مهندس انصاری   ریاضی II

1)

حاصل حدهای زیر را درصورت وجود بدست آورید

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

I) مسیر اول محور xها: محور xها $\begin{cases} x\to 0 \\ y=0 \end{cases} \to \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x^2+0} = 1$

II) مسیر دوم محور yها: $\begin{cases} x=0 \\ y\to 0 \end{cases} \to \lim_{y\to 0} \frac{0-y^2}{0+y^2} = \lim \frac{-y^2}{y^2} = -1$

چون از دو مسیر به دو جواب یکسان نرسیدیم

پس حد وجود ندارد

در کلیه مسائل زیر نگرش فوق کمکی به حل سوال نمی کند زیرا هر دو مسیر محور x و محور y به جواب یکسان صفر منتهی می شود.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ (x,y)\to(0,0) \end{cases} \to \begin{cases} r\to 0 \\ \forall\theta \end{cases}$$

به ازاء هر θ ، r به سمت صفر میل می کند

$$\to \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \frac{r\cos\theta\cdot r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \frac{r^2\sin\theta\cdot\cos\theta}{r^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \cos\theta\cdot\sin\theta$$

حد ندارد چون به ازای θهای مختلف جوابهای مختلف بدست می آید

معیار کلی در این حالت هر وقت جواب برحسب θ بدست آمد تابع حد ندارد

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{r^2}} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r}$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} r\cos\theta\cdot\sin\theta = 0 \times (\text{کران دار}) = 0$$

II (۲

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{0}{0} \to \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \frac{r^3\cos^2\theta\,\sin\theta}{r^4\cos^4\theta + r^2\sin^2\theta}$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} r \times \frac{\cos^2\theta.\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \underbrace{\sin^2\theta}} = 0 \times (\ ?\ )$$

اگر صفر شود ریشه ندارد

قطبی کمک نمی‌کند

با حرکت روی مسیر $y = mx^2$ که البته از نقطه $(0,0)$ می‌گذرد داریم

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(mx^2)}{x^4+(mx^2)^2} = \lim \frac{mx^4}{(1+m^2)x^4} = \frac{m}{1+m^2} \to \text{حد ندارد}$$

به ازای مقادیر مختلف m جوابهای متفاوت بدست می‌آید

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x+y} = \frac{0}{0} \to \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \frac{r^2\cos^2\theta}{r\cos\theta + r\sin\theta} = \lim r * \frac{\cos^2\theta}{\underbrace{\cos\theta+\sin\theta}} = 0 * (\ ?\ )$$

به ازای $-\frac{\pi}{4}$ صفر می‌شود

قطبی کمک نمی‌کند

پس با مسیر $y = mx^2 - x$ که البته از نقطه $(0,0)$ عبور می‌کند داریم

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x+mx^2-x} = \lim \frac{x^2}{mx^2} = \frac{1}{m} \to \text{حد ندارد}$$

اگر از اول بر روی یک مسیر امتحان کنیم ممکن است جواب (حد ندارد) بدست بیاید ولی از قطبی حد حل شود و جواب داشته باشد

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

پس همیشه اول قطبی را امتحان می‌کنیم

پس اول قطبی

روی مسیر $y^2 = mx^3 - x^2$

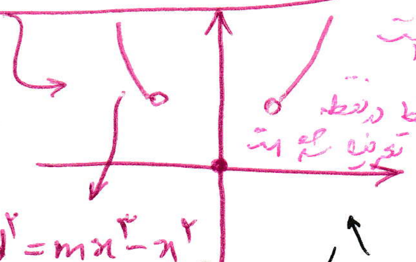
$$\cancel{\lim \frac{x^3}{x^2+mx^3-x^2}}$$

$$\lim \frac{x^3}{mx^3} = \frac{1}{m} \to \text{حد ندارد}$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} r \times \cos^3\theta = 0 * (\text{کران‌دار}) = 0$$

جواب حد



منظور این است که تابع فقط در نقطه (صفر و صفر) تعریف شده است

ولی اگر اول قطبی رفتیم و نتیجه نگرفتیم از هر مسیری که انتخاب کردیم حتی اگر این شکل را داشته باشد به جواب می‌رسیم

مثال:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad \xrightarrow{(0,0)} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

اگر مشتق را در نقطه‌ای خواست که آن نقطه در دامنهٔ تابع نیست و با یک ضابطهٔ جداگانه به تابع اضافه کرده

باید از فرمولهای مشتق حدی استفاده کنیم

و قوانین مشتق‌گیری قبلی را فراموش کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

$$\xrightarrow{(0,0)}\ \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0-\Delta y^2}{0+\Delta y}-0}{\Delta y}=\lim\frac{-\Delta y^2}{\Delta y^2}=\boxed{-1}$$

مثال:

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$

با تغییر متغیر $z=u\times e^{x+y}$ که در آن u تابعی بر حسب x و y می‌باشد پس از بازنویسی چگونه خواهد بود

۱) $u_x=0$

۲) $u_y=0$

۳) $u_{xy}=0$

۴) $u_x+u_{xy}+u_y=0$

$$(1)\quad \frac{\partial z}{\partial x}=u_x\cdot e^{x+y}+1\cdot e^{x+y}\cdot u$$

$$(2)\quad \frac{\partial z}{\partial y}=u_y\cdot e^{x+y}+1\cdot e^{x+y}\cdot u$$

$$(3)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=u_{xy}\cdot e^{x+y}+1\cdot e^{x+y}\cdot u_x+1\cdot e^{x+y}\cdot u+u_y\cdot e^{x+y}$$

۱، ۲، ۳، معادله اصلی $\longrightarrow$ $\boxed{u_{xy}\cdot e^{x+y}=0}\ \longrightarrow\ \begin{cases}u_{xy}=0 \longrightarrow \text{گزینه } ۳\\ e^{x+y}=0 \quad \text{غیرممکن}\end{cases}$

$$u_{xy}\cdot e^{x+y}+\cancel{e^{x+y}\cdot u_x}+e^{x+y}\cdot u+\cancel{u_y\cdot e^{x+y}}$$

$$\cancel{-u_x\cdot e^{x+y}}-e^{x+y}\cdot u-\cancel{u_y\cdot e^{x+y}}-e^{x+y}\cdot u+z=0$$

$$u_{xy}\cdot e^{x+y}\underbrace{-e^{x+y}\cdot u+z}_{0}=0\ \longrightarrow\ \boxed{u_{xy}\cdot e^{x+y}=0}$$

اگر x و y توابعی برحسب متغیرهای مستقل u, v باشند و داشته باشیم

$$\begin{cases} u = x^3 + y^2 \\ v = x^2 y \end{cases}$$

در نقطه (۱و۱) حاصل $\frac{\partial x}{\partial u}$ کدام است؟

$\frac{\partial}{\partial u}$

$$\begin{cases} 1 = 3x^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + 2y \times \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 = 2xy \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + x^2 \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$$

(۱و۱)

$$\begin{cases} 1 = 3 \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + 2 \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 = 2 \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$$

$$1 = -\frac{\partial x}{\partial u} \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = -1$$

$$v = x^2 y \to v = f^2(u,v) \cdot y$$

$$x = f(u,v)$$

$$0 = 2 * f(u,v) \cdot f'_u * y$$

$$y = g(u,v)$$

$$v = x^2 \cdot g(u,v)$$

$$0 = x^2 \cdot g'_u$$

مثال: اگر

$$\begin{cases} u = x^2 - 3y \\ v = xy \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

ژاکوبین u, v نسبت به (x و y)

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -3 \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 3y$$

در این تبدیل چه شرطی باشد که بتوان x و y را برحسب u و v نوشت ← باید ژاکوبین مخالف صفر باشد

یعنی $2x^2 + 3y \neq 0 \to \boxed{2x^2 \neq -3y} \to$ این عبارت یکی از گزینه‌هاست

اگر $z = x f(x+y^2)$ حاصل معادله $2y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ را بدست آورید

همه گزینه‌ها برحسب x و y و z است

$$f(x+y^2) = \frac{z}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 * f(x+y^2) + 1 \cdot f'(x+y^2) \cdot x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot 2y f'(x+y^2)$$

$$2y \cdot \left(f(x+y^2) + x \cdot f'(x+y^2) \right) - 2xy f'(x+y^2)$$

$$2y f(x+y^2) + 2xy f'(x+y^2) - 2xy \cdot f'(x+y^2) = 2y f(x+y^2) = 2y * \frac{z}{x}$$

5) II

حل شکل قبل با دید حذف تابع اختیاری

$$\underbrace{\frac{Z}{x}}_{u} = f(\underbrace{x+y^2}_{V})$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} \xrightarrow[=0]{} \begin{vmatrix} \frac{Z_x \cdot x - 1 \cdot Z}{x^2} & \frac{1}{x} \cdot Z_y \\ 1 & 2y \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow 2y \times \frac{x \cdot Z_x - Z}{x^2} - \frac{1}{x} \cdot Z_y = 0$$

$\times x^2$

$$2yx \cdot Z_x - 2y \cdot Z - x \cdot Z_y = 0$$

$$2yxZ_x - xZ_y = 2yZ$$

$\div x$

$$\boxed{2y \cdot Z_x - Z_y = \frac{2yZ}{x}}$$

---

* دیفرانسیل کامل *

حاصل: $(2{,}01)^{3{,}98}$ کدام است

$2^4 = 16$

$$Z = x^y \xrightarrow[dx = 0.01,\ dy = -0.02]{x=2,\ y=4} dZ = ?$$

$a^u \xrightarrow{\text{مشتق}} u' a^u \ln a$

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} . dy$$

$$dZ = y \cdot x^{y-1} . dx + 1 . x^y . \ln x\, dy$$

$$dZ = 4 * 2^3 * 0.01 + 2^4 * \ln 2 * (-0{,}02)$$

$$dZ = 0{,}32(1 - \ln 2) \longrightarrow (2{,}01)^{3{,}98} = 16 + 0{,}32(1 - \ln 2)$$

داده سوال $\ln 2 = 0.7$ $\longrightarrow$ ....

مثال if: $\begin{cases} z = x^2 + y \\ f(x, y, z) = 0 \end{cases} \longrightarrow \dfrac{dz}{dx} = ? \longrightarrow$ این مشتق z به x نسبت چون

که y هم در معادله z حضور دارد

گزینه‌ها بر حسب x، y، z، مشتقات f بر حسب x، y، z است

$$dz = 2x\,dx + 1 \cdot dy$$

$$\Rightarrow dy = dz - 2x\,dx$$

$$f_x \cdot dx + f_y \cdot dy + f_z \cdot dz = 0$$

$$f_x \cdot dx + f_y (dz - 2x\,dx) + f_z \cdot dz = 0$$

$$(f_y + f_z) \cdot dz = (2x \cdot f_y - f_x) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{2x f_y - f_x}{f_y + f_z}$$

$$w = f(x, y, z)$$

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz$$

حال

$$0 = f(x, y, z)$$

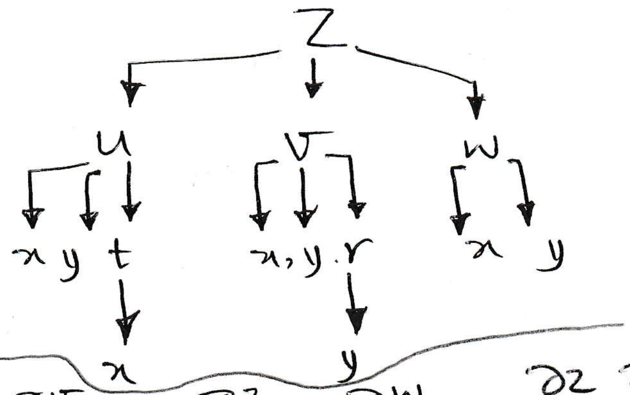
$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \cdots$$

توجه داشته باشیم، $\frac{dz}{dx}$ مشتق Z نسبت به x نسبت

بدلیل اینکه y هم در معادله z دخالت دارد

مثال:

$$\left.\begin{aligned} z &= f(u, v, w) \\ u &= g(x, y, t) \\ v &= h(x, y, r) \\ w &= p(x, y) \\ t &= q(x) \\ r &= k(y) \end{aligned}\right\} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = ?$$



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}$$

یعنی تمام مسیرهای منتهی به x را تا سرشاخه (Z) رفته و مسیرها را باهم جمع می‌کنیم

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

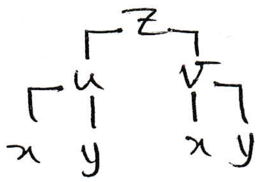
۷) II

مهم

مثال:

$$Z = f(u,v) \qquad \begin{cases} u = ۲x + ۳y \\ v = ۳x - ۴y \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial^۲ Z}{\partial x \partial y} = ?$$

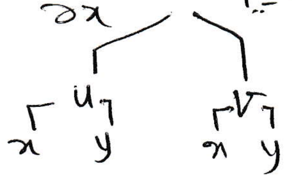
$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$



$$A = \frac{\partial Z}{\partial x} = f_u * ۲ + f_v * ۳$$

$$\frac{\partial^۲ Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

حال : $\frac{\partial Z}{\partial x} = A$ تسلیم:



$$\frac{\partial^۲ Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^۲ Z}{\partial x \partial y} = (۲ f_{uu} + ۳ f_{vu}) * ۳ + (۲ f_{uv} + ۳ f_{vv}) * (-۴)$$

$$= ۶ f_{uu} + ۹ f_{vu} - ۸ f_{uv} - ۱۲ f_{vv}$$

$$= \boxed{۶ f_{uu} + f_{uv} - ۱۲ f_{vv}}$$

مثال: $f = \text{Ln}(۳x^۲y - ۶yz^۲ + ۴y^۳) + (۲x-۱)^{y^۲+۵} - e^{۳x+۵y-۸z} = ۰$

$$\xrightarrow{(۱,۱,۱)} \frac{\partial y}{\partial x} = ?$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{\dfrac{۶xy}{۳x^۲y - ۶yz^۲ + ۴y^۳} + (y^۲+۵)(۲)(۲x-۱)^{y^۲+۴} - ۳e^{۳x+۵y-۸z}}{\dfrac{۳x^۲ - ۶z^۲ + ۱۲y^۲}{۳x^۲y - ۶yz^۲ + ۴y^۳} + ۲y(۲x-۱)^{y^۲+۵}\,\text{Ln}(۲x-۱) - ۵e^{۳x+۵y-۸z}}$$

$$\xrightarrow{۱,۱,۱} = -\frac{۶+۱۲-۳}{۹+۰-۵} = -\frac{۱۵}{۴}$$

۸) II تعداد m را چنان بدست آورید تا تابع z در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

مثال: $\underbrace{x \cdot z_x + y \cdot z_y}_{\text{تابع معادله یاد قضیه اویلر می‌اندازد}} + (2m-1)z = 0$ صدق کند

$$z = \frac{\ln(x+y) - \ln(x-y)}{x^2 y + x y^2}$$

$$z = \frac{\ln \frac{x+y}{x-y}}{x^2 y + x y^2} \longrightarrow \underset{\text{درجه همگنی}}{\alpha = -3}$$

$$x \cdot z_x + y \cdot z_y = -(2m-1)\, z$$

اویلر $\longrightarrow -(2m-1) = \alpha$ درجه همگنی

$$-(2m-1) = -3$$

$$2m - 1 = 3$$

$$\boxed{m = 2}$$

مثال: اگر $\underbrace{\operatorname{tg} u}_{f(u)} = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ حاصل $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = ?$ کدام است؟

1) $\sin 2u$

2) $\frac{1}{2} \sin 2u$

3) $\sin u$

4) $\frac{1}{2} \sin u$

صورت دیگری از قضیه اویلر

$$g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

$g(x)$ درجه همگنی $\alpha = 1$

$f(u) = \underbrace{g(x,y)}_{\text{همگن از درجه } \alpha}$

$$\boxed{x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha \cdot \frac{f(u)}{f'(u)}} = 1 \times \frac{\operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg}^2 u}$$

$$= \frac{\frac{\sin u}{\cos u}}{\frac{1}{\cos^2 u}} = \sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \longrightarrow 2 \text{ گزینه}$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

در تابع $Z = \ln \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ ، حاصل $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = ?$

همگن

$$Z = \ln(x^2+y^2) - \ln(x-y)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{x-y}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{-1}{x-y}\end{aligned}\right\} \to \frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{x}{x-y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{-y}{x-y}$$

$$= \cdots = 2-1 = \boxed{1}$$

روش اویلر:

روش اویلر: $Z = \ln \dfrac{x^2+y^2}{x-y} \to e^Z = \underbrace{\dfrac{x^2+y^2}{x-y}}_{\text{درجه همگنی} = 1}$

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha\cdot\frac{Z}{Z'} = 1 * \frac{e^z}{e^z} = \boxed{1}$$

اپراتور برداری نابلا: $\vec{\nabla}$

مثال: خط قائم بر رویه فضائی $x^2y - yz^3 = \ln xy$ در نقطه $(1,1,1)$ صفحه xy را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند.

$$f: x^2y - yz^3 - \ln xy = 0$$

$$\vec{\nabla} f = \left(2xy - \frac{y}{xy}\right)\hat{i} + \left(x^2 - z^3 - \frac{x}{xy}\right)\hat{j} + (-3yz^2)\hat{k}$$

$$\xrightarrow{(1,1,1)} \vec{\nabla} f = \hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$$

معادله: $\left.\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}\right|_{z=0}$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{1}{3} \to x = 4/3$$

$$\frac{y-1}{-1} = \frac{1}{3} \to y = \frac{2}{3}$$

$$\to \underline{A\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{2}{3}, 0\right)}$$

دو خم فضایی زیر در نقطه (۱,۱,۱) مطلوبست

الف: زاویه بین دو خم فضایی

ب: معادله صفحه قائم بر فصل مشترک دو خم فضایی

$$\begin{cases} f & x^2yz = 3y-2 \\ g & x^2y+3yz-4=0 \end{cases}$$

$f:\ x^2yz-3y+2=0$

$g:\ x^2y+3yz-4=0$

$$\vec{\nabla} f = (2xyz)\,\hat{i} + (x^2z-3)\,\hat{j} + (x^2y)\,\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} g = (2xy)\,\hat{i} + (x^2+3z)\,\hat{j} + (3y)\,\hat{k}$$

الف)
$$\begin{cases} \vec{\nabla} f = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} \\ \vec{\nabla} g = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} \end{cases} \qquad \cos\theta = \frac{\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} f|\,|\vec{\nabla} g|}$$

$$\cos\theta = \frac{4-8+3}{\sqrt{9}\times\sqrt{29}} \qquad \theta = \operatorname{ArcCos}\frac{-1}{3\sqrt{29}}$$

ب)
$$\vec{N} = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g \qquad \vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

نرمال صفحه عمود بر منحنی فصل مشترک

$$\vec{N} = -10i - 4j + 12k$$

معادله صفحه: $-10(x-1) - 4(y-1) + 12(z-1) = 0$

مثال بر روی خم فضایی $y^2+xz=1$ نقاطی بیابید که صفحه مماس بر خم فضایی در آن نقاط موازی صفحه $2x+y+z=5$ باشد

$$2x+y+z=5 \;\downarrow\; \vec{N} = 2i + j + k$$

$f:\ y^2+xz-1=0$

$$\vec{\nabla} f = z\,\hat{i} + 2y\,\hat{j} + x\,\hat{k}$$

نرمال صفحه مماس بر خم فضایی

$$\vec{N} \parallel \vec{\nabla} f \rightarrow \frac{2}{z} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{x}$$

$\frac{11}{II}$

$$\begin{cases} z = 4y \\ z = 2x \\ y^2 + xz = 1 \end{cases} \longrightarrow 4y = 2x \to 2y = x$$

$$y^2 + (2y)(4y) = 1 \to 9y^2 = 1 \to y = \pm\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3} \to \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases} \longrightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$y = -\frac{1}{3} \to \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases} \longrightarrow \left(-\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

دما در هر نقطه از یک محیط از رابطهٔ $T(x, y, z) = x^2y + yz^3$ بدست می‌آید اگر در نقطهٔ $(1, 1, 1)$ ایستاده باشیم در چه جهتی حرکت کنیم تا بیشترین احساس خنکی حاصل شود

$$\vec{\nabla} T = (2xy)\,i + (x^2 + z^3)\,j + (3yz^2)\,\hat{k}$$

$$\xrightarrow{(1,1,1)} \vec{\nabla} T = 2i + 2j + 3k$$

اگر در جهت $2i + 2j + 3k$ حرکت کنیم بیشترین احساس گرما حاصل می‌شود

اگر در جهت $-2i - 2j - 3k$ حرکت کنیم بیشترین احساس خنکی حاصل می‌شود

اگر در جهت $3i - 6j + 2k$ حرکت کنیم هیچ تغییر دمائی احساس نمی‌کنیم چون این جهت بر $\vec{\nabla} T$ عمود است

مشتق سوئی تابع $f(x, y, z) = xy^2 + 3xz$ در نقطه $(-1, 1, 1)$ در جهت بردار $\vec{u} = 2i - j + 2k$ را بدست آورید.

$$f'_{\vec{u}} = \vec{\nabla} f \cdot \lambda_{\vec{u}}$$

$$\vec{\nabla} f = (y^2 + 3z)\,\hat{i} + (2xy)\,\hat{j} + (3x)\,\hat{k}$$

$$\xrightarrow{-1,1,1} \nabla f = 4i - 2j - 3k \qquad \lambda_{\vec{u}} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{2i - j + 2k}{3}$$

$$f'_{\vec{u}} = (4i - 2j - 3k) \cdot \frac{2i - j + 2k}{3} = \frac{8+2-6}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

→ چون مشتق سوئی مثبت است در این جهت صعودی کنیم

$$\mathrm{Max}\, f'_{\vec{u}} = |\vec{\nabla} f| = \sqrt{16 + 4 + 9} = \boxed{\sqrt{29}}$$

حالا هرچه این $\frac{4}{3}$ به $\sqrt{29}$ نزدیکتر می‌بود باشدت یا شیب بیشتری صعودی کرده‌ایم در جهت منفی گرادیان هم هرچه به $-\sqrt{29}$ نزدیک شویم با شدت بیشتری نزول می‌کنیم

مثال: کوهنوردی بر روی سطح یک کوه به معادله $3x^2y+4z-7x=0$ در نقطه $(1,1,1)$ ایستاده است

$\frac{10}{11}$ این کوهنورد در چه جهتی حرکت کند تا بیشترین صعود را روی سطح کوه داشته باشد.

بیشترین صعود یعنی z را افزایش دهیم.

$$z=\frac{7}{4}x-\frac{3}{4}x^2y$$

$$\vec{\nabla}z=\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}xy\right)\hat{i}+\left(-\frac{3}{4}x^2\right)\hat{j}$$

$$\xrightarrow{(1,1)}\ \vec{\nabla}z=\frac{1}{4}\hat{i}-\frac{3}{4}\hat{j}$$

مثال: مشتق سوئی تابع $z=f(x,y)$ در نقطه‌ای خاص و در جهت بردار $i+j$ برابر با $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و در همان نقطه و در جهت $i-2j$ برابر با $\sqrt{5}$ می‌باشد. مشتق سوئی تابع در همان نقطه و در جهت $i-j$ را بدست آورید.

$$\vec{\nabla}z=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}\Big|_{\text{نقطه}}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}z=\alpha\hat{i}+\beta\hat{j}$$

در جهت u: $u=i+j$

$$z'_{\vec{u}}=\vec{\nabla}z\cdot\lambda_{\vec{u}}\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=(\alpha i+\beta j)\cdot\frac{i+j}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}\rightarrow\alpha+\beta=1\quad(1)$$

در جهت v: $v=i-2j$

$$z'_{\vec{v}}=\vec{\nabla}z\cdot\lambda_{\vec{v}}\Rightarrow\sqrt{5}=(\alpha i+\beta j)\cdot\frac{i-2j}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow\sqrt{5}=\frac{\alpha-2\beta}{\sqrt{5}}\rightarrow\alpha-2\beta=5\quad(2)$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1 & (1)\\ \alpha-2\beta=5 & (2)\end{cases}\longrightarrow\ \alpha=\frac{7}{3},\quad\beta=-\frac{4}{3}\ \longrightarrow\ \vec{\nabla}z=\frac{7}{3}i-\frac{4}{3}j$$

در جهت w: $w=i-j$

$$z'_{\vec{w}}=\vec{\nabla}z\cdot\lambda_{\vec{w}}=\left(\frac{7}{3}i-\frac{4}{3}j\right)\cdot\frac{i-j}{\sqrt{2}}$$

$$z'_{\vec{w}}=\frac{\frac{7}{3}+\frac{4}{3}}{\sqrt{2}}=\frac{11}{3\sqrt{2}}$$

$\frac{13}{II}$

$r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ برداری r مفروض است. حاصل $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)$ کدام است

۱) $|r|$ ۲) $2|\vec{r}|$ ۳) $\frac{1}{|\vec{r}|}$ ۴) $\frac{2}{|\vec{r}|}$

$$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{P}\hat{i} + \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{Q}\hat{j} + \underbrace{\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{R}\hat{k}$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1 \times \sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \times x}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

پس $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right) = \frac{y^2+z^2+x^2+z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{|\vec{r}|}$

$$\vec{F} = (3x^2y - 4yz)\,i + (yz - xy)\,j + (xz^2 - 3y)\,k$$

$$\xrightarrow{(1,1,1)} \vec{\nabla} \times \vec{F} = ? \rightarrow \operatorname{Curl} \vec{F} = ?$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y - 4yz & yz - xy & xz^2 - 3y \end{vmatrix}$$

* دیورژانس کرل هر میدان برداری صفر است *

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = i(-3-y) - j(z^2 - (-4y)) + k(-y - (3x^2 - 4z))$$

$$\xrightarrow{1,1,1} \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F} = -4\hat{i} - 5\hat{j}}$$

حالا: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$ از اتحاد بدست می آید و نباید محاسبه کرد

مقدار a را چنان بدست بیاورید تا تابع زیر هارمونیک باشد

$$f(x,y,z) = ax^2 + 3xy - 4y^2 + 6xz + (a+1)z^2 - 2byz$$

$$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{grad} w) = \Delta w = \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}$$

$$\nabla^2 f = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$$2a + (-8) + 2(a+1) = 0 \rightarrow 4a - 6 = 0 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

میدان اسکالر f هارمونیک است، هرگاه لاپلاسین آن صفر باشد

اکسترمم در توابع دو متغیره :

$$\Delta = B^2 - AC$$

$$\begin{cases} f_{xx} = A \\ f_{xy} = B \\ f_{yy} = C \end{cases}$$

1) $\begin{cases} A < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \rightarrow$ Max نسبی

2) $\begin{cases} A > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \rightarrow$ Min نسبی

3) $\Delta > 0 \rightarrow$ نقطه زینی

4) $\Delta = 0$ این روش جواب نمی‌دهد

$$z = x^2 + 3xy + y^2 - 8x - 7y + 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y - 8 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y - 7 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \quad x = 1 \quad y = 2$$

بحرانی: $\{(1,2,\ )\}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \rightarrow A$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3 \rightarrow B \qquad \Delta = B^2 - AC = 9 - 6 > 0$$

نقطه زینی

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \rightarrow C$$

$$z = x^3 - 3xy + y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 3y^2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

بحرانی: $\{(0,0,0), (1,1,-1)\}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \rightarrow A$$

$$\Delta = B^2 - AC = 9 - 36xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$$

$(0,0,0) \rightarrow 9 = \Delta > 0 \rightarrow$ زینی

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

$(1,1,-1) \rightarrow \Delta < 0,\ A = 6 > 0 \rightarrow$ min نسبی

$Z = x^4 + y^2 - 6y + 12$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 4x^3 = 0 \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = 2y - 6 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

بحرانی = $\{(0, 3, \ )\}$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 12x^2 \qquad \Delta = B^2 - AC$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \Delta = 0 - 24x^2$$

$$\Delta = -24x^2$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 2 \qquad (0, 3, \ ) \longrightarrow \Delta = 0$$

$$Z = x^4 + y^2 - 6y + 9 + 3$$

$$Z = x^4 + (y-3)^2 + 3 \qquad (0, 3) \longrightarrow Z = 3$$

$$\forall (x, y) \longrightarrow Z(x,y) > Z(0,3)$$

$$Z(x,y) > 3 \longrightarrow \text{min نسبی است}$$

(ص ۱۳) اکسترمم دو متغیره در یک ناحیه:

اکسترمم مطلق تابع $Z = 3x - 2y$ در ناحیه $\frac{x^2}{4} + 9y^2 \leq 1$ را به دست آورید

* این اتفاق یا در نقاط بحرانی یا در نقاط مرزی اتفاق می افتد *

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = 3 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = -2 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ نقطه بحرانی ندارد

چون عدد نمی‌تواند صفر شود

مرز ناحیه: $\frac{x^2}{4} + 9y^2 = 1$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} = \cos^2 t \rightarrow \frac{x}{2} = \cos t \\ 9y^2 = \sin^2 t \rightarrow 3y = \sin t \end{cases}$$

در اصل باید از معادله مرزی یکی را برحسب دیگری به دست آوریم

و در معادله اصلی قرار بدهیم آنگاه نقطه بحرانی تابع

یک متغیره را به دست آوریم ولی با روش تغییر متغیر حل می‌کنیم

مشتق مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} x = ۲\cos t \\ y = \frac{۱}{۳}\sin t \end{cases} \qquad Z = ۶\cos t - \frac{۲}{۳}\sin t$$

$$-\sqrt{A^۲+B^۲} \leq A\sin\alpha + B\cos\alpha \leq \sqrt{A^۲+B^۲}$$

$$-\sqrt{۳۶+\frac{۴}{۹}} \leq \underbrace{۶\cos t - \frac{۲}{۳}\sin t}_{Z} \leq \sqrt{۳۶+\frac{۴}{۹}}$$

$$Z_{min} = \frac{-\sqrt{۳۲۸}}{۳} \qquad Z_{max} = \frac{\sqrt{۳۲۸}}{۳}$$

مقادیر اکسترمم تابع $Z = x^۲+y^۲-۲x$ در ناحیه

$$D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x^۲+y^۲ \leq ۵ \text{ و } y \leq ۲x\}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = ۲x-۲ = ۰ \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = ۲y = ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۰ \end{cases}$$

نقطه بحرانی اکسترمم به ناحیه باشد و گرنه به درد نمی خورد

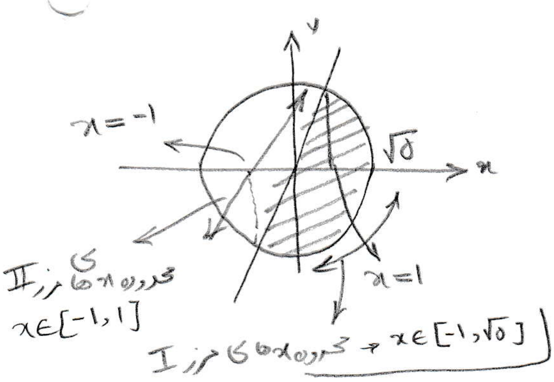
بحرانی: $\{(۱,۰)\} \in D \rightarrow Z_{(۱,۰)} = -۱$

یکی از کاندید های جواب است

مرز I) $x^۲+y^۲=۵$

مرز II) $y = ۲x$

$\rightarrow x^۲+۴x^۲=۵ \rightarrow x = \pm ۱$



مرز I) $x^۲+y^۲=۵ \rightarrow y^۲ = ۵-x^۲$

در Z قرار دهیم $Z = x^۲+۵-x^۲-۲x = ۵-۲x$

$x \in [-۱, \sqrt{۵}]$

$Z' = ۰ \rightarrow -۲ = ۰$ غیرممکن

$\rightarrow Z'=۰$ ریشه ندارد

خود مرز را هم چک می کنیم

$$Z = ۵-۲x, \quad x \in [-۱, \sqrt{۵}] \quad \begin{cases} x = -۱ \rightarrow Z = ۷ \\ x = \sqrt{۵} \rightarrow Z = ۵-۲\sqrt{۵} \end{cases}$$

کاندید جواب

مرز II) $y = ۲x \rightarrow Z = x^۲+۴x^۲-۲x \rightarrow Z = ۵x^۲-۲x$

$x \in [-۱, ۱]$

$Z' = ۰ \rightarrow ۱۰x-۲ = ۰ \rightarrow x = \frac{۱}{۵} \in [-۱,۱] \rightarrow Z = -\frac{۱}{۵}$ کاندید

مرز $x=-۱ \rightarrow Z = ۷$ کاندید

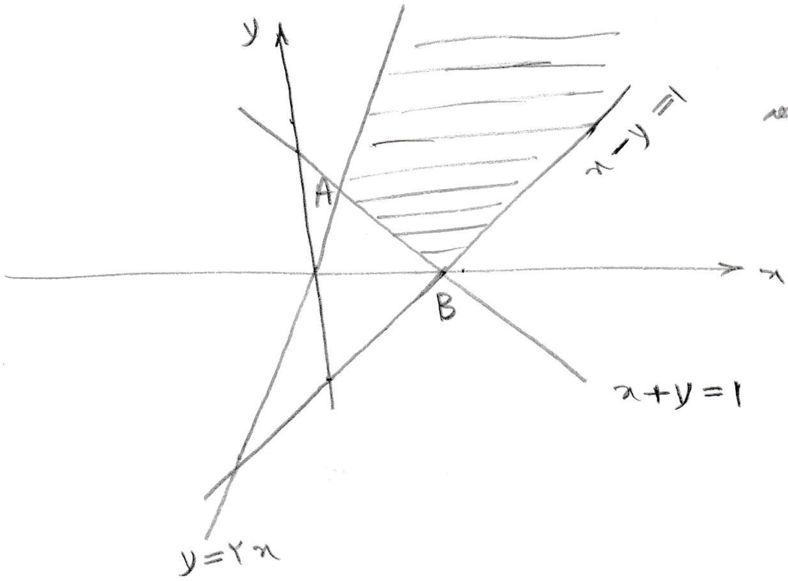
مرز $x = ۱ \rightarrow Z = ۳$ کاندید

$\frac{۱۷}{II}$

مطلق $Min = -1$
مطلق $Max = 7$

Min مطلق تابع $Z = ۳x - ۴y$ روی ناحیه زیر را بدست آورید

$$D: \{ x, y \in \mathbb{R} \mid y \leq ۲x \, , \, x + y \geq ۱ \, , \, x - y \leq ۱ \}$$



چون توابع خط راستند
پس اکسترمم ها روی نقاط تقاطع آنها رخ می دهد

$$\begin{cases} y = ۲x \\ x + y = ۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱}{۳} \\ y = \frac{۲}{۳} \end{cases} \rightarrow A\left(\tfrac{۱}{۳}, \tfrac{۲}{۳}\right) \rightarrow Z = \boxed{\frac{-۵}{۳}}$$ کمترین

$$\begin{cases} x + y = ۱ \\ x - y = ۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۰ \end{cases} \rightarrow B(۱, ۰) \rightarrow Z = \boxed{۳}$$

توجه شود تابع max ندارد چون محدوده جواب از طرف بالا آزاد است $\qquad Z_{min} = \boxed{\frac{-۵}{۳}}$

لاگرانژ (ص ۱۴) * اکسترمم‌های مشروط در توابع دو متغیره *

مثال: اگر $x^2+y^2+z^2=10$ باشد max $x+2y+3z$ را بدست آورید

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-10=0$

$$L = x+2y+3z+\lambda x^2+\lambda y^2+\lambda z^2-10\lambda$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1-2\lambda x=0 \rightarrow x=\frac{-1}{2\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2+2\lambda y=0 \rightarrow y=\frac{-2}{2\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 3+2\lambda z=0 \rightarrow z=\frac{-3}{2\lambda} \\ x^2+y^2+z^2-10=0 \Rightarrow \left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{-2}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{-3}{2\lambda}\right)^2-10=0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{4}{4\lambda^2}+\frac{9}{4\lambda^2}=10 \rightarrow \frac{14}{4\lambda^2}=10 \rightarrow \lambda^2=\frac{14}{40}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{14}{40}}$$

$$\lambda=\sqrt{\frac{14}{40}} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-\sqrt{40}}{2\sqrt{14}} \\ y=\frac{-\sqrt{40}}{\sqrt{14}} \\ z=\frac{-3\sqrt{40}}{2\sqrt{14}} \end{cases} \rightarrow f=\frac{-14\sqrt{40}}{2\sqrt{14}} \Rightarrow \text{min}$$

* هر $x^2+y^2+z^2=k$ آنگاه حداکثر عبارت $\alpha x+\beta y+\gamma z$ زمانی رخ می‌دهد که: $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$

$$\lambda=-\sqrt{\frac{14}{40}} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{40}}{2\sqrt{14}} \\ y=\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{14}} \\ z=\frac{3\sqrt{40}}{2\sqrt{14}} \end{cases} \Rightarrow f=\frac{14\sqrt{40}}{2\sqrt{14}} \Rightarrow \text{Max}$$

حال با توجه به نکته ۳ ص ۱۵ حل می‌کنیم

$x^2+y^2+z^2=10$

$f: x+2y+3z$

نکته ۳: $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ z=3x \end{cases}$

$$x^2+4x^2+9x^2=10$$

$$14x^2=10$$

$$x^2=\frac{10}{14} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{10}{14}}$$

19/II

$x = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} \rightarrow f = 14x \rightarrow f = \frac{14\sqrt{10}}{\sqrt{14}}$

$x = -\frac{\sqrt{10}}{14} \rightarrow f = 14x \rightarrow f = \frac{-14\sqrt{10}}{\sqrt{14}}$

دمای روی سطح کره $x^2+y^2+z^2=4$ از رابطه $T = xy^2z^4$ بدست می‌آید

Max دمای روی سطح این کره را بدست آورید

$L = xy^2z^4 + \lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 - 4\lambda \Rightarrow$ حل لاگرانژ

$\begin{cases} x^2 = a \\ y^2 = b \\ z^2 = c \end{cases} \Rightarrow a+b+c=4$

$\Rightarrow T = \sqrt{a} * b * c^2 \Rightarrow \boxed{T = a^{\frac{1}{2}} * b^1 * c^2}$

هرگاه $x+y+z=k$ آنگاه حداکثر عبارت $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ زمانی رخ می‌دهد که:

$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$

$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{1} = \frac{c}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 4a \end{cases}$

$a + 2a + 4a = 4 \rightarrow 7a = 4 \Rightarrow \boxed{a = \frac{4}{7}}$

$T = \sqrt{\frac{4}{7}} * \frac{8}{7} * \frac{16 * 16}{49} \Rightarrow \boxed{T_{max} = \frac{4096}{7^3\sqrt{7}}}$

بیشترین و کمترین فاصله منحنی $x^2 + 2xy + 2y^2 = 10$ را تا مبدا مختصات بدست آورید

فاصله تا مبدا مختصات: $d = \sqrt{x^2+y^2}$

$L = \sqrt{x^2+y^2} + \lambda x^2 + 2\lambda xy + 2\lambda y^2 - 10\lambda$

حل لاگرانژ

نکته: چون در دستگاه قطبی r فاصله تا مبدا مختصات است برای حل این مسائل منحنی را در دستگاه قطبی بیان کرده، البته به شرط آنکه بتوان معادله منحنی را به صورت $r = f(\theta)$ بدست آورد و به صورت یک تابع تک متغیره، max و min r را بدست آورد

$$r^2\cos^2\theta + 2r^2\cos\theta\sin\theta + 2r^2\sin^2\theta = 10$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{10}{\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{10}{1+\sin 2\theta + \sin^2\theta} = \frac{10}{1+\sin 2\theta + \frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

$$\boxed{\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$r^2 = \frac{20}{3 + 2\sin 2\theta - \cos 2\theta}$$

$$-\sqrt{4+1} \leq \underbrace{2\sin 2\theta - \cos 2\theta}_{A} \leq \sqrt{4+1}$$

چون r_{max} را می‌خواهیم ← باید مقدار min عبارت A را بگذاریم

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2_{max} = \dfrac{20}{3-\sqrt{5}} \Rightarrow r_{max} = \sqrt{\dfrac{20}{3-\sqrt{5}}} \\[2ex] r^2_{min} = \dfrac{20}{3+\sqrt{5}} \Longrightarrow r_{min} = \sqrt{\dfrac{20}{3+\sqrt{5}}} \end{cases}$$

اگر r_{max} منفی شد (چون از r^2 بدست آمده) نتیجه می‌گیریم که r_{max} وجود ندارد

چون شکل آن تابع همواره در حال صعود است. ولی اگر در سطح محصوری (F) را معرفی کند هم r_{max} دارد هم r_{min}

$$\int u' * u^n \cdot dx = \begin{cases} \dfrac{u^{n+1}}{n+1} & : n \neq -1 \\[2ex] \ln|u| & : n = -1 \end{cases}$$

نکته‌ای کوتاه:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin\theta} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\sin\theta}\right)\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{3}*\frac{\sin^4\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{1}{12}}$$

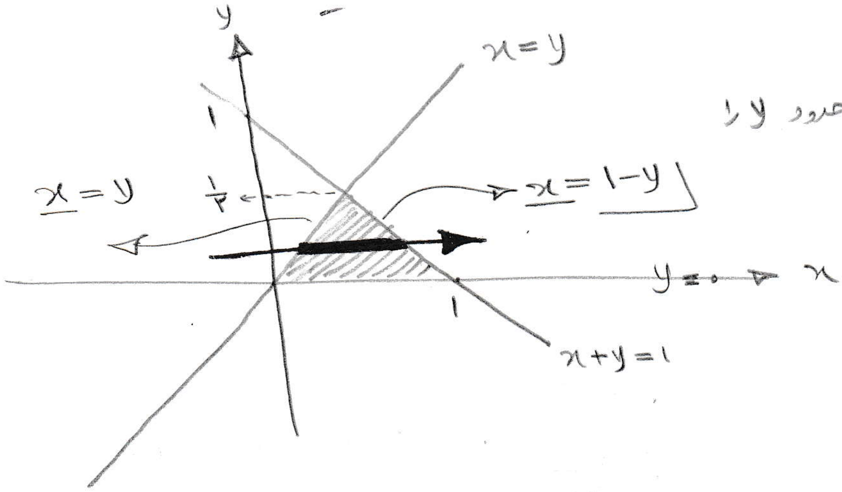
$$\int_0^1\int_{1-y}^{2-y}\frac{dx\,dy}{x+y}=\int_0^1\left(\ln(x+y)\Big|_{1-y}^{2-y}\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(\ln(2-y+y)-\ln(1-y+y)\right)dy=\int_0^1(\ln 2-\underbrace{\ln 1}_{0})\,dy$$

$$=y\ln 2\Big|_0^1=\ln 2$$

حاصل I که در آن D ناحیه محدود به خطوط $I=\iint_D y\,dx\,dy$

$y=x$ ، $x+y=1$ ، محور x ها باشد را بدست آورید.



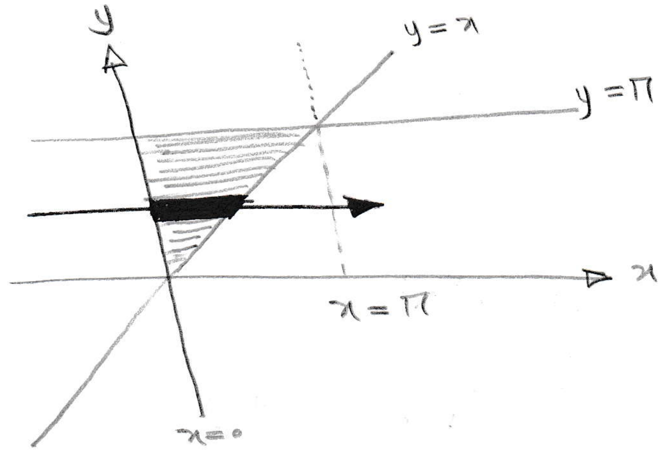
نسبت به y منظم نیست پس حدود y را در انتگرال اول می‌نویسیم

$$\begin{cases}y=x\\x+y=1\end{cases}\longrightarrow 2y=1\rightarrow y=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I=\int_{y=0}^{\frac{1}{2}}\int_y^{1-y}y\,dx\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x\Big|_y^{1-y}\right)y\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2y)\,y\,dy$$

$$=\frac{y^2}{2}-2*\frac{y^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)-(0-0)=\boxed{\frac{1}{24}}$$

$$I=\int_{0=x}^{\pi=x}\int_{x=y}^{\pi=y}\frac{\sin y}{y}\,.dy.dx$$

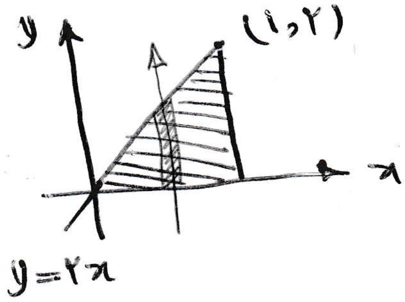


$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{y}\frac{\sin y}{y}\,dx.dy=$$

$$\int_0^{\pi}\left(x\Big|_0^{y}\right)\frac{\sin y}{y}\,dy=\int_0^{\pi} y\times\frac{\sin y}{y}\,dy=-\cos\Big|_0^{\pi}=-(-1-1)=\underline{2}$$

$$\iint_D \cos x^2\,dx\,dy$$

حاصل انتگرال با توجه به ناحیه D در شکل



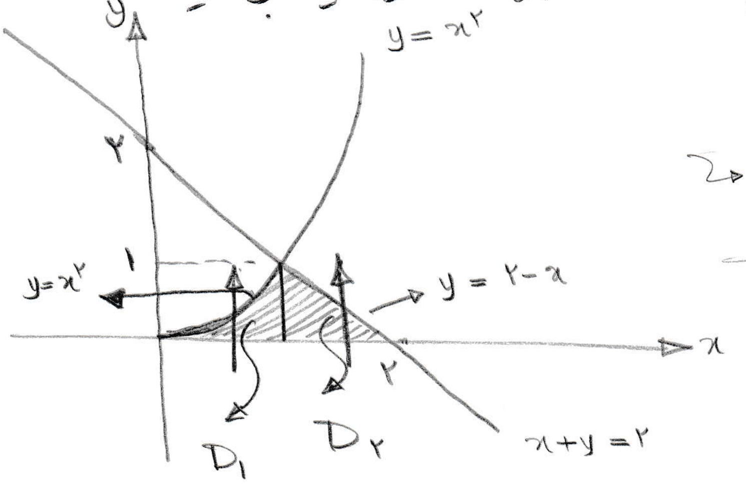
$$=\int_0^1\int_0^{2x}\cos x^2\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left(y\Big|_0^{2x}\right)\cos x^2\,dx$$

$$=\int_0^1 2x\cos x^2\,dx=\sin x^2\Big|_0^1=\underline{\sin 1}$$

$$I=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$ انتگرال

با چه انتگرال دیگری نیز قابل تعریف است



$$\to\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=\sqrt{y}}^{x=2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2\\ x=2-y\end{array}\right\}\ y=(2-y)^2$$

$$y=4-4y+y^2\to y^2-5y+4=0$$

$$\to\begin{cases} y=1\\ y=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

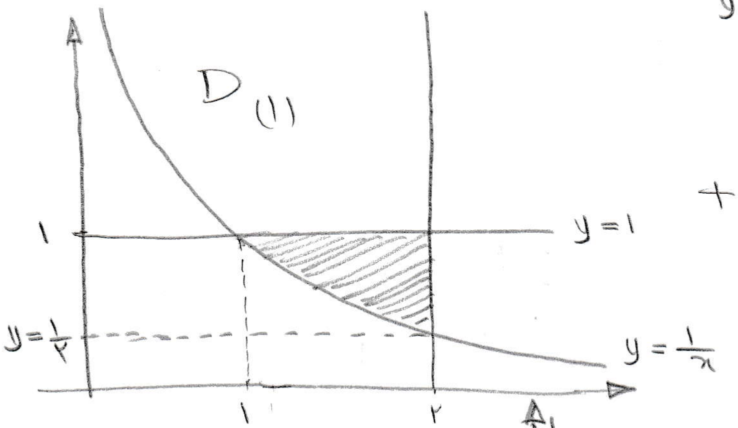
$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy \cdot dx$$

مثال: انتگرال زیر با چه انتگرال گیری قابل معرفی میباشد

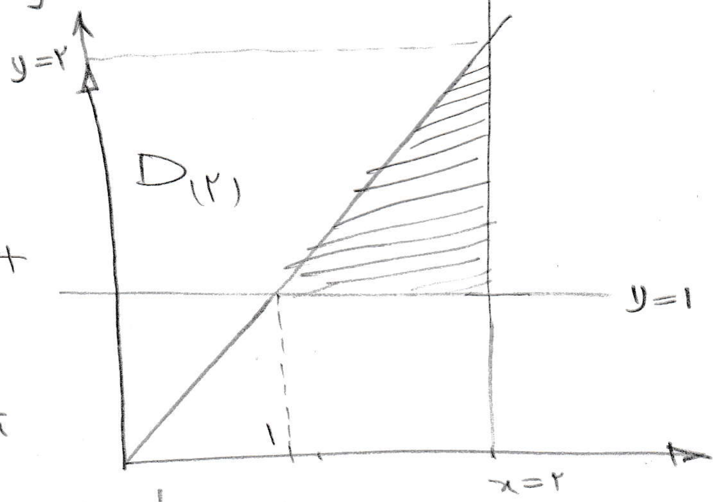
I

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)\,dx \cdot dy + \int_1^2 \int_y^2 f(x,y)\,dx \cdot dy$$

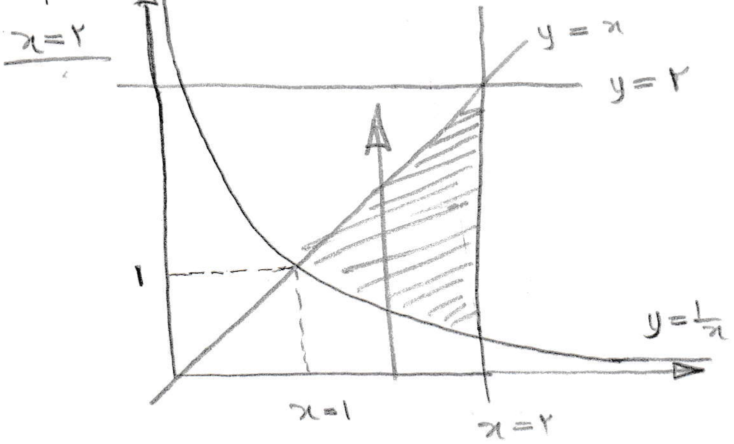
$$\Rightarrow I = \int_{y=\frac{1}{2}}^{y=1} \int_{x=\frac{1}{y}}^{x=2} f(x,y)\,dx \cdot dy + \int_{y=1}^{y=2} \int_{x=y}^{x=2} f(x,y)\,dx \cdot dy$$



+



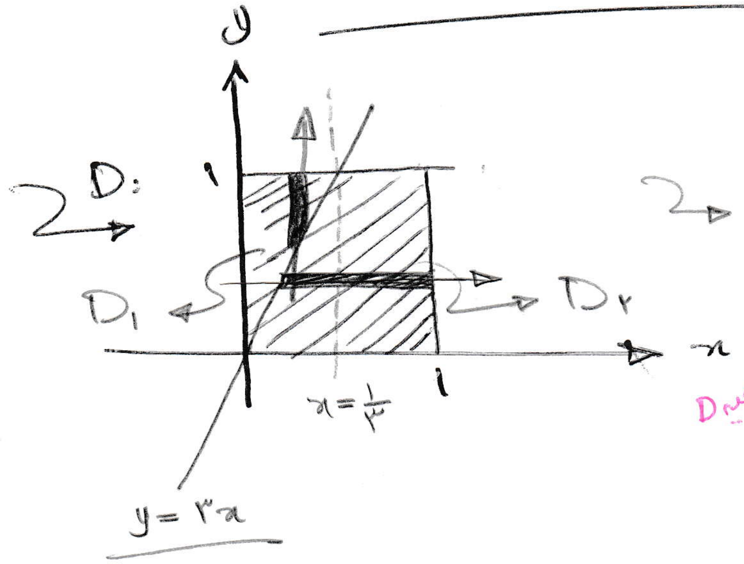
$D_{(1)} + D_{(2)} \Rightarrow$



$$\Rightarrow I = \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\,dx\,dy$$

اگر $f(x,y)=\begin{cases} x^۲ : y \leq ۳x \\ y^۲ : y > ۳x \end{cases}$ تعریف شود و D ناحیه‌ی مربعی بوده بطوریکه $x,y \in [0,1]$ باشد حاصل

$$I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = ?$$



$$\Rightarrow I=\iint_{D_1} y^۲\,dx\,dy+\iint_{D_۲} x^۲\,dx\,dy$$

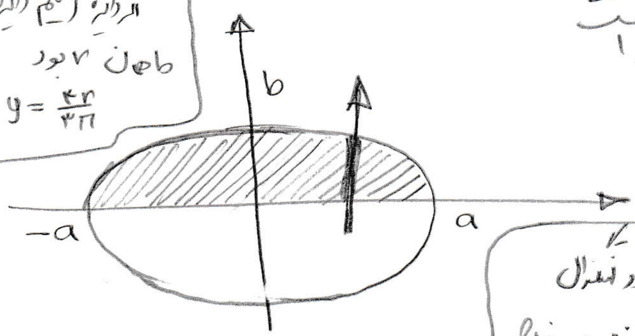
مختصات مرکز سطح ناحیه D:
$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\,dx\,dy}{S}\\[2mm] \bar{y}=\dfrac{\iint_D y\,dx\,dy}{S}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{1}{۳}}\int_{۳x}^{1} y^۲\,dy\,dx+\int_0^1\int_{\frac{y}{۳}}^{1} x^۲\,dx\,dy$$

مثال: مختصات مرکز سطح نیم بیضی بالائی از بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=1$ را بدست آورید

اگر دایره (نیم دایره) بود حاصل ۲ بود $\begin{cases}\bar{x}=0\\ y=\frac{۴r}{۳\pi}\end{cases}$

بنا به تقارن طول مرکز سطح حتما روی محور y است



$\Rightarrow$ $\bar{x}=0$ ، $\bar{y}\rightarrow ?=\frac{۴b}{۳\pi}$ حفظ شود

هنگام تعیین حدود انتگرال فلش نباید از یک منحنی وارد و خارج شود وگرنه جواب نمی‌دهد

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\,dx\,dy}{S}\Rightarrow \qquad S_{\text{بیضی}}=\pi ab$$

$$\bar{y}=\frac{\int_{-a}^{a}\int_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^۲}{a^۲}}} y\,dy\,dx}{\frac{1}{۲}\pi ab}=\frac{\int_{-a}^{a}\left(\frac{y^۲}{۲}\Big|_0^{b\sqrt{1-\frac{x^۲}{a^۲}}}\right)dx}{\frac{\pi}{۲}ab}$$

$$=\frac{\frac{1}{۲}\int_{-a}^{a} b^۲\left(1-\frac{x^۲}{a^۲}\right)dx}{\frac{\pi}{۲}ab}=\frac{\frac{1}{۲}b^۲\left(x-\frac{1}{a^۲}*\frac{x^۳}{۳}\Big|_{-a}^{a}\right)}{\frac{\pi}{۲}ab}=\frac{\frac{۲}{۳}b}{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۴b}{۳\pi}$$

تغییر متغیر در انتگرالهای دوگانه

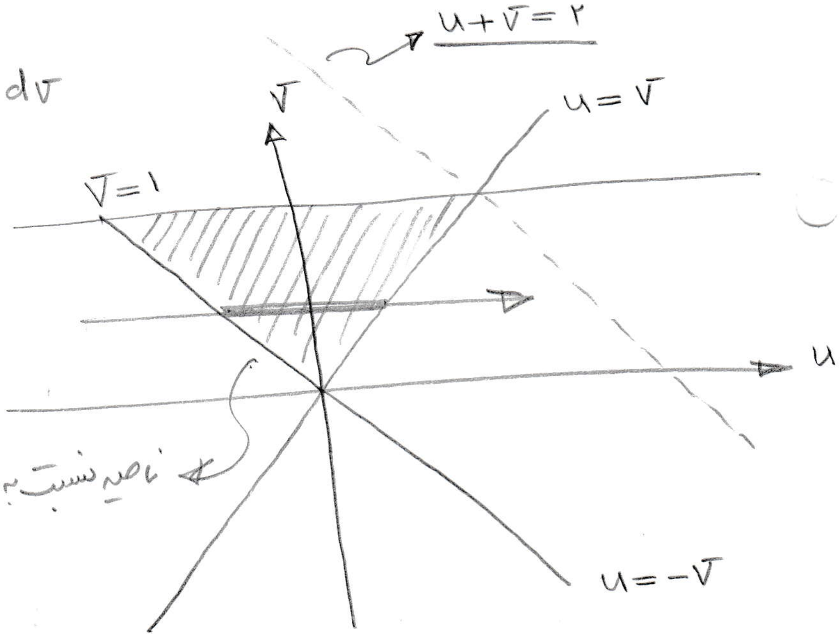
$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dx\cdot dy \quad \to \quad I=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x}\cos(\quad)\,dx\,dy$$

$$\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y\end{cases}\longrightarrow j=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}}=\frac{1}{۲}$$

$$\to I=\iint_{D'}\cos\frac{u}{v}\times\left|\frac{1}{۲}\right|du\cdot dv$$

$$\begin{cases}y=0\longrightarrow u=v\\ y=1-x\to v=1\\ x=0\longrightarrow u=-v\\ x=1\longrightarrow u+v=۲\end{cases}$$

ناحیه نسبت به u منظم است



$$\to I=\frac{1}{۲}\int_0^1\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\,du\cdot dv=\frac{1}{۲}\int_0^1\frac{1}{\frac{1}{v}}\left(\sin\frac{u}{v}\Big|_{-v}^{v}\right)dv$$

$$=\frac{1}{۲}\int_0^1 v\,(\sin 1-\underbrace{\sin(-1)}_{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha})\,dv=\frac{1}{۲}\times۲\sin 1\int_0^1 v\,dv$$

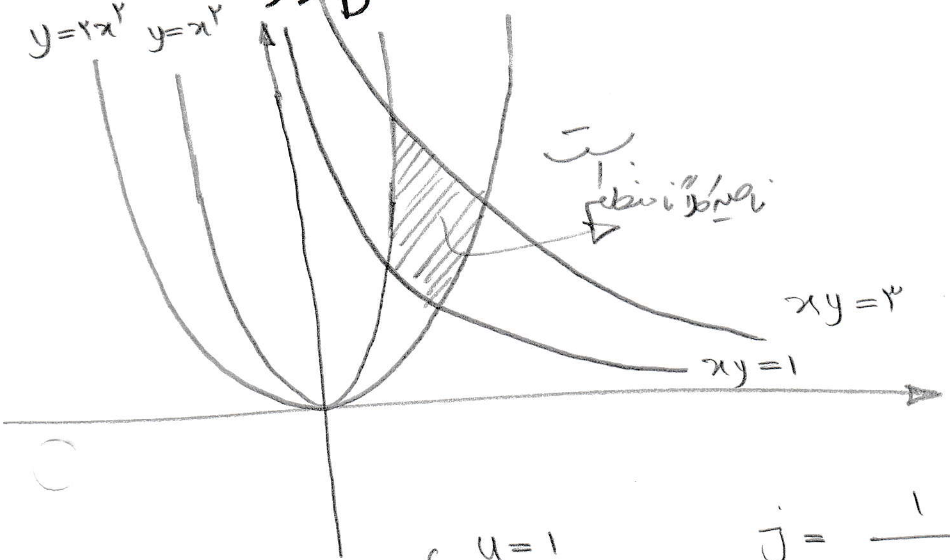
$$=\sin 1\left(\frac{v^۲}{۲}\Big|_0^1\right)=\boxed{\frac{1}{۲}\sin 1}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D'}f(u,v)\,|j|\,du\,dv$$

حجم

* مساحت محصور شده به منحنی های $y=2x^2$, $y=x^2$, $xy=1$, $xy=3$ را بدست آورید.

$$S=\iint_D 1\,dx\,dy$$



$$u=xy \longrightarrow \begin{cases} u=1 \\ u=3 \end{cases}$$

$$v=\frac{y}{x^2} \longrightarrow \begin{cases} v=1 \\ v=2 \end{cases}$$

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{y}{x^2}+\frac{2yx}{x^3}}$$

$$J=\frac{1}{\frac{y}{x^2}+\frac{2y}{x^2}}=\frac{1}{\frac{3y}{x^2}}=\frac{x^2}{3y}=\frac{1}{3v}$$

$$S=\iint_{D'} 1 * \left|\frac{1}{3v}\right| du\cdot dv=\frac{1}{3}\int_1^2\int_1^3 \frac{1}{v}\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^2 \left(u\Big|_1^3\right)\frac{1}{v}\,dv=\frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{v}\,dv=\frac{2}{3}\operatorname{Ln} v\Big|_1^2$$

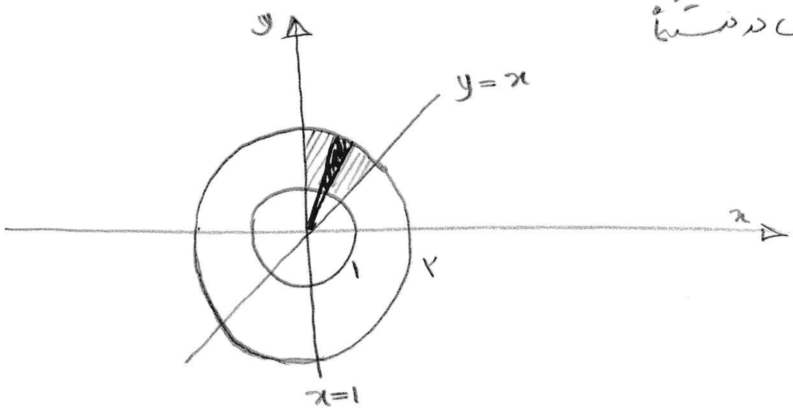
$$=\frac{2}{3}\operatorname{Ln} v\Big|_1^2=\frac{2}{3}(\operatorname{Ln}2-\cancel{\operatorname{Ln}1})=\frac{2}{3}\operatorname{Ln}2$$

حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید

$$I=\iint_D x\,dx\,dy$$

$$D=\{x,y\in\mathbb{R} \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4,\ y\geq x,\ x\geq 0\}$$

حالا چون مرزها دایره‌ای هستند پس در دستگاه قطبی می‌بریم



$$I=\iint_D r\cos\theta\, r.dr\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 r^2.\cos\theta\, dr.d\theta = \left(\frac{r^3}{3}\Big|_1^2\right)\left(\sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\right)$$

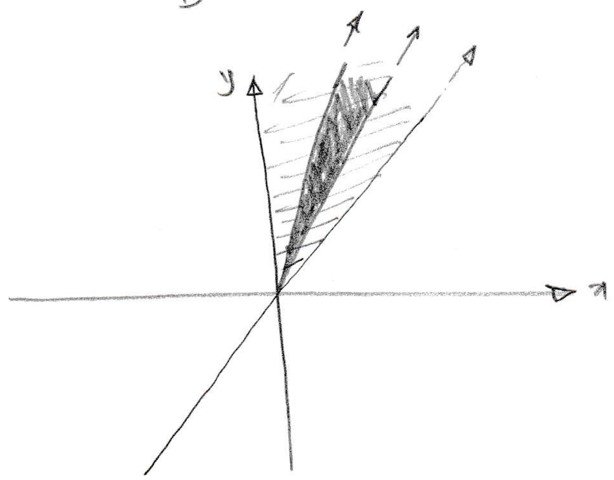
$$=\frac{7}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$I=\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

حال اگر مرزها دایره‌ای بود یا در تابع داخل انتگرال (x^2+y^2) داشت باید انتگرال را در دستگاه قطبی ببریم

$$I=\iint_D e^{-r^2} r.dr.d\theta$$

$$I=\int_{x=0}^{x\to+\infty}\int_{y=x}^{y\to+\infty} e^{-(x^2+y^2)}.dy\,dx$$



$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} r.e^{-r^2}\,dr\,d\theta$$

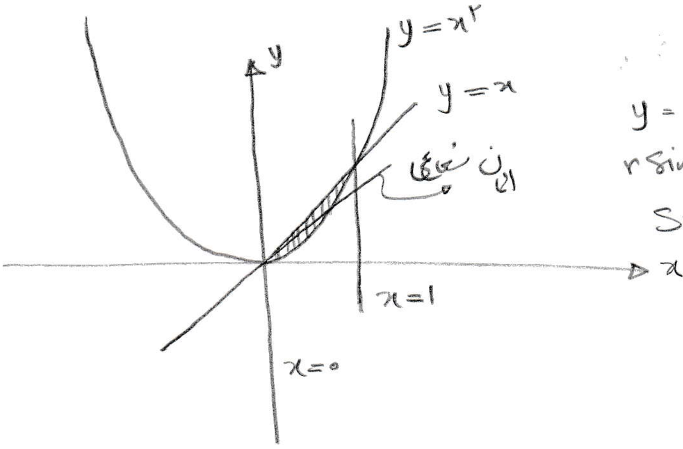
$$=\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}\right)\left(\theta\Big|_{\pi/4}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\left(0-\left(-\frac{1}{2}e^0\right)\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}*\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{=\frac{\pi}{8}}$$

$$I=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=x}\frac{dy\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}\frac{r\,dr.d\theta}{\sqrt{r^2}}$$

$y=x^2$



$y=x^2$

$r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$

$\sin\theta=r\cos^2\theta$

$\to r=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(r\Big|_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt2}{2}}-\frac{1}{1}=\frac{2}{\sqrt2}-1=\sqrt2-1$$

$$I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

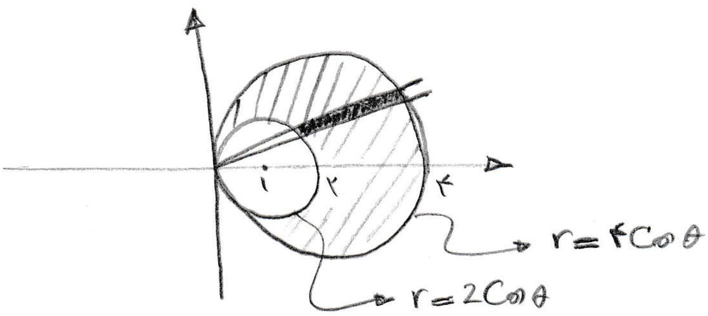
$$D:\{x,y\in\mathbb{R}\mid 2x\leqslant x^2+y^2\leqslant 4x\}$$

* اگر دایره مرکزش : مبدا مختصات قطبی باشد آن را به عادی نویسیم ولی اگر مرکز دایره در مبدا مختصات نبود آن را باید در قطبی بنویسیم

$$I=\iint_D\sqrt{r^2}\,.r.dr.d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}r^2.dr.d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\Big|_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}\right)d\theta$$

$2x=x^2+y^2\to 2r\cos\theta=r^2\to r=2\cos\theta$

$x^2+y^2=4x\to r^2=4r\cos\theta\to r=4\cos\theta$



$$I=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 56\cos^3\theta \, d\theta=\frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,(1-\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta-\cos\theta\sin^2\theta)\,d\theta=\frac{56}{3}\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

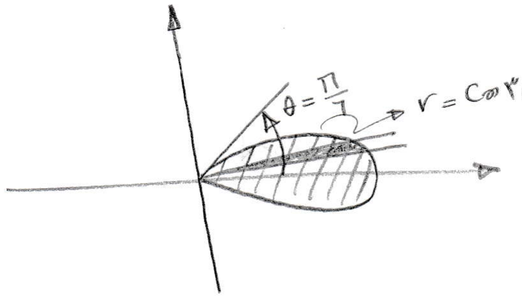
$$=\frac{56}{3}\left(\frac{4}{3}\right)$$

الف : مساحت داخل یکی از گلبرگهای منحنی $r=\cos 3\theta$ را بدست آورید

ب : مساحت داخل یکی از گلبرگهای منحنی $r=\cos 3\theta$ و خارج دایره $r=\frac{1}{2}$ را بدست آورید

الف)

$$S=\iint_D 1.dxdy=\iint_D r.dr.d\theta \qquad / \quad r=\cos 3\theta$$



کمترین θ و بیشترین θ این ناحیه هر دو در مبدا مختصات است

یعنی به ازای $r=0$ تشکیل می‌شود

$$r=0\longrightarrow\cos 3\theta=0\longrightarrow\begin{cases}3\theta=\frac{-\pi}{2} & \Rightarrow \theta=\frac{-\pi}{6}\\ 3\theta=\frac{\pi}{2} & \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\cos 3\theta} r.dr.d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\cos 3\theta}\right)d\theta$$

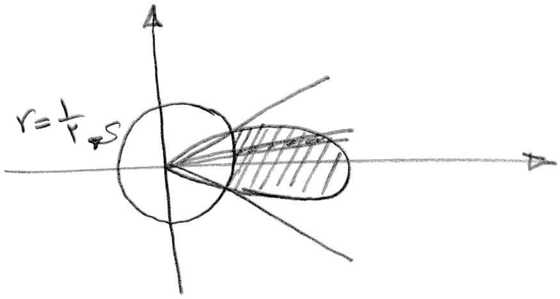
$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 6\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\sin 6\theta\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{12}$$

ب)

$$S=\iint 1.\,dx\,dy=\int\int r.\,dr.\,d\theta$$

کمترین و بیشترین θ این ناحیه در نقاط تقاطع دو منحنی تشکیل می‌شود

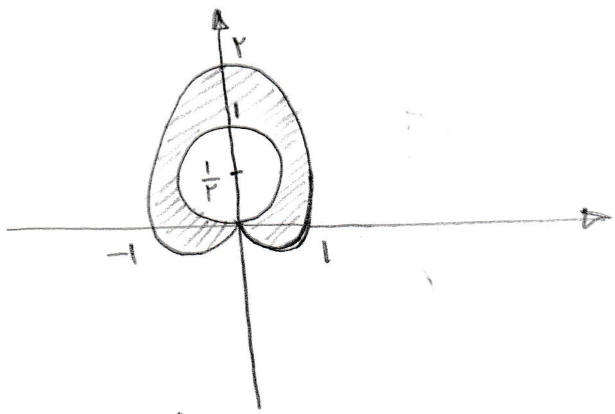


$$r=\cos 3\theta,\quad r=\frac{1}{2} \longrightarrow \cos 3\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}3\theta=\frac{-\pi}{3}\\ 3\theta=\frac{\pi}{3}\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\theta=\frac{-\pi}{9}\\ \theta=\frac{\pi}{9}\end{cases}$$

$$S=\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\int_{\frac{1}{2}}^{\cos 3\theta} r.\,dr.\,d\theta=\cdots\cdots$$

---

* مساحت داخل دلنمای $r=1+\sin\theta$ و خارج دایره $r=\sin\theta$ را بدست آورید

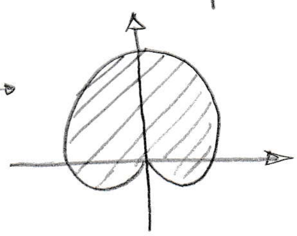


$$S=S_{\text{دلنما}}-S_{\text{دایره}}$$

$$S_{\text{دایره}}=\pi r^2=\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}$$

نکته، حدود θ در دلنمای کامل صفر تا 2π می‌باشد

$\Rightarrow$



$$\begin{cases}r=1+\sin\theta\\ r=0\end{cases}$$

$$1+\sin\theta=0$$

$$\Rightarrow \sin\theta=-1 \rightarrow \begin{cases}\theta=-\frac{\pi}{2}\\ \theta=\frac{3\pi}{2}\end{cases} \longrightarrow$$

دو زاویه یا سمک دری
دلنما در $r=0$ روی هم قرار دارند یا یکی هستند

یا یک دور کامل دایره که ۰ تا 2π

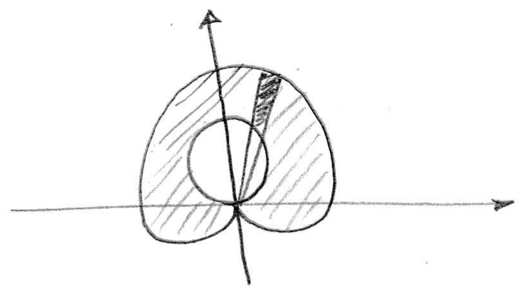
$\frac{31}{II}$

$$S_{\text{دلنما}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\sin\theta} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{1+\sin\theta}\right)d\theta$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\sin\theta + \frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\left(\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{2}\left((3\pi-2)-(-2)\right) = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow S = S_{\text{دلنما}} - S_{\text{دایره}} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{5\pi}{4}}$$



روش محاسبه مساحت بصورت مستقیم:

چون منحنی‌های ورودی و خروجی المان شعاعی

در یک دور کامل فرق می‌کند پس

$$\Rightarrow S = \int_0^{2\pi}\int_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} r\,dr\,d\theta \quad : \text{خطا است}$$

باید به دو ناحیه یا چند ناحیه

که ورودی و خروجی المان شعاعی یکی باشد، ناحیه را تقسیم کرد

$$\Rightarrow S = \int_0^{\pi}\int_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} r\,dr\,d\theta + \int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{1+\sin\theta} r\,dr\,d\theta$$

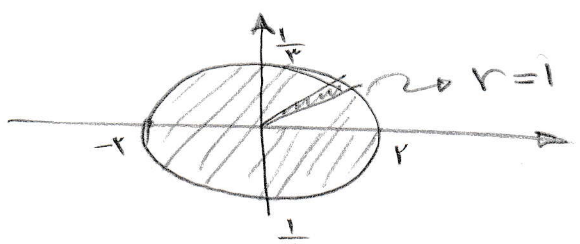
$$I = \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{4}+9y^2}\,dx\,dy$$

$$D: \left\{x, y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x^2}{4}+9y^2 \leqslant 1\right\}$$

شبه قطبی، مرز ناحیه: $\frac{x^2}{4}+9y^2=1$

شبه قطبی $\frac{x^2}{4}+9y^2=r^2 \rightarrow r^2=1$

$$\Rightarrow \boxed{r=1}$$



در شبه قطبی زوایا اگر ربع کامل هاشور خورده باشد

زاویه ربع کامل را می‌دهد وگرنه در مورد نصف سطح هاشور خورده

از یک ربع دلیلی نمی‌توان اظهار نظر کرد

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2}*2*\frac{1}{3}\, r\cdot dr\cdot d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,dr\cdot d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)(2\pi)=\frac{4\pi}{9}$$

انتگرال های منحنی الخط نوع اول

مثال: طول قوس منحنی $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ در فاصله $x\in[1,3]$ را بدست آورید

$$L=\int_C 1\,ds=\int_1^3\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}*\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y=P(x)\\ \to ds=\sqrt{1+P'^2(x)}\,dx\end{array}}$$

$$=\int_1^3\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}*\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_1^3\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}*\frac{1}{x^2}}\,dx$$

$$L=\int_1^3\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}*\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$$

زیر رادیکال باید مربع کامل باشه وگرنه حل نمی شود
ولی اگر گزینه ها بدون انتگرال باشه یعنی حتماً می شود انتگرال گرفت

$$=\int_1^3\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}*\frac{1}{x}\right)dx$$

چون از فاصله ۱ تا ۳ مثبت است دیگر قدر مطلق نمی نویسیم

$$=\frac{1}{2}*\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln x\Big|_1^3=\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\ln 3\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cancel{\ln 1}\right)$$

$$=2+\frac{1}{2}\ln 3$$

طول قوس قسمتی از منحنی $r = 1+\sin\theta$ که در ربع اول دستگاه واقع است را بدست آورید

$$L = \int_C 1.\, ds = \int_C \sqrt{r^2 + r'^2}\; d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1+\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2}\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}\; d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1+\sin\theta)}\; d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin\theta}\; d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\; d\theta$$

چون در ربع اول $\sin$ ، $\cos$ مثبت است قدر مطلق نمی‌گذاریم

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\; d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \sqrt{2}\left((-\sqrt{2}+\sqrt{2})-(-2+0)\right) = \boxed{2\sqrt{2}}$$

فرم مربعات کامل در زیر رادیکال برای انتگرال گیری

$$1+\sin\theta = \left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$1-\sin\theta = \left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

مثال: مساحت حاصل از دوران قسمتی از دلنمای $r = 1+\sin\theta$ که در ربع اول رسم شده واقع است. حول محور y ها را بدست آورید. $\frac{34}{\pi}$

$$S_y = 2\pi\int_c x\,ds = 2\pi\int r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cos\theta\sqrt{2(1+\sin\theta)}\,d\theta = 2\sqrt{2}\,\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cos\theta\sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta$$

$$\Rightarrow S_y = 2\sqrt{2}\,\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta(1+\sin\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\theta = 2\sqrt{2}\,\pi \times \frac{(1+\sin\theta)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{5}\pi(4\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{5}(32-4\sqrt{2})$$

مساحت حاصل از دوران منحنی $y = \cosh x$ در فاصله $x\in[0, \ln 2]$ حول محور x ها را بدست آورید.

$$S_x = 2\pi\int_c y\,ds = 2\pi\int_0^{\ln 2}\cosh x\sqrt{1+(\sinh x)^2}\,dx$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \cosh^2 x = 1+\sinh^2 x$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= 2\pi\int_0^{\ln 2}\cosh x\sqrt{\cosh^2 x}\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\ln 2}\cosh x.\cosh x\,dx$$

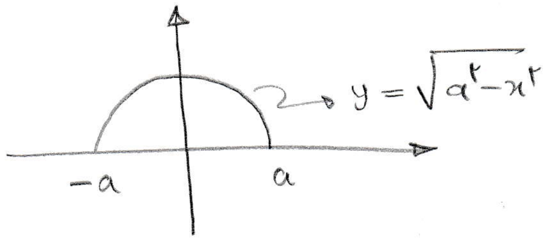
$$= 2\pi\int_0^{\ln 2}\cosh^2 x\,dx = 2\pi\int_0^{\ln 2}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{2\pi}{4}\int_0^{\ln 2}(e^{2x}+2+e^{-2x})\,dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+2x+\frac{1}{-2}e^{-2x}\Big|_0^{\ln 2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left(2+2\ln 2-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{15}{8}+2\ln 2\right) = \pi\left(\frac{15}{16}+\ln 2\right)$$

$$\begin{cases} e^{2\ln 2} = e^{\ln 4} = 4 \\ e^{-2\ln 2} = e^{\ln\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

مختصات مرکز طول نیم دایره بالایی از دایره $x^2+y^2=a^2$ را بدست آورید



مرکز طول یک نقطه مجازی است ولی اگر یک خط باشد روی خط و در وسط آن است ولی اگر منحنی باشد یا شکل دیگری باشد معلوم نیست روی سطح باشد

$$\bar{y}=\frac{\int_c y\,ds}{\text{طول منحنی}} \Rightarrow \bar{y}=\frac{\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}*\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx}{\frac{1}{2}*2\pi a}$$

یا نه

$$\Rightarrow \bar{y}=\frac{\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}*\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx}{\pi a}=\frac{\int_{-a}^{a}a\,dx}{\pi a}=\frac{ax\Big|_{-a}^{a}}{\pi a}$$

$$\bar{y}=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi}$$

مرکز طول $w\left|\begin{array}{l}\bar{x}=0\\ \bar{y}=\frac{2a}{\pi}\end{array}\right.$

از دوران طول نیم دایره حول محور x ها یک پوسته کروی ایجاد می‌شود که طبق قضیه اول گلدن داریم

$$\underset{\text{پوسته کروی}}{S}=\underset{\text{طول نیم دایره}}{L}*2\pi*\bar{y}$$

مساحت کره: $4\pi a^2$

$$\Rightarrow 4\pi a^2=\frac{1}{2}2\pi\cdot a*2\pi*\bar{y} \rightarrow a=\frac{1}{2}\pi\bar{y}$$

$$\Rightarrow 2a=\pi\bar{y} \rightarrow \bar{y}=\frac{2a}{\pi} \rightarrow w\left|\begin{array}{l}\bar{x}=0\\ \bar{y}=\frac{2a}{\pi}\end{array}\right.$$

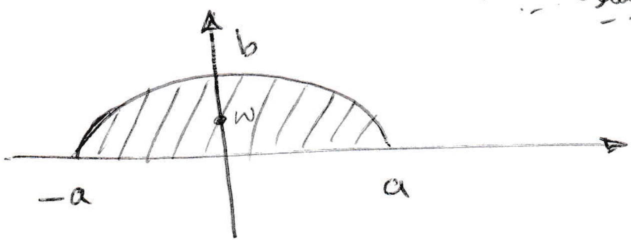
قضیه اول گلدن: هرگاه طولی به اندازه L را حول محوری که آن را قطع نمی‌کند دوران دهیم مساحتی ایجاد خواهد شد که اندازه این مساحت برابر است با طول دوران یافته ضربدر محیط دایره‌ای که مرکز طول طی می‌کند

$$S=L\cdot 2\pi r$$

r: فاصله مرکز طول تا محور دوران

از دوران سطح نیم بیضی حول محور xها حجم یک بیضیگون ایجاد خواهد شد

که طبق قضیه دوم گلدن داریم



بیضیگون $V=\frac{4}{3}\pi abc$

$$\boxed{\begin{matrix}\text{کره } V=\frac{4}{3}\pi r^3\\ \text{کره } S=4\pi r^2\end{matrix}}$$

$V = S \times 2\pi \cdot \bar{y}$

حجم بیضیگون — سطح نیم بیضی — فاصله مرکز سطح تا محور دوران

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi ab^2 = \frac{1}{2}\pi ab \times 2\pi \bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$$

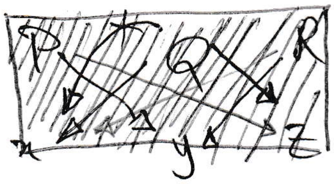
قضیه دوم گلدن: هرگاه مساحتی را حول محوری که آن را قطع نمی کند دوران دهیم

بیضی $S=\pi ab$

مختصات مرکز سطح $w\left|\begin{matrix}\bar{x}=0\\ \bar{y}=\frac{4b}{3\pi}\end{matrix}\right.$

حجمی حاصل خواهد شد که اندازه این حجم برابر است با سطح دوران یافته ضربدر محیط دایره ای که مرکز سطح طی می کند

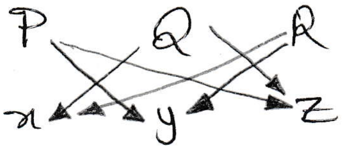
۲۴



الف)

انتگرالهای منحنی الخط نوع دوم را کار نمی کنیم

$$\begin{cases} P_y = Q_x \\ P_z = R_x \\ Q_z = R_y \end{cases}$$



۱. شرط لازم و کافی برای آنکه $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ پایستار باشد یا عبارتی که آن مستقل از مسیر باشد

$$\begin{cases} P_y = Q_x \\ P_z = R_x \\ Q_z = R_y \end{cases}$$

دو بیان الف و ب متناظر یکدیگرند

ب)
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P \rightarrow u = \int P \cdot dx \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q \rightarrow u = \int Q \cdot dy \\ \frac{\partial u}{\partial z} = R \rightarrow u = \int R \cdot dz \end{cases} \longrightarrow u =$$ اجتماع جوابها

u: تابع پتانسیل

مثال: حاصل $\int_C 2y\,dx + x\,dy$ روی منحنی پارامتری: $C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

از نقطه نظیر $t=0$ تا $t=\frac{\pi}{2}$ را بدست آورید

$$\begin{cases} x = \cos t \rightarrow dx = -\sin t \cdot dt \\ y = \sin t \rightarrow dy = \cos t \cdot dt \end{cases}$$

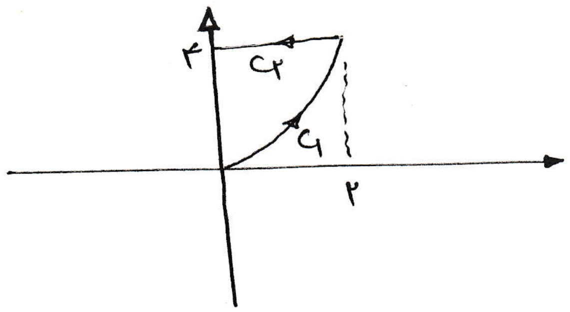
$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t(-\sin t\, dt) + \cos t(\cos t\, dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - 2\sin^2 t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2} - 2\times\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t\right) dt = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\frac{\pi}{4} + 0\right) - (0+0) = -\frac{\pi}{4}$$

حاصل انتگرال $I = \int_C y^2 dx + (y-x)\,dy$ که در آن C مسیری می‌باشد که ابتدا روی منحنی $y=x^2$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(2,4)$ را طی می‌کند سپس روی مسیر $y=4$ از نقطه $(2,4)$ تا نقطه $(0,4)$ را طی می‌کند کدام است



$C_1: y = x^2 \rightarrow dy = 2x\,dx$

$C_2: y = 4 \rightarrow dy = 0$

$$\Rightarrow I = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_{C_1} x^4 dx + (x^2 - x)\,2x\,dx + \int_{C_2} 16\,dx + 0$$

$$= \int_0^2 (x^4 + 2x^3 - 2x^2)\,dx + \int_2^0 16\,dx = \left(\frac{x^5}{5} + 2\times\frac{x^4}{4} - 2\times\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) + \left(16x\Big|_2^0\right)$$

$$= \frac{32}{5} + \frac{32}{4} - \frac{16}{3} + (0 - 32) = \dots$$

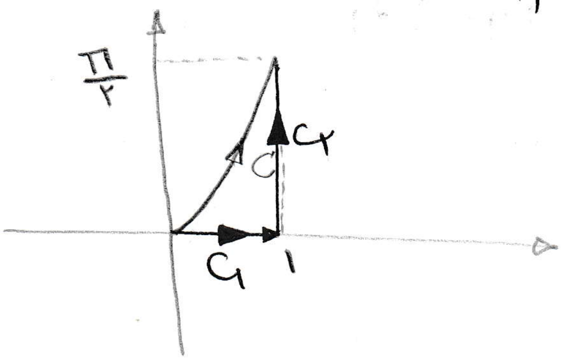
مقادیر a و b را چنان بدست آورید تا انتگرال زیر مستقل از مسیر باشد

$$\int_C \underbrace{(3ax^2y^3+5x)}_{P}\,dx+\underbrace{(2x^3y^2-5yz^2)}_{Q}\,dy+\underbrace{(by^2z+3z^2)}_{R}\,dz$$

$$\begin{cases} P_y = 9ax^2y^2 \\ Q_x = 6x^2y^2 \end{cases} \longrightarrow 9a=6 \longrightarrow \boxed{a=\frac{2}{3}}$$

$$\begin{cases} P_z = 0 \\ R_x = 0 \end{cases} \checkmark \qquad \begin{cases} Q_z = -10yz \\ R_y = 2byz \end{cases} \longrightarrow 2b=-10 \longrightarrow \boxed{b=-5}$$

حاصل انتگرال منحنی الخط $I=\int_C \underbrace{(\cos y + y\cos x)}_{P}\,dx + \underbrace{(\sin x - x\sin y)}_{Q}\,dy$ را که در آن C منحنی $y=\frac{\pi}{2}x^4$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(1,\frac{\pi}{2})$ را طی می‌کند کدام است



$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\sin y + \cos x \\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \cos x - \sin y \end{cases} \longrightarrow \text{ساده‌تر}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \longrightarrow$$ انتگرال مستقل از مسیر است

$C_1: \; y=0 \rightarrow dy=0$

$C_2: \; x=1 \rightarrow dx=0$

$$I=\int_{C_1}+\int_{C_2} = \int_{C_1}(1+0)\,dx + \int_{C_2}(\sin 1 - \sin y)\,dy$$

$$=\int_0^1 1\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 1-\sin y)\,dy = x\Big|_0^1 + \left(y\sin 1 + \cos y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=(1-0)+\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\sin 1+0\right)-(0+1)\right) = 1+\tfrac{\pi}{2}\sin 1 - 1 = \boxed{\tfrac{\pi}{2}\sin 1}$$

چون مستقل از مسیر است تابع پتانسیل را هم می‌توانیم پیدا کنیم

$$u=\int P\,dx \Rightarrow u=\int (\cos y + y\cos x)\,dx = x\cos y + y\sin x + C_1$$

$$u=\int Q\,dy \Rightarrow u=\int (\sin x - x\sin y)\,dy = y\sin x + x\cos y + C_2$$

$$\boxed{u = x\cos y + y\sin x + c}$$

جواب انتگرال : $u(1,\frac{\pi}{2}) - u(0,0) = (0+\frac{\pi}{2}\sin 1 + c) - (0+0+c) = \boxed{\frac{\pi}{2}\sin 1}$

حاصل انتگرال مسیر

$I=\int_C \underbrace{(3y+x^2)}_{P}dx + \underbrace{(3x+2y^2z^3)}_{Q}dy + \underbrace{(2y^3z^2-2z)}_{R}dz$ که در آن C منحنی حاصل از تقاطع استوانه $x^2+y^2=1$ ، صفحه $2x+3y+z=5$ می‌باشد را بدست آورید

$$C: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+z=5 \end{cases}$$

ب : حاصل انتگرال فوق روی مسیر دلخواهی که نقطه $(0,0,0)$ را به نقطه $(1,1,1)$ وصل می‌کند کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y}=3 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}=3 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z}=0 \\ \frac{\partial R}{\partial x}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial z}=6y^2z^2 \\ \frac{\partial R}{\partial y}=6y^2z^2 \end{cases} \longrightarrow$$ انتگرال مستقل از مسیر است

$$u=\int P\cdot dx=\int(3y+x^2)\,dx = 3yx+\frac{x^3}{3}+C_1$$

$$u=\int Q\,dy=\int(3x+2y^2z^3)\,dy = 3xy+\frac{2}{3}y^3z^3+C_2$$

$$u=\int R\cdot dz=\int(2y^3z^2-2z)\,dz=\frac{2}{3}y^3z^3-2\times\frac{z^2}{2}+C_3$$

$$u = 3xy+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}y^3z^3-z^2+c$$

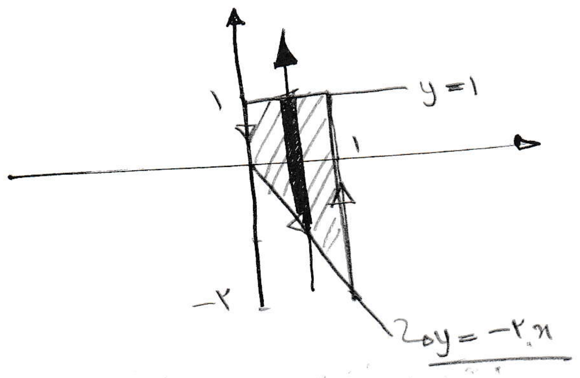
انتگرال مستقل از مسیر که مسیر بسته است (تقاطع صفحه و استوانه یک مسیر بسته است)

صفر است . حاصل انتگرال صفر است $\longrightarrow \underline{I=0}$

ب) جواب انتگرال: $u(1,1,1) - u(0,0,0) = \left(3+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-1+C\right)-\left(0+0+0-0+C\right)$ $\frac{۴۰}{۳۱}$

$= 3$

حاصل $\oint_C \underbrace{(3x-2y)}_{P}\,dx + \underbrace{(2xy-y^2)}_{Q}\,dy$ که در آن C مسیر روی ذوزنقه به رئوس (0,0) و (1,1) و (0,1) و (1,-2) را اگر یکبار در جهت مثلثاتی طی می‌شود بدست آورید



$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -2 \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y \end{cases}$$

اگر گفته بود n بار در جهت مثلثاتی جواب انتگرال را در n ضرب می‌کردیم

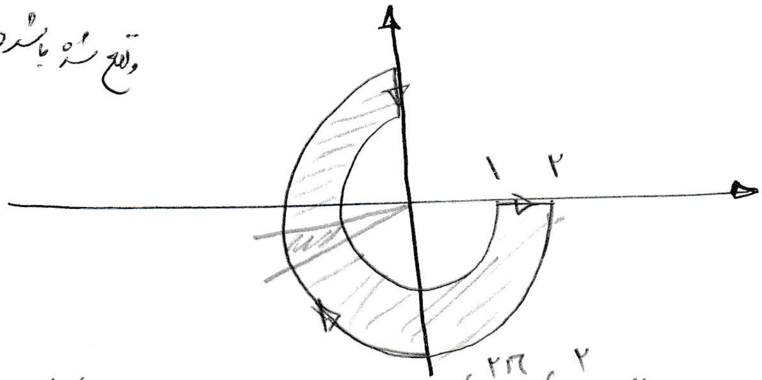
گرین: $\iint_D (2y-(-2))\,dx\,dy = 2\int_0^1\int_{-2x}^{1} (y+1)\,dx\,dy = 2\int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}+y\Big|_{-2x}^{1}\right)dx$

$= 2\int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(2x^2-2x\right)\right)dx = 2\left(\frac{3}{2}x - 2\times\frac{x^3}{3} + 2\times\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{11}{3}$

حاصل انتگرال $\oint_C \underbrace{(x^2y+x^3)}_{P}\,dx+\underbrace{(y^3-xy^2)}_{Q}\,dy$ که در آن C مسیر مشخص شده در شکل زیر است را بدست آورید (منحنی‌ها دایره‌ای می‌باشند)

* هنگامی که روی مسیر مشخص شده حرکت می‌کنیم اگر ناحیه در سمت چپمان واقع شده باشد در جهت مثلثاتی و در نتیجه در جهت گرین در حال حرکتیم

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -y^2 \end{cases}$$



گرین: $-\iint_D (-y^2-x^2)\,dx\,dy = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\int_1^2 r^2\times r\,dr\,d\theta$

خلاف جهت گرین (مثلثاتی)

$= \left(\frac{r^4}{4}\Big|_1^2\right)\left(\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\right) = \left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{15}{4}\times\frac{3\pi}{2} = \boxed{\frac{45\pi}{8}}$

اگر تابع $\phi(x,y)$ تابعی هارمونیک باشد و C دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a باشد

و تابع ϕ و مشتقات جزئی آن تا دو مرتبه‌ای پیوسته باشند، حاصل

$$\oint_C \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial y}}_{P}dx-\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x}}_{Q}dy$$

کدام است؟

۱) صفر ۲) πa^2 ۳) $2\pi a$ ۴) a^2

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

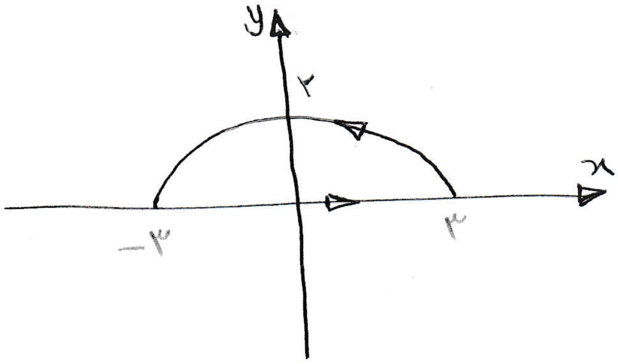
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

$$2\circ I=\iint_D\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)dxdy=-\iint_D\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)dxdy$$

$$=-\iint_D \underbrace{\nabla^2\varphi}_{0}\cdot dxdy=0$$

لاپلاسین تابع هارمونیک صفر است

حاصل $\oint_C \underbrace{(3y-4x^2)}_{P}dx+\underbrace{(\cos x+y^2)}_{Q}dy$ که در آن C مسیر بسته‌ای بوده که از بالا روی نیم بیضی $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ و از پایین روی محور xها یکبار در جهت ساعتگرد حرکت می‌کند را بدست آورید



$$\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial y}=3\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-\sin x\end{cases}$$

* اگر $p(x)$ تابعی فرد باشد و ناحیه D نسبت به محور y متقارن باشد آنگاه $\iint_D p(x)dxdy$ صفر خواهد شد. مشابه اگر $p(y)$ تابعی فرد باشد و ناحیه D نسبت به محور x متقارن باشد آنگاه $\iint_D p(y)dxdy$ صفر خواهد شد

$$=\iint_D(-\sin x-3)dx.dy=-\iint_D(3+\sin x)dx.dy$$

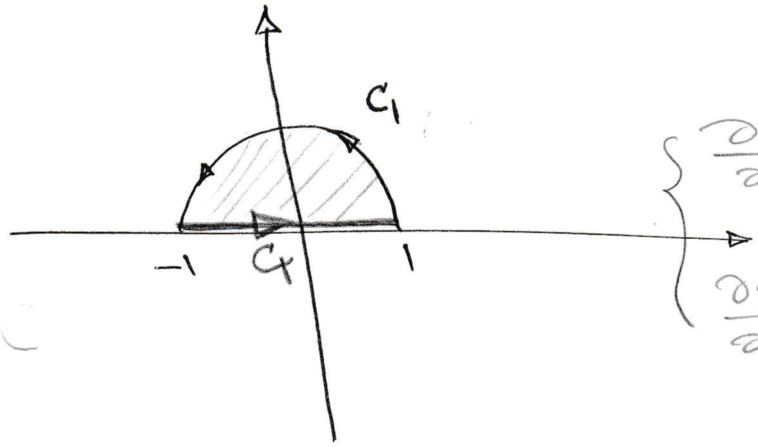
$$=-\iint_D 3dxdy-\iint_D \sin x dxdy=-3*S_{\text{نیم بیضی}}-\iint_D \cancel{\sin x}\,dxdy$$

0

صفر (از این صفحه ۱۷) تابع فرد است

$-۳ \times \frac{۱}{۲}\pi ab = -۳\times\frac{۱}{۲}\pi\times ۳\times ۲ = -۹\pi$

حاصل $I=\int_C \underbrace{(e^{۲y}\cos x+۳y)}_{P}dx+\underbrace{(۲e^{۲y}\sin x-۲x)}_{Q}dy$ که در آن C نیم‌دایره‌ی بالائی از دایره‌ی $x^۲+y^۲=۱$ بوده که از نقطه $(۱,۰)$ تا نقطه $(-۱,۰)$ را طی می‌کند کدام است؟



$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = ۲e^{۲y}\cos x+۳ \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = ۲e^{۲y}\cos x-۲ \end{cases} \longrightarrow \text{مشتق نسبی}$$

حالا: مسیر را خودمان می‌بندیم

$$I = \underbrace{\oint_{C_۱+C_۲}}_{\text{گرین}} - \int_{C_۲}$$

$$\oint_{C_۱+C_۲} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D -۵\, dxdy = -۵\times S_{\text{نیم دایره}} = -۵\times\frac{\pi r^۲}{۲}$$

$$= -\frac{۵}{۲}\times\pi\times ۱^۲ = -\frac{۵\pi}{۲}$$

$$\int_{C_۲} = \int_{C_۲}\cos x\,dx = \int_{-۱}^{۱}\cos x\,dx = \sin ۱-\sin(-۱) = ۲\sin ۱$$

$C_۲: y=۰ \rightarrow dy=۰$

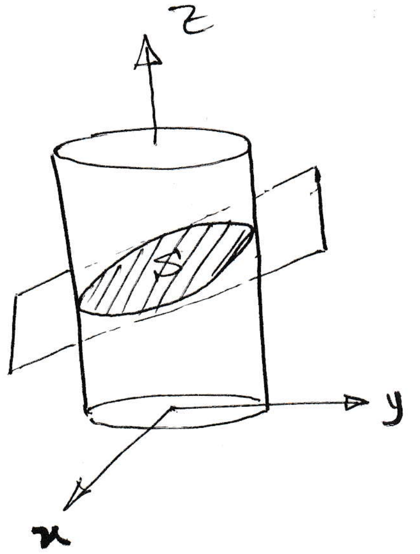
$$\rightarrow I = -\frac{۵\pi}{۲} - ۲\sin ۱$$

$ds = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy$ نوع اول

انتگرالهای سطحی السطح

$$\boxed{ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\; dxdy}$$

مساحت حاصل از تقاطع استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ که توسط صفحهٔ $x + 2y + z = 4$ ایجاد می‌شود را بدست آورید



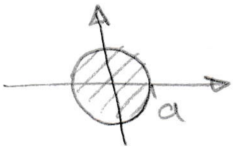
ds المان سطح است روی صفحهٔ مقطعی

$$S = \iint_S 1\, dS = \iint_D 1 * \sqrt{6}\; dx \cdot dy$$

$$x + 2y + z = 4 \longrightarrow z = 4 - x - 2y$$

$$\Rightarrow dS = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-2)^2}\; dxdy$$

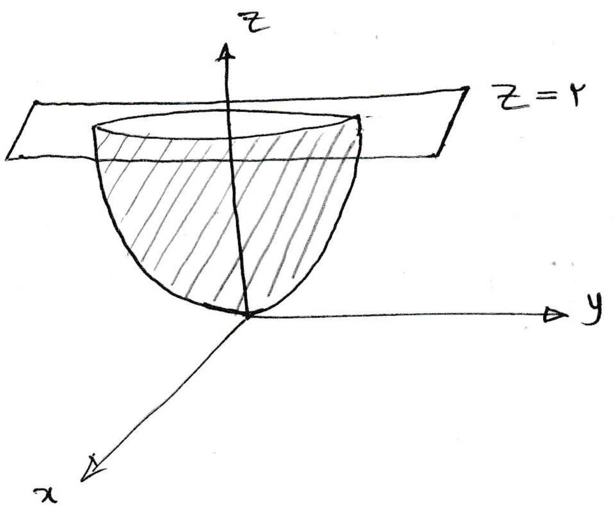
$$dS = \sqrt{6}\; dxdy$$



D: تصویر سطح مقطعی که در صفحهٔ xy که $\longleftarrow$ $\underline{D : x^2 + y^2 = a^2}$

$$S = \sqrt{6} \iint_D dxdy = \sqrt{6} * S_{\text{دایره}} = \underline{\sqrt{6} * \pi \cdot a^2}$$

مساحت سطح رویه $z = x^2 + y^2$ که زیر صفحهٔ $z = 2$ قرار می‌گیرد را بدست آورید



$$S = \iint_S 1 \cdot dS$$

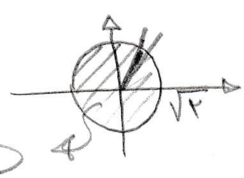
$$z = x^2 + y^2$$

$$dS = \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\; dxdy$$

$$dS = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\; dx \cdot dy$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\; \cdot dx \cdot dy$$

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 \end{cases} \longrightarrow D : x^2 + y^2 = 2$$

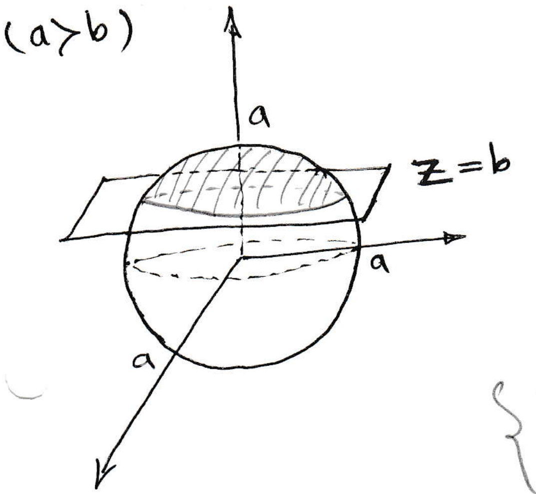


$$S=\iint_D \sqrt{1+4r^2}\cdot r\cdot dr\cdot d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}\,dr\cdot d\theta$$

$$=\left(\frac{1}{8}\times\frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)=\left(\frac{1}{12}\times(27-1)\right)(2\pi-0)=\frac{13}{6}\times 2\pi=\boxed{\frac{13\pi}{3}}$$

مثال: مساحت روی کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ که بالای صفحه $z=b$ قرار می‌گیرد را بدست آورید

$(a>b)$

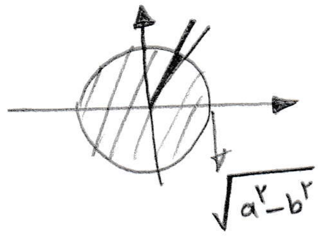


$$S=\iint_S 1\cdot dS=\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\cdot dy$$

$$dS=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z=b \end{cases} \longrightarrow x^2+y^2+b^2=a^2$$

$$x^2+y^2=a^2-b^2$$



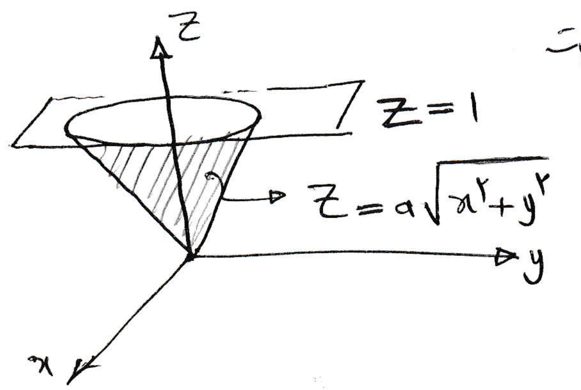
$$R=\sqrt{a^2-b^2}$$

۲ـ $S=\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\cdot dr\cdot d\theta = a\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot dr\cdot d\theta$

$$=a\left(-\frac{1}{2}\times\frac{(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\sqrt{a^2-b^2}}\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)$$

$=-a(b-a)(2\pi-0)=$ $\boxed{2\pi a(a-b) \quad \text{فرمول مساحت عرقچین کروی}}$ **

حاصل انتگرال دوگانه روی سطح (منحنی السطح) $\iint_S z^2 ds$ که در آن S سطح بسته‌ای می‌باشد که از پایین روی مخروط $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ و از بالا روی صفحه $z=1$ می‌باشد کدام است



ناحیه نسبت به محورها منتظم نیست

پس از ds نمی‌توانیم استفاده کنیم

II $I=\iint_S z^2\,ds=\iint_{S_1} z^2\,ds+\iint_{S_2} z^2\,ds$

$S_1 \equiv z=1$

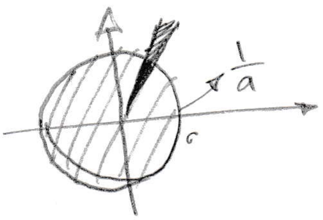
$S_2: z=a\sqrt{x^2+y^2}$ هرکدام از این سطوح را صریح نسبت به z منظم اند

$\Rightarrow ds=\sqrt{1+0+0}\,dx\,dy$

$\Rightarrow ds=\sqrt{1+a^2}\,dx\,dy$

$\Rightarrow I=\iint_{D_1} 1^2\sqrt{1+0+0}\,dx\,dy+\iint_{D_2} a^2(x^2+y^2)\sqrt{1+a^2}\,dx\,dy$

$\begin{cases} z=1 \\ z=a\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \longrightarrow a\sqrt{x^2+y^2}=1 \Rightarrow D_1=D_2=x^2+y^2=\frac{1}{a^2}$



D_1 تصویر دایره روی xy است

D_2 تصویر مخروط روی xy است که هر دوشان دایره هستند

$I=\iint_D dx\,dy+\iint_D a^2\sqrt{1+a^2}\,(x^2+y^2)\,dx\,dy = S_{\text{ناحیه } D}+a^2\sqrt{1+a^2}\iint_D r^2\cdot r\,dr\,d\theta$

$=\pi\left(\frac{1}{a}\right)^2+a^2\sqrt{1+a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{a}} r^3\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{a^2}+a^2\sqrt{1+a^2}\times\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{a}}\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)$

$=\frac{\pi}{a^2}+\frac{\pi}{2a^2}\sqrt{1+a^2}=\frac{\pi}{a^2}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{1+a^2}\right)$

انتگرال‌های سطحی العسطح نوع دوم (شار یک میدان برداری)

هیچ تفاوتی با نوع اول ندارد

* مقدار شار ایجاد شده توسط میدان برداری $\vec{F} = z\hat{j} + y\hat{k}$ که از سطح رویه $z = x^2 + y$

توسط صفحات $x=0$ ، $y=0$ و $x+y=1$ بریده می‌شود عبور می‌کند کدام است.

$\vec{n}$: بردار یکه عمود بر سطح

شار ایجاد شده : $I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$

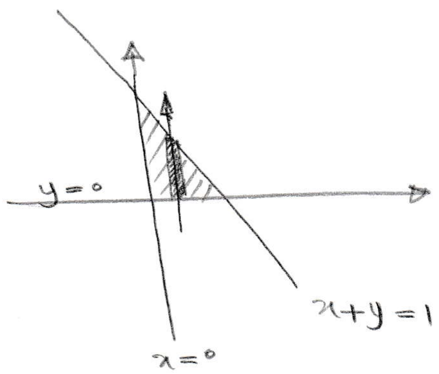
$$G : x^2 + y - z = 0 \qquad \vec{\nabla} G = 2x\hat{i} + 1\hat{j} - 1\hat{k}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} G}{|\vec{\nabla} G|} = \frac{2x\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{4x^2 + 1 + 1}} \qquad dS = \sqrt{1 + (2x)^2 + (1)^2} \, dx\,dy$$

$$I = \iint_D (z\hat{j} + y\hat{k}) \cdot \frac{2x\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{4x^2+2}} \times \sqrt{4x^2+2} \, dx\,dy$$

$$= \iint_D (0 + z - y)\, dx\,dy = \iint_D (x^2 + y - y)\, dx\,dy = \iint_D x^2 \, dx\,dy$$

$$D : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$



$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 \, dy\,dx = \int_0^1 \left(y\Big|_0^{1-x} \right) x^2 \, dx = \int_0^1 (1-x)\, x^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{12}}$$

* قضیه استوکس *

مثال: حاصل $\oint_C y^2dx+zdy+x^2dz$ که در آن C منحنی حاصل از تقاطع استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ و صفحه‌ی $2x+y+z=5$ باشد را بدست آورید

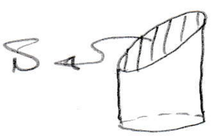
هرگاه منحنی الخط دیدی که dz دارد مستقیماً سراغ قضیه استوکس می‌رویم چون در قضیه گرین dz نداریم:

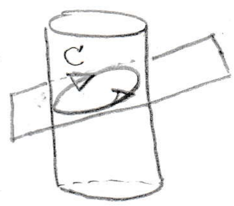
* نکته: هرگاه انتگرال منحنی الخط نوع دوم روی مسیر بسته که dz دارد $(\oint_C Pdx+Qdy+Rdz)$ مد نظر مساله بود. سطحی باشیم که با رفتار منحنی الخط گونه قابل حل نبوده بجای آن با استفاده از قضیه استوکس انتگرال منحنی السطح $\iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$ را حساب می‌کنیم، و بالعکس.

$$\iint_S \text{Curl}\,F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\vec{F}=y^2\hat{i}+z\hat{j}+x^2\hat{k}$$

$$C:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+y+z=5 \end{cases}$$





$$\Rightarrow I=\oint_C y^2dx+zdy+x^2dz=\iint_S(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$$

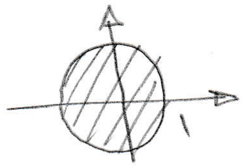
$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z & x^2 \end{vmatrix}=i(0-1)-j(2x-0)+\hat{k}(0-2y)$$

$$G:2x+y+z-5=0 \qquad \vec{n}=\frac{\vec{\nabla}G}{|\vec{\nabla}G|}=\frac{2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{4+1+1}}$$

$$z=5-2x-y\to dS=\sqrt{1+(-2)^2+(-1)^2}\,dx\,dy$$

$$I=\iint_D(-i-2x\,j-2y\,k)\cdot\frac{2i+j+k}{\sqrt{6}}*\sqrt{6}\,dx\,dy=\iint_D(-2-2x-2y)\,dx\,dy$$

$D: x^2+y^2=1$



$$I=-2\iint_D dx\,dy-2\iint_D \cancel{x}\,dx\,dy-2\iint_D \cancel{y}\,dx\,dy=-2*S_D$$

ناحیه

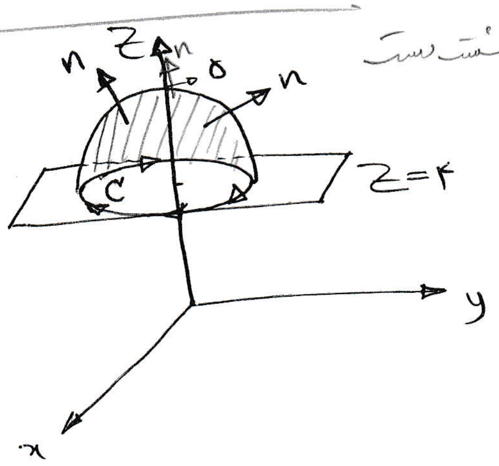
0 — $f(x)=x$ تابع فرد است و نسبت به y متقارن است

0 — $f(y)=y$ فرد است و نسبت به x متقارن است

$$=-2*\pi*1^2=\underline{-2\pi}$$

حاصل انتگرال سطحی السطح $\iint_S(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,ds$ که در آن F یک میدان برداری به صورت $\vec{F}=(z^2-y^3)\hat{i}+(x^3)\hat{j}+x^2yz^3\hat{k}$ ، و n بردار قائم یکه عمود به سمت خارج سطح روی کره $x^2+y^2+(z-4)^2=1$ بوده که بالای صفحه $z=4$ قرار می‌گیرد را بدست آورید

به طور کلی: یعنی انتگرال سطح را به خطی اندازیم



جهت شست دست

در جهت مثبت گرین هستیم

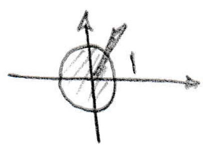
$$\begin{cases} z=4 \\ x^2+y^2+(z-4)^2=1 \end{cases}$$

$$D: x^2+y^2=1$$

$$\iint_S(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,ds=\oint_C(z^2-y^3)\,dx+x^3dy+(x^2yz^3)dz$$

$$=\oint_C\underbrace{(16-y^3)}_{P}dx+\underbrace{x^3}_{Q}dy+0=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

قضیه گرین



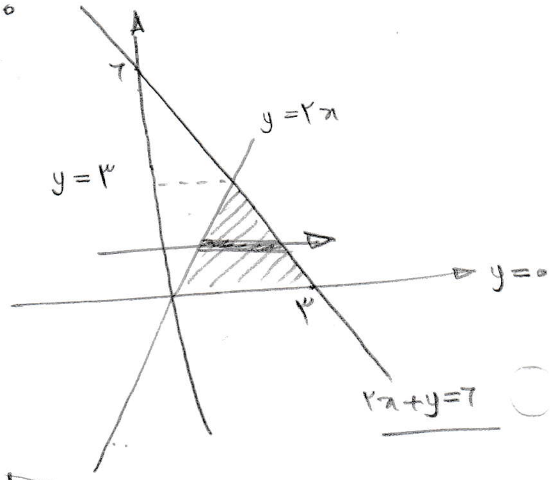
$$=\iint_D(3x^2-(-3y^2))\,dx\,dy=3\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2*r\,dr.d\theta=3\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{3\pi}{2}$$

حجم محصور شده به رویه‌های مقابل با کدام انتگرال قابل بیان است

$$\begin{cases} 2x+y+3z=6 \\ y=2x \\ z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

حجم $V=\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_0^{\frac{6-2x-y}{3}} 1\,dz$

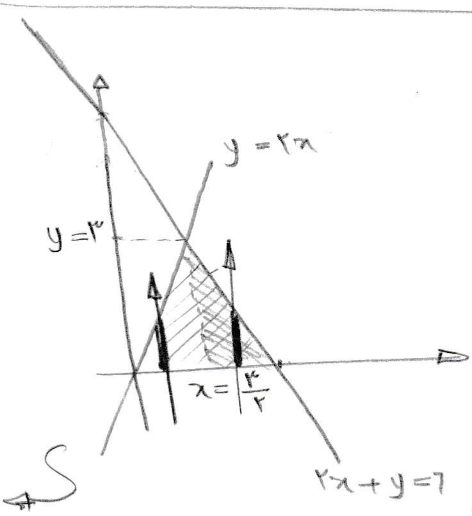


ناحیه D در صفحه xy : $\begin{cases} y=2x \\ y=0 \\ 2x+y=6 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=2x \to x=y/2 \\ 2x+y=6 \end{cases}$$

$$2\times\frac{y}{2}+y=6 \to 2y=6 \to \boxed{y=3}$$

$$V=\int_0^3\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{6-y}{2}}\int_0^{\frac{6-2x-y}{3}} 1\,dz\cdot dx\cdot dy$$

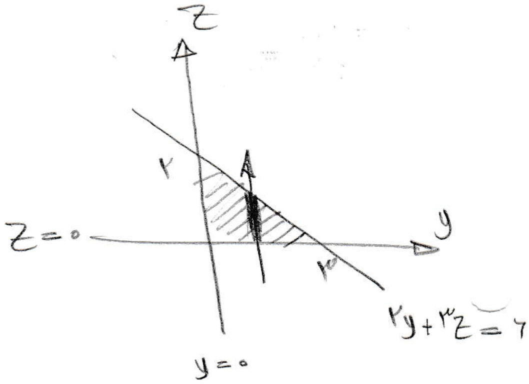


$$V=\int_0^{\frac{3}{2}}\int_0^{2x}\int_0^{\frac{6-2x-y}{3}} 1\,dz\,dy\,dx$$

$$+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\int_0^{6-2x}\int_0^{\frac{6-2x-y}{3}} 1\,dz\,dy\,dx$$

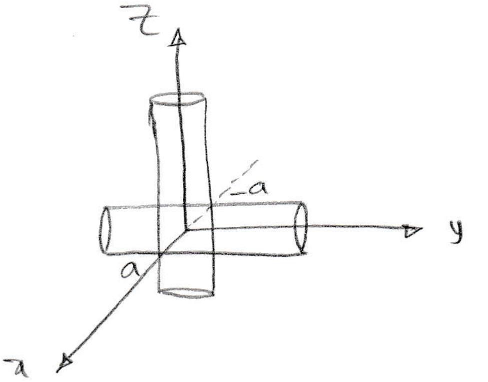
یک حالت دیگر

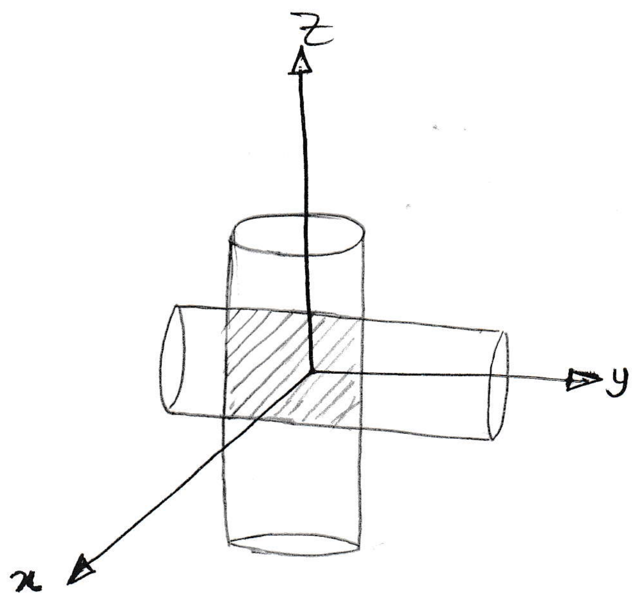
ناحیه D تصویر در صفحه yz است $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ 2y+3z=6 \end{cases}$



۲. $V=\int_0^3\int_0^{\frac{6-2y}{3}}\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{6-y-3z}{2}} 1\,dx\,dz\,dy$

مثال: حجم محصور شده به استوانه‌های $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$ را بدست آورید





$$V=\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 1\,dz\,dy\,dx$$

$$\Rightarrow V=8\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} 1\,dz\,dy\,dx = 8\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(z\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dy\,dx$$

$$=8\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\left(y\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx = 8\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = 8\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a$$

$$=8*\frac{2a^3}{3}=\boxed{\frac{16}{3}a^3}$$

مثال: حاصل $\iiint_V (x^3+\sin z+5)\,dx\,dy\,dz$ که در آن V ناحیه فضائی درون کره

$$V= x^2+y^2+z^2=a^2$$

می‌باشد را بدست آورید.

$$\underbrace{\iiint_V x^3\,dx\,dy\,dz}_{0} + \underbrace{\iiint_V \sin z\,dx\,dy\,dz}_{0}$$

صفر

تابع فرد و نسبت به صفحه yz متقارن است

تابع فرد و نسبت به صفحه xy متقارن

$$+\iiint_V 5\,dx\,dy\,dz$$

$$=5*V_{\text{حجم کره}}=\boxed{5*\frac{4}{3}\pi a^3}$$