

# فصل صفر

## کلیات

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی  
شهرستان باوی

[www.mathtower.org](http://www.mathtower.org)

## ☑ گزاره :

تعریف : گزاره، جمله‌ای است خبری که یا درست یا نادرست باشد، اگرچه درستی یا نادرستی آن بر ما پوشیده باشد.

مثال : هر یک از جملات زیر گزاره هستند .

۱- عدد  $\sqrt{2}$  یک عدد گنگ است.

۲- توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگتر است.

۳- مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۵ درجه است.

۴- بین هر دو عدد طبیعی متوالی ، عدد طبیعی دیگری وجود ندارد.

\*\*\*

## ☑ مفهوم تعریف

تعریف هر چیز شامل مجموعه مشخصاتی است که برای شناخته شدن آن بیان می‌شوند.

مثلاً می توان مثلث را به صورت زیر تعریف کرد:

مثلث شکلی است که از وصل کردن مستقیم سه نقطه ی متمایز غیر واقع بر یک خط راست به دست می‌آید.

تعریف هر چیز باید صفات و خصوصیات آن را به آن اندازه که برای شناخته شدنش لازم و کافی است شامل باشد نه بیشتر و نه کمتر به عبارت بهتر تعریف خوب و درست آن است که از توضیح اضافی بی‌نیاز باشد و حذف هیچ جزئی از آن ممکن نباشد پس تعریف باید جامع و مانع باشد.

\*\*\*

## ☑ مفاهیم نخستین (تعریف نشده‌ها)

به آن دسته از مفاهیم که فقط با درک و نگرش شناخته می‌شوند و قابل تعریف نمی‌باشند را مفاهیم نخستین می‌گویند.

بعضی از این مفاهیم عبارتند از :

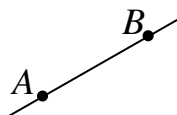
۱- نقطه، ۲- خط، ۳- صفحه، ۴- مجموعه، ۵- عدد

توجه : در این کتاب منظور از خط همان خط راست است.

## ✓ اصل

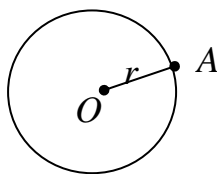
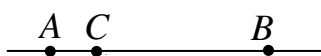
تعریف : اصل، حقیقت یا عبارتی است که درستی آنها را قبول داریم و قبول درستی آن نیازی به ارائه دلیل و برهان ندارد.  
در اینجا به تعدادی از این اصول که اشاره می کنیم.

## الف ( اصول هندسی (اصول اقلیدس)



۱- بر هر دو نقطه ی متمایز فقط و فقط یک خط راست می گذرد.

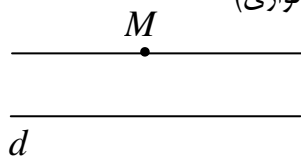
۲- بین هر دو نقطه ی متمایز واقع بر یک خط راست حداقل یک نقطه ی دیگر متمایز با آنها وجود دارد.



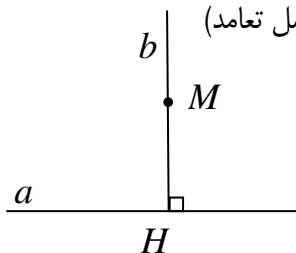
۳- به یک مرکز معین و شعاع معین فقط یک دایره می توان رسم کرد.

۴- همه زاویه های قائمه بر یکدیگر قابل انطباقند.

۵- از هر نقطه ی خارج یک خط فقط و فقط یک خط به موازات آن می توان رسم کرد. (اصل توازی)



۶- از هر نقطه ی خارج یک خط (یا روی آن) فقط یک خط عمود بر آن می توان رسم کرد. (اصل تعامد)

ب ( اصول متعارف<sup>۱</sup>

۱- دو چیز مساوی با یک چیز خود با هم مساویند.

$$\left. \begin{array}{l} a=b \\ b=c \end{array} \right\} \rightarrow a=c$$

<sup>۱</sup> . اصولی که در سایر شاخه های دیگر علوم نیز به کار می روند.

۲- دو طرف یک تساوی را می توان در یک عدد ناصفر ضرب کرد و مقادیر مساوی دیگر به دست آورد.

$$a = b \xrightarrow{m \neq 0} ma = mb$$

۳- اگر مقادیر مساوی را با مقادیر مساوی دیگر جمع کنیم حاصل جمع ها با یکدیگر مساوی خواهند بود.

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ x = y \end{array} \right\} \rightarrow a + x = b + y$$

\*\*\*

### ❑ استدلال و انواع استدلال :

عمل دلیل آوردن برای اثبات یک گزاره را استدلال می نامند . به طور کلی دو نوع استدلال وجود دارد.

۱- استدلال استقرایی : استدلالی است که براساس تعداد محدودی مشاهده (حالت) ما را به یک نتیجه ی کلی می رساند.

مثال : آیا مجموعه توانهای طبیعی عدد ۲ نسبت به عمل ضرب بسته است<sup>۱</sup>. دلیل خود را به روش استقرایی بیان کنید.

حل : ابتدا مجموعه توانهای طبیعی عدد ۲ را می نویسیم.

$$S = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots\}$$

حال دو عضو دلخواه از مجموعه S را در همدیگر ضرب می کنیم

$$2^1 \times 2^2 = 2^3 \in S$$

$$2^3 \times 2^4 = 2^7 \in S$$

$$2^3 \times 2^3 = 2^6 \in S$$

.....

مشاهده می کنیم که حاصل ضرب هر دو عضو S نیز یک عضو S است پس این مجموعه احتمالاً بسته است.

توجه: کلمه ی احتمالاً به این دلیل آمده است چون تمام حالتها بررسی نشده اند و از نتیجه ی به دست آمده اطمینان قطعی نداریم.

۲- استدلال استنتاجی : استدلالی است که بر اساس حقایق درست پذیرفته شده (مانند تعاریف و اصول) ما را به یک نتیجه ی کلی می رساند.

<sup>۱</sup> . اگر حاصل ضرب هر دو عضو یک مجموعه ، عضوی از آن مجموعه باشد، گویند این مجموعه نسبت به عمل ضرب بسته است.

مثال : آیا مجموعه توانهای طبیعی عدد ۲ نسبت به عمل ضرب بسته است. دلیل خود را به روش استنتاجی بیان کنید.

حل : مجموعه توانهای طبیعی عدد ۲ به صورت  $S = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$  می باشد.

حقیقت : مجموع هر دو عدد طبیعی یک عدد طبیعی است.

حال با توجه به حقیقت فوق داریم

$$\left. \begin{matrix} m \in N \\ n \in N \end{matrix} \right\} \rightarrow (m+n) \in N$$

$$\left. \begin{matrix} 2^m \in S \\ 2^n \in S \end{matrix} \right\} \rightarrow 2^m \times 2^n = 2^{m+n} \in S$$

لذا حاصل ضرب هر دو عضو  $S$  نیز عضو  $S$  است. یعنی مجموعه  $S$  نسبت به عمل ضرب بسته است.

**توجه :** چون نتیجه ی به دست آمده ی فوق متکی بر یک حقیقت است، لذا از نتیجه ی به دست آمده اطمینان قطعی داریم.

تمرین ۱) انواع استدلال را نام برده و تفاوت های عمده میان آنها را بنویسید.

### تذکر :

۱- برای اثبات درستی یک گزاره باید استدلال کرد که لازم است این استدلال از نوع استنتاجی باشد.

۲- برای رد درستی یک گزاره، ارائه ی یک مثال نقض (استثناء) کافی است.

مثال نقض به مثالی گفته می شود که درستی گزاره را رد کند.

مثال ( گزاره : تمام اعداد اول فرد هستند.

این گزاره درست نیست زیرا عدد ۲ اول است ولی فرد نیست، در اینجا عدد ۲ یک مثال نقض محسوب می شود.

تمرین ۲) با یک مثال نقض درستی گزاره زیر را رد کنید.

مکعب هر عدد حقیقی از مربع آن بزرگتر است.

☑ قضیه :

تعریف : هر گزاره ی درست که قبول درستی آن نیازمند برهان باشد، را قضیه می نامند.

هر قضیه معمولاً از دو قسمت تشکیل شده است.

الف - فرض : آن قسمت از قضیه را فرض گویند که درستی آن را قبول داریم.

ب - حکم : آن قسمت از قضیه را حکم گویند که درستی آن را باید نتیجه بگیریم.

در واقع هر قضیه، یک جمله شرطی است که جواب شرط آن را اثبات می کنیم ولی شرط را قبول داریم.

به الگوی زیر توجه کنید :

قضیه : اگر (فرض) آنگاه (حکم) .

(قبول داریم.) (ثابت می کنیم.)

**مثال :** قضیه : در هر مثلث متساوی الساقین ، دو زاویه مجاور به قاعده مساویند.

به سادگی می توان، این قضیه را می توان به شکل زیر نوشت.

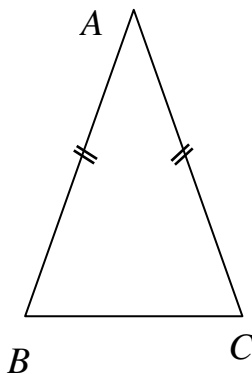
اگر مثلث متساوی الساقین باشد آنگاه دو زاویه مجاور به قاعده آن مساویند.

حکم

فرض

فرض :  $AB = AC$

حکم :  $\angle B = \angle C$



تمرین ۳) قضیه های زیر را به صورت شرطی بیان کنید و فرض و حکم آنها را مشخص کنید.

الف ) هر دو زاویه ی متقابل به رأس مساویند.

ب ) هر دو زاویه ی مساوی مکمل های مساوی دارند.

ج ) مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

د ) در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

### ☑ اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

نوعی استدلال استنتاجی است که نشان می‌دهد تمام نتیجه‌گیری‌های ممکن غیر از نتیجه‌ی مورد نظر درست نمی‌باشند، پس تنها نتیجه درست همان نتیجه اشاره شده (حکم) است. در اثبات غیرمستقیم نشان می‌دهیم که خلاف حکم درست نیست.

مثال : گزاره زیر را به روش اثبات غیرمستقیم ثابت کنید.

اگر  $x$  یک عدد طبیعی باشد و  $x + 1$  یک عدد فرد است آنگاه  $x$  زوج است.

اثبات: عدد  $x$  یا فرد است یا زوج، اگر  $x$  فرد باشد، آنگاه حاصل جمع آن با یک  $x + 1$  زوج می‌شود ولی اینجا حاصل

$x + 1$  طبق فرض عدد فرد است لذا  $x$  نمی‌تواند فرد باشد پس باید زوج باشد.

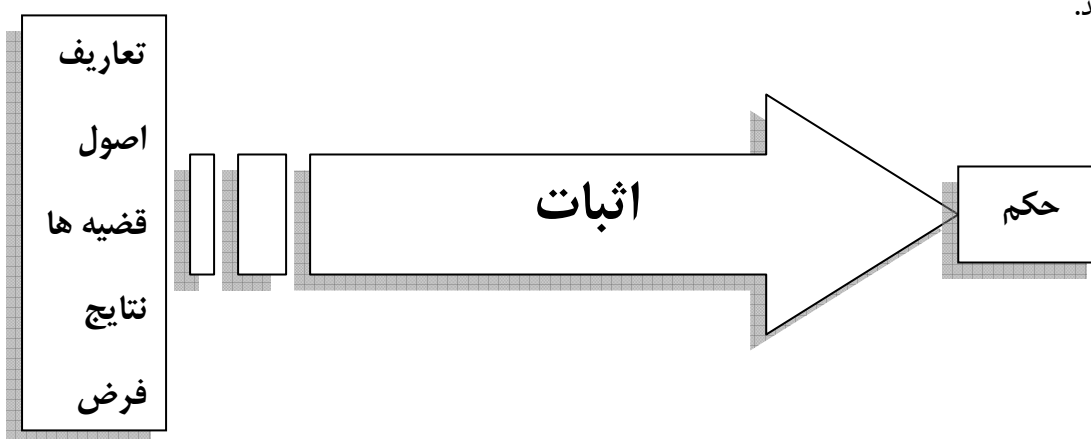
تمرین ۴) به روش اثبات غیرمستقیم گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

الف : اگر  $x^2$  فرد باشد آنگاه  $x$  نیز فرد است.

ب : اگر  $x^2$  زوج باشد آنگاه  $x$  نیز زوج است.

\*\*\*

تذکر: هر حرکت مرحله به مرحله و منطقی که به کمک استدلال استنتاجی، منجر به رسیدن به حکم قضیه شود را اثبات قضیه گویند.



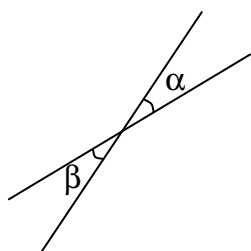
بدیهی است که تشخیص فرض و حکم هر قضیه برای اثبات آن قضیه مهم است. اولین گام در اثبات هر قضیه تعیین فرض و حکم آن است. آخرین مرحله در اثبات هر قضیه رسیدن به حکم آن است.

پاسخ تمرین های فصل صفر

-۱

استقرایی	براساس تعداد محدودی مشاهده است	تجربی است	از جزء به کل است	نتایج آن احتمالی است
استنتاجی	براساس حقایق پذیرفته شده است	منطقی است	از کل به جزء است	نتایج آن قطعی است

۲- معکب عدد یک از مربع آن بزرگتر نیست. ( $۱^۳ \nless ۱^۲$ )

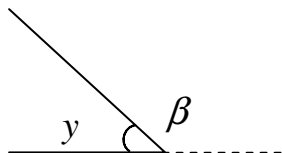


۳- الف ) اگر دو زاویه متقابل به رأس باشند، آنگاه مساویند.

فرض حکم

فرض : دو زاویه ی  $\alpha$  و  $\beta$  متقابل به رأس هستند.

حکم :  $\angle \alpha = \angle \beta$

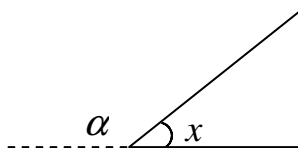


ب ) اگر دو زاویه مساوی باشند، آنگاه مکمل های مساوی دارند.

فرض حکم

فرض :  $\angle x = \angle y$

حکم :  $\angle \alpha = \angle \beta$

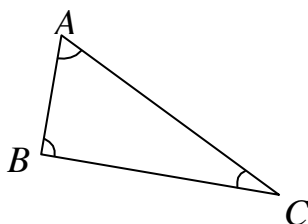


ج ) اگر شکلی مثلث باشد، آنگاه مجموع زاویه های داخل آن  $۱۸۰$  درجه است.

فرض حکم

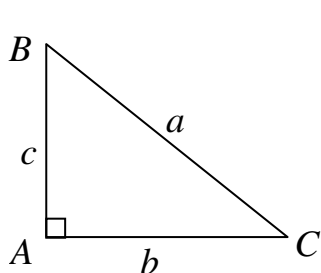
فرض :  $\triangle ABC$  مثلث است.

حکم :  $\angle A + \angle B + \angle C = ۱۸۰^\circ$





د) اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر آن با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است.



مثلث  $\triangle ABC$  قائم الزاویه است: فرض

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ : حکم}$$

۴- الف) گیریم که  $x$  زوج باشد، پس  $x = 2k$  لذا

$$x^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$$

یعنی  $x^2$  زوج است و این خلاف فرض است، پس  $x$  باید فرد باشد.

ب) گیریم که  $x$  فرد باشد، پس  $x = 2k + 1$  لذا

$$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

یعنی  $x^2$  فرد است و این خلاف فرض است، پس  $x$  باید زوج باشد.