انجام می دهد.

یک دور از کسر مسلسل را در نظر می گیرد

کسر را تا قبل از آخرین جمله ی دور حساب می کند.

$$\sqrt{30} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{10}}$$

$$5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

مرحله سوم شعبده بازی: (The Prestige)

$$x = 11, y = 2$$

$$11^2 - 30(2)^2 = 1$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

● اولر اثبات کرد :

● هر كسر مسلسل دوری : نشان دهنده ریشه يك معادله درجه دو است.

● لاگرانژ (۱۷۳۶، ۱۸۱۳) : در سال ۱۷۶۹ عكس قضيه اولر را اثبات کرد. یعنی هر ریشه معادله درجه دو ، دارای كسر مسلسل دوری است. پس به طور کلی :

$$\sqrt{N} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{2a_1}}}}}}}$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

کسرهاى مسلسل ديڤنى

۱. اويلر (۱۷۶۸) ●

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}$$

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots}}}}$$

۲. لمبرت (۱۷۷۰) ●

$$\tanh x = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5 + \frac{x^2}{7 + \dots}}}}$$

۳. گاوس (۱۸۱۲) ●



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

۴. لمبرت (۱۷۷۰)، لاگرانژ (۱۷۷۶)

$$|x| < 1$$

$$1 + \frac{1^2 x}{2 + \frac{1^2 x}{3 + \frac{2^2 x}{4 + \frac{2^2 x}{5 + \dots}}}}$$

۵. ...

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

۶. لاپلاس (۱۸۰۵)، لژاندر (۱۸۲۶)

$$\int_0^x e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\frac{1}{2} e^{-x^2}}{x + \frac{1}{2x + \frac{2}{3x + \frac{3}{2x + \dots}}}} \quad x > 0$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

۷. رامانوجان (۱۸۸۷-۱۹۲۰)

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{1 + \left(5^{3/4} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{5/2} - 1 \right)^{1/5}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) e^{2\pi/\sqrt{5}} = \frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1 + \dots}}}}$$

Srinivasa Ramanujan Godfray Harold Hardy





This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

منابع: ●

1. Claude_Brezinski, History of Continued Fractions and Padé Approximants

2.C. D. OLDS, CONTINUED FRACTIONS

۳. ریاضی دانان نامی، اریک تمپل بل، ترجمه: حسن صفاری، انتشارات
امیر کبیر، ۱۳۹۱

۴. تاریخ محاسبه، هارولد دیویس، ترجمه: مهران اخباری فر، انتشارات
علمی فرهنگی، ۱۳۸۴

۵. دفاعیه یک ریاضیدان، گادفری هرولد هاردی، ترجمه سیامک
کازمی، انتشارات علمی فرهنگی، ۱۳۸۵ ●