فصل ششم

انتگرال برداری

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۲

AvaEducation16.blog.ir
AvaEducation16@gmail.com
@AvaEducation16
@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی @AvaEducation16 نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - **بسیار ساده** جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
  - **ساده** جهت تثبیت مطالب
  - **متوسط** جهت تمرین بیشتر مطالب
  - **سخت** جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

فهرست مطالب

پیشگفتار

این فایل شامل مطالب کلاس ریاضی ۲ دانشگاه است که در ترم‌های گذشته تدریس شده و در سایت teacher16.blog.ir ارائه شده بود. اکنون به جهت استفاده عمومی در دسترس مخاطبان خواهد بود. در انتهای فایل، تمریناتی جهت خود ارزیابی دانشجویان اضافه شده که حل آن‌ها بسیار توصیه می‌گردد. لازم به ذکر است فایل حل تمرینات در زمان مناسب در سایت قرار می‌گیرد. با آرزوی آنکه مطالب ارائه شده برای دانشجویان محترم مفید باشد.

۱ مقدمه

تاکنون انتگرال روی یک بازه، سطح یا حجم تعریف شده است. در این فصل انتگرال بر روی خم‌ها و رویه‌ها با توجه به برخی ویژگی‌های برداری ارائه خواهد شد. همچنین تابع مورد انتگرال نیز می‌تواند اسکالر یا برداری باشد. بدین منظور نیاز است توابع برداری و برخی عملیات برداری تعریف شوند و سپس به انتگرال روی خم‌ها و رویه‌ها پرداخته می‌شود. در نهایت انتگرال میدان برداری و انتگرال روی رویه (سطح) معرفی شده و دو قضیه مهم مربوط به انتگرال برداری ارائه خواهد شد.

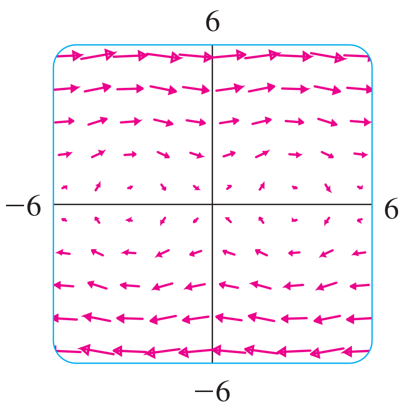
۲ میدان برداری و گرادیان

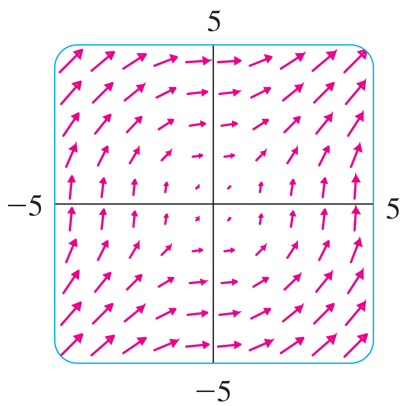
تعریف: به تابع $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ یک میدان برداری گفته می‌شود.

میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ تابع F است که هر نقطه (x,y,z) را به یک بردار سه-بعدی $F(x,y,z)$ نگاشت می‌کند. در حالت سه-بعدی می‌توان میدان برداری را به صورت زیر تعریف کرد:

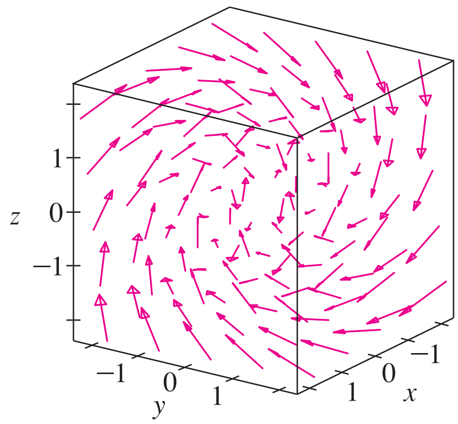
$$F(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{k}$$

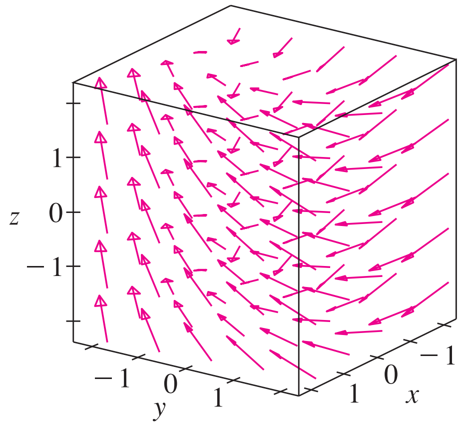
میدان‌های برداری می‌توانند در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ با ضابطه مربوط به خود تعریف شوند. در شکل‌های زیر میدان برداری دو-بعدی به ترتیب از چپ به راست با ضابطه $F=(y,\sin x)$ و $F=\left(\ln(1+y^2),\ln(1+x^2)\right)$ نمایش داده شده‌اند.





مثال‌هایی از میدان برداری سه-بعدی به ترتیب چپ به راست با ضابطه $F=(y,z,x)$ و $F=(y,-2,x)$ نمایش داده شده‌اند.





بردارهای موجود در شکل‌ها طوری رسم شده‌اند که ابتدای بردار با نقطه (x,y,z) مشخص می‌شود. اندازه و راستای بردار با تابع F تعیین می‌گردد. به عنوان مثال خروجی میدان برداری $F(x,y)=(x^2,x+yz,x+2z)$ در نقطه $(0,2,-1)$ برداری است که از نقطه $(0,2,-1)$ آغاز شده و مقدار بردار $(0,-2,-2)$ است. در نتیجه به نقطه $(0,0,-3)$ خواهد رسید.

$$\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{AB}=(0,2,-1)+(0,-2,-2)=(0,0,-3)$$

تعریف: برای تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ میدان گرادیان به صورت $\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$ تعریف می‌شود.

مثال ۱ میدان گرادیان را برای تابع $f(x,y,z)=x\cos(\frac{y}{z})$ در نقطه $(1,\pi,2)$ بدست آورید.

پاسخ:

$$\nabla f(x,y,z)=\begin{bmatrix}\cos(\frac{y}{z})\\ -\frac{x}{z}\sin(\frac{y}{z})\\ \frac{xy}{z^2}\sin(\frac{y}{z})\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\nabla f(1,\pi,2)=\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{\pi}{4}\end{bmatrix}$$

۳ کرل و دیورژانس

تعریف: اگر $F=(F_1,F_2,F_3)$ یک میدان برداری باشد، کرل یا curl یا چرخش F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{curl}(F)=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}$$

تعریف: اگر $F=(F_1,F_2,F_3)$ یک میدان برداری باشد، دیورژانس div یا چگالی شار میدان F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div}(F)=\nabla.F=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

تعریف: اگر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ یک میدان اسکالر باشد، لاپلاسین f عبارت است از دیورژانس گرادیان:

$$\nabla^2 f=\nabla.(\nabla f)=\operatorname{div}(\nabla f)$$

نکته: دو رابطه زیر به ترتیب برای میدان‌های اسکالر و برداری برقرارند.

- کرل گرادیان:

$$\operatorname{curl}(\nabla f)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla\times\nabla f=0$$

- دیورژانس کرل:

$$\operatorname{div}\Big(\operatorname{curl}(F)\Big)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla.(\nabla\times F)=0$$

مثال ۲ مقدار curl را در تابع برداری $\vec{F}(x,y,z)=xy\sqrt{z}\hat{i}+\sin y\hat{j}+e^{-\frac{1}{z^2}}\hat{k}$ بدست آورید.

پاسخ:

$$\operatorname{curl}(F)=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy\sqrt{z} & \sin y & e^{-\frac{1}{z^2}}\end{vmatrix}=(0,\frac{xy}{2\sqrt{z}},-x\sqrt{z})$$

مثال ۳ اگر $\vec{A}(x,y,z) = xy^2\hat{i} + 2x^2yz\hat{j} - 3yz^2\hat{k}$ باشد، دیورژانس A را در نقطه $(1,1,0)$ بدست آورید.

پاسخ:

$$\operatorname{div}(A) = \nabla . A = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = y^2 + 2x^2z - 6yz$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div}(A)\Big|_{(1,1,0)} = 1$$

مثال ۴ مقدار curl و دیورژانس را برای تابع برداری $\vec{F}(x,y,z) = \cos xy\hat{i} - \sqrt{x^2+z^2}\hat{j} + 3x^2yz\hat{k}$ بدست آورید.

پاسخ: بر اساس رابطه کرل داریم:

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = &\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos xy & -\sqrt{x^2+z^2} & 3x^2yz \end{vmatrix} \\
=&\hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(3x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2+z^2}\right) \\
&- \hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(3x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}\cos xy\right) \\
&+ \hat{k}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+z^2} - \frac{\partial}{\partial y}\cos xy\right) \\
=&\hat{i}\left(3x^2z + \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) - \hat{j}\left(6xyz\right) + \hat{k}\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} + x\sin xy\right)
\end{aligned}$$

برای بدست آوردن دیورژانس بر اساس تعریف عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla . \vec{F} = &\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos xy & -\sqrt{x^2+z^2} & 3x^2yz \end{bmatrix} \\
=&\frac{\partial}{\partial x}\cos xy - \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial z}3x^2yz \\
=&-y\sin xy + 3x^2y
\end{aligned}$$

۴ انتگرال روی خم

اگر α خمی قطعه‌ای هموار (α' پیوسته و ناصفر) باشد و $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ تعریف شود، انتگرال f روی خم α وقتی تابعی از t باشد به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\int_\alpha f\mathrm{d}s=\int_a^b f\Big(\alpha(t)\Big)|\alpha'(t)|\mathrm{d}t$$

که در آن

$$\alpha(t)=\Big(x(t),y(t),z(t)\Big),\qquad \mathrm{d}s=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

نکته: در روند پارامتری کردن، تمام متغیرها به یک متغیر وابسته می‌شوند.

نکته: اگر یک خم بسته باشد یا به عبارت دیگر تشکیل یک مسیر بسته بدهد، انتگرال تابع f روی خم با علامت زیر نیز نمایش داده می‌شود:

$$\oint_\alpha f\mathrm{d}s$$

۱.۴ پارامتری کردن خم

در این بخش نکاتی درباره پارامتری کردن خم ذکر می‌شود. البته در مورد تمام مسیرها و خم‌ها نمی‌توان از این روش استفاده کرد، اما بیشتر مسیرها را پوشش می‌دهد. چهار نوع مسیر اصلی که پارامتری کردن آن‌ها بیان می‌شود به شرح زیر هستند:

الف- پاره خط بین دو نقطه A و B:

$$\vec{\alpha}(t)=(1-t)\vec{A}+t\vec{B},\qquad 0\le t\le 1$$

ب- تابع $y=f(x)$:

$$x=t,\ y=f(t),\qquad \vec{\alpha}=\Big(t,f(t),0\Big)\qquad x_0\le t\le x_1$$

ج- تابع $x=g(y)$:

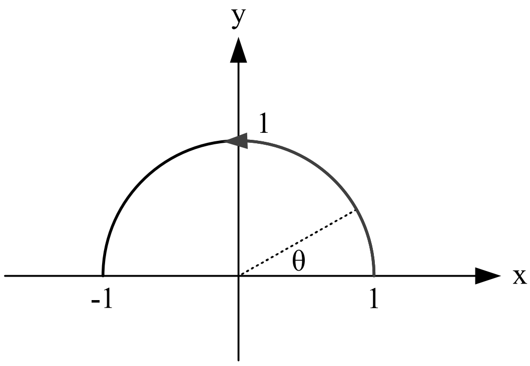
$$y=t,\ x=g(t),\qquad \vec{\alpha}=\Big(g(t),t,0\Big)\qquad y_0\le t\le y_1$$

د- مسیر دایروی به شعاع r و مرکز z_0: $\quad x=x_0+r\cos\theta,\ y=y_0+r\sin\theta$

ه- مسیر بیضوی به شعاع‌های a و b و مرکز مبدا:

$$x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta$$

مثال ۵ حاصل $\int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}s$ را که در آن C مسیری به صورت شکل زیر است بدست آورید.




پاسخ:

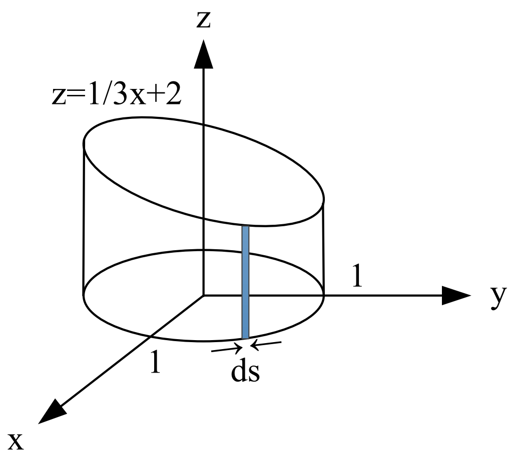
$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\alpha}' = (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \quad \Rightarrow \quad |\vec{\alpha}'| = 1$$

$$\int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}s = \int_0^{\pi} 1\mathrm{d}\theta = \pi$$

مثال ۶ مساحت قسمتی از استوانه $x^2+y^2=1$ را که زیر $z=\frac{1}{3}x+2$ و بالای $z=0$ قرار دارد بدست آورید.


پاسخ: مساحت مورد نظر از ضرب عنصر دیفرانسیلی روی دایره تصویر شده بر صفحه xy در مقدار ارتفاع آن بخش بدست می‌آید.



با پارامتری کردن مسیر خواهیم داشت:

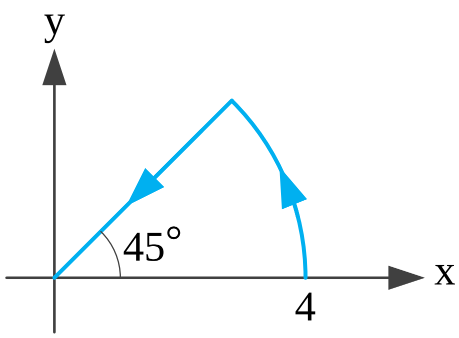
$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\alpha}' = (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \quad \Rightarrow \quad |\vec{\alpha}'| = 1$$

$$S = \int_C z\mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow \quad S = \int_C (\frac{1}{3}x + 2)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{3}\cos\theta + 2)\mathrm{d}\theta = 4\pi$$

مثال ۷ انتگرال $\int_C (x - 3y)\mathrm{d}s$ را که در آن C مانند شکل زیر، بخشی از یک دایره و خط است، بدست آورید.



پاسخ: باید این مسیر به دو خم تبدیل شود. خم اول بخشی از دایره است و خم دوم یک پاره‌خط می‌باشد. این دو خم را به ترتیب با C_1 و C_2 نشان می‌دهیم. برای خم C_1 با توجه به پارامتری کردن مسیر داریم:

$$x = 4\cos\theta,\ y = 4\sin\theta, \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} = (4\cos\theta, 4\sin\theta, 0)$$

می‌دانیم:

$$\int_C f\mathrm{d}s = \int_a^b f\big(\vec{\alpha}(t)\big)|\vec{\alpha}'(t)|\mathrm{d}t$$

اکنون برای خم اول داریم:

$$\vec{\alpha} = (4\cos\theta, 4\sin\theta, 0), \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha}' = (-4\sin\theta, 4\cos\theta, 0)$$

در نتیجه اندازه بردار به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\Rightarrow \quad |\vec{\alpha}'| = \sqrt{(-4\sin\theta)^2 + (4\cos\theta)^2 + 0^2} = 4$$

با دانستن اندازه بردار، رابطه انتگرال بر خم اول به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (4\cos\theta - 12\sin\theta)(4\mathrm{d}\theta) = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta - 3\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 16(\frac{\sqrt{2}}{2} + 3(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1))$$

$$\Rightarrow \quad \int_{C_1} f\mathrm{d}s = 32\sqrt{2} - 48$$

برای خم دوم داریم:

$$\vec{\alpha}(t) = (1-t)\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = 2\sqrt{2}(1-t), \quad y(t) = 2\sqrt{2}(1-t), \quad \vec{\alpha}'(t) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

اندازه بردار مشتق مسیر به صورت زیر است:

$$\Rightarrow \quad |\vec{\alpha}'| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2 + 0^2} = 4$$

با دانستن اندازه بردار، رابطه انتگرال بر خم دوم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_0^1 \big(2\sqrt{2}(1-t) - 6\sqrt{2}(1-t)\big)(4\mathrm{d}t) = 8\sqrt{2}\int_0^1 (2t-2)\mathrm{d}t = 8\sqrt{2}\big(1-2\big) = -8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{C_2} f\mathrm{d}s = -8\sqrt{2}$$

در نهایت پاسخ انتگرال از مجموع دو انتگرال روی خم‌های مجزا بدست می‌آید.

$$\Rightarrow \quad \int_C f\mathrm{d}s = \int_{C_1} f\mathrm{d}s + \int_{C_2} f\mathrm{d}s = 24\sqrt{2} - 48$$

۵ انتگرال میدان برداری روی خم

برای حالتی که تابع مورد انتگرال به صورت برداری باشد، مانند حالت قبل مسیر را پارامتری کرده و این بار از ضرب داخلی مشتق مسیر در میدان برداری استفاده می‌شود:

$$\int_\alpha F.\mathrm{d}r = \int_a^b F\big(\alpha(t)\big).\alpha'(t)\mathrm{d}t$$

مثال ۸ انتگرال $F(x,y,z) = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ را روی منحنی به پارامتر $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ به ازای $0 \leq t \leq 1$ بدست آورید.

پاسخ: با جایگذاری خم در تابع برداری داریم:

$$F = t^3\hat{i} + t^5\hat{j} + t^4\hat{k}$$

برای مشتق خم داریم:

$$\alpha' = (1, 2t, 3t^2)$$
$$\Rightarrow \quad \int F.\mathrm{d}r = \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\mathrm{d}t = \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{27}{28}$$

قضیه گرین: اگر α خمی باشد که ناحیه D را محصور می‌کند (خم بسته باشد) و در جهت مثلثاتی می‌باشد و $\vec{F} = (F_1, F_2)$ یک میدان برداری پیوسته باشد، آنگاه

$$\oint_\alpha F.\mathrm{d}r = \oint_\alpha F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y = \iint (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\mathrm{d}A$$

مثال ۹ حاصل $\oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ را که در آن C یک بیضی با رابطه $y^2 = 4x - 4x^2$ است، بدست آورید.

پاسخ: با توجه به قضیه گرین،

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$$
$$\Rightarrow \quad \oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \iint 2\mathrm{d}A = 2A$$

منظور از A مساحت سطح محصور به خم است. در اینجا خم داده شده یک بیضی است. پس باید مساحت بیضی محاسبه شود. با نوشتن معادله بیضی در حالت استاندارد داریم:

$$4x^2 - 4x + y^2 \pm 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad 4(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1$$

می‌دانیم مساحت بیضی با رابطه $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ برابر است با πab. در نتیجه برای این بیضی داریم:

$$A = \pi ab = \pi(\frac{1}{2})(1) = \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \quad \oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 2A = \pi$$

مثال ۱۰ انتگرال میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = yz\hat{i} + y^2 \sin z\hat{j} - 4z\hat{k}$ را بر مسیر پارامتری (خم پارامتری) $\vec{\alpha}(t) = (\sin t, 1, -\cos t)$ در بازه $0 \le t \le \pi$ بدست آورید.

پاسخ: رابطه انتگرال یک میدان برداری بر مسیری خاص به صورت زیر است:

$$\int_\alpha F.\mathrm{d}r = \int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)).\vec{\alpha}'(t)\mathrm{d}t$$

با مشتق گرفتن از مسیر داریم:

$$\vec{\alpha}'(t) = (\cos t, 0, \sin t)$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \int_\alpha F.\mathrm{d}r &= \int_0^\pi \vec{F}(\sin t, 1, -\cos t).(\cos t, 0, \sin t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \begin{bmatrix} -\cos t & \sin(-\cos t) & 4\cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos t & 0 & \sin t \end{bmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (-\cos^2 t + 4\cos t \sin t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (-\frac{1+\cos 2t}{2} + 2\sin 2t)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

مثال ۱۱ حاصل $\oint_C y^3\mathrm{d}x - x^3\mathrm{d}y$ را وقتی که C یک خم دایره‌ای شکل به مرکز $(0,0)$ و شعاع 2 است، بدست آورید.

پاسخ: برای این نوع انتگرال از قضیه گرین استفاده می‌شود:

$$\oint_C F.\mathrm{d}r = \oint_C F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$$

در رابطه فوق D مساحت داخل خم C می‌باشد.

$$\Rightarrow \quad \oint_C y^3\mathrm{d}x - x^3\mathrm{d}y = \iint_D (-3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}A$$

برای حل این انتگرال دوگانه از تغییر متغیر $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ استفاده می‌شود. با توجه به این تغییر متغیر قطبی

$$
\begin{aligned}
\iint_D (-3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -3r^2(r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta) \\
&= -\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\left[r^4\right]_0^2 \mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{3}{4}(2\pi)(16) = -24\pi
\end{aligned}
$$

مثال ۱۲ حاصل $\oint_C (y+e^{\sqrt{x}})\mathrm{d}x + (2x+\cos y^2)\mathrm{d}y$ را وقتی که C مرزی است که توسط دو نمودار $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ محدود می‌شود، بدست آورید.

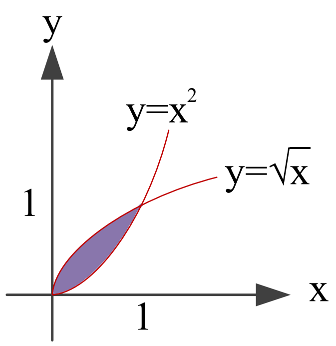
پاسخ: برای این نوع انتگرال از قضیه گرین استفاده می‌شود:

$$\oint_C F.\mathrm{d}r = \oint_C F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$$

در رابطه فوق D مساحت داخل خم C می‌باشد.

$$\Rightarrow \quad \oint_C (y+e^{\sqrt{x}})\mathrm{d}x + (2x+\cos y^2)\mathrm{d}y = \iint_D (2-1)\mathrm{d}A = \iint_D \mathrm{d}A = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

اکنون باید مساحت بین این دو نمودار را که به صورت شکل زیر است، بدست آورد.



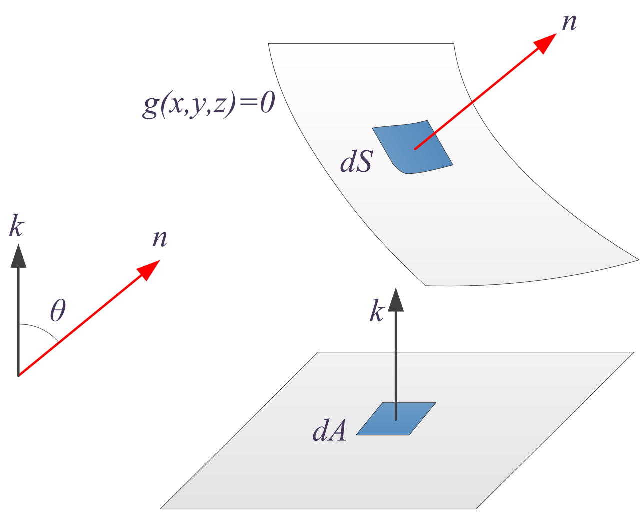
$$\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

۶ انتگرال میدان برداری روی سطح

انتگرال میدان برداری روی سطح که شار میدان برداری $\vec{F}$ در جهت بردار $\vec{n}$ نیز نامیده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S$$

برای یافتن جواب این انتگرال باید عنصر دیفرانسیلی $\mathrm{d}S$ را روی یکی از صفحات مختصات تصویر نمود. در شکل زیر تصویر این عنصر دیفرانسیلی بر صفحه xy نشان داده شده است. بردار عمود بر صفحه xy



بردار یکه $\vec{k}$ می‌باشد. بردار $\vec{n}$ عمود بر رویه $g(x,y,z)=0$ است و در واقع همان بردار گرادیان یکه این رویه است.

$$\vec{n}=\frac{\nabla g}{|\nabla g|}$$

با توجه به عبارت برداری نمایش داده شده، رابطه بین $\mathrm{d}S$ و تصویر آن بر صفحه xy به صورت زیر است:

$$\mathrm{d}A=\cos\theta\mathrm{d}S$$

زاویه بین دو صفحه همان زاویه بین دو بردار عمود است:

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}.\vec{k}}{|\vec{n}||\vec{k}|}$$

برای تصویر شدن بر صفحه xy داریم:

$$\mathrm{d}S=\frac{\nabla g}{|\nabla g.\vec{k}|}\mathrm{d}A=\frac{\nabla g}{|\nabla g.\vec{k}|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

اگر فرآیند تصویرسازی بر صفحه xz باشد خواهیم داشت:

$$\mathrm{d}S=\frac{\nabla g}{|\nabla g.\vec{j}|}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

اگر فرآیند تصویرسازی بر صفحه yz باشد خواهیم داشت:

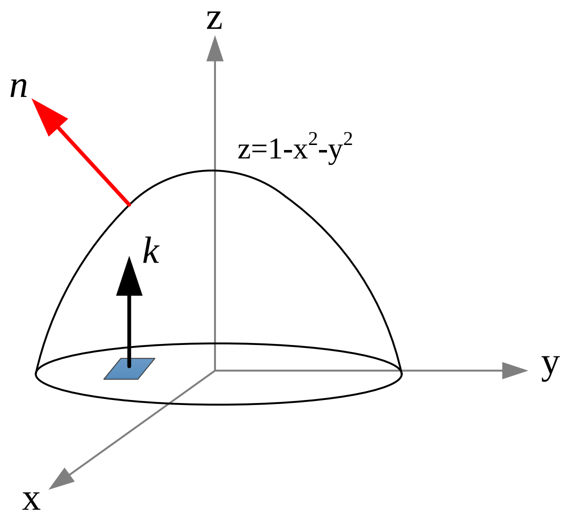
$$\mathrm{d}S=\frac{\nabla g}{|\nabla g.\vec{i}|}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

مثال ۱۳ انتگرال میدان $\vec{F}(x,y,z)=xz\hat{i}$ را روی سطحی از سهمی‌گون $z=1-x^2-y^2$ که بالای صفحه $z=0$ و به سمت بیرون است بدست آورید.

پاسخ: سطح داده شده به صورت زیر است:

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z-1=0$$

با رسم شکل، امکان تصویر کردن عنصر دیفرانسیلی بر صفحه مناسب وجود دارد.



در اینجا صفحه xy مناسب است.

$$\nabla g=(2x,2y,1),\quad\Rightarrow\quad\nabla g.\vec{k}=1$$

$$\vec{n}\mathrm{d}S=(2x,2y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow\quad\iint\vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S=\iint(xz\hat{i}).(2x,2y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint 2x^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint 2x^2(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

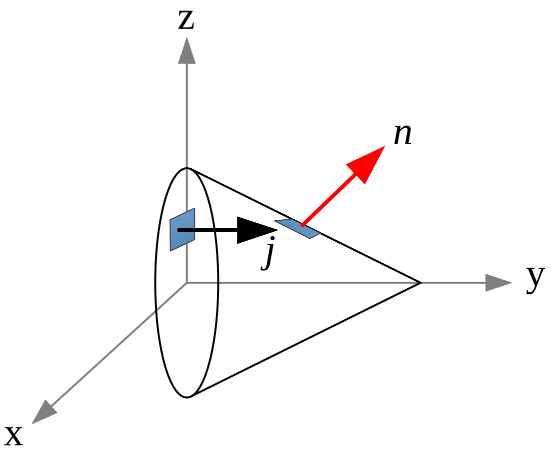
$$\iint_D 2x^2(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2\cos^2\theta(1-r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{6}$$

مثال ۱۴ انتگرال میدان $\vec{F}(x,y,z)=\hat{j}+(y-1)z\hat{k}$ را روی سطحی از مخروط $y=1-2\sqrt{x^2+z^2}$ که در سمت مثبت محور y و به سمت بیرون است بدست آورید.

پاسخ: سطح داده شده به صورت $y = 1 - 2\sqrt{x^2+z^2}$ است که برای سادگی محاسبات می‌توان سطح را به صورت زیر هم نمایش داد:

$$g(x,y,z) = 4x^2 + 4z^2 - (y-1)^2 = 0$$

با رسم شکل، امکان تصویر کردن عنصر دیفرانسیلی بر صفحه مناسب وجود دارد.



در این مسئله صفحه xz مناسب است.

$$\nabla g = \Big(8x, -2(y-1), 8z\Big), \quad \Rightarrow \quad \nabla g.\vec{j} = -2(y-1)$$

$$\vec{n}\mathrm{d}S = \frac{\Big(8x, -2(y-1), 8z\Big)}{2|y-1|}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

با توجه به رابطه $y = 1 - 2\sqrt{x^2+z^2}$ همواره عبارت $y-1$ منفی است. در نتیجه داریم:

$$\vec{n}\mathrm{d}S = \frac{\Big(8x, -2(y-1), 8z\Big)}{-2(y-1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \quad \iint \vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S = \iint (\hat{j} + (y-1)z\hat{k}).\frac{\Big(8x, -2(y-1), 8z\Big)}{-2(y-1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \iint (1-4z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$\begin{aligned}
\iint_D (1-4z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 4r^2\sin^2\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2 - r^4\sin^2\theta\right]_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3\pi}{16}
\end{aligned}$$

بازه شعاع در این مسئله $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ بود. کران بالا از تقاطع مخروط با صفحه xz تعیین شد. در این صفحه داریم $y = 0$. در نتیجه

$$1 - 2\sqrt{x^2 + z^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad x^2 + z^2 = (\frac{1}{2})^2, \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}$$

همچنین برای محاسبه انتگرال به روش قطبی $x = r\cos\theta,\ z = r\sin\theta$ در نظر گرفته شد.

قضیه دیورژانس: اگر S سطح قطعه‌ای هموار بسته با قائم یکه $\vec{n}$ همواره رو به بیرون باشد داریم

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S = \iiint_W \mathrm{div}(F)\mathrm{d}V$$

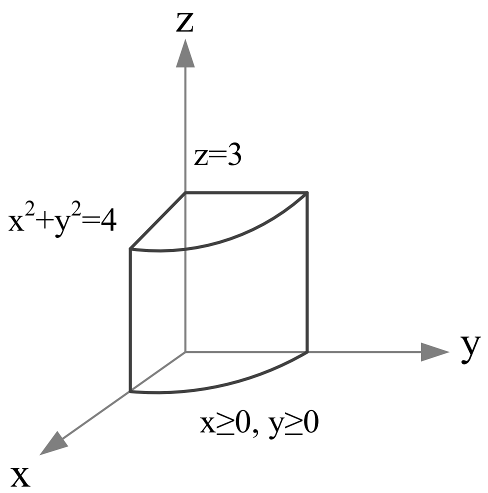
مثال ۱۵ اگر S کره به رابطه $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و $\vec{F}(x, y, z) = (x + y)\hat{i} + (y + z)\hat{j} + (z + x)\hat{k}$ باشد، حاصل $\iint_S \vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S$ را بدست آورید.

پاسخ: بر اساس قضیه دیورژانس:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S = \iiint_W \mathrm{div}(F)\mathrm{d}V = \iiint_W 3\mathrm{d}V = 3W = 3(\frac{4}{3}\pi a^3) = 4\pi a^3$$

مثال ۱۶ حاصل انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S$ را وقتی $\vec{F}(x, y, z) = y\sin z\hat{i} + 3xy\hat{j} + \tan^{-1} x^2\hat{k}$ است و S مرز ناحیه $x^2 + y^2 \leq 4$، $0 \leq z \leq 3$، $y \geq 0$ و $x \geq 0$ می‌باشد، بدست آورید.

پاسخ: ناحیه داده شده به صورت شکل زیر است:



با توجه به آنکه شرایط قضیه دیورژانس برقرار است خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\iint_S (y\sin z, 3xy, \tan^{-1} x^2).\mathrm{d}S &= \iiint_W \operatorname{div}(F)\mathrm{d}V \\
&= \iiint_W 3x\mathrm{d}V \\
&= 3\iiint_W x\mathrm{d}V \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\int_0^3 (r\cos\theta)\mathrm{d}z(r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta) \\
&= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^2\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 24\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 24
\end{aligned}$$

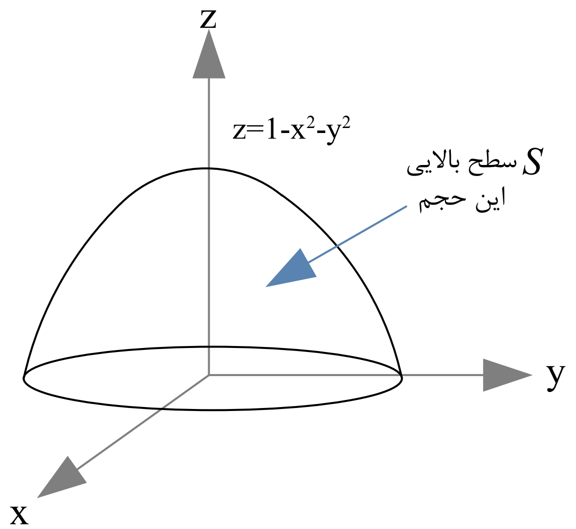
مثال ۱۷ اگر S مرز ناحیه V باشد که این ناحیه بین صفحات $z=0,\ y=0,\ y=e$ و $z=1-x^2$ قرار دارد، آنگاه $\iint_S \vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S$ را برای میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=(x+\cos y, y+\sin z, z+e^x)$ بدست آورید.

پاسخ: بر اساس قضیه دیورژانس:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S = \iiint_W \operatorname{div}(F)\mathrm{d}V = \int_0^e\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2} 3\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4e$$

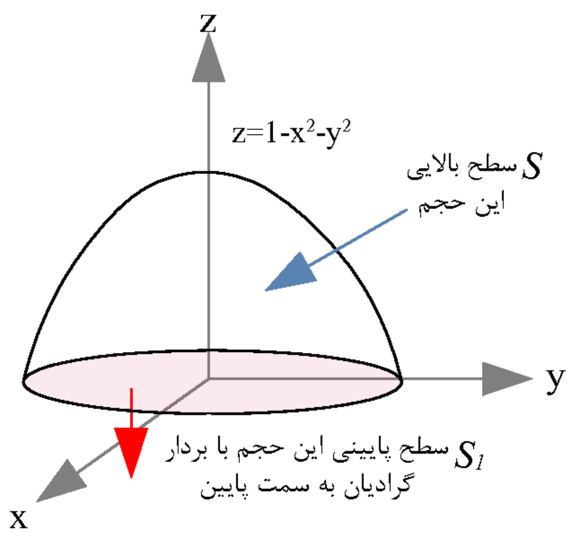
مثال ۱۸ اگر S سطح سهمی‌گون $z = 1 - x^2 - y^2$ بالای صفحه $z = 0$ باشد، حاصل انتگرال میدان برداری $\vec{F}(x,y,z) = (2xze^y, -2yze^y, zx^2 + z^2ye^y + 2)$ را روی این سطح بدست آورید.

پاسخ: این سطح که در شکل زیر نمایش داده شده است، بسته نیست.



می‌توان بخش پایینی این حجم با سطح S_1 پوشاند. در این صورت یک ناحیه بسته تشکیل می‌شود. با این روش می‌توان یک سطح بسته داشت و انتگرال روی سطح بسته S' با استفاده از قضیه دیورژانس تعیین می‌شود.

$$\iint_{S'} \vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S = \iint_{S_1} \vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S + \iint_{S} \vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S$$



ابتدا انتگرال روی سطح S_1 محاسبه می‌شود. واضح است که در این سطح بردار گرادیان به صورت $-\hat{k}$ است.

$$\Rightarrow \quad \vec{n}\mathrm{d}S=(0,0,-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

روی سطح S_1 مقدار $z=0$ است.

$$\Rightarrow \quad \vec{F}=(0,0,2)$$

$$\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S=\iint_{S_1}-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2A=-2\Big(\pi(1)^2\Big)=-2\pi$$

در ادامه حل این مسئله باید انتگرال میدان برداری روی سطح کلی S' حساب شود. برای این کار به دیورژانس میدان نیاز است. دیورژانس میدان برداری به صورت زیر است.

$$\mathrm{div}(F)=2ze^y-2ze^y-2yze^y+x^2+2yze^y=x^2$$

بر اساس قضیه دیورژانس:

$$\begin{aligned}\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S&=\iiint_W\mathrm{div}(F)\mathrm{d}V\\&=\iiint_W x^2\mathrm{d}V\\&=\iiint_W(r\cos\theta)^2\mathrm{d}zr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\iint_D(r\cos\theta)^2(1-r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta(1-r^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{6}r^6\right]_0^1\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{24}\int_0^{2\pi}(1+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

در نهایت باید از تفاضل این انتگرال‌ها، مقدار انتگرال خواسته شده را تعیین کرد:

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{12}=-2\pi+\iint_S\vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S, \quad \Rightarrow \quad \iint_S\vec{F}.\vec{n}\mathrm{d}S=\frac{25\pi}{12}$$

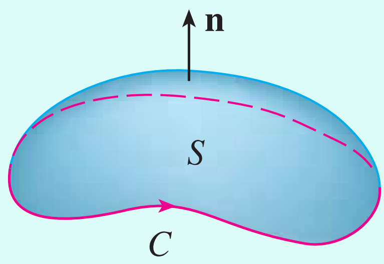
۷ قضیه استوکس

تعمیم قضیه گرین روی صفحه xy به فضای سه بعدی به کمک قضیه استوکس صورت می‌گیرد.

برای تابع $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$، اگر S یک سطح بسته با بردار واحد $\vec{n}$ به سمت بیرون باشد که مرز آن خم α است، آنگاه

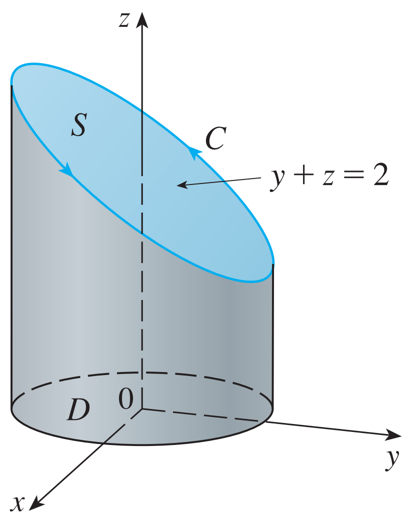
$$\oint_\alpha F.\mathrm{d}r=\iint_S \mathrm{curl}(F).\vec{n}\mathrm{d}S$$

لازم به ذکر است که باید تابع برداری دارای مشتقات مرتبه اول باشد و در ضمن برای تعیین جهت درست کرل از قانون دست راست در جهت خم استفاده می‌شود به طوری که انگشت شست جهت $\vec{n}$ را نشان می‌دهد.



مثال ۱۹ مقدار $\int_C F.\mathrm{d}r$ را در تابع برداری $\vec{F}(x,y,z)=-y^2\hat{i}+x\hat{j}+z^2\hat{k}$ و روی خم C که از تقاطع صفحه $y+z=2$ و استوانه $x^2+y^2=1$ پدید آمده است، بدست آورید.

پاسخ: با رسم شکل خم مورد نظر و ناحیه محصور توسط این خم نمایش داده می‌شود.



برای استفاده از قضیه استوکس باید کرل تابع برداری محاسبه شود:

$$\operatorname{curl}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 + 2y)$$

از طرفی برای بردار $\vec{n}$ داریم:

$$\vec{n}\nabla g = (0, 1, 1)$$

برای تصویر کردن سطح $\vec{n}\mathrm{d}S$ بر صفحه xy داریم:

$$\vec{n}\mathrm{d}S = \frac{\nabla g}{|\nabla g.\hat{k}|}\mathrm{d}A$$

$$\vec{n}\mathrm{d}S = (0, 1, 1)\mathrm{d}A = (0, 1, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
\int_C F.\mathrm{d}r &= \iint_S \operatorname{curl}(F).\vec{n}\mathrm{d}S \\
&= \iint_D (1 + 2y)\mathrm{d}A \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{2r^3}{3}\sin\theta\right]_0^1 \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \pi
\end{aligned}$$

روش دوم: با استفاده از تعریف اصلی و پارامتری کردن خم هم می‌توان به پاسخ رسید. خم داده شده به صورت زیر پارامتری می‌شود:

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$z = 2 - \sin t$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha' = (-\sin t, \cos t, -\cos t)$$

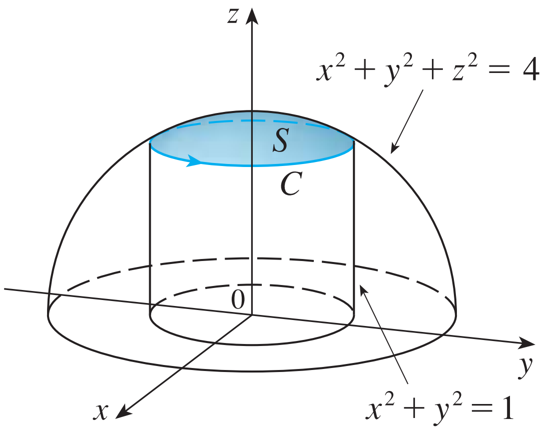
$$F = \Big(-\sin^2 t, \cos t, (2 - \sin t)^2\Big)$$

$$\begin{aligned}
\int_C F.\mathrm{d}r &= \int_0^{2\pi} \Big(-\sin^2 t, \cos t, (2-\sin t)^2 \Big).(-\sin t, \cos t, -\cos t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^2 t - 4\cos t + 4\sin t\cos t - \sin^2 t\cos t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)\mathrm{d}t \\
&= \pi
\end{aligned}$$

در حل انتگرال فوق از این حقیقت استفاده شد که انتگرال روی یک دوره تناوب از جملات مثلثاتی با توان فرد برابر با صفر است. در نتیجه تنها جمله $\cos^2$ باقی ماند.

مثال ۲۰ حاصل $\iint_S \text{curl}(F).\vec{n}\text{d}S$ را در تابع برداری $\vec{F}(x,y,z) = xz\hat{i} + yz\hat{j} + xy\hat{k}$ با استفاده از قضیه استوکس حساب کنید. سطح S بخشی از یک کره با رابطه $x^2+y^2+z^2=4$ است که داخل استوانه $x^2+y^2=1$ و بالای صفحه xy قرار دارد.

پاسخ: با رسم شکل خم مورد نظر و ناحیه محصور توسط این خم نمایش داده می‌شود.



ابتدا تقاطع کره و استوانه بدست می‌آید:

$$x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1 \quad \Rightarrow \quad z=\sqrt{3}$$

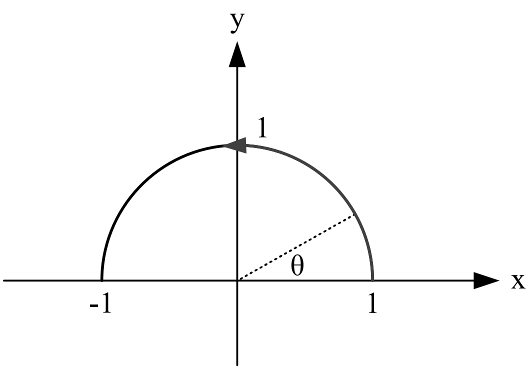
خم حول ناحیه S به صورت زیر پارامتری می‌شود:

$$\vec{\alpha} = \cos t\hat{i} + \sin t\hat{j} + \sqrt{3}\hat{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\begin{aligned}
\iint_S \text{curl}(F).\vec{n}\text{d}S &= \int_C F.\text{d}r \\
&= \int_0^{2\pi} F(\vec{\alpha}(t)).\vec{\alpha}'(t)\text{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3}\sin t\cos t + \sqrt{3}\sin t\cos t)\text{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

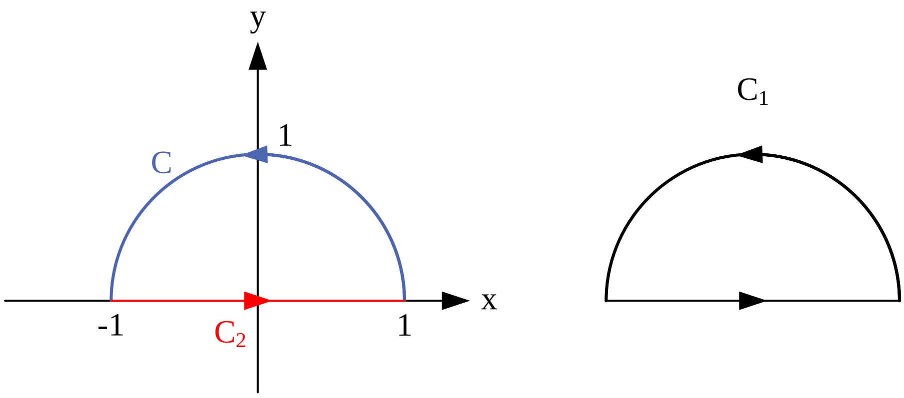
نکته: در مثال فوق اگر سطح دیگری هم داده می‌شد با هم همین جواب بدست می‌آمد! چون قضیه استوکس حل انتگرال روی سطح را به خم منتقل می‌کند و در صورتی که خم حول ناحیه ثابت باشد، مقدار انتگرال کرل تابع برداری بر آن سطح ثابت باقی می‌ماند.

مثال ۲۱ حاصل $\int_C F.\mathrm{d}r$ را که در آن C مسیری نیمدایره از نقطه $x = 1$ به $x = -1$ است برای تابع برداری $\vec{F} = (y\sin x - 2y - 1, 3x - \cos x)$ بدست آورید.



پاسخ: چون نیمدایره سطح بسته نیست، ابتدا آن را می‌بندیم تا از قضیه گرین استفاده کنیم و برای محور x دوباره محاسبه را انجام می‌دهیم.

$$C_1 = C + C_2$$



$$\int_{C_1} F.\mathrm{d}r = \iint (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\mathrm{d}A = \iint 5\mathrm{d}A = 5A$$

$$\int_{C_1} F.\mathrm{d}r = \frac{5\pi}{2}$$

اکنون باید انتگرال روی خم C_2 بدست آید:

$$\alpha = (1-t)A + tB, \quad \Rightarrow \quad \alpha = (2t-1, 0, 0), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\alpha}' = (2, 0, 0)$$

$$\int_{C_2} F.\mathrm{d}r = \int_0^1 F.\mathrm{d}r = \int_0^1 (-1, 6t-3-\cos(2t-1), 0).(2,0,0)\mathrm{d}t = \int_0^1 F.\mathrm{d}r = \int_0^1 (-2)\mathrm{d}t = -2$$

جواب نهایی از تفاضل انتگرال‌ها روی دو مسیر C_1 و C_2 بدست می‌اید:

$$\int_C F.\mathrm{d}r = \int_{C_1} F.\mathrm{d}r - \int_{C_2} F.\mathrm{d}r = \frac{5\pi}{2} + 2$$

۸ تمرین

۱. مقدار گرادیان و لاپلاسین را برای تابع اسکالر $f(x,y,z)=y^2+z^2x$ بدست آورید.

۲. مقدار curl و دیورژانس را برای تابع برداری $\vec{F}(x,y,z)=(\ln x^2, \ln x^2y, \ln x^2yz)$ بدست آورید.

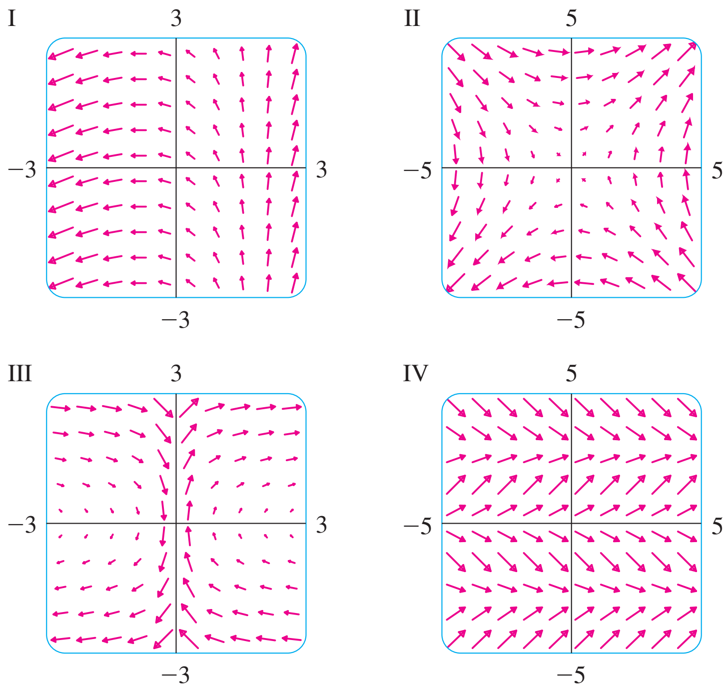
۳. حاصل $\int_C (x^2-y)\mathrm{d}x+(y^2+x)\mathrm{d}y$ را که در آن C یک سهمی با رابطه $y=x^2+1$ در بازه $0\le x\le 1$ است، تعیین کنید.

۴. اگر $\vec{F}(x,y,z)=(x+3y)\cos xz\hat{i}+(x+y)\cos\frac{y}{2}\hat{j}+y^3e^{\cos z}\hat{k}$ یک میدان برداری باشد، مقدار $\int_\alpha F.\mathrm{d}r$ روی خم $\vec{\alpha}(t)=6t\hat{i}-2t\hat{j}-\sqrt{5}\hat{k}$ در فاصله $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ چقدر است؟

۵. شکل‌های I-IV مطابق کدام میدان زیر هستند. برای انتخاب خود دلیل بیاورید.

الف- $F=(y,x)$ ب- $F=(1,\sin y)$

ج- $F=(x-2,x+1)$ د- $F=(y,\frac{1}{x})$



۶. اگر مسیر C با رئوس $(3,0)$، $(6,0)$ و $(17,5)$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد، آنگاه حاصل $\oint_C (7y+e^{x^2})\mathrm{d}x+(19x+e^{y^2})\mathrm{d}y$ را بدست آورید.

۷. اگر منحنی بسته C مرز قطاعی از دایره $x^2+y^2=1$ باشد که توسط $y=x$ و $y=-x$ در ربع اول و چهارم و در جهت مثلثاتی باشد، حاصل $\oint_C (x^2\sin x^3 - y^3)\mathrm{d}x + (y^2\cos^2 y - y)\mathrm{d}y$ را تعیین کنید.

۸. انتگرال میدان $\vec{F}(x,y,z) = xy^2\hat{i} - yx^2\hat{j} + z\hat{k}$ را روی بخشی از سهمی‌گون $z=4-x^2-y^2$ که بالای صفحه $z=0$ و به سمت بیرون است بدست آورید.

۹. مقدار $\iint_S (3xy^2, xe^z, z^3).\mathrm{d}S$ را که در آن S رویه محصور به استوانه $y^2+z^2=9$ و صفحات $x=-2$ و $x=1$ است، بدست آورید.

۱۰. حاصل $\int_C (\sqrt{x}+y)\mathrm{d}x + (2x+\sqrt{y})\mathrm{d}y$ را که در آن C روی منحنی $y=\sin x$ از نقطه $(\pi,0)$ به مبدا می‌رود، بدست آورید.

۱۱. حاصل $\int_C z\mathrm{d}x - 2x\mathrm{d}y + 3y\mathrm{d}z$ را که در آن C از تقاطع سهمی $z=x^2+y^2$ با صفحه $x+y+z=1$ ایجاد می‌شود تعیین کنید.

مردی که کوه را از میان برداشت،
کسی بود که اول شروع به برداشتن سنگ‌ریزه‌ها کرد.