

سوالات و پاسخ ریاضیات کنکور کارشناسی ارشد مهندسی عمران و نقشه برداری ۱۳۹۹  
مهندس شاه‌ابراهیمی

۳۱- مقدار حد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2 + \sqrt{1+x^4})^{\frac{1}{\ln x}}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{e}$   
 (۲)  $e$   
 (۳)  $\frac{1}{e^2}$   
 (۴)  $e^2$

۳۲- مقدار  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1+\sqrt{n}} + \frac{1}{2+\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n^2}} \right)$  کدام است؟

(۱) ۰  
 (۲) ۱  
 (۳)  $\ln 2$   
 (۴)  $2 \ln 2$

۳۳- مساحت محصور به دو منحنی  $y = \ln x$  و  $y = (\ln x)^2$  کدام است؟

(۱)  $e-1$   
 (۲)  $e-2$   
 (۳)  $3-e$   
 (۴)  $4-e$

۳۴- اگر  $z$  یک عدد مختلط باشد به طوری که  $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$  و  $z + \frac{1}{z^{100}} = \sqrt{3}$  کدام است؟

(۱)  $-1$   
 (۲)  $-3^{50}$   
 (۳) ۱  
 (۴)  $3^{50}$

۳۵- کدام مورد در ارتباط با سری  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{1+2+\dots+n}\right)$  درست است؟

(۱) همگرا بوده و مقدار آن برابر  $-\ln 3$  می‌باشد.  
 (۲) همگرا بوده و مقدار آن برابر  $-\ln 2$  می‌باشد.  
 (۳) همگرا بوده و مقدار آن برابر  $-2$  می‌باشد.  
 (۴) واگرا است.

سوالات و پاسخ ریاضیات کنکور کارشناسی ارشد مهندسی عمران و نقشه برداری ۱۳۹۹

مهندس شاه‌ابراهیمی

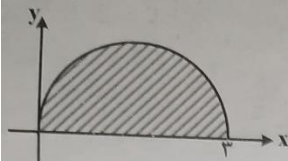
۳۶- کمترین فاصله بین کره  $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 6z + 12 = 0$  و صفحه  $2x - y + 2z + 1 = 0$  کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۳ (۲)
- ۲ (۳)
- ۱ (۴)

۳۷- فرض کنید  $f(x, y)$  تابعی مشتق‌پذیر بر حسب  $x$  و  $y$  است به طوری که  $f(x, 2x) = 1$  و  $f_x(x, 2x) = x$  در این صورت  $f_y(1, 2)$  کدام است؟

- $-\frac{1}{2}$  (۱)
- $-\frac{1}{4}$  (۲)
- $\frac{1}{2}$  (۳)
- $\frac{1}{4}$  (۴)

۳۸- حاصل  $\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2} dx dy$  که در آن  $D$  سطح نیم‌دایره نمایش داده شده در شکل زیر است، کدام است؟



- $3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\right)$  (۱)
- $3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$  (۲)
- $9\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\right)$  (۳)
- $9\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$  (۴)

۳۹- اگر منحنی  $c$  نیم‌دایره  $0 \leq t \leq \pi$  باشد، مقدار  $\int_c e^y dx + xe^y dy$  کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۱ (۲)
- ۱ (۳)
- ۲ (۴)

۴۰- اگر  $D$  ناحیهٔ محصور به بیضی‌گون  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  و بالای صفحه  $z = 0$  باشد و

حاصل  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$  که در آن  $S$  سطح محصورکننده  $\vec{F} = (x + 4y^2)\vec{i} + (3y + 2x^2)\vec{j} + (-2z + 2y \cos x)\vec{k}$

$D$  بوده و  $\vec{n}$  بردار یگانه قائم برون‌سو باشد، کدام است؟

- $2\pi$  (۱)
- $4\pi$  (۲)
- $8\pi$  (۳)
- $12\pi$  (۴)

۴۱- جواب معادله دیفرانسیل  $y' - y \tan x = e^{\sin x}$  ,  $y(0) = 0$  کدام است؟

(۱)  $\frac{e^{\sin x} - 1}{\cos x}$

(۲)  $\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$

(۳)  $\tan x e^{\sin x}$

(۴)  $\tan x (e^{\sin x} - 1)$

۴۲- جواب معادله دیفرانسیل  $y' = \frac{y + 2x}{2y + 4x - 1}$  کدام است؟

(۱)  $x = \frac{2}{5}(y + 2x) - \frac{2}{5} \ln(\Delta y + 10x - 2) + c$

(۲)  $x = \frac{2}{5}(y + 2x) + \frac{2}{25} \ln(\Delta y + 10x - 2) + c$

(۳)  $x = \frac{2}{5}(y + 2x) - \frac{1}{25} \ln(\Delta y + 10x - 2) + c$

(۴)  $x = \ln(2y + 4x - 1) + c$

۴۳- تابع  $y = x^2 e^x$  جواب کدام معادله دیفرانسیل است؟

(۱)  $y^{(4)} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$

(۲)  $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$

(۳)  $y''' - 2y'' + y' = 0$

(۴)  $y''' + 2y'' + y' = 0$

۴۴- جواب عمومی معادله  $(\cos x)y'' + (\sin x)y' = \cos^2 x$  کدام است؟

(۱)  $y = x \sin x - x \cos x + c_1 \cos x + c_2$

(۲)  $y = x \cos x + \sin x + c_1 \cos x + c_2$

(۳)  $y = x \cos x + x \sin x + c_1 \sin x + c_2$

(۴)  $y = \cos x + x \sin x + c_1 \sin x + c_2$

۴۵- تبدیل لاپلاس معکوس  $\ln(1 + \frac{1}{s})$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1 - \cos t}{t}$

(۲)  $\frac{1 - \sin t}{t}$

(۳)  $\frac{2(1 - \cos t)}{t}$

(۴)  $\frac{2(1 - \sin t)}{t}$

$$\begin{aligned}
 ۳۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2+\sqrt{1+x^4})^{\frac{1}{\ln x}} &= A && \frac{1}{e} \\
 &= \infty^0 \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2+\sqrt{1+x^4})}{\ln x} && e \\
 & && \frac{1}{e^2} \\
 & && \boxed{e^2} \\
 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2+\sqrt{1+x^4})}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x+\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^2+\sqrt{1+x^4}}}{\frac{1}{x}} && \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+\frac{2x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^2+\sqrt{1+x^4}} && \\
 &\approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+2x^2}{2x^2} = 2 && \\
 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2+\sqrt{1+x^4})}{\ln x} = 2 &\rightarrow \boxed{A = e^2} && (\text{سوال استاندارد خوب بود})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۳۲) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1+\sqrt{n}} + \frac{1}{2+\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n^2}} \right) & \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+\sqrt{in}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n}{i+\sqrt{in}} && \frac{1}{L_n 2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{i}{n} + \sqrt{\frac{i}{n}}} = \int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx && \boxed{2 L_n 2} \\
 \text{تغییر} \begin{cases} x=t^2 \\ dx=2t dt \end{cases} &= \int_0^1 \frac{2t dt}{t^2+t} = \int_0^1 \frac{2 dt}{t+1} = 2 \ln|t+1| \Big|_0^1 \\
 &= \boxed{2 L_n 2} && (\text{سوال استاندارد خوب بود})
 \end{aligned}$$



۳۳) مساحت تصویر برداری  $y = \ln x$  و  $y = (\ln x)^2$  ؟

مساحت  $\rightarrow (\ln x)^2 = \ln x \rightarrow (\ln x)^2 - \ln x = 0$  e-1  
 $\ln x (\ln x - 1) = 0$  e-2  
 $\left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ x=e \end{array} \right.$   $\boxed{3-e}$   
4-e

$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_1^e (\ln x - (\ln x)^2) dx$  توضیح  $\left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right.$

$= \int_0^1 (t - t^2) e^t dt = e^t (t - t^2 - 1 + 2t - 2) \Big|_{t=0}^1$

$= e(-1) - e^0(-3) = \boxed{-e + 3}$  (سوال استناد دارد، خوب بود)

۳۴)  $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$  ،  $z^{100} + \frac{1}{z^{100}} = ?$

$z + \bar{z} = \sqrt{3} \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = \sqrt{3}$   $\boxed{-1}$

$z = e^{i\pi/6}$  ر=1  
 $\left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  نقطه بر روی دایره  $\theta = \frac{\pi}{6}$   
-3<sup>50</sup>  
1  
3<sup>50</sup>

$z^{100} + \frac{1}{z^{100}} = z^{100} + \bar{z}^{100} = e^{i\frac{100\pi}{6}} + e^{-i\frac{100\pi}{6}}$

$= e^{i\frac{50\pi}{3}} + e^{-i\frac{50\pi}{3}} = e^{i(17\pi - \frac{\pi}{3})} + e^{-i(17\pi - \frac{\pi}{3})}$

$= (-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) + (-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{-1}$

(سوال استناد دارد، خوب بود)

Subject:  $2x - y + 2z + 1 = 0$  صغریه،  $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 6z + 12 = 0$  کبریا  
 Date: ۳ ۱  
۴ ۲

$f: x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 6z + 12 = 0$   $\vec{\nabla}_f = (2x, 2y+4, 2z-6)$

$g: 2x - y + 2z + 1 = 0$   $\vec{\nabla}_g = (2, -1, 2)$

باید در آن کره، خطایم موازی باشد (نویسند نامه سه این در زمان است که خط موازی بود (موازی))

$\vec{\nabla}_f \parallel \vec{\nabla}_g \rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{2y+4}{-1} = \frac{2z-6}{2} \rightarrow \boxed{x = -2(y+2) = z-3}$

این معادله در کره و صغریه صادق است.

پارامتریک  $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{t}{2} - 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$   $x^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1 \rightarrow t^2 + \frac{t^2}{4} + t^2 = 1$

معادله سه  $t^2 + \frac{t^2}{4} + t^2 = 1$

$\rightarrow \frac{9}{4}t^2 = 1 \rightarrow t^2 = \frac{4}{9} \rightarrow \boxed{t = \pm \frac{2}{3}}$

$2x - y + 2z + 1 = 0$  صغریه  $2t + \frac{t}{2} + 2 + 2t + 6 + 1 = 0 \rightarrow \frac{9}{2}t + 9 = 0$

$\rightarrow \frac{9}{2}t = -9 \rightarrow \boxed{t = -2}$

پارامتریک  $\begin{cases} x = 2/3 \\ y = -7/3 \\ z = 11/3 \end{cases}$   $t = 2/3$

$\begin{cases} x = -2/3 \\ y = -5/3 \\ z = 7/3 \end{cases}$   $t = -2/3$

$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$   $t = -2$

$\sqrt{(\frac{2}{3}+2)^2 + (-\frac{7}{3})^2 + (1-\frac{11}{3})^2} = \sqrt{4}$

$\sqrt{(\frac{2}{3}+2)^2 + (-\frac{7}{3})^2 + (1-\frac{11}{3})^2} = 4$

کبریا قابل است

سوال بسیار مهمی و دشوار بود

۳۷)  $f(x, 2x) = 1$  ,  $f_x(x, 2x) = x$  ,  $f_y(1, 2) = ?$

$f_x(x, 2x) = x \xrightarrow{\int dx} f(x, 2x) = \frac{1}{2}x^2 + f(y) *$   $\frac{-1}{2x}$   $\boxed{\frac{-1}{2}}$

$f(x, 2x) = 1 ** \xrightarrow{**} f(y) = -\frac{1}{8}y^2 + 1$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$

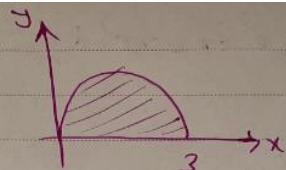
$\rightarrow f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}y^2 + 1 \rightarrow f_y(x, y) = -\frac{1}{4}y$

$\xrightarrow[x=1]{y=2} f_y(1, 2) = -\frac{1}{4} \cdot 2 = \boxed{\frac{-1}{2}}$

$\xrightarrow{y=x} f_x + 2f_y = 0 \rightarrow f_y = -\frac{1}{2}f_x$

$f_y(1, 2) = -\frac{1}{2}f_x(1, 2) = -\frac{1}{2}(1) = \boxed{\frac{-1}{2}}$

۳۸)  $\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2} dx dy$



$x^2 + y^2 = r^2$  ,  $dx dy = r dr d\theta$

$x^2 + y^2 = 3x \rightarrow r^2 = 3r \cos \theta \begin{cases} r=0 \\ r=3 \cos \theta \end{cases}$

$0 < \theta < \pi/2$

$3(\pi/2 + \frac{2}{3})$

$3(\pi/2 - \frac{2}{3})$

$9(\pi/2 + \frac{2}{3})$

$\boxed{9(\pi/2 - \frac{2}{3})}$

$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{3 \cos \theta} \sqrt{9-r^2} r dr d\theta$

$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (9-r^2)(\sqrt{9-r^2}) \Big|_0^{3 \cos \theta} = -\frac{1}{3} (9 \sin^2 \theta \cdot 3 \sin \theta - 27)$

$= -9(\sin^3 \theta - 1)$

$= -9 \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \theta - 1) d\theta = -9 \left( \frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta - \theta \right) \Big|_0^{\pi/2}$

$= -9 \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \right) = \boxed{9 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)}$

(سوال صغری، نسبتاً دشوار بود)



۳۹)  $\int_C e^y dx + xe^y dy$   $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$   $0 \leq t \leq \pi$

$\text{Curl } \vec{F} = \vec{0} \leftarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  -2

مسئله یازدهم و  
بنا بر این از تابع پتانسیل استفاده می‌کنیم؛ -1

$= \int P dx + \int^* Q dy = \int e^y dx + 0 = xe^y \Big|_{t=0 \rightarrow (1,0)}^{t=\pi \rightarrow (-1, \pi)}$  2

$= -1 - 1 = -2$

(مسئله مفهومی و ساده بود) (بهتر بود طرح عدد صفر را هم در اینجا آورده بودم اما در مانس سوال  
نکته تستی است !!!)

۴۰)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  و  $z=0$  : D

$\vec{F} = (x+4y^2)\vec{i} + (3y+2x^2)\vec{j} + (-2z+2yx)\vec{k}$

$\oiint_S \vec{F} \cdot n ds = ?$  2π

$\oiint_S \vec{F} \cdot n ds = \iiint_V \text{div } \vec{F} \cdot dV$  4π

مسئله  $\rightarrow$  دیفرانسیل  $\rightarrow$   $\iiint_V \text{div } \vec{F} \cdot dV = \oiint_S \vec{F} \cdot n ds$  8π

$\text{div } \vec{F} = 1+3-2 = 2 \rightarrow = 2 \iiint_V dV$  12π

تغییر متغیر  $\begin{cases} x=3A \\ y=2B \\ z=C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A^2+B^2+C^2=1 \\ 6 dA dB dC = dV \end{cases}$

$\rightarrow = 2 \times 6 \int_{A=0}^{2\pi} \int_{C=0}^1 \int_{B=0}^{\sqrt{1-r^2}} dz \cdot r dr d\theta$

PAPCO

$= 2 \times 6 \times 2\pi \left( \frac{1}{3} \right) = 8\pi$  (سوال حدیثی و کمی تکرار بود)



۲۱)  $y' - y \tan x = e^{\sin x} \cdot y(0) = 0$

حل:  $\int -\tan x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \ln |\cos x|$

فرض کنیم  $y \cos x = u$  در طرفین

$y' \cos x - y \sin x = \cos x e^{\sin x}$

$(y \cos x)' = \cos x e^{\sin x}$

$\int y \cos x = \int \cos x e^{\sin x} dx + C$   $y(0) = 0 \rightarrow 0 = 1 + C \rightarrow C = -1$

$\rightarrow y \cos x = e^{\sin x} - 1 \rightarrow y = \frac{e^{\sin x} - 1}{\cos x}$

(همان طور که انتظار می‌رود، سؤال مرتباً اول خطی و متغیر را استاندارد و خوب و بد (نکته))

۲۲)  $y' = \frac{y+2x}{2y+4x-1}$

$y+2x = u \rightarrow y' + 2 = u'$

حالت اول  $u' - 2 = \frac{u}{2u-1}$

$\rightarrow u' = \frac{u}{2u-1} + 2 = \frac{5u-2}{2u-1}$

$\rightarrow \frac{(2u-1) du}{5u-2} = dx$   $\int \frac{2}{5} u - \frac{1}{25} \ln(5u-2) = x$

$\frac{2}{5} \frac{(5u-2) - \frac{1}{5}}{5u-2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5(5u-2)}$

$x = \frac{2}{5}(y+2x) - \frac{2}{5} \ln(5y+10x-2)$

$x = \frac{2}{5}(y+2x) + \frac{2}{25} \ln(5y+10x-2) + C$

$x = \frac{2}{5}(y+2x) - \frac{1}{25} \ln(5y+10x-2) + C$

$x = \ln(2y+4x-1) + C$

(سؤال استاندارد و خوب (نکته))

۴۳)  $y = x^2 e^x$

وقتی  $y = x^2 e^x$  اینجاست یعنی جواب که به دست  
 $e^x, x e^x, x^2 e^x$   
 بوند رایج یعنی رایج مضاعف  $t=1$

$\rightarrow (t-1)^3 = 0 \rightarrow t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$  ← معادله مشخصه

طبق ترتیب  $t=0$  در اینجاست  $\rightarrow y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$

(سوال نهومی رساله بود)

$y^{(4)} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$

$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$

$y''' - 2y'' + y' = 0$

$y''' + 2y'' + y' = 0$

۴۴)  $(\cos x) y'' + (\sin x) y' = \cos^2 x$

فرض کنیم  $y' = u$   
 $\rightarrow y'' = u'$

$\rightarrow \cos x \cdot u' + \sin x \cdot u = \cos^2 x$

$\xrightarrow{\div \cos x} u' + \tan x \cdot u = \cos x$

فرض کنیم  $u = v \cos x$   
 $\rightarrow v' \cos x - v \sin x + \tan x \cdot v \cos x = \cos x$   
 $\rightarrow v' \cos x = \cos x$   
 $\rightarrow v' = 1 \rightarrow v = x + C_1$

$u = y' = \cos x (x + C_1)$   
 $\rightarrow dy = (\cos x \cdot x + C_1 \cos x) dx$

$\int \rightarrow y = x \sin x + \cos x + C_1 \sin x + C_2$

(سوال استاندارد بود رساله بود)

$y = x \sin x - \cos x + C_1 \cos x + C_2$

$y = x \cos x + \sin x + C_1 \cos x + C_2$

$y = x \cos x + x \sin x + C_1 \sin x + C_2$

$y = \cos x + x \sin x + C_1 \sin x + C_2$

سوالات و پاسخ ریاضیات کنکور کارشناسی ارشد مهندسی عمران و نقشه برداری ۱۳۹۹  
مهندس شاه‌ابراهیمی

۴۵)  $L_n(1 + \frac{1}{s^2})$  تبدیل لاپلاس معکوس؟

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}(F'(s))$$

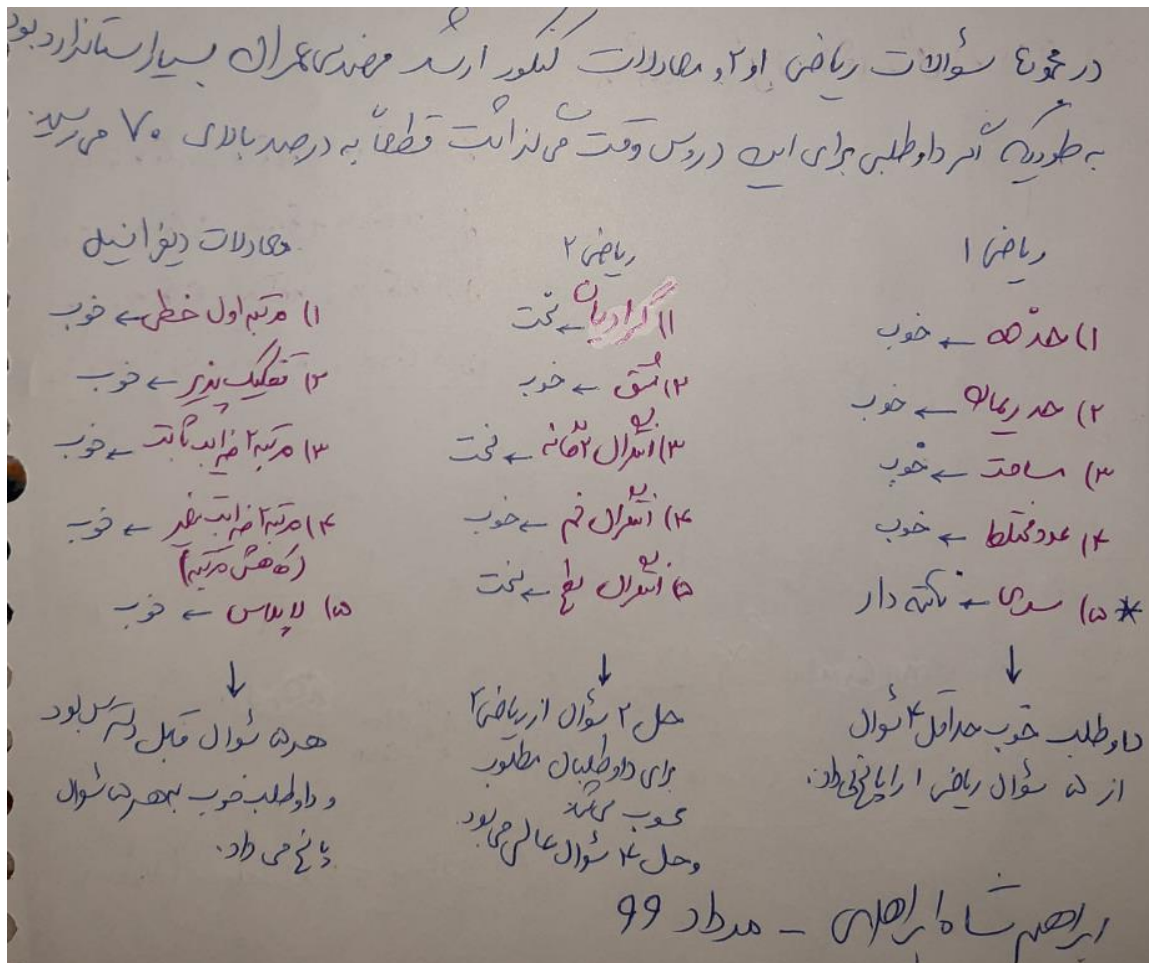
$$F(s) = L_n(s^2+1) - L_n(s^2)$$

$$F'(s) = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y = 2\cos t - 2$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = -\frac{1}{t} (2(\cos t - 1)) = \frac{2}{t} (1 - \cos t)$$

(سوال استاندارد بود، از ساده ترین سوالات میهن (بردار بود)

$\frac{1 - \sin t}{t}$	$\frac{1 - \cos t}{t}$
$\frac{2(1 - \sin t)}{t}$	$\frac{2(1 - \cos t)}{t}$



## ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

[Math-Teacher.blog.ir](http://Math-Teacher.blog.ir)