تاریخ: ۱۳۹۶/۱۱/۸
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

«پایان‌ترم معـــادلات دیفرانســـیل»

۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل ناهمگن زیر را بیابید. (۲ نمره)

$$y^{(4)} - y = 2\sin^2 x$$

۲- جواب معادله چبیشف زیر را به کمک سری‌ها حول نقطه‌ی $x=0$ بیابید. (λ عدد ثابت است)
(۲ نمره)

$$(1-x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0$$

۳- جواب معادله دیفرانسیل $y'' + e^{2x}y = 0$ را به کمک تغییـــر متغیـــر $z = e^x$ بـــر حـــسب توابـــع بـــسل بنویسید. (۲ نمره)

۴- حاصل انتگرال زیر را بیابید. (۲ نمره)

$$\int_0^\infty \int_0^t e^{-2t} \frac{\sin^2(t-x)}{\operatorname{sech} x} dx dt$$

۵- معادله انتگرالی زیر را حل کنید. (۳ نمره)

$$y''(x) = \sinh x + 2e^x \int_0^x \frac{y'(t)}{e^t} dt \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

۶- از دستگاه معادلات زیر $y(t)$ را بیابید. ($u_c(t)$ تابع پلّه و $\delta(t-t_0)$ تابع ضربه است) (۳ نمره)

$$\begin{cases} y'' + 4x' + y = 2u_0(t) \\ 2x' + y' = \delta(t)\cos t \end{cases} \qquad y(0) = y'(0) = x(0) = 0$$

سوال ۱:

$y^{(4)} - y = 2\sin^2 x$

معادله همگن $\longrightarrow y^{(4)} - y = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} t^4 - 1 = 0$

$\longrightarrow (t^2-1)(t^2+1) = 0 \begin{cases} t = \pm 1 \\ t = \pm i \end{cases} \xrightarrow{\text{جواب عمومی همگن}} \boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x}$

جواب خصوصی به روش اپراتوری:

$D^4 y - y = 2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \longrightarrow (D^4-1)y = 1 - \cos 2x \longrightarrow y = \underbrace{\frac{1}{D^4-1}}_{(I)} - \underbrace{\frac{\cos 2x}{D^4-1}}_{(II)}$

$(I) \longrightarrow y = \frac{e^{0t}}{D^4-1} \xrightarrow{D=0} y = -1$

$(II) \longrightarrow y = \frac{\cos 2x}{D^4-1} \xrightarrow{D^2=-4} y = \frac{1}{15}\cos 2x$

جواب خصوصی $\longrightarrow \boxed{y = -1 - \frac{1}{15}\cos 2x}$

جواب عمومی = جواب عمومی معادله همگن + جواب خصوصی

$$\boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x - 1 - \frac{1}{15}\cos 2x}$$

سوال ۲:

$y'' - \frac{x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda^2}{1-x^2}y = 0$

$x = 0$ نقطه عادی $\longrightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

جایگذاری $\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

یکی کردن توان $\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-2)a_{n-2}x^{n-2} + \lambda^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2}$

یکی کردن اندیس پایه $\longrightarrow 0 + 0 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-2)a_{n-2}x^{n-2} + \lambda^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} = 0$

$\longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2}\left[n(n-1)a_n - (n-2)(n-3)a_{n-2} - (n-2)a_{n-2} + \lambda^2 a_{n-2}\right] = 0$

$\longrightarrow n(n-1)a_n - \left(\underbrace{(n-2)(n-3) + (n-2) - \lambda^2}_{\text{فاکتور } (n-2)(n-3+1) - \lambda^2 \,=\, (n-2)^2 - \lambda^2}\right)a_{n-2} = 0$

$\longrightarrow n(n-1)a_n = ((n-2)^2 - \lambda^2)a_{n-2} \longrightarrow a_n = \frac{(n-2)^2 - \lambda^2}{n(n-1)} a_{n-2}$

$\xrightarrow{n \to n+2} \boxed{a_{n+2} = \frac{n^2 - \lambda^2}{(n+1)(n+2)} a_n}$

ابراهیم شاه ابراهیمی
مدرس تخصصی ریاضی۱و۲
و معادلات دیفرانسیل
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

Scanned by CamScanner

سؤال ۳ :

$$y'' + e^{2x} y = 0 \qquad z = e^{x} \longrightarrow \frac{dz}{dx} = e^{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = e^{x} \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x} \frac{dy}{dz}\right) = e^{x}\frac{dy}{dz} + e^{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) = e^{x}\frac{dy}{dz} + e^{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= e^{x}\frac{dy}{dz} + e^{x}\left(\frac{d}{dz}\left(e^{x}\frac{dy}{dz}\right)\right) = e^{x}\frac{dy}{dz} + e^{2x}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} e^{2x}\frac{d^2y}{dz^2} + e^{x}\frac{dy}{dz} + e^{2x} y = 0 \xrightarrow[z^2 = e^{2x}]{z = e^{x}} \boxed{z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2 - 0)y = 0}$$

معادله بسل مرتبه صفر

$$y = c_1 J_0(z) + c_2 Y_0(z) \longrightarrow \boxed{y = c_1 J_0(e^{x}) + c_2 Y_0(e^{x})}$$

سؤال ۴ :

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot \int_0^{t} \frac{\sin^2(t-x)}{\operatorname{Sech} x}\, dx\, dt \qquad \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

مقایسه با تعریف لاپلاس

$$\begin{cases} f(t) = \int_0^{t} \frac{\sin^2(t-x)}{\operatorname{Sech} x}\, dx \\ s = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق انتگرال}} \mathcal{L}\left(\int_0^{t} \frac{\sin^2(t-x)}{\operatorname{Sech} x}\, dx\right)\Bigg|_{s=2}$$

$$\xrightarrow{\text{کانولوشن}} \begin{cases} f(t) = \sin^2 t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)} \\ g(t) = \frac{1}{\operatorname{Sech} t} = \cosh t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(\cosh t) = \boxed{\frac{s}{s^2-1}} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{بنابراین}} \mathcal{L}\left(\int_0^{t}\left(\frac{\sin^2(t-x)}{\operatorname{Sech} x}\right) dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) \times \frac{s}{s^2-1}\Bigg|_{s=2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{8}\right) \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی
مدرس تخصصی ریاضی۱و۲
و معادلات دیفرانسیل
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

Scanned by CamScanner

@EShahebrahimi

۸ بهمن ۹۴

« پاسخنامه آزمونک پایانی معادلات دیفرانسیل »

math-teacher.blog.ir

سؤال ۵ :

$$y''(x) = \sinh(x) + 2\int_0^x e^{x-t} y'(t)\, dt \qquad y(0)=y'(0)=0$$

$$\xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{لاپلاس گیری}} s^2F(s) - s\cancel{f(0)} - \cancel{f'(0)} = \frac{1}{s^2-1} + 2\left(\frac{1}{s-1} \times sF(s) - \cancel{f(0)}\right)$$

$\mathcal{L}(y)=F(s)$

$$\longrightarrow F(s)\left(s^2 - \frac{2s}{s-1}\right) = \frac{1}{s^2-1} \longrightarrow F(s)\left(\frac{s^3-s^2-2s}{s-1}\right) = \frac{1}{s^2-1}$$

$$\longrightarrow F(s)\left(\frac{s(s+1)(s-2)}{\cancel{s-1}}\right) = \frac{1}{\cancel{(s-1)}(s+1)} \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(s-2)}$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کسری}} F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s-2} \qquad A=-\frac{1}{2} \quad B=\frac{4}{9} \quad C=\frac{1}{3} \quad D=\frac{1}{18}$$

$$F(s) = \frac{-1/2}{s} + \frac{4/9}{s+1} + \frac{1/3}{(s+1)^2} + \frac{1/18}{s-2} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} \boxed{y = -\frac{1}{2} + \frac{4}{9}e^{-x} + \frac{1}{3}xe^{-x} + \frac{1}{18}e^{2x}}$$

سؤال ۶ :

$$\begin{cases} y'' + 4x' + y = 2u_0(t) \\ 2x' + y' = \delta(t)\cos t \end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=x(0)=0$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس گیری}} \begin{cases} s^2\mathcal{L}(y) - s\,y(0) - \cancel{y'(0)} + 4s\mathcal{L}(x) - \cancel{4x(0)} + \mathcal{L}(y) = 2\dfrac{e^{-0s}}{s} = \dfrac{2}{s} \\ 2s\mathcal{L}(x) - \cancel{2x(0)} + s\mathcal{L}(y) - \cancel{y(0)} = e^{-0s}\cos(0) = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب سازی}} \begin{cases} \mathcal{L}(x)(4s) + \mathcal{L}(y)(s^2+1) = \dfrac{2}{s} \\ \mathcal{L}(x)(2s) + \mathcal{L}(y)(s) = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کرامر}} \mathcal{L}(y) = \frac{\begin{vmatrix} 4s & \frac{2}{s} \\ 2s & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4s & s^2+1 \\ 2s & s \end{vmatrix}} = \frac{4s-4}{4s^2-2s^3-2s} = \frac{4(s-1)}{-2s(s^2-2s+1)} = \frac{4(s-1)}{-2s(s-1)^2}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{-2}{s(s-1)} \overset{\text{تجزیه کسری}}{=} \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} \qquad A=2 \quad B=-2$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s-1} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} \boxed{y = 2 - 2e^{t}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی
مدرس تخصصی ریاضی۱و۲ و معادلات دیفرانسیل
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی