

فصل صفر

کلیات

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی
شهرستان باوی

www.mathtower.org

☒ گزاره :

تعریف: گزاره، جمله‌ای است خبری که یا درست یا نادرست باشد، اگرچه درستی یا نادرستی آن بر ما پوشیده باشد.
مثال: هر یک از جملات زیر گزاره هستند.

۱- عدد $\sqrt{2}$ یک عدد گنگ است.

۲- توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگتر است.

۳- مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۵ درجه است.

۴- بین هر دو عدد طبیعی متواالی، عدد طبیعی دیگری وجود ندارد.

☒ مفهوم تعریف

تعریف هر چیز شامل مجموعه مشخصاتی است که برای شناخته شدن آن بیان می‌شوند.

مثلاً می‌توان مثلث را به صورت زیر تعریف کرد:

مثلث شکلی است که از وصل کردن مستقیم سه نقطه‌ی متمایز غیر واقع بر یک خط راست به دست می‌آید.

تعریف هر چیز باید صفات و خصوصیات آن را به آن اندازه که برای شناخته شدن لازم و کافی است شامل باشد نه بیشتر و نه کمتر به عبارت بهتر تعریف خوب و درست آن است که از توضیح اضافی بی‌نیاز باشد و حذف هیچ جزئی از آن ممکن نباشد پس تعریف باید جامع و مانع باشد.

☒ مفاهیم نخستین (تعریف نشده‌ها)

به آن دسته از مفاهیم که فقط با درک و نگرش شناخته می‌شوند و قابل تعریف نمی‌باشند را مفاهیم نخستین می‌گویند.

بعضی از این مفاهیم عبارتند از:

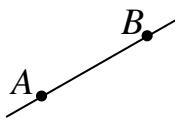
۱- نقطه، ۲- خط، ۳- صفحه، ۴- مجموعه، ۵- عدد

توجه: در این کتاب منظور از خط همان خط راست است.

اصل

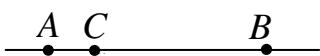
تعریف : اصل، حقیقت یا عبارتی است که درستی آنها را قبول داریم و قبول درستی آن نیازی به ارائه دلیل و برهان ندارد.

در اینجا به تعدادی از این اصول که اشاره می کنیم.

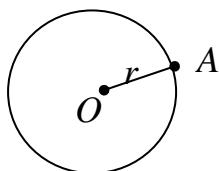
الف) اصول هندسی (اصول اقلیدس)

۱- بر هر دو نقطه‌ی متمایز فقط و فقط یک خط راست می‌گذرد.

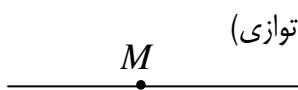
۲- بین هر دو نقطه‌ی متمایز واقع بر یک خط راست حداقل یک نقطه‌ی دیگر متمایز با آنها وجود دارد.



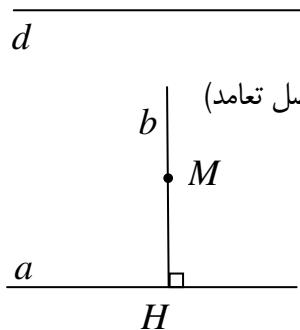
۳- به یک مرکز معین و شعاع معین فقط یک دایره می‌توان رسم کرد.



۴- همه زاویه‌های قائمه بر یکدیگر قابل انطباقند.



۵- از هر نقطه‌ی خارج یک خط فقط و فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. (اصل توازی)



۶- از هر نقطه‌ی خارج یک خط (یا روی آن) فقط یک خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد. (اصل تعامد)

ب) اصول متعارف^۱

۱- دو چیز مساوی با یک چیز خود با هم مساویند.

$$\left. \begin{array}{l} a=b \\ b=c \end{array} \right\} \rightarrow a=c$$

^۱. اصولی که در سایر شاخه‌های دیگر علوم نیز به کار می‌روند.

۲- دو طرف یک تساوی را می‌توان در یک عدد ناصل ضرب کرد و مقادیر مساوی دیگر به دست آورد.

$$a = b \xrightarrow{m \neq 0} ma = mb$$

۳- اگر مقادیر مساوی را با مقادیر مساوی دیگر جمع کنیم حاصل جمع‌ها با یکدیگر مساوی خواهد بود.

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ x = y \end{array} \right\} \rightarrow a + x = b + y$$

استدلال و انواع استدلال :

عمل دلیل آوردن برای اثبات یک گزاره را استدلال می‌نامند. به طور کلی دو نوع استدلال وجود دارد.

۱- استدلال استقرایی : استدلالی است که براساس تعداد محدودی مشاهده (حالت) ما را به یک نتیجه‌ی کلی می‌رساند.

مثال : آیا مجموعه توانهای طبیعی عدد ۲ نسبت به عمل ضرب بسته است.^۱ دلیل خود را به روش استقرایی بیان کنید.

$$S = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots\}$$

حل : ابتدا مجموعه توانهای طبیعی عدد ۲ را می‌نویسیم.

حال دو عضو دلخواه از مجموعه S را در هم‌دیگر ضرب می‌کنیم

$$2^1 \times 2^2 = 2^3 \in S$$

$$2^3 \times 2^4 = 2^7 \in S$$

$$2^3 \times 2^3 = 2^6 \in S$$

.....

مشاهده می‌کنیم که حاصل ضرب هر دو عضو S نیز یک عضو S است پس این مجموعه احتمالاً بسته است.

توجه: کلمه‌ی احتمالاً به این دلیل آمده است چون تمام حالتها بررسی نشده‌اند و از نتیجه‌ی به دست آمده اطمینان قطعی

نداریم.

۲- استدلال استنتاجی : استدلالی است که بر اساس حقایق درست پذیرفته شده (مانند تعاریف و اصول) ما را به یک نتیجه‌ی

کلی می‌رساند.

^۱. اگر حاصل ضرب هر دو عضو یک مجموعه، عضوی از آن مجموعه باشد، گویند این مجموعه نسبت به عمل ضرب بسته است.

مثال : آیا مجموعه توانهای طبیعی عدد ۲ نسبت به عمل ضرب بسته است. دلیل خود را به روش استنتاجی بیان کنید.

حل : مجموعه توانهای طبیعی عدد ۲ به صورت $\{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\} = S$ می‌باشد.

حقیقت : مجموع هر دو عدد طبیعی یک عدد طبیعی است.

حال با توجه به حقیقت فوق داریم

$$\left. \begin{array}{l} m \in N \\ n \in N \end{array} \right\} \rightarrow (m+n) \in N$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^m \in S \\ 2^n \in S \end{array} \right\} \rightarrow 2^m \times 2^n = 2^{m+n} \in S$$

لذا حاصل ضرب هر دو عضو S نیز عضو S است. یعنی مجموعه S نسبت به عمل ضرب بسته است.

توجه : چون نتیجه‌ی به دست آمده‌ی فوق متکی بر یک حقیقت است، لذا از نتیجه‌ی به دست آمده اطمینان قطعی داریم.

تمرین ۱) انواع استدلال را نام برد و تفاوت‌های عمدۀ میان آنها را بنویسید.

تذکر :

۱- برای اثبات درستی یک گزاره باید استدلال کرد که لازم است این استدلال از نوع استنتاجی باشد.

۲- برای رد درستی یک گزاره، ارائه‌ی یک مثال نقض (استثناء) کافی است.

مثال نقض به مثالی گفته می‌شود که درستی گزاره را رد کند.

مثال) گزاره : تمام اعداد اول فرد هستند.

این گزاره درست نیست زیرا عدد ۲ اول است ولی فرد نیست، در اینجا عدد ۲ یک مثال نقض محسوب می‌شود.

تمرین ۲) با یک مثال نقض درستی گزاره زیر را رد کنید.

مکعب هر عدد حقیقی از مربع آن بزرگتر است.

قضیه

تعریف: هر گزاره‌ی درست که قبول درستی آن نیازمند برهان باشد، را قضیه می‌نامند.

هر قضیه معمولاً از دو قسمت تشکیل شده است.

الف - فرض: آن قسمت از قضیه را فرض گویند که درستی آن را قبول داریم.

ب - حکم: آن قسمت از قضیه را حکم گویند که درستی آن را باید نتیجه بگیریم.

در واقع هر قضیه، یک جمله شرطی است که جواب شرط آن را اثبات می‌کنیم ولی شرط را قبول داریم.

به الگوی زیر توجه کنید:

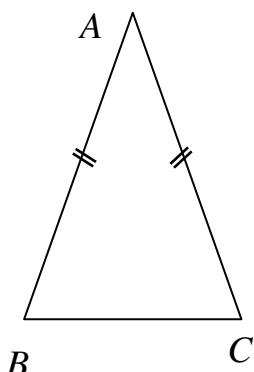
.	(حکم)	آنگاه	(فرض)	قضیه: اگر
---	-------	-------	-------	-----------

(قبول داریم،) (ثابت می‌کنیم.)

مثال: قضیه: در هر مثلث متساوی‌الساقین، دو زاویه مجاور به قاعده مساویند.

به سادگی می‌توان، این قضیه را می‌توان به شکل زیر نوشت.

اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد آنگاه دو زاویه مجاور به قاعده آن مساویند.



حکم

فرض : $AB = AC$

فرض : $\angle B = \angle C$

تمرین ۳) قضیه‌های زیر را به صورت شرطی بیان کنید و فرض و حکم آنها را مشخص کنید.

الف) هر دو زاویه‌ی متقابل به رأس مساویند.

ب) هر دو زاویه‌ی متساوی مکمل‌های متساوی دارند.

ج) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° درجه است.

د) در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

☑ اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

نوعی استدلال استنتاجی است که نشان می‌دهد تمام نتیجه‌گیری‌های ممکن غیر از نتیجه‌ی مورد نظر درست نمی‌باشند، پس تنها نتیجه درست همان نتیجه اشاره شده (حکم) است. در اثبات غیرمستقیم نشان می‌دهیم که خلاف حکم درست نیست.

مثال : گزاره زیر را به روش اثبات غیرمستقیم ثابت کنید.

اگر x یک عدد طبیعی باشد و $1+x$ یک عدد فرد است آنگاه x زوج است.

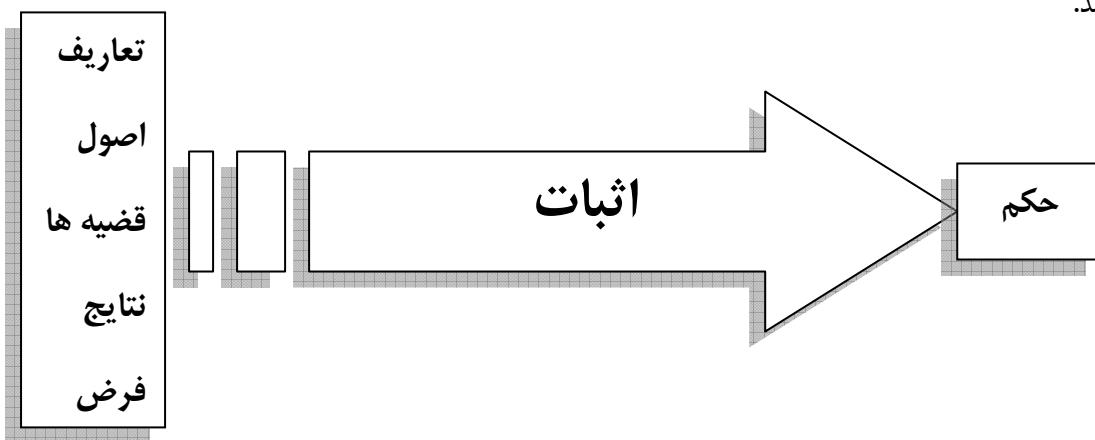
اثبات: عدد x یا فرد است یا زوج، اگر x فرد باشد، آنگاه حاصل جمع آن با یک $1+x$ زوج می‌شود ولی اینجا حاصل $1+x$ طبق فرض عدد فرد است لذا x نمی‌تواند فرد باشد پس باید زوج باشد.

تمرین ۴) به روش اثبات غیرمستقیم گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

الف : اگر x^3 فرد باشد آنگاه x نیز فرد است.

ب : اگر x^2 زوج باشد آنگاه x نیز زوج است.

تذکر: هر حرکت مرحله به مرحله و منطقی که به کمک استدلال استنتاجی، منجر به رسیدن به حکم قضیه شود را اثبات قضیه گویند.

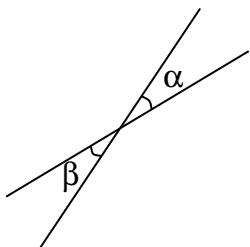


بدیهی است که تشخیص فرض و حکم هر قضیه برای اثبات آن قضیه مهم است. اولین گام در اثبات هر قضیه تعیین فرض و حکم آن است. آخرین مرحله در اثبات هر قضیه رسیدن به حکم آن است.

پاسخ تمرین‌های فصل صفر

-۱

نتایج آن احتمالی است	از جزء به کل است	تجربی است	براساس تعداد محدودی مشاهده است	استقرایی
نتایج آن قطعی است	از کل به جزء است	منطقی است	براساس حقایق پذیرفته شده است	استنتاجی

۲- معکب عدد یک از مربع آن بزرگتر نیست. ($1^3 \nleq 1^2$)

۳- الف) اگر دو زاویه متقابل به رأس باشند، آنگاه مساویند.

حکم

فرض

فرض: دو زاویه α و β متقابل به رأس هستند.

$$\angle \alpha = \angle \beta : \text{حکم}$$

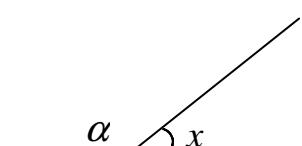
ب) اگر دو زاویه مساوی باشند، آنگاه مکمل‌های مساوی دارند.

حکم

فرض

$$\angle x = \angle y : \text{فرض}$$

$$\angle \alpha = \angle \beta : \text{حکم}$$



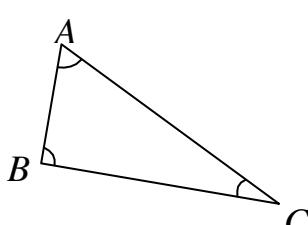
ج) اگر شکلی مثلث باشد، آنگاه مجموع زاویه‌های داخل آن ۱۸۰ درجه است.

حکم

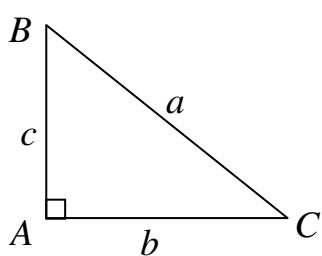
فرض

$$\Delta ABC : \text{مثلث است.}$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ : \text{حکم}$$



د) اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر آن با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است.



مثلث ΔABC قائم‌الزاویه است: فرض

$$\text{حکم: } a^2 = b^2 + c^2$$

- الف) گیریم که x زوج باشد، پس $x = 2k$ لذا

$$x^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$$

یعنی x^2 زوج است و این خلاف فرض است، پس x باید فرد باشد.

ب) گیریم که x فرد باشد، پس $x = 2k + 1$ لذا

$$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

یعنی x^2 فرد است و این خلاف فرض است، پس x باید زوج باشد.