ریاضی عمومی ۱ و ۲

(برای دانشجویان علوم پایه و فنی مهندسی)

دکتر احمد عرفانیان
(عضو هیأت علمی دانشگاه فردوسی مشهد)

دکتر رجبعلی کامیابی گل
(عضو هیأت علمی دانشگاه فردوسی مشهد)

فهرست مطالب

مقدمه

خداوند متعال را سپاس‌گذاریم که ما را یاری نمود تا پس از سال‌ها تلاش و پیگیری نگارش و چاپ این کتاب را به پایان رسانیده و اکنون در اختیار شما علاقه‌مندان، دانش‌پژوهان و دانشجویان ارجمند قرار دهیم.

یکی از دغدغه‌های اساسی مولفان که تمایز این کتاب را با کتاب‌های مشابه فراهم کرده است ارائه مطلب به شیوه کاملا منطقی و همراه با بیان نظریه ریاضی و برهان کامل آن‌ها می‌باشد، هم‌چنین با مثال‌های متنوع سعی شده است که قضایا و تعاریف به طور ملموس توضیح داده شوند. اگر چه ممکن است بیان اثبات قضایا و نتایج مربوطه مورد علاقه‌ی همه دانشجویان مخصوصا دانشجویان رشته‌های غیر ریاضی نباشد ولی ما توانسته‌ایم این کتاب را برای دانشجویان ریاضی و نیز دانشجویان غیر ریاضی علاقمند به نظریه اساسی ریاضی به گونه‌ای به رشته تحریر در آوریم که براحتی بتوانند به شیوه استدلالی و بنیادی با مفاهیم ریاضیات عمومی آشنایی پیدا کنند، البته مدرسان محترم می‌توانند از بیان برهان‌های ریاضی قضایا برای سایر رشته‌های علوم پایه مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و زمین‌شناسی و نیز رشته‌های مهندسی، کشاورزی و اقتصاد صرف‌نظر نمایند.

از نکات دیگر برجسته این کتاب ارائه مسایل نمونه حل شده تکنیکی همراه با پاسخ کامل در انتهای هر فصل می‌باشد تا دانشجویات بتوانند با تکنیک‌های مهم حل مسئله آشنا شوند تا با استفاده از این مسایل حل شده به عنوان الگو آمادگی بیشتری برای آن‌ها در حل مسایل دیگر به وجود آورد تا بدین وسیله قدرت حل مسئله آنان تقویت یابد.

کتاب حاضر در پانزده فصل تنظیم شده است که مطالب آن‌ها منطبق با سرفصل ارائه شده برای درس ریاضیات عمومی توسط شورای عالی برنامه‌ریزی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری برای تدریس در رشته‌های علوم، مهندسی، کشاورزی و اقتصاد می‌باشد. البته لازم به یادآوری است که برای برخی از رشته‌های فوق می‌توان قسمتی از مباحث یا فصول کتاب را به تشخیص مدرس مربوطه حذف نمود.

امیدواریم انتشار این کتاب ضمن قبول در پیشگاه الهی، مورد استفاده اساتید و دانش‌پژوهان این رشته قرار گرفته و قدم کوچکی در پیشبرد آموزش بهتر ریاضیات در کشور عزیزمان باشد.

از ارائه نظرات، انتقادات و پیشنهادات سازنده شما عزیزان و نیز اشتباهات احتمالی به گرمی استقبال می‌نماییم.

در انتها لازم است که از سرکار خانم دکتر حجازیان که امر ویراستاری علمی این کتاب را بر عهده داشتند نهایت قدردانی و تشکر را می‌نماییم، هم‌چنین از سرکار خانم دکتر رئیسی طوسی و سرکار خانم رازقندی که متن را به دقت مطالعه نموده‌اند و نیز آقایان منبتی و موسوی که کار تایپ، ترسیم اشکال و صفحه‌آرایی را با دقت تمام انجام داده‌اند سپاس‌گذاری می‌گردد. از راهنمایی‌ها و مساعدت‌های مدیر محترم امور پژوهشی دانشگاه و کارکنان چاپخانه دانشگاه صمیمانه تشکر می‌نماییم.

مولفان

فصل ۱

دستگاه اعداد حقیقی

۱.۱ مقدمه

هر کس به طور طبیعی تا اندازه‌ای با اعداد آشناست و به واسطه شغل و حرفه‌اش خواصی از آن را در زندگی روزمره به کار می‌برد. به عنوان مثال یك دانش‌آموز دبیرستانی خواص عمومی چهار عمل اصلی را می‌داند و هر عبارتی از اعداد را که با چهار عمل اصلی ساخته شده باشند می‌تواند خلاصه نماید. با این وجود اگر اعداد به طوری جدی و منظم مطالعه نشده باشند همواره ابهاماتی در مورد آنها وجود خواهد داشت. عمده‌ترین این ابهامات منطقی در مورد تعریف و استنتاج خاصیت‌های اعداد است.

از نقطه‌نظر تاریخی، انسان ابتدا با اعداد مربوط به شمارش یعنی اعداد طبیعی آشنا شد. مرحله بعدی آشنایی با اعدادی بود که نشان‌دهنده‌ی تقسیم یك واحد به‌چند جزء کوچکتر و انتخاب یك یا چند تا از اجزاء آن می‌باشد. این اعداد در واقع همان اعداد گویای مثبت هستند. در مرحله بعد، نوبت اعدادی بود که گویا نیستند به عنوان مثال طول وتر مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای که طول هر یك از ساق‌هایش ۱ است. این اعداد به اعداد گنگ (اصم) موسوم گردیده‌اند. معرفی صفر و اعداد منفی مرحله‌ی بعدی را تشکیل می‌داد. در تمامی این مراحل مشکلات منطقی معینی وجود دارند که اولین آنها می‌تواند تعریف عدد باشد همچنین در گزاره‌های «$۱ > ۰$» و یا «حاصلضرب هر دو عدد منفی عددی مثبت است» ممکن است ندانیم که آیا این گزاره‌ها قابل اثبات هستند و یا اینکه باید آنها را بدون اثبات و به عنوان جزیی از تعریف پذیرفت. روشی که برای رفع چنین مشکلاتی رایج است روش اصل موضوعی نامیده می‌شود. در این روش سعی می‌شود که تنها به کمك قوانین منطقی تعدادی تعریف و خاصیت‌های پذیرفته شده موسوم به اصول موضوعه بقیه خواص را استنتاج کنند. در مطالعه اعداد به روش اصل موضوعی به مقدماتی از منطق و نظریه مجموعه‌ها نیاز است که ما به خاطر جلوگیری از طولانی شدن مطلب و سرعت در عمل از بیان آنها اجتناب نموده و خوانندگان علاقمند را به کتاب‌های منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها ارجاع می‌دهیم. اصول موضوعه‌ی اعداد حقیقی را می‌توان به سه دسته عمده اصول جمع و ضرب و شرکت‌پذیری، اصول

ترتیب و اصل تمامیت تقسیم کرد. در این فصل ضمن بیان این اصول، بعضی از خواصی که از هر یك از اصول استنتاج می‌شوند را نیز بیان خواهیم نمود. همچنین ضمن ساختن اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد گویا به بیان بعضی از اصول مانند اصل استقراء، اصل خوش ترتیبی و اصل ارشمیدسی خواهیم پرداخت و بیان خواهیم کرد که چگونه می‌توان بعضی از آنها را به کمك سایرین اثبات کرد. اینك به معرفی دستگاه اعداد حقیقی می‌پردازیم.

۲.۱ دستگاه اعداد حقیقی

فرض کنید $\mathbb{R}$ یك مجموعه‌ی حداقل دارای دو عضو باشد. از ابتدای امر اعضای $\mathbb{R}$ را عدد حقیقی می‌نامیم. فرض کنید عمل جمع $+$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده و در چهار خاصیت (اصل) زیر موسوم به اصول موضوعه‌ی جمع صدق کند.

۱.۲.۱ (اصول موضوعه‌ی جمع).

(ج۱) (اصل شرکت پذیری) برای هر $a, b, c \in \mathbb{R}$،

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

(ج۲) (وجود عضو خنثی) عضوی در $\mathbb{R}$ که آن را با ۰ نشان می‌دهیم وجود دارد که برای هر $a \in \mathbb{R}$،

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

(ج۳) (وجود عضو قرینه) برای هر $a \in \mathbb{R}$ عضوی از $\mathbb{R}$ که با نماد $-a$ نمایش می‌دهیم وجود دارد که

$$a + (-a) = (-a) + a = a.$$

(ج۴) (اصل جابجایی) برای هر $a, b \in \mathbb{R}$،

$$a + b = b + a.$$

به عبارت دیگر می‌توان فرض کرد $(\mathbb{R}, +)$ یك گروه آبلی جمعی باشد. که ۰ را عضو خنثی (بی‌اثر) و برای هر $a \in \mathbb{R}$، عدد $-a$ را قرینه a در نظر گرفت.

حال به بیان بعضی از خواص مقدماتی جمع می‌پردازیم.

قضیه ۲.۲.۱.

(۱) عضو خنثی منحصر به‌فرد است.

(۲) (قاعده حذف (اسقاط)) برای هر $a, b, c \in \mathbb{R}$، اگر $a + b = a + c$ آنگاه $b = c$.

(۳) عضو قرینه منحصر به‌فرد است.

(۴) $-0 = 0$.

(۵) برای هر $a \in \mathbb{R}$، $-(-a) = a$.

اثبات.

(۱) فرض کنید $0'$ نیز عضو خنثی دیگری باشد. در این صورت داریم $0' = 0' + 0 = 0$.

(۲) فرض کنید برای اعداد حقیقی دلخواه a و b و c داشته باشیم $a + b = a + c$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} b = 0 + b = ((-a) + a) + b &= (-a) + (a + b) \\ &= (-a) + (a + c) \\ &= ((-a) + a) + c \\ &= 0 + c = c. \end{aligned}$$

(۳) فرض کنید برای عدد حقیقی x، x' هم قرینه x باشد در این صورت داریم

$$x' = x' + 0 = x' + (x + (-x)) = (x' + x) + (-x) = 0 + (-x) = -x.$$

توجّه نمایید که از (ج۲) و (ج۳) از چپ به راست به ترتیب در تساوی‌ها استفاده شده است.

(۴) داریم $-0 = (-0) + 0 = 0$.

(۵) فرض کنید $a \in \mathbb{R}$. چون a و $-(-a)$ هر دو قرینه $-(a)$ هستند پس بنا به قسمت ۳، با هم برابرند.

□

تعریف ۳.۲.۱ (تفریق (تفاضل)). *برای هر دو عدد حقیقی a و b، تفاضل a و b که آن را با نماد $a - b$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$a - b = a + (-b).$$

در واقع تفریق خود یك عمل دوتایی در اعداد حقیقی است.

قضیه ۴.۲.۱. *برای هر دو عدد حقیقی a و b، معادله‌ی $a + x = b$ دارای جواب منحصر به‌فرد $x = b - a$ است.*

اثبات. واضح است که $b-a$ یک جواب معادله است. به علاوه این جواب منحصربه‌فرد است زیرا اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو جواب این معادله باشند آنگاه داریم

$$a + x_۱ = b = a + x_۲.$$

بنابراین

$$a + x_۱ = a + x_۲,$$

در نتیجه بنا به ۲.۲.۱ (قاعده حذف) داریم $x_۱ = x_۲$. □

فرض کنید عمل ضرب در $\mathbb{R} - \{۰\}$ (۰ عضو خنثی جمع) تعریف شده و در چهار خاصیت (اصل) زیر موسوم به اصول موضوعه‌ی ضرب صدق کند.

۵.۲.۱ (اصول موضوعه‌ی ضرب).

(ض۱) *(اصل شرکت‌پذیری) برای هر سه عدد حقیقی غیرصفر a و b و c،*

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

(ض ۲) *(وجود عضو یکانی) عضوی در $\mathbb{R} - \{۰\}$ که آن را با «۱» نمایش می‌دهیم وجود دارد که برای هر $a \in \mathbb{R}$*

$$a.۱ = ۱.a = a$$

(ض۳) *(وجود عضو معکوس) برای هر $a \in \mathbb{R}$ عضوی از $\mathbb{R} - \{۰\}$ را که با نماد «$a^{-۱}$» یا «$\frac{۱}{a}$» نشان می‌دهیم موجود است که*

$$a.(a^{-۱}) = (a^{-۱}).a = ۱$$

(ض۴) *(اصل جابجایی) برای هر $a, b \in \mathbb{R} - \{۰\}$*

$$a.b = b.a$$

به عبارت دیگر $(\mathbb{R} - \{۰\}, .)$ یک گروه آبلی ضربی است.
متناظر با هر یک از موارد قضیه ۲.۲.۱ خاصّیتی در گروه ضربی $\mathbb{R} - \{۰\}$ وجود دارد و متناظر با عمل تفریق عمل تقسیم در $\mathbb{R} - \{۰\}$ قابل تعریف است که به دلیل متشابه بودن اثبات، تنها به ذکر آنها اکتفا می‌کنیم.

قضیه ۶.۲.۱.

(۱) *عضو یکانی منحصر به‌فرد است.*

(۲) *(قاعده حذف) برای هر $a, b, c \in \mathbb{R}$، اگر $a.b = b.c$ آنگاه $a = c$.*

(۳) عضو معکوس منحصر به‌فرد است.

(۴) $1^{-1} = 1$.

(۵) برای هر $a \in \mathbb{R} - \{0\}$، $(a^{-1})^{-1} = a$.

تعریف ۷.۲.۱ (تقسیم). *برای عدد حقیقی a و عدد $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ تقسیم a بر b را که با نماد «$a \div b$» یا «$\frac{a}{b}$» نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$\frac{a}{b} = a.b^{-1}$$

قضیه ۸.۲.۱. *برای هر دو عدد حقیقی غیرصفر a و b، معادله‌ی $a.x = b$ دارای جواب منحصر به‌فرد $x = \frac{b}{a}$ است.*

در ادامه به اصلی اشاره می‌کنیم که ضرب و جمع را به‌هم مربوط می‌سازد و به اصل توزیع‌پذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع معروف است. توجّه کنید که این اصل در واقع، همان عمل فاکتورگیری است که قبلاً با آن آشنا شده بودیم.

۹.۲.۱ (اصل موضوع توزیع‌پذیری (پخشی)).

(پ۱) برای هر سه عدد حقیقی a, b, c

$$a.(b+c) = a.b + a.c.$$

اکنون بعضی از خواصّ اصل توزیع‌پذیری را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۲.۱.

(۱) برای هر عدد حقیقی a، $a.0 = 0$.

(۲) برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم

$$a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0.$$

(یا به طور معادل، برای هر دو عدد حقیقی a و b، $\qquad a \neq 0, b \neq 0 \Leftrightarrow a.b \neq 0$*)*

(۳) برای هر $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R} - \{0\}$،

$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

(۴) $(-1).(-1) = 1$.

(۵) برای هر عدد حقیقی a داریم $-a = (-1).a$.

(۶) *برای هر دو عدد حقیقی* a *و* b، $(-a).(-b) = a.b$.

(۷) *برای هر سه عدد حقیقی* a *و* b *و* c، $a.(b-c) = a.b - a.c$

اثبات.

(۱) اگر $a \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد آنگاه
$$a.۰ = a.(۰ + ۰) = a.۰ + a.۰.$$

بنابراین طبق قاعده حذف در جمع (۲.۲.۱ (۲)) داریم
$$a.۰ = ۰.$$

(۲) بنابه (۱) اگر $a = ۰$ یا $b = ۰$ در این صورت $a.b = ۰$. حال فرض کنید $a.b = ۰$ و $a \neq ۰$ نشان می‌دهیم که $b = ۰$. چون $a \neq ۰$ پس معکوس a یعنی $a^{-۱}$ وجود دارد. بنابراین طبق (۱) داریم
$$a^{-۱}.(a.b) = a^{-۱}.(۰) = ۰.$$

در نتیجه $(a^{-۱}.a).b = ۰$ و یا $b = ۰$.

(۳) اگر $a = ۰$ واضح است که $\frac{a}{b} = ۰$. به عکس اگر $\frac{a}{b} = a.b^{-۱} = ۰$ آنگاه چون $b^{-۱} \neq ۰$ پس بنا به (۲)، $a = ۰$.

(۴) از آنجا که $۱ + (-۱) = ۰$ پس بنا به (۱)
$$(-۱).(۱ + (-۱)) = (-۱).۰ = ۰.$$

از طرفی بنا به اصل توزیع‌پذیری داریم
$$(-۱).(۱ + (-۱)) = (-۱).۱ + (-۱).(-۱).$$

بنا براین $(-۱).۱ + (-۱).(-۱)$، چون ۱ عضو یکانی است پس
$$(-۱) + (-۱).(-۱) = ۰.$$

در نتیجه $(-۱).(-۱)$ قرینه‌ی (-۱) است. چون عضو قرینه منحصربه‌فرد است (۲.۲.۱ (۳)) پس $(-۱).(-۱) = ۱$.

(۵) فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد. چون $(-۱) + ۱ = ۰$ پس بنا به (۱) داریم
$$a.((-۱) + ۱) = a.۰ = ۰.$$

در نتیجه طبق اصل توزیع‌پذیری داریم
$$a.(-۱) + a.۱ = ۰,$$

و یا $\circ = a + a.(-1)$. پس $(-1)a$ قرینه a است و چون عضو قرینه منحصر به‌فرد است پس $(-1).a = -a$.

(۶) فرض کنید a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند در این صورت طبق (۵) و خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری در عمل ضرب داریم
$$(-a).(-b) = (-1).a.(-1).b = (-1).(-1).(a.b).$$
در نتیجه بنا به (۴) داریم
$$(-a).(-b) = a.b$$

(۷) فرض کنید a، b و c سه عدد حقیقی دلخواه باشند در این صورت طبق تعریف عمل تفریق، خاصیت توزیع‌پذیری و (۴) داریم
$$a.(b-c) = a.(b+(-c)) = a.b + a.(-c) = a.b + (-1).(a.c) = a.b - a.c.$$

□

تعریف ۱۱.۲.۱ (کلاس مثبت). *زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی مانند P را یک کلاس مثبت نامیم هرگاه*

الف) P نسبت به عمل جمع القاء شده از $\mathbb{R}$ بسته باشد،

ب) P نسبت به عمل ضرب القاء شده از $\mathbb{R}$ بسته باشد،

ج) برای هر عدد حقیقی غیرصفر a داشته باشیم یا $a \in P$ یا $(-a) \in P$.

۱.۲.۱ اصول ترتیب

فرض می‌کنیم که $\mathbb{R}$ دارای یک کلاس مثبت مانند P است. اعضاء P را اعداد حقیقی مثبت نامیم. عدد حقیقی y را منفی نامیم هرگاه $-y$ عضو P باشد. مجموعه‌ی تمامی چنین اعدادی را اعداد حقیقی منفی نامیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. *دو رابطه‌ی «$<$» و «$\leq$» را که به ترتیب کوچکتری اکید و کوچکتر یا مساوی نامیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم برای هر دو عدد حقیقی a و b، $a < b$ هرگاه $b - a \in P$ و $a \leq b$ هرگاه $a = b$ یا $a < b$.*
توجّه نمایید که $a < b$ را به صورت «b اکیداً بیشتر (بزرگتر) از a است» و $a \leq b$ را به‌صورت «b بزرگتر یا مساوی (b ناکمتر از) a است» نیز می‌خوانند.
همچنین برای هر سه عدد حقیقی a، b و c، $a < b < c$ بدین‌معنی است که $a < b$ و $b < c$.

اکنون به بعضی از خواص ترتیب اشاره می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۱۳.

(۱) x مثبت است اگر و فقط اگر $x > 0$.

(۲) x منفی است اگر و فقط اگر $x < 0$.

(۳) هر یک از رابطه‌های «$<$» و «$\leq$» متعدّی هستند.

(۴) (اصل تثلیث قوی) برای هر دو عدد حقیقی a و b فقط یکی از سه شرط زیر برقرار است

(i) $a = b$،

(ii) $a < b$،

(iii) $b < a$.

(۵) برای هر سه عدد حقیقی دلخواه a، b و c، اگر $a < b$ ($a \leq b$) آنگاه $a + c < b + c$ ($a + c \leq b + c$).

(۶) برای اعداد حقیقی دلخواه a، b، c و d داریم
اگر $a < b$ و $c < d$ آنگاه $a + c < b + d$،
اگر $a < b$ و $c \leq d$ آنگاه $a + c < b + d$،
اگر $a \leq b$ و $c \leq d$ آنگاه $a + c \leq b + d$.

(۷) برای هر دو عدد حقیقی a و b و $c > 0$ داریم
اگر $a < b$ آنگاه $a.c < b.c$،
اگر $a \leq b$ آنگاه $a.c \leq b.c$

(۸) برای هر دو عدد حقیقی a و b و $c < 0$ داریم
اگر $a < b$ آنگاه $a.c > b.c$،
اگر $a \leq b$ آنگاه $a.c \geq b.c$

(۹) برای اعداد حقیقی دلخواه a، b، c و d داریم:
اگر $0 < a < b$ و $0 < c < d$ آنگاه $0 < a.c < b.d$،
اگر $0 < a \leq b$ و $0 < c < d$ آنگاه $0 < a.c < b.d$،
اگر $0 < a \leq b$ و $0 < c \leq d$ آنگاه $0 < a.c \leq b.d$.

(۱۰) برای هر عدد حقیقی غیرصفر a داریم $a^2 > 0$، بنابراین $1 > 0$ ($1 \in P$).

(۱۱) برای هر عدد حقیقی a،
اگر $a > 0$ *آنگاه* $\frac{1}{a} > 0$،
اگر $a < 0$ *آنگاه* $\frac{1}{a} < 0$.

(۱۲) برای هر دو عدد حقیقی a *و* b،
اگر $b > a > 0$ *آنگاه* $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$،
اگر $0 > b > a$ *آنگاه* $0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

اثبات. به علّت مشابه بودن روش اثبات و پرهیز از اطاله کلام، فقط بعضی از احکام قضیه فوق را اثبات کرده و بقیه را به خواننده واگذار می‌کنیم.

(۱) فرض کنیم a مثبت باشد یعنی $a \in P$. در این صورت چون $a - 0 = a$ پس بنا به‌تعریف داریم $a > 0$. بالعکس فرض کنید $a > 0$ در این صورت داریم $(a - 0) \in P$ و چون $a - 0 = a$ پس $a \in P$.

(۳) فرض کنید a، b و c سه عدد حقیقی دلخواه باشند و $a < b$ و $b < c$. بنا به تعریف $b - a \in P$ و $c - b \in P$. چون Pنسبت به جمع بسته است پس $(b - a) + (c - b) \in P$.
از طرفی
$$(b - a) + (c - b) = (b - b) + c - a = c - a.$$
پس $c - a \in P$ در نتیجه بنا به تعریف ۱۲.۲.۱، $a < c$.

(۵) فرض کنید a، b و c سه عدد حقیقی دلخواه باشند که $a < b$، پس بنا به تعریف ۱۲.۲.۱، $b - a \in P$. با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری، جابجایی، (ج۲) و (ج۳) داریم
$$b - a = (b - a) + 0 = (b - a) + (c - c) = (b + c) - (a + c).$$
پس بنا به تعریف ۱۲.۲.۱، $a + c < b + c$.

(۶) فرض کنید اعداد حقیقی a، b، c و d چنان باشند که $a < b$ و $c < d$. در این صورت بنا به تعریف داریم $b - a \in P$ و $d - c \in P$. چون P نسبت به عمل جمع بسته است پس $(d - c) + (b - a) \in P$. اما بنا به خواص شرکت‌پذیری، جابجایی عمل جمع، (ج۲) و (ج۳) داریم
$$(d - c) + (b - a) = (d + b) - (a + c).$$
در نتیجه $(d + b) - (a + c) \in P$ و یا $a + c < b + d$.

(۷) فرض کنید a و b دو عدد حقیقی و $c \in P$ دلخواه باشد و $a < b$ در این صورت بنا به تعریف ۱۲.۲.۱، داریم $b - a \in P$ و چون P نسبت به عمل ضرب بسته است پس $c.(b - a) \in P$.

امّا بنا به قضیه ۱۰.۲.۱ (۷)، داریم $c.(b-a)=c.b-c.a$. پس $c.b-c.a \in P$. در نتیجه طبق تعریف ۱۲.۲.۱ داریم $c.a < c.b$.

(۹) فرض کنید a، b، c و d اعداد حقیقی دلخواه باشند که $0 < a < b$ و $0 < c < d$. در این صورت بنا به (۷) چون $a < b$ و $c > 0$ پس $a.c < c.b$ و چون $c < d$ و $b > 0$، پس $b.c < b.d$. در نتیجه بنا به (۳) $a.c < b.d$ و همچنین چون $a > 0$ و $c > 0$ پس بنا به تعریف ۱۲.۲.۱ داریم $0 < a.c < b.d$.

(۱۰) فرض کنید $a \neq 0$ عدد حقیقی دلخواه باشد پس بنا به ۱۱.۲.۱ (ج) (کلاس مثبت) داریم یا $a \in P$ یا $(-a) \in P$ و چون P نسبت به عمل ضرب بسته است پس یا $a^2 \in P$ یا $(-a)^2 \in P$. اما بنا به قضیه ۱۰.۲.۱ (۶)، $a^2=(-a).(-a)=(-a)^2$. پس بنا به (۱) داریم $a^2 > 0$.

(۱۱) فرض کنید $a > 0$. پس $\frac{1}{a} \neq 0$. اگر $\frac{1}{a} < 0$ آنگاه $-\frac{1}{a} > 0$. در نتیجه $a > 0$. $\left(-\frac{1}{a}\right)$. از طرفی $\left(-\frac{1}{a}\right).a = -\left(\frac{1}{a}.a\right) = -1$. پس $-1 > 0$ و یا $1 < 0$ و این متناقض با (۱۰) است.

(۱۲) فرض کنید $0 < a < b$. در این صورت از اینکه $a > 0$ و $b > 0$ نتیجه می‌شود $ab > 0$. پس بنا به (۱۱)، $\frac{1}{ab} > 0$. حال با توجّه به (۷) داریم $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

□

توجّه نمایید هر میدانی[1] که در آن یك رابطه‌ی ترتیب مانند «$<$» تعریف شده باشد که درخاصیت‌های (۳) و (۴) صدق کند یك میدان مرتب نامند. بنابراین $\mathbb{R}$یك میدان مرتب است. در هر میدان مرتب می‌توان مفهوم فاصله را تعریف کرد که همان قدرمطلق می‌باشد. در واقع $\mathbb{R}$ به کلاس اعداد مثبت و کلاس اعداد منفی و مجموعه یکانی ۰ افراز شده است. یعنی هر عدد حقیقی غیرصفر یا مثبت یا منفی است و با توجّه به این واقعیّت می‌توان قدرمطلق را تعریف نمود.

تعریف ۱۴.۲.۱ (قدرمطلق). *برای هر عدد حقیقی a، قدر مطلق a که آن را به صورت $|a|$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$|a|=\begin{cases} a & a>0 \text{ اگر} \\ 0 & a=0 \text{ اگر} \\ -a & a<0 \text{ اگر} \end{cases}$$

اکنون به بیان پاره‌ای از خواص قدرمطلق می‌پردازیم.

[1] برای تعریف میدان و توضیح بیشتر به کتابهای مبانی ریاضیات مراجعه کنید.

قضیه ۱۵.۲.۱ (خواص قدرمطلق). *فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند. در این صورت*

(۱) $|a|\geq ۰$ *و* $|a|=۰$ *اگر و تنها اگر* $a=۰$ *(به طور معادل* $a\neq ۰$ *اگر و تنها اگر* $|a|>۰$*)*.

(۲) $-|a|\leq a\leq |a|$.

(۳) $|a|=|-a|$.

(۴) $|ab|=|a||b|$.

(۵) اگر $b\neq ۰$ *آنگاه* $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$.

(۶) $|a|<|b|\Leftrightarrow a^{۲}<b^{۲}$.

(۷) اگر $b>۰$ *آنگاه*

$$|a|<b\Leftrightarrow a^{۲}<b^{۲}\Leftrightarrow -b<a<b.$$

(۸) نامساوی مثلث

$$|a+b|\leq |a|+|b|,$$

و تساوی فقط و فقط هنگامی اتفاق می‌افتد که $ab\geq ۰$.

(۹) $|a|-|b|\leq ||a|-|b||\leq |a-b|\leq |a|+|b|$.

اثبات. برای پرهیز از اطاله کلام و به علت تشابه در اثبات، فقط به اثبات پاره‌ای از خواص فوق اشاره می‌کنیم.
(۱) و (۲) و (۳) از تعریف به راحتی نتیجه می‌شوند. برای اثبات (۴) کافی است حالت‌های مختلف a و b را در نظر بگیریم. برای برهان (۵) ادعا می‌کنیم که برای هر $b\neq ۰$، $\left|\frac{۱}{b}\right|=\frac{۱}{|b|}$. زیرا

$$۱=|۱|=\left|\frac{b}{b}\right|=\left|b.\frac{۱}{b}\right|=|b|\left|\frac{۱}{b}\right|.$$

در نتیجه $\left|\frac{۱}{b}\right|=\frac{۱}{|b|}$. حکم به راحتی با استفاده از (۴) اثبات می‌شود. برهان (۶) و (۷) را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

(۸) فرض کنید a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند. در این صورت با استفاده از (۲) داریم

$$-|a|\leq a\leq |a|,\quad -|b|\leq b\leq |b|.$$

جمع طرفین دو نامساوی اخیر نتیجه می‌دهد

$$-(|a|+|b|)\leq a+b\leq |a|+|b|.$$

اینك با توجّه به (۷) و اینکه $|a|+|b|\geq ۰$ داریم
$$|a+b|\leq |a|+|b|.$$

□

تعریف ۱۶.۲.۱ (ماکزیمم و می‌نیمم). *فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد. عضو $x_۰\in A$ را می‌نیمم مجموعه‌ی A نامیم هرگاه برای هر $a\in A$ داشته باشیم $x_۰\leq a$ و عضو $x_۱\in A$ را ماکزیمم A نامیم هرگاه برای هر $a\in A$ داشته باشیم $a\leq x_۱$.*

به سادگی می‌توان دید که ماکزیمم و می‌نیمم در صورت وجود منحصربه‌فرد هستند و همواره ماکزیمم ناکمتر از می‌نیمم است. ماکزیمم و می‌نیمم مجموعه A را به ترتیب با نمادهای $\max A$ و $\min A$ نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات $\min A$ را عضو ابتدای A و $\max A$ را عضو انتهای A هم می‌نامند.

۳.۱ اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد گویا

در این بخش ابتدا به معرفی اعداد طبیعی که در شمردن نقشی اساسی دارند می‌پردازیم. این اعداد را به عنوان زیرمجموعه‌ای از میدان مرتب اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ معرفی می‌کنیم و برای این منظور از دو خاصیت اساسی آنها یعنی اینکه ۱ کوچکترین آنها است و همه اعداد طبیعی توسط ۱ ساخته می‌شوند استفاده می‌کنیم. سپس به کمك اعداد طبیعی اعداد صحیح (یا اعداد صحیح نسبی) و اعداد گویا را معرفی خواهیم نمود.

تعریف ۱.۳.۱ (مجموعه‌ی استقرایی). *زیرمجموعه‌ی A از اعداد حقیقی را یك مجموعه‌ی استقرایی نامیم هرگاه*

الف) $۱\in A$ و

ب) برای هر عدد حقیقی a، اگر $a\in A$ آنگاه $(a+۱)\in A$.

به عنوان مثال‌هایی از مجموعه‌های استقرایی مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ ، مجموعه‌ی P (اعداد حقیقی مثبت)، $\{x\in\mathbb{R}: x\geq ۱\}$ و $\{۱\}\cup\{x\in\mathbb{R}: x\geq ۲\}$ را می‌توان نام برد که در آن ۲ نمادی برای عدد حقیقی $۱+۱$ است.

تعریف ۲.۳.۱ (مجموعه اعداد طبیعی). *مجموعه‌ی اعداد طبیعی را که با نماد $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم کوچکترین مجموعه استقرایی نسبت به رابطه‌ی «$\subseteq$» در خانواده‌ی تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ است به عبارت دیگر*
$$\mathbb{N}=\cap\{A\subseteq\mathbb{R}: \text{استقرایی است.}\ A\}.$$

با توجّه به مثال‌های فوق داریم که $۱ \in \mathbb{N}$. (در حقیقت $\min \mathbb{N} = ۱$) و اینکه بین «۱» و «۲» هیچ عددی طبیعی وجود ندارد. به سادگی می‌توان دید که $\mathbb{N}$ خود یك مجموعه استقرایی است. از طرفی اگر برای $۱ + ۱$ نماد ۲ و برای $۲ + ۱$ نماد ۳ و $\cdots$ به کار ببریم در این صورت مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \cdots\}$ یك زیرمجموعه از اعداد حقیقی خواهد بود که استقرایی نیز هست پس $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$. اکنون نشان می‌دهیم که $\mathbb{N}$ تحت اعمال جمع و ضرب به ارث برده از $\mathbb{R}$ بسته است.

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنید که m و n دو عدد طبیعی دلخواه باشند آنگاه*

الف) $m + n$ *عددی طبیعی است.*

ب) $m.n$ *عددی طبیعی است.*

اثبات.

الف) فرض کنید m و n دو عدد طبیعی دلخواه باشند. مجموعه‌ی $A = \{x \in \mathbb{R} : x + m \in \mathbb{N}\}$ را درنظر می‌گیریم. $m \in \mathbb{N}$ و چون $\mathbb{N}$ استقرایی است پس $۱ + m \in \mathbb{N}$. در نتیجه $۱ \in A$.
اکنون اگر $x \in A$ دلخواه باشد یعنی $x + m \in \mathbb{N}$، آنگاه چون $\mathbb{N}$ استقرایی است

$$(۱ + x) + m = ۱ + (x + m) \in \mathbb{N}$$

در نتیجه $۱ + x \in A$. بنابراین A استقرایی است. پس داریم $\mathbb{N} \subseteq A$. حال از اینکه $n \in \mathbb{N}$ پس $n \in A$، یا به عبارت دیگر $n + m \in \mathbb{N}$.

ب) در نظر می‌گیریم $B = \{x \in \mathbb{R} : x.m \in \mathbb{N}\}$. در این صورت چون $۱.m = m \in \mathbb{N}$ پس $۱ \in B$. اگر $x \in B$ دلخواه باشد یعنی داشته باشیم $x.m \in \mathbb{N}$، آنگاه چون

$$(x + ۱).m = x.m + m \in \mathbb{N}$$

پس $x + ۱ \in B$. لذا B یك مجموعه استقرایی است در نتیجه $\mathbb{N} \subseteq B$. حال چون $n \in \mathbb{N}$ پس $n \in B$، یا به عبارت دیگر $n.m \in \mathbb{N}$.

$\square$

اکنون به بیان اصل استقراء می‌پردازیم.

۴.۳.۱ (اصل استقراء). *فرض کنید $A \subseteq \mathbb{N}$ در دو شرط زیر صدق کند*

(الف) $۱ \in A$ و

(ب) برای هر عدد طبیعی n، اگر $n \in A$ آنگاه $n + ۱ \in A$.

در این صورت $A = \mathbb{N}$.

اصل استقراء ناشی از این واقعیّت است که $\mathbb{N}$ کوچکترین مجموعه‌ی استقرایی است و هر زیرمجموعه‌ی از اعداد طبیعی مانند A که در شرط‌های (الف) و (ب) صدق کند بایستی استقرایی باشد در واقع اصل استقراء با قضیه استقراء که در ذیل بیان می‌شود و به استقرای ضعیف موسوم است معادل است.

قضیه ۵.۳.۱ (قضیه استقراء). *فرض کنید F خاصیتی در اعداد طبیعی باشد که*

الف) $F(۱)$ (یعنی ۱ دارای خاصیت F باشد) و

ب) برای هر عدد طبیعی n، اگر $F(n)$ آنگاه $F(n+۱)$.

در این صورت تمام اعداد طبیعی دارای خاصیت F هستند.

اثبات. در نظر می‌گیریم $A = \{n \in \mathbb{N} : F(n)\}$. در این صورت $A \subseteq \mathbb{N}$ و A استقرایی است چرا که فرض (الف) نتیجه می‌دهد که $۱ \in A$ و فرض (ب) نتیجه می‌دهد که اگر $n \in A$ آنگاه $n+۱ \in A$. پس $A = \mathbb{N}$ یعنی تمام اعداد طبیعی دارای خاصیت F هستند. □

قضیه ۶.۳.۱. *فرض کنید $n < m$ دو عدد طبیعی دلخواه باشند. در این صورت* $m - n \in \mathbb{N}$.

اثبات. فرض کنید که m و n دو عدد طبیعی دلخواه باشند که $n < m$. خاصیت F را روی اعداد طبیعی به صورت زیر در نظر می‌گیریم «تفاضل هر عدد طبیعی بزرگتر از n با n عددی طبیعی است».
ابتدا نشان می‌دهیم که تفاضل هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ با ۱ عددی طبیعی است یعنی $F(۱)$.
فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $m > ۱$ ولی $m - ۱ \notin \mathbb{N}$. در نظر می‌گیریم $C = \mathbb{N} - \{m\}$.
دراین‌صورت چون $m > ۱$ پس $۱ \in C$. همچنین اگر n عضوی از C باشد یعنی $n \in \mathbb{N}$ و $n \neq m$.
چون $n + ۱ \in \mathbb{N}$ پس اگر $n + ۱ \notin C$ یعنی اگر $n + ۱ = m$ یا $n = m - ۱$، آنگاه $n \notin \mathbb{N}$ که یك تناقض است پس $n + ۱ \in C$. در نتیجه C یك مجموعه استقرایی است و $C = \mathbb{N}$ یعنی $m \notin \mathbb{N}$. که این خود یك تناقض است پس فرض خلف باطل است یعنی $F(۱)$.
حال فرض کنید $F(n)$، یعنی برای هر عدد طبیعی k، اگر $n < k$ آنگاه $k - n \in \mathbb{N}$. نشان می‌دهیم $F(n+۱)$. برای این منظور فرض کنید که $l > n + ۱$ و l عدد طبیعی دلخواهی باشد. در این صورت داریم $l - ۱ > n$. بنا به $F(۱)$، $l - ۱$ عددی طبیعی است پس بنا به فرض $F(n)$، $(l-۱) - n$ عددی طبیعی است یا $l - (n + ۱) \in \mathbb{N}$ و این بدین معنی است که $F(n+۱)$. در نتیجه طبق قضیه استقراء تمام اعداد طبیعی خاصیت F دارند از جمله اینکه، چون $n < m$ و m عددی طبیعی است پس $m - n$ عددی طبیعی است. □

اکنون در موقعیتی قرار داریم که می‌توانیم اعداد صحیح و اعداد گویا را تعریف نماییم.

تعریف ۷.۳.۱ (اعداد صحیح). *مجموعه‌ی اعداد صحیح را که با $\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهیم عبارت است*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$$

که در آن $-\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{N}\}$.

به آسانی می‌توان دید که $\mathbb{Z}$ تحت عمل جمع، ضرب و تفریق به ارث برده از $\mathbb{R}$ بسته است امّا تحت عمل تقسیم بسته نیست.

تعریف ۸.۳.۱ (اعداد گویا). *مجموعه‌ی اعداد گویا (مُنطق) را که با $\mathbb{Q}$ نمایش می‌دهیم عبارت است از*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

به سادگی می‌توان دید که $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$ و $\mathbb{Q}$ تحت اعمال جمع، ضرب، تفریق و تقسیم به ارث برده از $\mathbb{R}$ بسته است. در واقع $\mathbb{Q}$ خود یك میدان مرتب است. توجّه نمایید که تاکنون رابطه‌ی بین مجموعه‌ی اعداد تعریف شده به صورت زیر است

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

اکنون نشان می‌دهیم که معادله $x^2 = 2$ در اعداد گویا دارای جواب نیست. لازم به توضیح است که از این مرحله به بعد خواص معمولی اعداد مانند بخش‌پذیری، مقسوم علیه مشترك، اول بودن و ... را دانسته شده فرض می‌کنیم.

قضیه ۹.۳.۱. *معادله‌ی $x^2 = 2$ در اعداد گویا دارای جواب نیست.*

اثبات. فرض کنید که این معادله در اعداد گویا دارای جواب باشد. بنابراین اعداد صحیح m و n که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکشان برابر ۱ است موجودند که $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$، یعنی

$$m^2 = 2n^2.$$

چون ۲ عددی اول است و سمت راست بر ۲ بخش‌پذیر است پس سمت چپ آن یعنی m^2 نیز بر ۲ بخش‌پذیر است. پس عدد صحیحی مانند k موجود است به طوری که $m = 2k$. در نتیجه داریم

$$4k^2 = 2n^2,$$

یا $2k^2 = n^2$. پس سمت راست یعنی n بر ۲ بخش‌پذیر است بنابراین ۲ یك مقسوم‌علیه مشترك m و n است. در نتیجه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك m و n عددی ناکمتر از ۲ است که متناقض با این فرض است که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك m و n برابر ۱ است. پس فرض خلف باطل است یعنی معادله $x^2 = 2$ در اعداد گویا دارای جواب نیست. $\square$

۴.۱ اصل موضوع تمامیت (اصل کمال)

تاکنون دیدیم که میدان اعداد حقیقی یك میدان مرتب شامل زیرمیدان مرتب اعداد گویا می‌باشد. قضیه ۹.۳.۱ در واقع بیانگر این واقعیّت است که طول وتر یك مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین با طول ساق «۱»، عددی گویا نیست و این نشان می‌دهد که اعداد حقیقی غیرگویا وجود دارند. امّا اصول موضوعه میدان مرتب برای تعیین اعداد حقیقی به تنهایی کافی نیستند. برای این منظور، به اصل موضوع دیگری بنام اصل موضوع تمامیت یا کمال نیازمندیم که برای بیان این اصل مقدماتی لازم است که به بیان آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴.۱. *فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیق باشد. عدد حقیقی α را یك کران بالای A نامیم هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a \leq \alpha$. مجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{R}$ را از بالا کراندار گوییم هرگاه A دارای یك کران بالا باشد. باید توجّه نمود که کران بالای یك مجموعه، در صورت وجود، منحصر به‌فرد نیست بلکه اگر α یك کران بالای A باشد آنگاه هر عدد حقیقی بزرگتر از α نیز یك کران بالای A خواهد بود. به‌همین ترتیب عدد حقیقی β را یك کران پایین A گوییم هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم $\beta \leq a$. کران پایین یك مجموعه نیز در صورت وجود منحصر به‌فرد نیست. مجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{R}$ را از پایین کراندار گوییم هرگاه A دارای یك کران پایین باشد.*

تعریف ۲.۴.۱ (مجموعه کراندار). *مجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{R}$ را کراندار گوییم هرگاه A هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد.*

مجموعه‌هایی وجود دارند که کراندار نیستند مثلاً اعداد صحیح، اعداد گویا و اعداد حقیقی. همچنین مجموعه‌هایی وجود دارند که از پایین کراندارند ولی از بالا کراندار نباشند و بالعکس. به‌عنوان مثال مجموعه اعداد طبیعی از پایین کراندار است در حالی‌که از بالا کراندار نیست و مجموعه اعداد حقیقی مثبت نیز همین وضعیت را دارد در حالی که مجموعه‌ی اعداد حقیقی منفی از بالا کراندار و از پایین بی‌کران است. مجموعه‌ی $A = \{x : ۰ < x < ۱\}$ یك مجموعه‌ی کراندار است که ۱ و هر عدد حقیقی بزرگتر از ۱، یك کران بالا و ۰ و هر عدد حقیقی کمتر از آن، یك کران پایین برای A است. به راحتی می‌توان نشان داد که ۱ از تمام کران‌های بالا کوچکتر و ۰ از تمام کران‌های پایین، بزرگتر است.

تعریف ۳.۴.۱ (سوپریمم و اینفیمم). *فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ یك مجموعه‌ی از بالا کراندار باشد در این صورت کوچکترین کران بالای A را (در صورت وجود) سوپریمم A نامیم و آن را با نماد $\sup A$ نمایش می‌دهیم.*
به طور مشابه اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ از پایین کراندار باشد آنگاه بزرگترین کران پایین A را (در صورت وجود) اینفیمم A نامیم و آن را با نماد $\inf A$ نمایش می‌دهیم.

بر خلاف کران بالا، سوپریمم یك مجموعه در صورت وجود منحصربه‌فرد است. فرض کنیم $x_۱$ و $x_۲$ هر دو سوپریمم مجموعه‌ی A باشند. چون سوپرمم خود یك کران بالا نیز هست داریم $x_۱ \leq x_۲$ (چون

x_1 سوپریمم و x_2 یك کران بالا است) و $x_2 \leq x_1$، (زیرا x_2 سوپریمم و x_1 یك کران بالا است) درنتیجه $x_1 = x_2$. به طور کاملاً مشابه می‌توان نشان داد که اینفیمم یك مجموعه نیز منحصر به فرد است.

قضیه ۴.۴.۱. *فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ از بالا کراندار باشد. در این صورت $\sup A = \alpha$ اگر و فقط اگر*

الف) برای هر $a \in A$، $a \leq \alpha$ (یعنی α یك کران بالای A باشد)،

ب) برای هر عدد حقیقی مثبت مانند $\epsilon > 0$، عضوی از A مانند a موجود باشد به طوری که $\alpha - \epsilon < a \leq \alpha$. (این خاصیت به خاصیت مشخصه‌ی سوپریمم معروف است)

اثبات. فرض کنید $\sup A = \alpha$ در این صورت بنا به تعریف سوپریمم، (الف) واضح است. برای اثبات (ب) (با برهان خلف) فرض کنید $\epsilon > 0$ موجود است که برای هر $a \in A$، $a \leq \alpha_\epsilon$. در نتیجه α_ϵ یك کران بالای A است امّا $\alpha_\epsilon < \alpha$ و این با $\sup A = \alpha$ متناقض است. پس فرض خلف باطل می‌باشد یعنی (ب) اثبات شده است. بالعکس فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ از بالا کراندار و (الف) و (ب) نیز برقرار باشند در این صورت (الف) نشان می‌دهد α که یك کران بالای Aاست. اکنون نشان می‌دهیم که α کوچکترین کران بالای A است. فرض کنید که α کوچکترین کران بالای A نباشد (فرض خلف). پس کران بالای دیگری مانند u موجود است که $u < \alpha$. حال در نظر می‌گیریم $\epsilon = \alpha - u > 0$. در این صورت بنا به فرض (ب) عضوی از A مانند a موجود است که $\alpha - \epsilon < a < \alpha$. امّا

$$\alpha - \epsilon = \alpha - (\alpha - u) = u.$$

پس داریم $u < a < \alpha$ و این با فرض کران بالا بودن u در تناقض می‌باشد. پس فرض خلف باطل است. یعنی $\sup A = \alpha$. □

قضیه‌ای شبیه قضیه فوق را می‌توان در مورد اینفیمم یك مجموعه‌ی از پایین کراندار بیان کرد که به علت تشابه اثبات آن با قضیه فوق، اثبات آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۵.۴.۱. *فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ از پایین کراندار باشد. در این صورت $\inf A = \beta$ اگر و فقط اگر*

الف) برای هر $a \in A$، $\beta \leq a$ (یعنی β یك کران پایین A است)

ب) برای هر $\epsilon > 0$، عضوی از A مانند a موجود باشد که $\beta \leq \alpha < \beta + \epsilon$ (خاصیت مشخصه‌ی اینفیمم).

اثبات. به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. □

نتیجه ۶.۴.۱. *فرض کنید α سوپریمم و یا اینفیمم مجموعه A از اعداد حقیقی باشد. در این صورت برای هر $\epsilon > 0$، عضوی از A مانند a موجود است که $|\alpha - a| < \epsilon$.*

اثبات. این نتیجه مستقیما از خاصیت مشخصه‌ی سوپریمم و اینفیمم به دست می‌آید. □

۷.۴.۱ (اصل موضوع تمامیت (کمال)). *فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ یک زیرمجموعه‌ی غیرخالی از بالا کراندار باشد در این صورت سوپریمم A موجود است.*

مثال ۸.۴.۱. *فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد مجموعه‌ی $A = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ را در نظر می‌گیریم. A ناتهی است زیرا $(a - 1) \in A$ و همچنین A از بالا کراندار است زیرا مثلاً a یک کران بالای A است. حال طبق اصل تمامیت، سوپریمم A موجود است. نشان می‌دهیم که $\sup A = a$. برای این منظور با استفاده از قضیه ۴.۴.۱، طبق آنچه که ذکر شد a یک کران بالای A است، یعنی (الف) برقرار است، برای (ب) فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد در این صورت برای $a - \frac{\epsilon}{2} \in A$ داریم $a - \epsilon < a - \frac{\epsilon}{2} < a$. توجّه نمایید که مجموعه‌های غیرخالی و از پایین کراندار اعداد حقیقی دارای اینفیمم هستند که وجود آن را می‌توان به کمک اصل تمامیت اثبات نمود.*

قضیه ۹.۴.۱. *فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ غیرخالی و از پایین کراندار باشد. در این صورت اینفیمم A موجود است.*

اثبات. فرض کنید که d یک کران پایین مجموعه‌ی غیرخالی A باشد. مجموعه‌ی $B = \{-x : x \in A\}$ را در نظر می‌گیریم. چون $A \neq \{\}$ پس $B \neq \{\}$ و چون d یک کران پایین A است، $-d$ یک کران بالای Bاست. بنا به اصل تمامیت سوپریمم B وجود دارد. فرض کنید $\sup B = \alpha$. نشان می‌دهیم که $\inf A = -\alpha$.

(الف) اگر x عضو دلخواهی از A باشد آنگاه $-x$ عضوی از B خواهد و چون $\sup B = \alpha$ پس $-x \leq \alpha$ و یا $x \geq -\alpha$.

(ب) اگر $\epsilon > 0$ دلخواه باشد چون $\sup B = \alpha$، بنا به خاصیت مشخصه سوپریمم عضوی از B مانند y موجود است که $\alpha - \epsilon < y \leq \alpha$ و یا $-\alpha + \epsilon > -y \geq -\alpha$. چون $y \in B$ پس $-y \in A$. بنابراین طبق قضیه ۵.۴.۱ برهان کامل است.

□

به کمک اصل تمامیت اصول دیگری و از جمله اصل ارشمیدسی اعداد حقیقی را می‌توان اثبات نمود. در واقع اصل ارشمیدسی و اصل تمامیت معادل می‌باشند. اصل ارشمیدسی ارتباط بین اعداد حقیقی و اعداد طبیعی را بیان می‌کند.

قضیه ۱۰.۴.۱ (اصل ارشمیدسی اعداد حقیقی). *فرض کنید b و $a > 0$ دو عدد حقیقی دلخواه باشند. در این صورت عددی طبیعی مانند n موجود است که $\frac{b}{n} < a$.*

اثبات. (فرض خلف) فرض کنید b و $a > 0$ دو عدد حقیقی باشند که برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $\frac{b}{n} \geq a$ و یا به طور معادل $b \geq na$. مجموعه $A = \{na : n \in \mathbb{N}\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت A زیرمجموعه‌ای غیرخالی از اعداد حقیقی است که از بالا کراندار است. پس بنا به اصل تمامیت ۷.۴.۱ سوپریمم A موجود است. فرض کنید $\sup A = \alpha$. چون $a > 0$ بنا به خاصیت مشخصه سوپریمم (۴.۴.۱ (ب)) عضوی از A مانند $n_0 a (n_0 \in \mathbb{N})$ موجود است که $\alpha - a < n_0 a \leq \alpha$. درنتیجه $\alpha < (n_0 + 1)a$. امّا $(n_0 + 1)a \in A$. پس $(n_0 + 1)a$ عضوی از A است، که از سوپریمم A یعنی α، اکیداً بزرگتر است. این تناقض نشان می‌دهد که فرض خلف باطل است. □

نتیجه ۱۱.۴.۱. *برای هر $\epsilon > 0$، عددی طبیعی مانند n موجود است که $\frac{1}{n} < \epsilon$.*

اثبات. در قضیه ۱۰.۴.۱ کافی است $a = \epsilon$ و $b = 1$ در نظر بگیریم. □

اکنون به ارتباط بین اعداد حقیقی و اعداد صحیح می‌پردازیم بدین ترتیب که برای هر عدد حقیقی x، قسمت صحیح x را مشخص می‌کنیم که برای این منظور از اصل ارشمیدسی و اصل دیگری در اعداد صحیح به نام اصل خوش‌ترتیبی استفاده می‌کنیم. اصل خوش‌ترتیبی در اعداد صحیح بیان می‌دارد که هر زیر مجموعه غیرخالی از اعداد صحیح که از پایین کراندار باشد دارای می‌نیمم است.

قضیه ۱۲.۴.۱. *فرض کنید x یك عدد حقیقی دلخواه باشد، در این صورت عدد صحیح منحصر به‌فردی مانند n موجود است که $n \leq x < n + 1$.*

اثبات. با در نظر گرفتن $b = x$ و $a = 1$ در اصل ارشمیدسی، عدد طبیعی مانند p وجود دارد که $x < p$. همچنین با در نظر گرفتن مجدد $b = -x$ و $a = 1$، عدد طبیعی دیگری مانند q وجود دارد که $-x < q$. در نتیجه برای اعداد طبیعی p و q داریم $-q < x < p$. حال در نظر می‌گیریم

$$A = \{r \in \mathbb{N}, x < r - q\} \subseteq \mathbb{N}.$$

در این صورت $A \neq \{\}$ زیرا برای عدد طبیعی $r = p + q$ داریم

$$r - q = p + q - q = p > x.$$

بنا به اصل خوش‌ترتیبی می‌نیمم A موجود است. فرض کنید $\min A = m$. بنابراین داریم $m \in A$ و $m - 1 \notin A$. به عبارت دیگر $m - 1 - q \leq x < m - q$. در نتیجه با در نظر گرفتن $n = m - 1 - q$ که عددی صحیح است (چون m و q اعداد طبیعی هستند) داریم

$$n \leq x < n + 1.$$

و بدین‌ترتیب قسمت وجودی قضیه اثبات شده است. اکنون به اثبات منحصربه‌فردی n می‌پردازیم. فرض کنید (فرض خلف) که دو عدد صحیح $n_1 \neq n_2$ باشند که برای عدد حقیقی x داشته باشیم

$$n_1 \leq x < n_1 + 1, \quad n_2 \leq x < n_2 + 1.$$

در نتیجه $-1 < n_2 - x \leq 0$ و $0 \leq x - n_1 < 1$. با جمع کردن این دو نامساوی داریم $-1 < n_2 - n_1 < 1$. چون $n_2 - n_1$ عددی صحیح است پس $n_2 - n_1 = 0$ یا $n_1 = n_2$ که خلاف فرض $n_1 \neq n_2$ است. بنابراین فرض خلف باطل است و بدین‌ترتیب اثبات قضیه تکمیل شده است. □

تعریف ۱۳.۴.۱. *عدد صحیح یکتای به‌دست آمده در قضیه‌ی فوق برای عدد حقیقی x را، با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم و آن را جزء صحیح x می‌نامیم.*

بنابراین برای هر عدد حقیقی x داریم $[x] \leq x < [x] + 1$ و تساوی تنها وقتی برقرار است که x عددی صحیح باشد. نماد $[\ ]$ در واقع تابعی از اعداد حقیقی به اعداد صحیح تعریف می‌کند که پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست و برای تمام اعداد حقیقی بین دو عدد صحیح متوالی مقداری ثابت است. از این موضوع در رسم نمودار توابع دارای جزء صحیح می‌توان استفاده کرد. اکنون به بعضی از خواص مهم جزء صحیح اشاره می‌کنیم.

قضیه ۱۴.۴.۱ (خواص جزء صحیح).

(۱) برای هر عدد صحیح m، $[m] = m$.

(۲) برای هر عدد حقیقی x، و هر عدد صحیح m، $[x+m] = [x] + m$.

(۳) برای هر عدد حقیقی x و هر عدد صحیح m، اگر $m < x$ آنگاه $m \leq [x]$.

(۴) برای هر عدد حقیقی x و هر عدد صحیح m، اگر $x < m$ آنگاه $[x] + 1 \leq m$.

(۵) برای هر دو عدد حقیقی x و y، اگر $x < y$ آنگاه $[x] \leq [y]$.

(۶) برای عدد حقیقی x و هر عدد طبیعی k، $\left[\frac{[x]}{k}\right] = \left[\frac{x}{k}\right]$.

(۷) برای هر عدد حقیقی x، $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$.

اثبات. فقط (۶) را اثبات و برهان سایر قسمت‌ها را به خواننده‌ی علاقمند واگذار می‌کنیم.

(۶) فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{N}$ دلخواه باشند. در این صورت با قرار دادن $n = \left[\frac{x}{k}\right]$ داریم
$$n \leq \frac{x}{k} < n + 1.$$
و با ضرب طرفین نامساوی در k رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود
$$kn \leq x < kn + k.$$

اکنون بنا به (۳) و (۴) داریم $kn \leq [x]$ و $[x] + 1 \leq kn + k$. پس
$$kn \leq [x] \leq kn + k - 1 < kn + k.$$

و با تقسیم طرفین نامساوی بر عدد مثبت k داریم

$$n \leq \frac{[x]}{k} < n + 1.$$

در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۱.۴.۱۲، $\left[\frac{[x]}{k}\right] = n$ و بدین‌ترتیب اثبات (۶) کامل می‌شود.

□

تعریف ۱.۴.۱۵. *برای هر عدد حقیقی x، جزء کسری x را با (x) نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$(x) = x - [x].$$

بنابراین داریم $0 \leq (x) < 1$ و در واقع $x = [x] + (x)$. در حقیقت ( ) یك تابع روی اعداد حقیقی است که به تابع ارّه‌ای (دندانه‌ای) معروف است. اکنون در موقعیتی قرار داریم که بتوانیم نشان دهیم که معادله $x^2 = 2$ در اعداد حقیقی دارای یك جواب مثبت منحصر به‌فرد است که برای وجود آن اصل تمامیت را به کار خواهیم برد.

قضیه ۱.۴.۱۶. *معادله‌ی $x^2 = 2$ در اعداد حقیقی دارای جواب مثبت منحصربه‌فرد است.*

اثبات. در نظر می‌گیریم $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$. در این صورت A یك زیرمجموعه غیرخالی ($1 \in A$) و از بالا کراندار است (مثلاً ۲ یك کران بالای A است). پس بنا به اصل تمامیت سوپریمم A موجود است. فرض کنید $\sup A = \alpha$. ادعا می‌کنیم که $\alpha^2 = 2$ زیرا در غیر این‌صورت داریم $\alpha^2 < 2$ یا $\alpha^2 > 2$. اگر $\alpha^2 < 2$، در نظر می‌گیریم $h = \min\left\{1, \frac{2-\alpha^2}{2\alpha+1}\right\}$. در این صورت $0 < h \leq 1$ پس داریم $h^2 \leq h$. در نتیجه

$$(\alpha + h)^2 = \alpha^2 + 2\alpha h + h^2 \leq \alpha^2 + h(2\alpha + 1) \leq \alpha^2 + (2\alpha + 1)\frac{2 - \alpha^2}{2\alpha + 1} = 2.$$

پس $\alpha + h \in A$. امّا $\alpha < \alpha + h$ که با فرض سوپرمم بودن α در تناقض است. اگر $\alpha^2 > 2$، در نظر می‌گیریم $h = \min\{1, \frac{\alpha^2-2}{2\alpha}\}$ در این صورت $0 < h \leq 1$ و داریم

$$(a-h)^2 = \alpha^2 - 2\alpha h + h^2 > \alpha^2 - 2\alpha h \geq \alpha^2 - 2\alpha.\frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha} = \alpha^2 - \alpha^2 + 2 = 2.$$

بنابراین $(\alpha - h)^2 > 2$. در نتیجه $\alpha < |\alpha - h| < \alpha$ که یك تناقض است. بنابراین داریم $\alpha^2 = 2$. اثبات منحصر به فردی را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. □

تنها عدد مثبت موجود در قضیه فوق را ریشه‌ی دوم ۲ گوییم و آن را با نماد $\sqrt{2}$ نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که برای هر عدد طبیعی n و بـرای هر عدد مثبت b معادله $x^n = b$ دارای یك جواب مثبت منحصربه‌فرد است

تعریف ۱۷.۴.۱. *جواب منحصر به فرد معادله‌ی $x^n = b$ را ریشه‌ی n-ام عدد b نامیده و با نماد $\sqrt[n]{b}$ نمایش می‌دهیم.*

بنا به قضیه ۹.۳.۱، $\sqrt{۲}$ عددی گویا نیست. مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی که گویا نباشند را با $\mathbb{Q}'$ نمایش داده و آنها را اعداد اصم یا گنگ نامند. در واقع تعداد اعداد گنگ به مراتب بیش از اعداد گویا است ولی اعداد گنگ ساختار جبری ندارند یعنی مجموع و ضرب دو عدد گنگ ممکن است گنگ نباشد ولی می‌توان نشان داد که حاصلضرب و حاصل‌جمع هر عدد گویای غیر صفر و هر عدد گنگ، عددی گنگ است در واقع مجموعه اعداد گنگ و اعداد گویا تشکیل یك افراز برای اعداد حقیقی می‌دهند. اکنون نشان می‌دهیم که بین هر دو عدد حقیقی هم اعداد گویا و هم اعداد گنگ وجود دارند که روش اثبات بیانگر این واقعیّت است که تعداد آنها نیز نامتناهی است. به این خاصیت اعداد گویا و اعداد گنگ خاصیت چگال بودن آنها در اعداد حقیقی گویند.

قضیه ۱۸.۴.۱. *فرض کنید $x < y$ دو عدد حقیقی دلخواه باشند در این صورت*

الف) عدد گویایی مانند r موجود است که $x < r < y$.

ب) عدد گنگی مانند z موجود است که $x < z < y$.

اثبات. الف) چون $x < y$، پس $y - x > ۰$. بنابراین طبق اصل ارشمیدسی (قضیه ۱۰.۴.۱) عددی طبیعی مانند n موجود است که $\frac{۱}{n} < y - x$. حال در نظر می‌گیریم $m = [nx]$. در این صورت طبق قضیه ۱۲.۴.۱ داریم $m \leq nx < m + ۱$ یا $\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+۱}{n}$. اگر قرار دهیم $r = \frac{m+۱}{n}$. آنگاه r عددی گویا است و داریم:

$$r = \frac{m}{n} + \frac{۱}{n} \leq x + \frac{۱}{n} < y \qquad \left(\text{چون}\ \frac{۱}{n} < y - x\right)$$

در نتیجه $x < r < y$ و اثبات قسمت (الف) پایان یافته است.

ب) فرض کنید $x < y$. چون $\sqrt{۲}$ عددی مثبت است پس داریم $\frac{x}{\sqrt{۲}} < \frac{y}{\sqrt{۲}}$ حال طبق قسمت (الف) عدد گویای غیر صفر r موجود است که $\frac{x}{\sqrt{۲}} < r < \frac{y}{\sqrt{۲}}$ و یا $x < r\sqrt{۲} < y$ امّا $z = r\sqrt{۲}$ عددی گنگ است و بدین‌ترتیب اثبات قسمت (ب) نیز کامل شده است.

□

می‌توان تناظری یك بیك بین نقاط یك محور و مجموعه اعداد حقیقی برقرار کرد. بدین‌ترتیب که مبدأ محور را متناظر با ۰ و نقطه‌ای در سمت راست ۰ را متناظر با ۱ قرار می‌دهیم. در این صورت پاره خطی به طول واحد در اختیار داریم که به کمك آن می‌توانیم بقیه نقاط را با بقیه اعداد حقیقی متناظر سازیم. به چنین محوری، محور اعداد حقیقی گفته می‌شود. با این تناظر در دبیرستان به اندازه کافی آشنا شده‌اید بنابراین تنها به ذکر چند نکته در این مورد می‌پردازیم معمول این است که به جای گفتن نقطه متناظر با

یك عدد حقیقی، خود آن عدد را ذکر می‌کنند بنابراین نقطه ۲، یعنی نقطه متناظر با عدد حقیقی ۲. در محور اعداد حقیقی، اعداد حقیقی مثبت در سمت راست صفر و اعداد حقیقی منفی در سمت چپ آن قرار دارند و برای دو عدد a و b، $a - b$ عبارت از طول پاره‌خطی است که نقاط انتهایی آن a و b است. در تناظر فوق هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}$، با زیرمجموعه‌ای از محور اعداد حقیقی متناظر است و بالعکس، بنابراین برای هر زیرمجموعه، گذشته از تعبیری که به زبان نظریه مجموعه‌ها وجود دارد یك تعبیر هندسی نیز می‌توان یافت. رایج‌ترین این زیرمجموعه‌ها، بازه‌ها هستند.

تعریف ۱۹.۴.۱ (بازه). *یك بازه عبارت است از مجموعه‌ای غیرتهی از اعداد حقیقی که هرگاه دو عدد حقیقی $p < q$ به آن تعلق داشته باشند آنگاه تمام اعداد حقیقی بین p و q نیز به آن تعلق داشته باشند. برای انواع مختلف بازه‌ها، نمادهای مختلفی وضع شده‌اند که اکنون به معرفی رایج‌ترین آنها می‌پردازیم. فرض کنید $a < b$ دو عدد حقیقی باشند در این صورت*

بازه‌ی باز a و b عبارت است از

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

بازه‌ی بسته - باز a و b (که گاهی آن را به طور خلاصه بازه نیم‌باز هم می‌نامند) عبارت است از

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

بازه باز-بسته‌ی a و b عبارت است از

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

بازه‌ی بسته‌ی a و b عبارت است از

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

از لحاظ هندسی هریك از بازه‌های فوق، پاره‌خطی از محور اعداد حقیقی است که اولی شامل نقاط انتهایی نیست ولی پاره خط چهارم شامل نقاط انتهایی است و دو پاره خط دیگر هر یك فقط شامل یکی از نقاط انتهایی خود هستند. بازه‌های فوق را اصطلاحاً بازه‌های کراندار می‌نامند. در مقابل، دسته دیگری از بازه‌ها وجود دارند که بازه‌های بیکران نامیده می‌شوند و بوسیله نمادگذاری‌های زیر مشخص می‌شوند:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x < b\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}.$$

ملاحظه می‌شود که هر یك از بازه‌های بیکران فوق با یك نیم خط از محور اعداد حقیقی متناظر هستند.

در اینجا ∞ و $-\infty$ را به عنوان نمادهای جدیدی معرفی کرده‌ایم. البته ∞ و $-\infty$ را تنها به‌عنوان دو نماد و نه اعدادی حقیقی در نظر می‌گیریم. بعضی از خواص مربوط به این نمادها را که با خاصیت‌هایی از اعداد حقیقی شباهت و سازگاری دارند را ذکر می‌کنیم. تعدادی از این خاصیت‌ها را باید به عنوان جزیی از تعریف این نمادها تلقی کرد و بقیه قابل اثبات هستند ولی ما از ایجاد تمایز بین آنها صرف‌نظر می‌کنیم. خواص مذکور عبارتند از: (از نظر ما ∞ و $+\infty$ هر دو یك نماد هستند مگر آنکه خلاف ذکر شود) برای هر عدد حقیقی a

$$a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = (\pm\infty)$$

برای هر عدد حقیقی $a > ۰$

$$a.(\pm\infty) = (\pm\infty).a = (\pm\infty)$$

برای هر عدد حقیقی $a < ۰$

$$a.(\pm\infty) = (\pm\infty).a = (\mp\infty)$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$(\pm\infty).(\pm\infty) = +\infty$$

$$(\pm\infty).(\mp\infty) = -\infty$$

برای هر عدد حقیقی a،

$$-\infty < a < \infty$$

ملاحظه می‌کنید $۰.\infty$، $\infty.۰$، $\infty - \infty$ و $\frac{\infty}{\infty}$ را تعریف نکرده‌ایم. در واقع نمی‌توان آنها را چنان تعریف نمود که با خواص فوق، سازگاری داشته باشند. دسته دیگری از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$، همسایگی هستند.

تعریف ۲۰.۴.۱ (همسایگی). *هر بازه‌ی باز شامل c یك همسایگی (باز) از c نامیده می‌شود. بنابراین بازه (a, b) یك همسایگی از c است اگر و فقط اگر $a < c < b$.*
همسایگی محذوف c یعنی همسایگی‌ای از c که نقطه c را از آن برداشته باشیم.

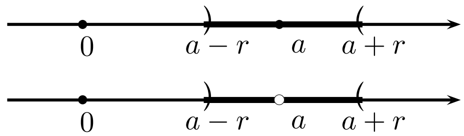
مثلاً $(۲, ۴) \cup (-۱, ۲)$ یك همسایگی سفته ۲ است. همچنانکه ملاحظه می‌شود هر نقطه c، دارای همسایگی‌های بیشماری است. بعضی از این همسایگی‌ها دارای این خاصیت هستند که نقطه c نقطه وسط آنها است. چنین همسایگی‌هایی را می‌توان متقارن نامید. در مواردی استفاده از این نوع همسایگی‌ها کار را آسانتر می‌کند. برای چنین همسایگی‌هایی تعاریف ویژه‌ای نیز وجود دارند.

تعریف ۲۱.۴.۱ (انواع همسایگی‌ها). *یك همسایگی به مرکز a و شعاع $r > ۰$ را که با نمادهای $N(a, r)$ (یا در بعضی‌کتابها $N_r(a)$ یا $S(a, r)$ و یا $S_r(a)$) نمایش می‌دهیم عبارت است از*

$$N(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r).$$

همسایگی محذوف به مرکز a و شعاع r عبارت است از

$$DN(a,r)=\{x\in\mathbb{R}: ۰<|x-a|<r\}=(a-r,a)\cup(a,a+r).$$



شکل ۱.۱: نمایش $N(a,r)$ و $DN(a,r)$ روی محور اعداد حقیقی

همسایگی از $+\infty$ به صورت $\{x: x>M\}=(M,\infty)$ تعریف می‌شود که در آن M یك عدد مثبت است.
همسایگی از $-\infty$ عبارت است از $\{x: x<-M\}=(-\infty,-M)$ که در آن M یك عدد مثبت است.

ملاحظه می‌شود که همسایگی‌های فوق همگی باز هستند. همسایگی‌های بسته نیز به طریق مشابه قابل تعریف هستند که به علت اینکه با آنها سر و کار چندانی نداریم از تعریف آنها چشم‌پوشی می‌کنیم.

تعریف ۲۲.۴.۱ (نمادهای سیکما و پی). *برای اعداد حقیقی $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ مجموع آنها یعنی $a_۱+a_۲+\cdots+a_n$ را با نماد $\sum_{i=۱}^{n} a_i$ نشان داده و به صورت «سیکمای a_i، i ۱ تا n» می‌خوانیم. به همین ترتیب ضرب آنها یعنی $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ را با نماد $\prod_{i=۱}^{n} a_i$ نشان داده و آن را به صورت «پیِ a_i، i از ۱ تا n» می‌خوانیم.*

توجه نمایید که وجود خواص شرکت پذیری در اعمال جمع و ضرب، تعاریف فوق را امکان‌پذیر می‌نمایند. برای خواص آنها به فصل انتگرال مراجعه شود.

۵.۱ مسایل نمونه حل شده

مساله ۱.۵.۱. *فرض کنید عدد حقیقی ثابت a چنان باشد که برای هر $\epsilon>۰$ و $|a|<\epsilon$، $|a|>۰$، نشان دهید $a=۰$.*

حل. فرض کنید $a\neq ۰$ (فرض خلف). در این صورت بنابه ۱۵.۲.۱ (۱) داریم $|a|>۰$. در این صورت برای $\epsilon=\frac{|a|}{۲}$، $|a|<\frac{|a|}{۲}$ و یا $۱<\frac{۱}{۲}$ که یك تناقض است پس فرض خلف باطل است یعنی $a=۰$.

مساله ۲.۵.۱. *فرض کنید n عدد صحیح نامنفی و $0 \leq k \leq n$ عددی صحیح باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ($\binom{n}{k}$ ترکیب n حرف k به k نامیده می‌شود). نشان دهید؛*

(۱) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(۲) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

(۳) $\binom{n}{k}$ *عددی صحیح است.*

حل.

(۱) با توجه به تعریف $\binom{n}{k}$ واضح است.

(۲) با توجه به تعریف داریم

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!}.\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!}.\left(\frac{n-k+k+1}{(k+1)(n-k)}\right) \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!}.\frac{n+1}{(k+1)(n-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

(۳) با استقراء روی n حکم را ثابت می‌کنیم. برای $n = 1$ به وضوح حکم برقرار است. فرض کنیم برای n حکم برقرار باشد یعنی برای هر عدد صحیح kکه $0 \leq k \leq n$، $\binom{n}{k}$ عددی صحیح باشد. اکنون ثابت می‌کنیم برای هر عدد صحیح $0 \leq k \leq n+1$. با توجه به (۲) داریم

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

بنابراین بنابه فرض استقراء، $\binom{n+1}{k}$ عددی صحیح است. پس بنابه قضیه استقراء حکم برای هر دو عدد طبیعی n برقرار است.

مساله ۳.۵.۱. *فرض کنید a و b دو عدد طبیعی دلخواه و n عدد طبیعی دلخواهی باشد. نشان دهید*

$$(a+b)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

حل. به ازای $n = 1$ داریم

$$(a+b)^1 = b + a + \binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1} = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k}$$

یعنی ۱ دارای خاصیت F است (ابتدای استقراء). حال فرض کنید که برای عدد طبیعی دلخواه n، داشته باشیم $F(n)$ (فرض استقراء)، یعنی فرض کنید $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. حال نشان می‌دهیم که $n+1$ نیز دارای خاصیت F است. برای این منظور با توجه به فرض استقراء و مثال قبل داریم

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a+b) a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(a^{k+1} b^{n-k} + a^k b^{n-k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^{n-(n+1)+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} \\
&\quad\ + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} \\
&= a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} \\
&\quad\ + a^0 b^{n+1-0} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1-0}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

در نتیجه بنابه قضیه استقراء تساوی $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ برای تمام اعداد طبیعی n برقرار است و چون عمل جمع خاصیت جابجایی دارد پس

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

و بدین ترتیب حل مسئله کامل شده است. تساوی فوق به بسط دوجمله‌ای بینم - نیوتن یا بینم - خیام معروف است.

مساله ۴.۵.۱. *اگر n عدد طبیعی دلخواه و $1 + h \geq 0$ آنگاه $(1+h)^n \geq 1 + nh$ و* $\sqrt[n]{1+h} \leq 1 + \frac{h}{n}$.

حل. این مسئله را به کمك استقراء بر روی n حل می‌کنیم. فرض کنید $F(n)$ بیانگر نامساوی باشد. در این صورت چون $1 + h = (1+h)$ پس ۱ دارای خاصیت F است (ابتدای استقراء برقراراست). حال فرض کنید که برای هر عدد طبیعی دلخواه n، نامساوی $(1+h)^n \geq 1 + nh$ برقرار باشد (فرض استقراء)، نشان می‌دهیم که $n+1$ دارای خاصیت F است. در این صورت با توجه به فرض استقراء و این که $nh^2 \geq 0$ داریم

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh)\\ &= 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h\end{aligned}$$

بنابراین بنا به قضیه استقراء داریم نامساوی مورد بحث برای تمام اعداد طبیعی برقرار است. (نامساوی فوق به نامساوی برنولی معروف است و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $h = 0$ یا $n = 1$). حال چون اگر $1 + h \geq 0$ آنگاه $1 + \frac{h}{n} \geq 0$، پس بنا به آنچه که در بالا ملاحظه شد داریم

$$\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{h}{n}\right) = 1 + h$$

و یا

$$1 + \frac{h}{n} \geq \sqrt[n]{1+h}$$

و بدین ترتیب حل مسئله کامل شده است.

مساله ۵.۵.۱ (نامساوی میانگین حسابی و میانگین هندسی). *اگر $a_1, a_2, \cdots, a_n$ اعداد حقیقی*

نامنفی دلخواهی باشند آنگاه

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

حل. فرض کنید $A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ و $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. اگر تمام a_iها، $1 \leq i \leq n$، برابر باشند آنگاه $G = A$. فرض کنیم اندیس‌های $1 \leq r \leq n$ و $1 \leq l \leq n$ موجودند به طوری که $a_r \neq a_l$. فرض کنید $a_r < a_l$، در این صورت $a_r < A < a_l$. چون اگر تمام a_i ها بیشتر (کمتر) از A باشند آنگاه مقدار $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ نیز بیشتر (کمتر) از A خواهد بود که متناقض با فرض $a_r < A < a_l$ است. اکنون در نظر می‌گیریم $b_r = a_r + a_l - A$ و $b_l = A$ و اگر در A و G به جای a_r و a_l به ترتیب b_r و b_l بگذاریم چون

$$b_r + b_l = (a_r + a_l - A) + A = a_r + a_l.$$

پس مقدار A تغییر نمی‌کند. از طرفی

$$b_r b_l - a_r a_l = A(a_r + a_l - A) - a_r a_l = (A - a_r)(-A + a_l) > 0.$$

پس $a_r a_l < b_r b_l$. در نتیجه

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_r \cdots a_l \cdots a_n} < \sqrt[n]{a_1 \cdots b_r \cdots b_l \cdots a_n} = G_1$$

بنابراین با این جایگذاری، مقدار G افزایش می‌یابد ولی مقدار A بدون تغییر باقی می‌ماند و در G_1 یکی از عوامل ضرب در زیر رادیکال برابر A است، مثلاً b_l. اگر این عمل را به همین ترتیب تکرار کنیم حداکثر پس از $n - 1$ بار همه a_i ها به A تبدیل خواهد شد، یعنی

$$G < G_1 < \cdots < \sqrt[n]{A.A \cdots A} = \sqrt[n]{A^n} = A$$

در نتیجه $G < A$.

مساله ۶.۵.۱. *نامساوی* $|x - 1| - |x - 2| < 0$ *را حل کنید.*

حل. نامساوی فوق با نامساوی $|x - 1| < |x - 2|$ معادل است و از آن داریم

$$(x - 1)^2 < (x - 2)^2 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

یعنی $x \in (-\infty, \frac{3}{2})$.

مساله ۷.۵.۱. *مطلوب است حل نامساوی* $|3x + 2| < 2 - 2x$.

حل. **(روش اول)** بنا به جدول تعیین علامت داریم

x	$-\infty$		$-\frac{۲}{۳}$		$+\infty$
$۳x+۲$		$-$	۰	$+$	

بنابراین اگر $x \in (-\infty, -\frac{۲}{۳})$ آنگاه $|۳x+۲| = -(۳x+۲)$ و در نتیجه نامساوی مورد بحث به نامساوی $-(۳x+۲) < ۲-۲x$ تبدیل می‌شود؛ که معادل است با $x > -۴$. پس در این حالت مجموعه‌ی جواب عبارت است از

$$P_۱ = (-\infty, -\frac{۲}{۳}) \cap (-۴, +\infty) = (-۴, -\frac{۲}{۳}).$$

اگر $x \in [-\frac{۲}{۳}, \infty)$ آنگاه نامساوی مورد بحث به نامساوی $۳x+۲ < ۲-۲x$ تبدیل خواهد شد که معادل است با $x < ۰$. پس در این حالت مجموعه‌ی جواب عبارت است از

$$P_۲ = [-\frac{۲}{۳}, -\infty) \cap (-\infty, ۰) = [-\frac{۲}{۳}, ۰).$$

در نتیجه مجموعه‌ی جواب عبارت است از

$$P = P_۱ \cup P_۲ = (-۴, -\frac{۲}{۳} \cup [-\frac{۲}{۳}, ۰) = (-۴, ۰).$$

(روش دوم) چون شرط لازم برای برقراری $|۳x+۲| < ۲-۲x$ آن است که $۲-۲x > ۰$ و یا $x < ۱$ پس برای برقراری نامساوی $|۳x+۲| < ۲-۲x$ لزوما باید $x \in (-\infty, ۱)$. از طرفی

$$|۳x+۲| < ۲-۲x \Rightarrow (۳x+۲)^۲ < (۲-۲x)^۲$$
$$\Rightarrow ۵x^۲ + ۲۰x < ۰.$$

با استفاده از جدول تعیین علامت،

x	$-\infty$		-۴		۰		$+\infty$
$۵x^۲+۲۰x$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

مجموعه‌ی جواب به صورت زیر به دست می‌آید

$$P = (-۴, ۰) \cap (-\infty, ۱) = (-۴, ۰)$$

مساله ۱.۵.۸. *نامعادله‌ی $\sqrt{۲x+۱} < x-۲$ را حل نمایید.*

حل. برای این که $\sqrt{۲x+۱} < x-۲$ برقرار باشد لازم است که

$$۲x+۱ \geq ۰ \quad \text{و} \quad x-۲ > ۰,$$

و یا $x \geq -\frac{۱}{۲}$ و $x - ۲ > ۰$. در نتیجه $x \in [-\frac{۱}{۲}, \infty) \cap (۲, \infty) = (۲, \infty)$. حال داریم

$$\sqrt{۲x + ۱} < x - ۲ \Rightarrow ۲x + ۱ < (x - ۲)^{۲} \Rightarrow x^{۲} - ۶x + ۳ > ۰$$

و با استفاده از جدول تعیین علامت زیر

x	$-\infty$		$۳ - \sqrt{۶}$		$۳ + \sqrt{۶}$		$+\infty$
$x^{۲} - ۶x + ۳$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

مجموعه‌ی جواب به صورت زیر حاصل می‌شود

$$P = \left(\left(-\infty, ۳\sqrt{۶}\right) \cup \left(۳ + \sqrt{۶}, +\infty\right)\right) \cap (۲, +\infty) = \left(۳ + \sqrt{۶}, +\infty\right).$$

مساله ۹.۵.۱. *فرض کنید* $A \subseteq \mathbb{R}$ *و* b *عدد حقیقی دلخواهی باشد. در این صورت اگر تعریف کنیم*

$$b + A = \{a + b : a \in A\},$$

آنگاه نشان دهید

$$\inf(b + A) = b + \inf A, \quad \sup(b + A) = b + \sup A.$$

حل. فرض کنید $\sup A = \alpha$. برای هر عضو دلخواه از مجموعه‌ی $b + A$ مانند $b + a$ که در آن $a \in A$، داریم $b + a \leq b + \alpha$ (چون $a \leq \alpha$). پس $b + \alpha$ یک کران بالای مجموعه‌ی $b + A$ است. فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده است. چون $\sup A = \alpha$ پس بنابه قضیه ۴.۴.۱ (ب) عضوی از A مانند $a_۰$ موجود است که

$$\alpha - \epsilon < a_۰ \leq \alpha.$$

در نتیجه

$$b + \alpha - \epsilon < b + a_۰ \leq b + \alpha.$$

از طرفی $b + a_۰ \in b + A$. بنابراین بنابه قضیه ۴.۴.۱ (ب) داریم $\sup(b + A) = b + \alpha$. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $\inf(b + A) = b + \inf A$.

مساله ۱۰.۵.۱. *فرض کنید* A *و* B *دو مجموعه از اعداد حقیقی باشند، تعریف می‌کنیم*

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

نشان دهید $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

حل. فرض کنید $\sup A = \alpha$ و $\sup B = \beta$. در این صورت چون برای هر $a \in A$ و هر $b \in B$،

$a \leq \alpha$ و $b \leq \beta$ پس $a + b \leq \alpha + \beta$ و چون هر عضو دلخواه مجموعه $A + B$ به شکل $a + b$ است پس $\alpha + \beta$ یك کران بالای $A + B$ است. حال فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد در این صورت بنابه قضیه ۴.۴.۱(ب) عضوی از A مانند $a_۰$ و عضوی از B مانند $b_۰$ وجود دارند که

$$\alpha - \frac{\epsilon}{۲} < a_۰ \leq \alpha, \quad \beta - \frac{\epsilon}{۲} < b_۰ \leq \beta,$$

و یا

$$\alpha + \beta - \epsilon < a_۰ + b_۰ \leq \alpha + \beta.$$

چون $a_۰ + b_۰$ عضوی از $A + B$ است پس بنابه قضیه ۴.۴.۱، حل مسئله کامل شده است.

۶.۱ مسایل

۱. *نشان دهید* $۲ > ۱$ *و* $۲ > ۰$.

۲. *فرض کنید* x *و* y *دو عدد حقیقی باشند. نشان دهید* $x = y$ *اگر و فقط اگر* $x \leq y$ *و* $y \leq x$ *(یعنی «*$\leq$*» یك رابطه پادمتقارن است.)*

۳. *فرض کنید* a، b *و* c *سه عدد حقیقی باشند که برای هر عدد طبیعی* n، *نامساوی* $a \leq b \leq a + \frac{c}{n}$ *برقرار باشد. در این صورت* $a = b$.

۴. *نشان دهید معادله* $x^۲ + ۱ = ۰$ *در* $\mathbb{R}$ *جواب ندارد.*

۵. *نشان دهید که اگر* x، y، z *و* t *مثبت باشند و* $\frac{z}{t} < \frac{x}{y}$ *آنگاه* $\frac{t}{z} < \frac{y}{x}$.

۶. *فرض کنید* y *و* t *اعدادی مثبت باشند. نشان دهید* $\frac{z}{t} < \frac{x}{y}$ *اگر و فقط اگر* $xt < yz$.

۷. *اگر* x *و* y *مثبت باشند آنگاه* $x^۲ < y^۲$ *اگر و تنها اگر* $x < y$.

۸. *فرض کنید* $x \neq y$ *دو عدد حقیقی دلخواه باشند. نشان دهید* $\frac{x+y}{۲}$ *بین* x *و* y *قرار دارد. (* $\frac{x+y}{۲}$ *را میانگین حسابی* x *و* y *نامند.)*

۹. *فرض کنید* A *و* B *زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند که* $\max A$ *و* $\max B$ *وجود دارند. نشان دهید*

$$\max(A \cup B) = \max\{\max A, \max B\}.$$

۱۰. *نشان دهید که* $A = \{x : ۰ < x < ۱\}$ *ماکزیمم و می‌نیمم ندارد.*

۱۱. *نشان دهید برای هر عدد حقیقی* a، $-|a| \leq a \leq |a|$.

۱۲. نشان دهید اگر b بین a و c باشد آنگاه $|b|\leq \max\{|a|,|c|\}$

۱۳. نشان دهید ریشه‌های دو معادله $x+a=b$ و $x-a=b$ قرینه‌ی یکدیگرند.

۱۴. ثابت کنید که برای هر دو عدد حقیقی a و b، $|a-b|=|1-ab|$ اگر و تنها اگر $|a|=1$ یا $|b|=1$. و سپس با استفاده از آن معادله‌ی $|x^2-x|=|1-x^3|$ را حل کنید.

۱۵. عبارت $A=|a+b|+|a-b|$ را بدون قدرمطلق بنویسید.

۱۶. نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2},$$
$$\min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}.$$

۱۷. اگر $a_1,a_2,\cdots,a_n$ اعداد حقیقی دلخواهی باشند آنگاه

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|a_k|,$$
$$\left|\prod_{k=1}^{n}a_k\right|=\prod_{k=1}^{n}|a_k|.$$

۱۸. اگر m و n دو عدد صحیح باشند آنگاه

$$m<n\Leftrightarrow m\leq n-1.$$

۱۹. نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی $a\neq b$ و هر عدد طبیعی n داریم

(الف)

$$(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}a^kb^{n-k},$$

(ب)

$$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}.$$

۲۰. ضرایب x^6 و x^{-8} را در بسط $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ بنویسید.

۲۱. نشان دهید $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in Z \\ -۱ & x\notin Z\end{cases}$.

۲۲. فرض کنید $n\in\mathbb{N}$، نشان دهید
$$\underbrace{[x+[x+[x+\cdots+[x]]]\cdots]}_{n\ \text{تا}}=n[x].$$

۲۳. خاصیت زیر از جزء صحیح را ثابت کنید
$$[x]+[y]\leq[x+y].$$

۲۴. نشان دهید شرط لازم و کافی برای آن که $A\subseteq\mathbb{R}$ کراندار باشد آن است که عدد حقیقی نامنفی M وجود داشته باشد که برای هر x عضو A، $|x|\leq M$.

۲۵. نشان دهید اگر $\sup A\in A$ آنگاه $\sup A=\max A$.

۲۶. (الف) اگر $\max A$ موجود باشد آنگاه $\sup A$ موجود است و $\sup A=\max A$. (ب) شبیه به حکم (الف) برای می‌نیمم و اینفیمم بیان و اثبات نمایید.

۲۷. فرض کنید $A\subseteq B$ و $A\neq\{\}$، در این صورت
(الف) اگر $\sup B$ موجود باشد آنگاه $\sup A$ موجود است و $\sup A\leq\sup B$،
(ب) اگر $\inf B$ موجود باشد آنگاه $\inf B$ موجود است و $\inf B\leq\inf A$.

۲۸. نشان دهید اگر $a>۱$ آنگاه $\sqrt[n]{a}>۱$ و اگر $۰<a<۱$ آنگاه $۰<\sqrt[n]{a}<۱$.

۲۹. نشان دهید اگر $۱<a<b$ آنگاه $۱<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

۳۰. نشان دهید معادله $x^۲=۵$ در $\mathbb{Q}$ دارای جواب نیست.

۳۱. نشان دهید برای اعداد گنگ α و β هر یك از اعداد $\alpha+\beta$، $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\alpha\beta$ ممکن است گویا و یا گنگ باشند.

۳۲. اعداد گنگ به شکل $\alpha=r+s\sqrt{t}$ که در آن r، s و t اعداد گویا باشند را اعداد گنگ مربعی نامند. نشان دهید که اعداد گنگ مربعی تحت اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بسته هستند.

۳۳. نامعادلات زیر را حل کنید.

۱. $x(۲x-۱)(x+۲)(۱-۳x)<۰$

۲. $(x^۲+۳x+۳)(x^۲-x-۱)\geq۰$

۳.
$$x^{۴} - ۳x^{۳} + x - ۳ \geq ۰$$

۴.
$$|۳x - ۲| > x$$

۵.
$$|x + ۱| > \left|\frac{۱}{x} - ۱\right|$$

۶.
$$\frac{۴x - ۵}{|x - ۲|} \geq ۵$$

۷.
$$|x + ۱| + |x - ۱| < ۴$$

۸.
$$\frac{x}{x(x + ۳)} \leq \frac{۲x + ۳}{x^{۲} + x + ۱}$$

۹.
$$\frac{(x^{۲} + x + ۱)(x - ۱)^{۲}}{۱ - ۳x} > ۰$$

۱۰.
$$\sqrt{۱ - x} > x$$

۱۱.
$$\sqrt{۲x + ۶} < \sqrt{۳ - ۵x}$$

۱۲.
$$۲x - \sqrt{x - ۱} < ۰$$

۱۳.
$$\sqrt{x^{۲} - ۳x + ۲} > x + ۳$$

۱۴.
$$\sqrt{x} + \sqrt{۲x - ۱} \geq \sqrt{۳x - ۲}$$

۱۵.
$$\left|\sqrt{x^{۲} - ۳} - ۱\right| < \frac{۱}{۲}$$

۱۶.
$$\sqrt{x + ۱} + |x - ۲| > ۴$$

۱۷.
$$(|x| - ۵)(|x| - ۳) > ۰$$

فصل ۲

اعداد مختلط

۱.۲ تاریخچه اعداد مختلط

در فصل قبل با اعداد حقیقی و اصول موضوعه‌ی آن آشنا شدیم. دیدیم که آنچه زمینه‌ی توسعه‌ی این اعداد را فراهم آورد نگرش واقعی و حقیقی به ماهیت اعداد و مخصوصاً اعدادی بود که در ابتدای پیدایش، دارای مفهوم مشخص و همراه با کاربرد معینی نبودند. تلاش در جهت معنی بخشیدن و تعریف مناسب اعمال جبری روی آنها و سازگاری این اعمال با اعمال جبری تعریف شده در اعداد موجود قبلی موجب گسترش مفاهیم قبلی شد. بر همین اساس، به دنبال توسعه‌ی بیشتر اعداد حقیقی یعنی معرفی اعداد مختلط می‌باشیم. معمولاً تصورات ما از اعداد حقیقی کم و بیش به چیزهایی ملموس از طبیعت ارتباط پیدا می‌کند. به طور مثال در فیزیک برای اندازه‌گیری سه کمیت اصلی آن یعنی جرم، طول و زمان به اعداد حقیقی متوسل می‌شویم به طوری که اگر شخصی مدعی شود که در ۳ ثانیه دیگر عمر فرزند او $۱۰^۸ \times \sqrt{۳}$ ثانیه خواهد شد حرف نادرستی نزده است و نیز به طور مشابه عبارات $\sqrt{۱۰}$ متر و e^π (e عدد نپر) کیلوگرم بی‌معنی نیستند و این به علت پیوسته بودن این کمیت‌ها است که اعداد حقیقی این خاصیت را به طرز زیبایی دارند. اصولاً ریاضی برای اینکه به سامان‌بندی خود امکان وسیع‌ترین وحدت نظر منطقی را بدهد باید بدون هیچ تعصبی به خلق اندیشه‌های نو اگر چه هیچ کاربردی در ابتدای ساخت آن نداشته باشد بپردازد. ادعای «بی معنی بودن جذر اعداد منفی» از ایده‌های قدیمی است که جذر یك عدد منفی را ممتنع یا محال می‌شمردند. حال بیایید به این سئوال‌ها پاسخ دهیم که آیا به کار بردن لغت «محال» نوعی سخت‌گیری در مفاهیم ریاضیات اصیل و ریشه‌دار نیست؟ به چه علت باید $\sqrt{-۲}$ را بی‌معنی بدانیم؟ آیا صرف نبودن نوعی معادل تجربی برای آن، می‌تواند ما را از ورود به چنین اندیشه‌ای باز دارد؟ مسلما پاسخ منفی است، یعنی نمی‌توان با اعتماد به تجربه راه خود را در پیش گرفت و چشم را در برابر یك حقیقت مسلم بست. بنابراین $\sqrt{-۲}$ را به عنوان چیزی که فعلاً هیچ مفهوم خاصی ندارد و تنها نمادی است که می‌تواند معادله $x^۲ + ۲ = ۰$ را خشنود سازد در نظر می‌گیریم. اگرچه اکنون می‌دانیم

که $\sqrt{-2}$ دارای کاربردهای وسیعی در مهندسی نوین می‌باشد ولی هدف اشاره به این مطلب است که در ریاضیات نباید نگران کاربرد تعریف جدیدی بود زیرا گذشت زمان و ایجاد بینشهای جدید باعث می‌شود که آن تعریف و مقوله راه خود را در علم تجربی باز کند. در اوایل قرن شانزدهم میلادی ریاضیدان شهر ایتالیایی، کاردان[1]، در تقسیم عدد ۱۰ به دو جزء که حاصلضرب آنها ۴۰ می‌باشد اعداد مطلوب را به صورت $5 + \sqrt{-15}$ و $5 - \sqrt{-15}$ بیان کرد. این نخستین باری بود که «جذر یك عدد منفی» بکار برده شد. کاردان متوجه شد که جذر هر عدد منفی $-a$ $(a > 0)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1}\sqrt{a}.$$

این ایده به ظاهر کم اهمیت ولی دارای کاربرد فراوان، نشان می‌دهد که تنها با تعریف $\sqrt{-1}$ به‌عنوان یك عدد جدید، می‌توان تمام جذرهای منفی را به وسیله آن نمایش داد. حال بی‌مناسبت نیست که به $\sqrt{-1}$ یك نماد اختصاصی نسبت داد تا نمایانگر هویت بارز آن باشد. این نماد را با «i» نمایش می‌دهیم (دقت کنید مهندسان برق معمولاً از نماد i استفاده نمی‌کنند و علامت j را برای $\sqrt{-1}$ در نظر می‌گیرند تا سوء تعبیری برای نماد i که نشانه جریان الکتریکی است پیش نیاید). به اعداد زیر توجه کنید

$$2i, \quad \sqrt{3}i + 1, \quad \pi i + e, \quad ai + b$$

همگی اعداد فوق، اعداد مختلط می‌باشند. کاردان پی‌برد که اگر با این اعداد همانند اعداد حقیقی رفتار شود و قاعده‌ی $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$ (یا $i^2 = -1$) را به آن اضافه کند پاسخگوی نیازش برای حل معادله‌های بدون ریشه حقیقی خواهد بود. یکی از علل اساسی و مهم در توسعه اعداد حقیقی و معرفی اعداد مختلط مسئله‌ی حل معادله‌های به‌صورت $p(x) = 0$ می‌باشد که $p(x) = 0$ یك چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی از درجه $n \in \mathbb{N}$ به صورت زیر می‌باشد

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots + a_n x, \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n.$$

همان طوری که بیان شد معادله $x^2 + 1$ در میدان اعداد حقیقی جواب ندارد و مشابه این معادله‌ها را می‌توان در موارد بسیاری نشان داد که دارای ریشه‌های حقیقی نیستند. حال به اهمیت اعداد مختلط می‌توان از این دیدگاه دیگر نیز اشاره کرد که در میدان اعداد مختلط هر معادله $p(x) = 0$ دارای جواب می‌باشد و قضیه اساسی جبر این ادعا را ثابت می‌کند. چنین میدانی که دارای ریشه هر معادله به صورت $p(x) = 0$ باشد را یك میدان کامل می‌نامیم. از این حیث میدان اعداد مختلط یك میدان کامل است. همان‌طور که بیان شد در پیدایش $\sqrt{-1}$ یا i هیچ گونه مفهومی برای آن قائل نبودند و همین امر موجب شد که نام «موهومی» را برای آن انتخاب کنند و به عبارت دیگر سبب شد که $\sqrt{-1}$ در اندیشه جای نامساعدتری از $\sqrt{2}$ داشته باشد و با ترسی آمیخته به شك بدان نگاه شود و بر این اساس اکنون نیز در مطالعه اعداد مختلط علیرغم اینکه این اعداد سبب تحول مهمی در مهندسی نوین گردیده و زبان مناسبی برای حرکات ارتعاشی، نوسانات هماهنگ، ارتعاشات میرا و جریانهای متناوب و غیره را بوجود آورده است باز هم واژه موهومی برای $i = \sqrt{-1}$ به کار می‌رود. بیشترین تلاشهای به عمل آمده در زمینه

[1] Kardan

اعداد مختلط را می‌توان نتیجه کار لئونارد اولر[1] در قرن هجدهم میلادی دانست و او نخستین کسی بود که نماد i را برای $\sqrt{-۱}$ متداول ساخت در قرن نوزدهم کارلفریدریش گاوس[2] و ویلیام هامیلتون[3] این ایده را گسترش دادند که در ادامه این فصل با آنها آشنا خواهیم شد. در خاتمه به این نکته نیز اشاره می‌کنیم که برخی از انتگرالهایی را که بااستفاده از روشهای انتگرال‌گیری نمی‌توان آنها را حل کرد به کمك نظریه اعداد مختلط می‌توان آنها را حل نمود که از جمله می‌توان به دو مورد زیر اشاره کرد

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin^{۲} x}{x^{۲}} dx = \frac{\pi}{۲}, \quad \int_{۰}^{\infty} \frac{x^{\alpha-۱}}{۱+x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \quad ۰ < \alpha < ۱$$

البته باید توجه داشت که اثبات روابط فوق مستلزم اطلاعات بیشتری در زمینه آنالیز مختلط می‌باشد که از حوصله این بحث خارج است.

۲.۲ دستگاه اعداد مختلط

در این قسمت به تعریف اعداد مختلط و اعمال جبری بین آنها یعنی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم خواهیم پرداخت. همچنین ملاحظه خواهیم نمود که یك عدد مختلط را می‌توان به صورت یك نقطه در صفحه یعنی دستگاه مختصات xy نمایش داد که شامل کلیه زوجهای مرتب (x, y) است که در آن $x, y \in \mathbb{R}$.

تعریف ۱.۲.۲. *فرض‌کنیم*

$$\mathbb{R}^{۲} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

حاصلضرب دکارتی اعداد حقیقی باشد در این صورت مجموعه‌ی اعداد مختلط عبارت است از $\mathbb{R}^{۲}$ همراه با اعمال جبری زیر عمل جمع

$$(x_{۱}, y_{۱}) + (x_{۲}, y_{۲}) = (x_{۱} + x_{۲}, y_{۱} + y_{۲}),$$

عمل ضرب

$$(x_{۱}, y_{۱})(x_{۲}, y_{۲}) = (x_{۱}x_{۲} - y_{۱}y_{۲}, x_{۱}y_{۲} + x_{۲}y_{۱}),$$

و عمل ضرب اسکالر

$$a(x, y) = (ax, ay) \quad a \in \mathbb{R}.$$

مجموعه‌ی اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم و از حروف z، w و $\cdots$ بیان اعداد مختلط استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۲. *فرض‌کنیم $z = (x, y)$ یك عدد مختلط باشد در این‌صورت مؤلفه اول آن یعنی x را*

[1] L. Euler
[2] F. Gaus
[3] N. Hamilton

قسمت حقیقی z و مؤلفه دوم آن یعنی y را قسمت موهومی z می‌نامیم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\text{Re}(z) = z \text{ قسمت حقیقی}, \quad \text{Im}(z) = z \text{ قسمت موهومی}$$

نتیجه ۳.۲.۲. *مجموعه‌ی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ دارای خاصیت‌های جابجایی و شرکت‌پذیری است.*

اثبات. فرض کنیم $z_۱ = (x_۱, y_۱)$ و $z_۲ = (x_۲, y_۲)$ و $z_۳ = (x_۳, y_۳)$ اعداد مختلط دلخواه باشند. در این‌صورت داریم

$$\begin{aligned} z_۱ + z_۲ &= (x_۱, x_۲) + (x_۲, y_۲) = (x_۱ + x_۲, y_۱ + y_۲) = (x_۲ + x_۱, y_۲ + y_۱) \\ &= (x_۲, y_۲) + (x_۱, y_۱) = z_۲ + z_۱ \quad \text{(خاصیت جابجایی)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z_۱ + z_۲) + z_۳ &= (x_۱ + x_۲, y_۱ + y_۲) + (x_۳, y_۳) \\ &= (x_۱ + x_۲ + x_۳, y_۱ + y_۲ + y_۳) \\ &= (x_۱, y_۱) + (x_۲ + x_۳, y_۲ + y_۳) \\ &= z_۱ + (z_۲ + z_۳) \quad \text{(خاصیت شرکت پذیری)} \end{aligned}$$

به‌طور مشابه می‌توان این خاصیت‌ها را برای عمل ضرب ثابت کرد یعنی $z_۱z_۲ = z_۲z_۱$ و $(z_۱z_۲)z_۳ = z_۱(z_۲z_۳)$. □

نتیجه ۴.۲.۲. *فرض کنیم $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط باشد در این‌صورت اعداد $\bar{۰} = (۰, ۰)$ و $\bar{۱} = (۱, ۰)$ به ترتیب عناصر بی‌اثر (خنثی) نسبت به اعمال جمع و ضرب تعریف شده در اعداد مختلط می‌باشند.*

اثبات. فرض کنیم $z = (x, y)$ یك عدد مختلط دلخواه باشد. در این‌صورت با توجّه به تعریف اعمال جمع و ضرب در اعداد مختلط داریم

$$z + \bar{۰} = (x, y) + (۰, ۰) = (x + ۰, y + ۰) = (x, y) = z$$

همچنین $\bar{۰} + z = z$ پس $z + \bar{۰} = \bar{۰} + z = z$ و نیز

$$z\bar{۱} = (x, y)(۱, ۰) = ((x \times ۱) - (y \times ۰), (x \times ۰) + (y \times ۱)) = (x, y) = z$$

به‌طور مشابه $\bar{۱}z = z$ بنابراین $z\bar{۱} = \bar{۱}z = z$. □

نتیجه ۵.۲.۲. *فرض کنیم $z = (x, y)$ یك عدد مختلط باشد. در این‌صورت قرینه z و معکوس*

(وارون) z را که به ترتیب با $-z$ و z^{-1} نمایش می‌دهیم به صورت زیر می‌باشند

$$-z = (-x, -y),$$
$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

اثبات. فرض کنیم $w = (x_1, y_1)$ قرینه z باشد. در این‌صورت خواهیم داشت $z + w = w + z = \bar{0}$. چون $z + w = (x + x_1, y + y_1) = (0, 0)$ لذا $x_1 = -x, y_1 = -y$ بنابراین $-z = w = (-x, -y) = -(x, y)$. همچنین اگر $V = (x_2, y_2)$ وارون z باشد آنگاه بنا به تعریف عنصر وارون خواهیم داشت $zV = Vz = \bar{1}$ بنابراین

$$zV = (x, y)(x_2, y_2) = (xx_2 - yy_2, xy_2 + x_2y) = (1, 0).$$

یعنی $xx_2 - yy_2 = 1$ و $xy_2 + x_2y = 0$. با حل دستگاه فوق نتیجه می‌شود

$$y_2 = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad x_2 = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

بنابراین

$$z^{-1} = V = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

□

نتیجه ۶.۲.۲. *فرض کنیم $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ دو عدد مختلط دلخواه باشند در این‌صورت اعمال تفریق و تقسیم را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد*

$$z_1 - z_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (x_1, y_1)\left(\frac{x_2}{x_1^2 + y_2^2}, \frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$
$$= \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$

قضیه ۷.۲.۲. *مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ همراه با اعمال جمع و ضرب و ضرب اسکالر تعریف شده در ۱.۲.۲ میدان[1] است.*

اثبات. با توجه به نتیجه‌های ۳.۲.۲ و ۴.۲.۲، $(\mathbb{C}, +)$ یک گروه آبلی جمعی است لذا بنا به تعریف میدان کافی است ثابت کنیم که هر عدد مختلط غیر صفر وارون‌پذیر است و نیز به ازای هر z_1، z_2 و z_3 داریم $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$. چون در هر عدد مختلط غیر صفر مانند $z = (x, y)$ حداقل

[1] برای تعریف میدان، زیر میدان، گروه جمعی، به کتابهای جبر دانشگاهی مراجعه کنید.

یکی از مؤلفه‌های x یا y باید غیرصفر باشد لذا بنا به نتیجه ۶.۲.۲ وارون هر عدد مختلط غیرصفر وجود دارد. همچنین به سادگی می‌توان رابطه $z_۱(z_۲ + z_۳) = z_۱z_۲ + z_۱z_۳$ را ثابت نمود بنابراین $(\mathbb{C}, +, \circ)$ یك میدان است. □

قضیه ۸.۲.۲. *مجموعه‌ی* $S = \{(x, ۰) \in \mathbb{C} | x \in \mathbb{R}\}$ *یك یك زیر میدان* $\mathbb{C}$ *است.*

اثبات. واضح است که S نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته است و $\bar{۰}, \bar{۱} \in S$ لذا کلیه خواص میدان برای S برقرار می‌باشد بنابراین S یك زیر میدان $\mathbb{C}$ است. □

قضیه ۹.۲.۲. *یك تناظر یك‌به‌یك بین مجموعه* S *و اعداد حقیقی* $\mathbb{R}$ *وجود دارد.*

اثبات. نگاشت $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow S$ را با ضابطه $\phi(x) = (x, ۰)$ تعریف می‌کنیم. به سادگی می‌توان تحقیق نمود که ϕ خوش‌تعریف، یکبه‌یك[۱] و پوشا است. با توجه به قضیه ۸.۲.۲ می‌توان ارتباط اعداد حقیقی و مختلط را بدین‌صورت بیان نمود که میدان اعداد حقیقی با تناظر فوق به عنوان زیر مجموعه‌ای از اعداد مختلط $\mathbb{C}$ می‌باشد که همان اعمال تعریف شده در $\mathbb{C}$ در $\mathbb{R}$ نیز برقرار است پس اعداد مختلط را می‌توان به عنوان توسیع اعداد حقیقی درنظر گرفت. □

۳.۲ نمایش‌های اعداد مختلط

الف) نمایش دکارتی همان‌طوری که در ابتدای این فصل بیان شد یك عدد مختلط را می‌توان به عنوان یك نقطه در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $z = (x, y)$ نمایش داد این نوع نمایش را نمایش دکارتی عدد مختلط z می‌گوییم. توجه داریم که در این نمایش محور x ها محور حقیقی و محور y ها محور موهومی نامیده می‌شود.

ب) نمایش استاندارد با توجه به تاریخچه اعداد مختلط و پیدایش نخستین عدد مختلط و غیرحقیقی یعنی i می‌توان به سادگی محاسبه نمود که اگر $i = (x, y)$ و دارای این خاصیت باشد که $i^۲ = -۱$ آنگاه باید داشته باشیم

$$i^۲ = ii = (x, y)(x, y) = (x^۲ - y^۲, ۲xy) = (-۱, ۰).$$

با حل دستگاه $\begin{cases} x^۲ - y^۲ = -۱ \\ ۲xy = ۰ \end{cases}$ نتیجه می‌شود که $x = ۰$ و $y = \mp ۱$ و لذا با در نظر گرفتن $x = ۰$ و $y = ۱$ نمایش $i = (x, y)$ حاصل می‌گردد. با این تعریف می‌توان به یك نمایش دیگر از اعداد مختلط به صورت زیر رسید

$$z = (x, y) = (x, ۰) + (۰, y) = (x, ۰) + (۰, ۱)(y, ۰).$$

[۱] تعاریف تابع و یك‌به‌یك و پوشا در فصل سوم بیان خواهد شد.

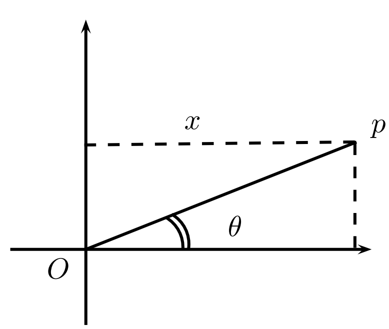
بنا به تناظر ایجاد شده بین مجموعه S و $\mathbb{R}$در قضیه ۹.۲.۲ می‌توان‌فرض‌کرد $x \cong (x, ۰)$ و $y \cong (y, ۰)$ (علامت $\cong$ به معنی تناظر یك بیك می‌باشد) بنابراین نمایش $z = x + iy$ به‌دست می‌آید که این نمایش را نمایش استاندارد عدد مختلط z می‌گوییم. با این نمایش قسمت حقیقی z شامل قسمتی از نمایش فوق است که به صورت مستقل ظاهر شده است و قسمت موهومی z عبارت ضریب i می‌باشد. نکته قابل توجه این است که اعمال جمع و ضرب تعریف شده در ۱.۲.۲ با اعمال جمع و ضرب معمولی در اعداد حقیقی و با فرض $i^۲ = -۱$ در نمایش استاندارد کاملاً هماهنگ و سازگار می‌باشد یعنی اگر $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$ آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} z_۱ + z_۲ &= x_۱ + iy_۱ + x_۲ + iy_۲ = (x_۱ + x_۲) + i(y_۱ + y_۲), \\ z_۱ z_۲ &= (x_۱ + iy_۱)(x_۲ + iy_۲) = x_۱x_۲ + ix_۱y_۲ + ix_۲y_۱ + i^۲y_۱y_۲ \\ &= (x_۱x_۲ - y_۱y_۲) + i(x_۱y_۲ + x_۲y_۱). \end{aligned}$$

استفاده از این نمایش موجب می‌شود که اعمال جمع و ضرب در اعداد مختلط را بتوان همان اعمال جمع و ضرب اعداد حقیقی در نظر گرفت و بنابراین محاسبه‌ها ساده‌تر و ملموس‌تر خواهد شد. به همین جهت نمایش استاندارد اعداد مختلط بیشتر مورد توجه و استفاده می‌باشد.

ج) نمایش قطبی با توجه به دستگاه مختصات قطبی و نمایش یك نقطه مانند p در این مختصات به صورت (r, θ) که در آن r فاصله جهت‌دار از p تا مبدأ مختصات و θ زاویه متشکل از پاره‌خط op و جهت مثبت محور x ها یعنی ox می‌باشد مطابق شکل زیر می‌توان ملاحظه نمود که روابط

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^۲ + y^۲} \\ \theta = \tan^{-۱}(\frac{y}{x}) \end{cases}$$



شکل ۱.۲: نمایش قطبی اعداد مختلط

میان این مختصات و مختصات دکارتی برقرار است لذا در نمایش استاندارد عدد مختلط z داریم

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ را با $\operatorname{cis}(\theta)$ نمایش می‌دهیم و بنابراین $z = r\operatorname{cis}(\theta)$ حاصل می‌شود این نوع نمایش عدد مختلط z را یک نمایش قطبی می‌نامیم. چنانچه $۰ \leq \theta < ۲\pi$ اختیار شود آنگاه $\arg(z) = \theta$ تعریف می‌کنیم و آن را آرگمان یا شناسه z گوییم.

تذکر ۱.۳.۲. *برای تبدیل نمایش قطبی یک عدد مختلط به نمایش دکارتی یا استاندارد می‌توان از روابط*

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$

استفاده نمود و با جایگزینی مقادیر r و θ در روابط فوق مقادیر x و y حاصل می‌شود. برای تبدیل نمایش دکارتی یا استاندار یک عدد مختلط به نمایش دکارتی از روابط

$$r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}},$$
$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right),$$

استفاده می‌کنیم ولی ذکر این نکته ضروری است که چون دو جواب برای θ حاصل می‌شود (زاویه‌های α و $\pi + \alpha$) لذا باید زاویه‌ای را به عنوان θ اختیار کرد که انتهای کمان آن در ناحیه‌ای قرار داشته باشد که نقطه (x, y) در آن قرار گرفته است به طور مثال می‌دانیم $\tan^{-۱}(۱) = \frac{\pi}{۴}$ و $\tan^{-۱}(۱) = \frac{۵\pi}{۴}$ لذا اگر $(x, y) = (۱, ۱)$ باشد زاویه $\theta = \frac{\pi}{۴}$ اختیار می‌شود زیرا نقطه $(۱, ۱)$ و نیز انتهای کمان زاویه $\frac{\pi}{۴}$ هر دو در ناحیه اول قرار دارند و اگر $(x, y) = (-۱, -۱)$ آنگاه زاویه $\theta = \frac{۵\pi}{۴}$ باید اختیار شود. حال به‌ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۲.۳.۲. *نمایش قطبی اعداد مختلط $z_۱ = ۱ + i$ و $z_۲ = ۱ - i$ و $z_۳ = -۱ + i$ را به دست آورید.*

حل. چون $z_۱ = ۱ + i$ پس $x_۱ = y_۱ = ۱$ و نقطه $(۱, ۱)$ در ناحیه اول قرار دارد لذا $\theta = \frac{\pi}{۴}$ و $r = \sqrt{۲}$ بنابراین $z_۱ = \sqrt{۲}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{۴}\right)$ به طور مشابه $z_۲ = \sqrt{۲}\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{۴}\right)$ و $z_۳ = \sqrt{۲}\operatorname{cis}\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)$ به‌دست می‌آیند.

مثال ۳.۳.۲. *نمایش استاندارد اعداد مختلط $z_۱ = \operatorname{cis}(\frac{\pi}{۴})$ و $z_۲ = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{۲}\right)$ و $z_۳ = ۴\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{۳}\right)$ را به‌دست آورید و آنها را در دستگاه مختصات رسم کنید.*

حل. داریم $z_۱ = \sqrt{۲}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{۴}\right)$ پس $r = \sqrt{۲}$ و $\theta = \frac{\pi}{۴}$ بنابراین

$$y = r\sin\theta = \sqrt{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) = ۱, \quad x = r\cos\theta = \sqrt{۲}\cos\frac{\pi}{۴} = \sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۱$$

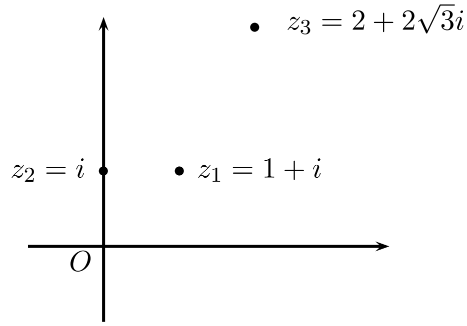
پس نمایش استاندارد عدد مختلط $z_۱$ عبارت است

$$z_۱ = ۱ + i$$

به طور مشابه داریم

$$z_۲ = i, \quad z_۳ = ۲ + ۲\sqrt{۳}i$$

نمایش استاندارد این اعداد در دستگاه مختصات در شکل ۲.۲ آمده است.



شکل ۲.۲: نمایش استاندارد اعداد z_1، z_2 و z_3

تعریف ۴.۳.۲. *فرض کنیم $z = x + iy$ در این‌صورت مزدوج عدد مختلط z را با $\overline{z}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$\overline{z} = x - iy.$$

همچنین قدرمطلق (یا مدول) z به صورت $|z| = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۵.۳.۲. *فرض کنیم z، $z_۱$ و $z_۲$ اعداد مختلط باشند در این‌صورت داریم*

(۱) $\overline{z_۱ + z_۲} = \overline{z}_۱ + \overline{z}_۲$.

(۲) $\overline{z_۱ z_۲} = \overline{z}_۱ \overline{z}_۲$.

(۳) $|z| = |-z| = |\overline{z}| \geq ۰$

(۴) $\overline{\overline{z}} = z, \quad |z|^۲ = z\overline{z}$.

(۵) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{۲i}$, $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{۲}$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.

(۶) $|z_۱ z_۲| = |z_۱||z_۲|$.

(۷) $|z_۱ - z_۲| \geq ||z_۱| - |z_۲||$, $|z_۱ + z_۲| \leq |z_۱| + |z_۲|$.

(۸) $\arg(z_۱ z_۲) = \arg(z_۱) + \arg(z_۲)$.

(۹) $(r \operatorname{cis}\theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$ *برای هر* $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$.

اثبات. فرض کنیم $z = x + iy$، $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$.

(۱) چون $z_۱ + z_۲ = (x_۱ + x_۲) + i(y_۱ + y_۲)$ لذا $\overline{z_۱ + z_۲} = (x_۱ + x_۲) - i(y_۱ + y_۲)$ از طرفی $\overline{z}_۱ + \overline{z}_۲ = (x_۱ - iy_۱) + (x_۲ - iy_۲) = (x_۱ + x_۲) - i(y_۱ + y_۲)$ و حکم ثابت است.

(۲)

$$\begin{aligned}\overline{z_۱ z_۲} &= \overline{(x_۱ + iy_۱)(x_۲ + iy_۲)} = \overline{(x_۱x_۲ - y_۱y_۲) + i(x_۱y_۲ + x_۲y_۱)} \\ &= (x_۱x_۲ - y_۱y_۲) - i(x_۱y_۲ + x_۲y_۱).\end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}\overline{z}_۱\overline{z}_۲ &= (x_۱ - iy_۱)(x_۲ - iy_۲) = (x_۱x_۲ - y_۱y_۲) + i(-x_۱y_۲ - x_۲y_۱) \\ &= (x_۱x_۲ - y_۱y_۲) - i(x_۱y_۲ + x_۲y_۱).\end{aligned}$$

و حکم ثابت است.

(۳) چون $-z = -x - iy$ و $\overline{z} = x - iy$ لذا

$$|z| = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{x^۲ + (-y)^۲} = \sqrt{(-x)^۲ + (-y)^۲} = |\overline{z}| = |-z| \geq ۰.$$

(۴) داریم

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^۲ - i^۲y^۲ = x^۲ + y^۲ = |z|^۲,$$

و

$$\overline{\overline{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z.$$

(۵) چون $\mathrm{Re}(z)=x$ و $\mathrm{Im}(z)=y$ پس

$$\begin{aligned}\frac{z+\overline{z}}{2}&=\frac{x+iy+x-iy}{2}=x\\ \frac{z-\bar{z}}{2i}&=\frac{x+iy-x+iy}{2i}=y.\end{aligned}$$

در نتیجه $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$ و $\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$. همچنین $\mathrm{Re}(z)=x\leq\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ و $\mathrm{Im}(z)=y\leq\sqrt{x^2+y^2}=|z|$.

(۶)

$$\begin{aligned}|z_1z_2|^2&=|(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)|^2\\ &=(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2\\ &=x_1^2(x_2^2+y_2^2)+y_1^2(x_2^2+y_2^2)\\ &=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=|z_1|^2|z_2|^2\end{aligned}$$

در نتیجه $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.

(۷)

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})\\ &=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)\\ &=|z_1|^2+|z_2|^2+\overline{z}_1z_2+z_1\overline{z}_2\\ &=|z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(\overline{z}_1z_2)\\ &\leq|z_1|^2+|z_2|^2+2|\mathrm{Re}(\overline{z}_1z_2)|\\ &\leq|z_1|^2+|z_2|^2+2|\overline{z}_1z_2|\\ &=|z_1|^2+|z_2|^2+2|\overline{z}_1||z_2|\\ &=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\\ &=(|z_1|+|z_2|)^2.\end{aligned}$$

بنابراین $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$. برای اثبات قسمت دوم به‌کمک قسمت اول داریم

$$|z_1|=|z_2+(z_1-z_2)|\leq|z_2|+|z_1-z_2|.$$

پس $|z_1|-|z_2|\leq |z_1-z_2|$. به طور مشابه از رابطه‌ی

$$|z_2|=|z_1+(z_2-z_1)|\leq |z_1|+|z_2-z_1|=|z_1|+|z_1-z_2|,$$

نتیجه می‌شود $|z_2|-|z_1|\leq |z_1-z_2|$. بنابراین

$$-|z_1-z_2|\leq |z_1|-|z_2|\leq |z_1-z_2|.$$

پس

$$||z_1|-|z_2||\leq |z_1-z_2|.$$

(۸) اگر $z_1=\operatorname{cis}\theta_1$ و $z_2=r_2\operatorname{cis}\theta_2$ آنگاه داریم

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= (r_1\operatorname{cis}\theta_1)(r_2\operatorname{cis}\theta_2)=r_1r_2\operatorname{cis}\theta_1\operatorname{cis}\theta_2\\
&= r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\
&= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_2\sin\theta_1)]\\
&= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\arg(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\arg(z_1)\arg(z_2).$$

(۹) اثبات به کمک استقراء روی n می‌باشد. اگر $n=0$ یا $n=1$ که حکم بدیهی است فرض کنیم رابطه برای $n-1$ برقرار باشد یعنی داشته باشیم

$$(r\operatorname{cis}\theta)^{n-1}=r^{n-1}\operatorname{cis}((n-1)\theta).$$

در این‌صورت با ضرب طرفین تساوی در $r\operatorname{cis}\theta$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
(r\operatorname{cis}\theta)^n &= (r\operatorname{cis}\theta)(r\operatorname{cis}\theta)^{n-1}\\
&= (r\operatorname{cis}\theta)[r^{n-1}\operatorname{cis}((n-1)\theta)]\\
&= r^n\operatorname{cis}\theta\operatorname{cis}((n-1)\theta)\\
&= r^n\operatorname{cis}(\theta+(n-1)\theta)\\
&= r^n\operatorname{cis}n\theta.
\end{aligned}$$

بنابراین حکم برای هر $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ برقرار است.

□

مثال ۶.۳.۲. *قسمت حقیقی و موهومی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.*

الف) $(i-۱)(i-۲)(i-۳)$ *ب)* $\dfrac{۱+i}{۱-i}$

ج) $\dfrac{۱}{i}$ *د)* $(۱-۲i)^۳$

حل.

الف) با محاسبه ضرب خواهیم داشت

$$\begin{aligned} z=(i-۱)(i-۲)(i-۳) &= (i^۲-۳i+۲)(i-۳) \\ &= (۱-۳i)(i-۳) \\ &= i-۳-۳i^۲+۹i = ۱۰i. \end{aligned}$$

در نتیجه $\operatorname{Re}(z)=۰$ و $\operatorname{Im}(z)=۱۰$.

ب) با ضرب عبارت فوق در مزدوج مخرج داریم

$$z=\frac{۱+i}{۱-i}=\frac{(۱+i)^۲}{(۱-i)(۱+i)}=\frac{۲i}{۱+۱}=i.$$

پس $\operatorname{Re}(z)=۰$ و $\operatorname{Im}(z)=۱$.

ج) با ضرب صورت و مخرج کسر $\frac{۱}{i}$ در i خواهیم داشت

$$z=\frac{۱}{i}=\frac{i}{i^۲}=\frac{i}{-۱}=-i.$$

بنابراین $\operatorname{Re}(z)=۰$ و $\operatorname{Im}(z)=-۱$.

د) با محاسبه توان سوم عبارت $۱-۲i$ داریم

$$z=(۱-۲i)^۳=-۱۱+۲i.$$

پس $\operatorname{Re}(z)=-۱$ و $\operatorname{Im}(z)=۲$.

مثال ۷.۳.۲. *ثابت کنید.*

$$\overline{\left(\frac{(۳+۷i)^۲}{(۸+۶i)}\right)}=\frac{(۳-۷i)^۲}{(۸-۶i)}.$$

حل.

$$\overline{\left(\frac{(۳+۷i)^۲}{(۸+۶i)}\right)} = \frac{\overline{(۳+۷i)^۲}}{\overline{(۸+۶i)}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\overline{(\text{۳}+\text{۷}i)(\text{۳}+\text{۷}i)}}{\text{۸}-\text{۶}i} \\ &= \frac{(\text{۳}-\text{۷}i)(\text{۳}-\text{۷}i)}{\text{۸}-\text{۶}i} \\ &= \frac{(\text{۳}-\text{۷}i)^{\text{۲}}}{(\text{۸}-\text{۶}i)}. \end{aligned}$$

مثال ۸.۳.۲. *فرض کنید $z=\text{۱}$. در این‌صورت به ازای هر دو عدد مختلط a و b داریم*

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = \text{۱}.$$

حل. می‌دانیم $z\overline{z}=|z|^{\text{۲}}$ و چون $z=\text{۱}$ لذا $z\overline{z}=\text{۱}$. پس $\overline{z}=\frac{\text{۱}}{z}$ و بنابراین

$$\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} = \frac{az+b}{\bar{b}+\overline{az}}\frac{\text{۱}}{z}.$$

پس

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = \left|\frac{az+b}{\bar{b}+\overline{az}}\right|\left|\frac{\text{۱}}{z}\right| = \frac{|az+b|}{|\bar{b}+\overline{az}|} = \frac{|az+b|}{|\overline{az+b}|} = \text{۱}.$$

۴.۲ معادلات مختلط

معادلات مختلط معادلاتی هستند که متغیر آنها متغیر مختلط یعنی z باشد مانند $z^{\text{۲}}+z+\text{۱}=\text{۰}$، $z^{\text{۳}}-(z^{\text{۲}}+\text{۱})^{\text{۴}}=\text{۱}$، $z^{\text{۴}}+z^{\text{۳}}+z^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}+\text{۱}=\text{۰}$ و غیره. حل معادلات مختلط در حالت کلی همانند معادلات حقیقی کاری دشوار است و بخصوص معادله‌های با درجه‌های بیشتر از ۵ دارای راه‌حل کلی (چه حقیقی و چه مختلط) نیستند ولی برخی حالات خاص را می‌توان با تجزیه آنها به عوامل تجزیه‌ناپذیر حل نمود نکته قابل توجه در حل معادلات مختلط این است که هر معادله مختلط از درجه n دارای دقیقا n جواب می‌باشد که این مطلب تحت عنوان قضیه اساسی جبر ثابت می‌شود. در این قسمت ضمن بیان قضیه فوق (بدون اثبات) به حل معادلات مختلط به‌صورت $z^n=w$ خواهیم پرداخت که در آن z و w متغیرهای مختلط هستند.

۱.۴.۲ قضیه اساسی جبر

فرض کنیم $a_{\text{۰}}, a_{\text{۱}}, a_{\text{۲}}, \cdots, a_n$ اعداد مختلط باشند و $n\geq\text{۱}$ و $a_n\neq\text{۰}$ اگر

$$p(z)=a_{\text{۰}}+a_{\text{۱}}z+a_{\text{۲}}z^{\text{۲}}+\cdots+a_nz^n$$

آن‌گاه عدد مختلط $z_{\text{۰}}$ وجود دارد به طوری‌که $p(z_{\text{۰}})=\text{۰}$. اگر در قضیه فوق $\frac{p(z)}{z-z_{\text{۰}}}$ را در نظر بگیریم و قضیه را برای آن به‌کار ببریم ملاحظه خواهیم کرد که $p(z)=\text{۰}$ دارای n ریشه است و چون هر

چندجمله‌ای از درجه n نمی‌تواند بیش از n ریشه داشته باشد پس معادله $p(z) = ۰$ دارای دقیقا n ریشه است.

۲.۴.۲ معادلات مختلط به صورت $z^n = w$

فرض کنیم $w = r \operatorname{cis} \theta$ یك عدد مختلط داده شده باشد. دراین صورت $z = \rho \operatorname{cis} \phi$ را ریشه nام w گوییم هرگاه $z^n = w$. برای محاسبه ریشه‌ای n ام عدد مختلط w با توجه به قضیه ۵.۳.۲ قسمت (۹) داریم:

$$z^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\phi) = r \operatorname{cis}\theta \Leftrightarrow \rho = r^{\frac{۱}{n}}, \quad n\phi = ۲k\pi + \theta$$

بنابراین $z = r^{\frac{۱}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{۲k\pi+\theta}{n}\right)$. اگر $۰ \leq k \leq n - ۱$ آنگاه ریشه‌ای متمایز $z_k = r^{\frac{۱}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{۲k\pi+\theta}{n}\right)$ حاصل می‌شود. بنابراین معادله مختلط $z^n = w$ دارای n ریشه متمایز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
z_۰ &= r^{\frac{۱}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right) &&, \quad z_۱ = r^{\frac{۱}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{۲\pi+\theta}{n}\right)\\
z_۲ &= r^{\frac{۱}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{۴\pi+\theta}{n}\right) &&, \quad \cdots\\
z_{n-۲} &= r^{\frac{۱}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{۲(n-۲)\pi+\theta}{n}\right) &&, \quad z_{n-۱} = r^{\frac{۱}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{۲(n-۱)\pi+\theta}{n}\right)
\end{aligned}$$

مثال ۱.۴.۲. *ریشه‌های پنجم $w = ۱ + i$ را به دست آورید.*

حل. داریم $۱ + i = x + iy$ پس $y = ۱$ و $x = ۱$ لذا $r = \sqrt{۲}$ و $\theta = \tan^{-۱}(۱) = \frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}$.
چون $x = ۱$ و $y = ۱$ در ناحیه اول واقع شده است پس $\theta = \frac{\pi}{۴}$ لذا ریشه‌های پنجم w بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$z_k = \left(\sqrt{۲}\right)^{۱/۵} \operatorname{cis}\left(\frac{۲k\pi + \pi/۴}{۵}\right) = ۲^{\frac{۱}{۱۰}} \operatorname{cis}\left(\frac{۸k\pi+\pi}{۲۰}\right) \quad k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

بنابراین ریشه‌ها عبارتند از

$$\begin{aligned}
&z_۰ = ۲^{\frac{۱}{۱۰}} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{۲۰}\right) z_۱ = ۲^{\frac{۱}{۱۰}} \operatorname{cis}\left(\frac{۹\pi}{۲۰}\right) z_۲ = ۲^{\frac{۱}{۱۰}} \operatorname{cis}\left(\frac{۱۷\pi}{۲۰}\right)\\
&z_۳ = ۲^{\frac{۱}{۱۰}} \operatorname{cis}\left(\frac{۲۵\pi}{۲۰}\right) z_۴ = ۲^{\frac{۱}{۱۰}} \operatorname{cis}\left(\frac{۳۳\pi}{۲۰}\right)
\end{aligned}$$

مثال ۲.۴.۲. *تمامی ریشه‌های معادله مختلط $z^۳ + z^۲ + z + ۱ = ۰$ را به‌دست آورید.*

حل. می‌دانیم $\frac{z^۴-۱}{z-۱} = ۰ = ۱ + z + z^۲ + z^۳$ لذا $z^۴ - ۱ = ۰$ و $z - ۱ \neq ۰$ پس ابتدا ریشه‌های $z^۴ = ۱$ را محاسبه کرده و سپس از چهار ریشه حاصل شده ریشه $z = ۱$ را کنار می‌گذاریم و سه ریشه باقیمانده جوابهای معادله فوق می‌باشند.

$$z_k = ۱^{\frac{۱}{۴}} \operatorname{cis}\left(\frac{۲k\pi + ۰}{۴}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{k\pi}{۲}\right) \qquad , \quad k = ۰, ۱, ۲, ۳$$

$$z_۰ = \operatorname{cis}(۰) = ۱ \quad \text{غیر قابل قبول} \qquad , \quad z_۱ = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{۲}\right) = i$$

$$z_۲ = \operatorname{cis}(\pi) = -۱ \qquad , \quad z_۳ = \operatorname{cis}\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = -i$$

تذکر ۳.۴.۲. *(i)* *ریشه‌های n ام هر عدد مختلط $w = r\operatorname{cis}(\theta)$ رئوس یک n ضلعی منتظم هستند که شعاع دایره محیطی آن $r^{\frac{۱}{n}}$ و زاویه مرکزی آن $\frac{۲\pi}{n}$ می‌باشند.*

(ii) *اگر z یک ریشه n ام عدد مختلط $w = r\operatorname{cis}\theta$ باشد آنگاه $\overline{z}$ نیز یک ریشه n ام w می‌باشد. لذا تعداد ریشه‌های غیرحقیقی همیشه عددی زوج است.*

(iii) *در اعداد مختلط هیچ رابطه کوچکتر یا بزرگتر وجود ندارد و مقایسه آنها از این جهت بی‌معنی است لذا عدد مختلط بزرگتر یا عدد مختلط کوچکتر دارای معنی نیستند.*

(iv) *رابطه $a \geq ۰$ فقط برای اعداد حقیقی برقرار است و $i^۲ = -۱ < ۰$ یک مثال نقض از اعداد غیر حقیقی است .*

مثال ۴.۴.۲. *مکان هندسی نقاطی مانند $z = (x, y)$ را بیابید که در نامساوی زیر صدق کنند.*

$$|z - i| \leq |z + i|.$$

حل. داریم

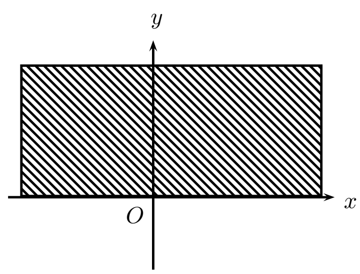
$$|z - i| = |x + (y - ۱)i| = \sqrt{x^۲ + (y - ۱)^۲},$$

$$|z + i| = |x + (y + ۱)i| = \sqrt{x^۲ + (y + ۱)^۲}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\sqrt{x^{۲}+(y-۱)^{۲}} \leq \sqrt{x^{۲}+(y+۱)^{۲}} &\Leftrightarrow (y-۱)^{۲} \leq (y+۱)^{۲}\\ &\Leftrightarrow y^{۲}-۲y+۱ \leq y^{۲}+۲y+۱\\ &\Leftrightarrow ۴y \geq ۰\\ &\Leftrightarrow y \geq ۰\end{aligned}$$

پس مکان هندسی عبارت است از محور x ها و قسمت بالایی محور xها که در شکل ۳.۲ مشخص شده است.



شکل ۳.۲: مکان هندسی نقاطی از صفحه که در رابطه‌ی $|z-i| \leq |z+i|$ زیر صدق می‌کنند.

مثال ۵.۴.۲. *ریشه‌های ششم i را به دست آورید و آنها را روی یک نمودار نشان دهید.*

حل. داریم $z^{۶}=i$ پس از $i=x+iy$ نتیجه می‌شود $(x,y)=(۰,۱)$ لذا

$$\theta=\tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۰}\right)=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}, \quad r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=۱$$

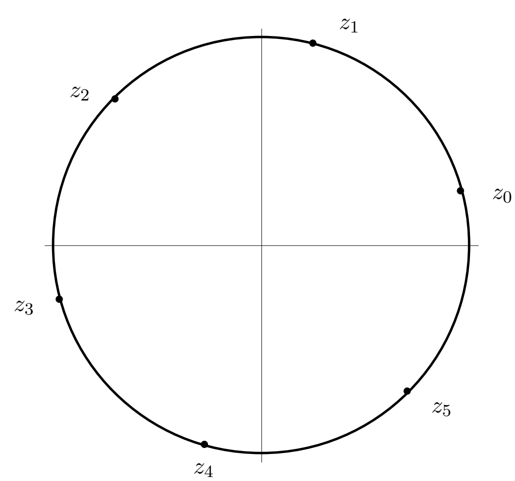
چون نقطه در جهت مثبت محور y ها واقع شده است پس $\theta=\frac{\pi}{۲}$ را اختیار می‌کنیم بنابراین ریشه های ششم i عبارتند از

$$z_k=\operatorname{cis}\left(\frac{۲k\pi+\pi/۲}{۶}\right), \quad k=۰,۱,۲,۳,۴,۵$$

پس

$$z_{۰} = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{۱۲}\right) \qquad z_{۱} = \operatorname{cis}\left(\frac{۵\pi}{۱۲}\right)$$
$$z_{۲} = \operatorname{cis}\left(\frac{۹\pi}{۱۲}\right) \qquad z_{۳} = \operatorname{cis}\left(\frac{۱۳\pi}{۱۲}\right)$$
$$z_{۴} = \operatorname{cis}\left(\frac{۱۷\pi}{۱۲}\right) \qquad z_{۵} = \operatorname{cis}\left(\frac{۲۱\pi}{۱۲}\right)$$

ریشه‌های فوق روی دایره‌ای به شعاع واحد واقع می‌باشند و به عبارت دقیق‌تر رئوس یك شش ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند (شکل ۴.۲ را ببینید).



شکل ۴.۲: شکل مربوط به مثال ۵.۴.۲

۵.۲ مسایل نمونه حل شده

مساله ۱.۵.۲. *فرض کنیم $z = x + iy$. قسمت‌های حقیقی و موهومی عدد مختلط $\frac{۱}{۳z+۲}$ را بر حسب x و y به دست آورید.*

حل.

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۳z+۲} &= \frac{۱}{۳(x+iy)+۲}\\ &= \frac{۱}{(۳x+۲)+۳yi}\\ &= \frac{(۳x+۲)-۳yi}{(۳x+۲)^۲+۹y^۲}\\ &= \frac{۳x+۲}{(۳x+۲)^۲+۹y^۲}+i\frac{-۳y}{(۳x+۲)^۲+۹y^۲}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\operatorname{Re}\left(\frac{۱}{۳z+۲}\right)=\frac{۳x+۲}{(۳x+۲)^۲+۹y^۲},\quad \operatorname{Im}\left(\frac{۱}{۳z+۲}\right)=\frac{-۳y}{(۳x+۲)^۲+۹y^۲}.$$

مساله ۲.۵.۲. *ثابت کنید که به ازای هر عدد مختلط z روابط زیر برقرارند.*

الف) $\operatorname{Re}(iz)=-\operatorname{Im}(z)$ *ب)* $\operatorname{Im}(iz)=\operatorname{Re}(z)$

حل. فرض کنیم $z=x+iy$ در این صورت $iz=i(x+iy)=-y+ix$ بنابراین

الف)

$$\operatorname{Re}(iz)=\operatorname{Re}(-y+ix)=-y=-\operatorname{Im}(z).$$

ب)

$$\operatorname{Im}(iz)=\operatorname{Im}(-y+ix)=x=\operatorname{Re}(z).$$

مساله ۳.۵.۲. *فرض کنید* $\frac{x-iy}{x+iy}=a+ib$ *در این صورت نشان دهید* $a^۲+b^۲=۱$.

حل. داریم

$$a+ib=\frac{x-iy}{x+iy}=\frac{(x-iy)^۲}{x^۲+y^۲}=\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}+i\frac{-۲xy}{x^۲+y^۲}$$

پس $a=\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$ و $b=\frac{-۲xy}{x^۲+y^۲}$. لذا

$$a^۲+b^۲=\left(\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}\right)^۲+\left(\frac{-۲xy}{x^۲+y^۲}\right)^۲=\frac{x^۴+y^۴-۲x^۲y^۲+۴x^۲y^۲}{x^۴+y^۴+۲x^۲y^۲}=۱.$$

مساله ۴.۵.۲. *هر یک از معادلات خط، دایره و بیضی را به صورت یک معادله مختلط نمایش دهید.*

حل. می‌دانیم معادلات پارامتری یک خط به صورت $\begin{cases} x = x_\circ + at \\ y = y_\circ + bt \end{cases}$ می‌باشد که در آن $t \in \mathbb{R}$. قرار می‌دهیم $v = (a,b)$، $z = (x,y)$ و $w = (x_\circ, y_\circ)$. در این صورت $w, v, z \in \mathbb{C}$ و معادله خط فوق به‌صورت $z = w + tv$ حاصل می‌شود. معادله یک دایره به شعاع r و مرکز w به صورت $|z-w| = r$ و معادله یک بیضی با کانون‌های $F = (d, \circ)$ و $F' = (d', \circ)$ و با مقدار ثابت $۲a$ را می‌توان به‌صورت $|z-F| + |z+F'| = ۲a$ نمایش داد.

مساله ۵.۵.۲. *فرض کنید $a, b \in \mathbb{C}$ در این صورت اتحاد زیر را ثابت کنید*

$$|a-b|^۲ + |a+b|^۲ = ۲(|a|^۲ + |b|^۲) \quad (\text{قانون متوازی‌الاضلاع})$$

حل. داریم

$$\begin{aligned} |a-b|^۲ + |a+b|^۲ &= (a-b)\overline{(a-b)} + (a+b)\overline{(a+b)} \\ &= (a-b)(\bar{a} - \bar{b}) + (a+b)(\bar{a} + \bar{b}) \\ &= |a|^۲ - a\bar{b} - b\bar{a} + |b|^۲ + |a|^۲ + a\bar{b} + b\bar{a} + |b|^۲ \\ &= ۲(|a|^۲ + |b|^۲). \end{aligned}$$

مساله ۶.۵.۲. *مکان هندسی نقاطی مانند $z = (x,y)$ را بیابید که داشته باشیم* $\mathrm{Im}(z + ۵) = \circ$.

حل. داریم $z + ۵ = (x + ۵) + iy$ و لذا $\mathrm{Im}(z+۵) = y$ بنابراین $\mathrm{Im}(z+۵) = \circ$ اگر و فقط اگر $y = \circ$ پس مکان هندسی محور x ها است.

مساله ۷.۵.۲. *اتحاد مثلثاتی زیر که به نام اتحاد لاگرانژ معروف می‌باشد را ثابت کنید.*

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \frac{\theta}{2} \neq k\pi, k = 0, 1, \ldots$$

حل. می‌دانیم برای هر $w \neq ۱$ داریم $۱ + w + w^۲ + \cdots + w^n = \frac{۱ - w^{n+۱}}{۱ - w}$. بنابراین

$$۱ + \cos\theta + \cos ۲\theta + \cdots + \cos n\theta = \sum_{k=\circ}^{n} \cos k\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{Re}\left[\sum_{k=۰}^{n}(\cos\theta + i\sin\theta)^k\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[\frac{۱ - \cos\theta + i\sin\theta)^{n+۱}}{۱ - \cos\theta - i\sin\theta}\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[\frac{۱ - \cos(n+۱)\theta - i\sin(n+۱)\theta}{۱ - \cos\theta - i\sin\theta}\right] \\
&= \frac{۱ - \cos\theta - \cos(n+۱)\theta + \cos(n+۱)\theta\cos\theta + \sin(n+۱)\theta\sin\theta}{۲ - ۲\cos\theta} \\
&= \frac{۱}{۲} + \frac{\cos n\theta - \cos(n+۱)\theta}{۲(۱ - \cos\theta)} \\
&= \frac{۱}{۲} + \frac{۲\sin(\frac{\theta}{۲})\sin\left(n + \frac{۱}{۲}\right)\theta}{۲(۱ - \cos\theta)} \\
&= \frac{۱}{۲} + \frac{\sin\left(n + \frac{۱}{۲}\right)\theta}{۲\sin(\frac{\theta}{۲})}.
\end{aligned}
$$

توجه کنید که تساوی دوم از قانون دموآو نتیجه شده است.

مساله ۸.۵.۲. *فرض کنید w یکی از ریشه‌های n ام غیر حقیقی واحد باشد در این صورت نشان دهید*

$$۱ + w + w^۲ + \cdots + w^{n-۱} = ۰.$$

حل. چون w ریشه n ام واحد است لذا $w^n = ۱$. از طرف دیگر می‌دانیم

$$(w^n - ۱) = (w - ۱)(۱ + w + w^۲ + \cdots + w^{n-۱}).$$

بنابراین

$$۱ + w + w^۲ + \cdots + w^{n-۱} = \frac{w^n - ۱}{w - ۱}.$$

چون w ریشه غیرحقیقی است لذا $w \neq ۱$ و $w^n - ۱ = ۰$ بنابراین

$$۱ + w + w^۲ + \cdots + w^{n-۱} = ۰.$$

مساله ۹.۵.۲. *ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $(۱+i)^n + (۱-i)^n$ یك عدد حقیقی است و به طور کلی نشان دهید که به ازای هر عدد مختلط z، $z^n + \overline{z}^n$ عددی حقیقی است.*

حل. داریم

$$\begin{aligned}
(1+i)^n+(1-i)^n &= \left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right]^n+\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right]^n \\
&= \left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^n+\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^n \\
&= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n+\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n \\
&= (\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right]+(\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right] \\
&= (\sqrt{2}^n)\left[2\cos\frac{n\pi}{4}\right]\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

در حالت کلی فرض کنیم $z=r\operatorname{cis}\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ در این صورت

$$\overline{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
z^n+\overline{z}^n &= r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)+r^n(\cos n\theta-i\sin n\theta) \\
&= 2r^n\cos n\theta\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

تذکر ۱۰.۵.۲. *این مسأله را می‌توان به روش زیر نیز حل کرد. می‌دانیم‌که* $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$ *پس*

$$(1+i)^n+(1-i)^n=(1+i)^n+(\overline{1+i})^n=(1+i)^n\overline{(1+i)^n}=2\operatorname{Re}(1+i)^n\in\mathbb{R}$$

و در حالت کلی نیز داریم

$$z^n+\overline{z}=z^n+\overline{z^n}=2\operatorname{Re}(z^n)\in\mathbb{R}.$$

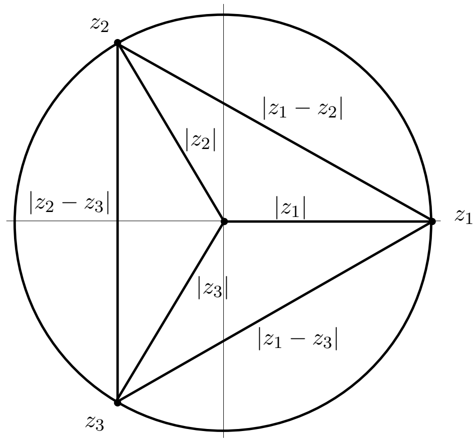
مساله ۱۱.۵.۲. *فرض‌کنید* z_1، z_2 *و* z_3 *سه عدد مختلط باشند‌که در دو شرط* $z_1+z_2+z_3=0$ *و* $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ *صدق می‌کنند. ثابت‌کنید این سه عدد مختلط، رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع (محاط در دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز مبدأ) هستند.*

حل. کافی است ثابت کنیم که

$$|z_2-z_3|=|z_1-z_2|=|z_1-z_3|$$

بدین منظور یکی از تساوی‌ها به طور مثال $|z_1-z_3|=|z_1-z_2|$ را ثابت می‌کنیم، بقیه به طور مشابه ثابت می‌شود. چون $z_1+z_2+z_3=0$ لذا $z_1=-z_2-z_3$ و بنابراین داریم

$$
\begin{aligned}
|z_1-z_3|=|z_1-z_2|&\\
&\Leftrightarrow |-z_2-z_3-z_3|=|-z_3-z_2-z_2|\\
&\Leftrightarrow |-2z_2-z_3|=|-z_2-2z_3|\\
&\Leftrightarrow |2z_2+z_3|=|z_2+2z_3|\\
&\Leftrightarrow |2z_2+z_3|^2=|z_2+2z_3|^2\\
&\Leftrightarrow (2z_2+z_3)\overline{(2z_2+z_3)}=(z_2+2z_3)\overline{(2z_3+z_2)}\\
&\Leftrightarrow (2z_2+z_3)(2\overline{z}_2+\overline{z}_3)=(z_2+2z_3)(2\overline{z}_3+\overline{z}_2)
\end{aligned}
$$



شکل ۵.۲: شکل مربوط به مسأله‌ی ۱۱.۵.۲

چون بنا به فرض $|z_2|=|z_3|=1$ لذا تساوی اخیر همواره برقرار می‌باشد. از طریق هندسی نیز می‌توان به کمک شکل ۵.۲ درستی آن را نشان داد. جزئیات به خواننده واگذار می‌شود.

مساله ۱۲.۵.۲. *مکان هندسی اعداد مختلط z در صفحه را طوری تعیین کنید که $|z-z_1|=|z-z_2|$ که در آن $z_1=3+4i$ و $z_2=1+2i$.*

فرض کنیم $z=x+iy$ در این صورت داریم

$$z-z_1=(x+iy)-(3+4i)=(x-3)+i(y-4)$$

$$z - z_{۲} = (x + iy) - (۱ + ۲i) = (x - ۱) + i(y - ۲)$$

پس از $|z - z_{۱}| = |z - z_{۲}|$ نتیجه می‌شود که

$$\sqrt{(x - ۳)^{۲} + (y - ۴)^{۲}} = \sqrt{(x - ۱)^{۲} + (y - ۲)^{۲}}$$

با مربع کردن طرفین تساوی داریم

$$(x - ۳)^{۲} + (y - ۴)^{۲} = (x - ۱)^{۲} + (y - ۲)^{۲}$$

و یا

$$x^{۲} - ۶x + ۹ - y^{۲} - ۸y + ۱۶ = x^{۲} - ۲x + y^{۲} - ۴y + ۴$$

که پس از اختصار نتیجه می‌شود $x + y = ۵$ که معادله یك خط می‌باشد.

مساله ۱۳.۵.۲. *به کمك قانون دموآو فرمولی برای بسط $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ به دست آورید.*

حل. بنابر قانون دموآو داریم $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n} = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$. حال اگر سمت چپ این تساوی را طبق بسط دو جمله‌ای، بسط دهیم آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n} &= \cos^{n}\theta + (n\cos^{n-۱}\theta\sin\theta)i \quad + \left(\frac{n(n-۱)}{۲!}\cos^{n-۲}\theta\sin^{۲}\theta\right)i^{۲} \\ &\quad + \left(\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}\cos^{n-۳}\theta\sin^{۳}\theta\right)i^{۳} + \cdots + i^{n}\sin^{n}\theta \\ &= \left(\cos^{n}\theta - \frac{n(n-۱)}{۲!}\cos^{n-۲}\theta\sin^{۲}\theta + \cdots\right) \\ &\quad + i\left(n\cos^{n-۱}\theta\sin\theta - \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}\cos^{n-۳}\theta\sin^{۳}\theta + \cdots\right)\end{aligned}$$

حال با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی دو طرف حکم نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \cos^{n}\theta - \frac{n(n-۱)}{۲!}\cos^{n-۲}\theta\sin^{۲}\theta \\ &\quad + \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۴!}\cos^{n-۴}\theta\sin^{۴}\theta + \cdots \\ \sin n\theta &= n\cos^{n-۱}\theta\sin\theta - \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}\cos^{n-۳}\theta\sin^{۳}\theta + \cdots\end{aligned}$$

مساله ۱۴.۵.۲. *فرض کنید $z = cos\theta + i\sin\theta$ در این صورت نشان دهید که*

$$\cos n\theta = \frac{۱}{۲i}\left(z^{n} + \frac{۱}{z^{n}}\right), \qquad \sin n\theta = \frac{۱}{۲}\left(z^{n} - \frac{۱}{z^{n}}\right)$$

حل. می‌دانیم

$$\frac{۱}{z} = z^{-۱} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

لذا

$$\begin{aligned} z^n + \frac{۱}{z^n} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n \\ &= \cos n\theta + i\sin n\theta + \cos n\theta - i\sin n\theta = ۲\cos n\theta \end{aligned}$$

پس $\cos n\theta = \frac{۱}{۲}\left(z^n + \frac{۱}{z^n}\right)$. به طور مشابه داریم $z^n - \frac{۱}{z^n} = ۲i\sin n\theta$. بنابراین $\sin n\theta = \frac{۱}{۲i}\left(z^n + \frac{۱}{z^n}\right)$.

۶.۲ مسایل

۱. *قسمت حقیقی و موهومی هر یک از اعداد مختلط زیر را به دست آورید.*

۱.
$$\frac{۱+i}{\sqrt{۲}}$$

۲.
$$۱ + i + i^۲ + \cdots + i^n$$

۳.
$$\frac{۱}{۱+i}$$

۴.
$$\left(\frac{۱+i}{\sqrt{۲}}\right)^۴ + \left(\frac{۱-i}{\sqrt{۲}}\right)^۴$$

۵.
$$(۱+i)(۱-i^{-۸})$$

۶.
$$۱ + i + i^۲ + i^۳$$

۷.
$$(۲+۳i)^۲(۳-۴i)^۳$$

۸.
$$\frac{i-۱}{i+۱}$$

۹.
$$\frac{(i-۱)(i+۱)(i+۴)}{(i-۳)(۲i+۵)}$$

۲. *فرض کنید $n \in \mathbb{Z}$ یک عدد صحیح باشد در این صورت i^n را به دست آورید و برحسب مقادیر n بحث کنید.*

۳. *نمایش قطبی هر یک از اعداد مختلط زیر را به دست آورید.*

۱. $۲+i$

۲. $\dfrac{۱}{(۱+i)^{۲}}$

۳. $-۱+\sqrt{۳}$

۴. $\dfrac{۱+i}{\sqrt{۲}}$

۵. $\dfrac{۱+i}{۱-i}$

۶. $\sqrt{۳}-i$

۴. *نمایش دکارتی (استاندارد) هر یک از اعداد مختلط زیر را بدست آورید.*

۱. $\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{۴}\right)$

۲. $۳\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{۶}\right)$

۳. $۲\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{۲}\right)$

۴. $\operatorname{cis}(-\pi)$

۵. $۵\operatorname{cis}\left(\dfrac{-\pi}{۴}\right)$

۶. $۳\operatorname{cis}\left(\dfrac{۳\pi}{۴}\right)$

۷. $۳\operatorname{cis}(۲\pi)$

۸. $۷\operatorname{cis}\left(\dfrac{۴\pi}{۳}\right)$

۹. $\operatorname{cis}(۲۶۰)$

۱۰. $\operatorname{cis}(-۲۱۰)$

۱۱. $۳(\cos\theta+i\sin\theta)$

۱۲. $\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta+۲i\sin\theta\cos\theta$

۵. *اگر $z=۱+۴i$ آنگاه عددهای $\frac{۱}{z}$، $z^{۲}$، $\overline{z}^{۳}$ و $\frac{۱}{\overline{z}^{۳}}$ را به دست آورید و آن ها را در دستگاه مختصات نمایش دهید.*

۶. *قدرمطلق هر یک از اعداد مختلط زیر را به دست آورید.*

۱.
$$\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}$$

۲.
$$\frac{(۱+i)(۱-i)}{۱+۲i}$$

۳.
$$(۱+i)^{۲}(۱-i)^{۳}$$

۴.
$$\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{۴}\right)$$

۵.
$$\operatorname{cis}\left(\frac{۷\pi}{۴}\right)$$

۶.
$$۳\operatorname{cis}\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)$$

۷. فرض کنید $z=\cos\theta+(۱+\sin\theta)i$ در این صورت نشان دهید که $\left|\frac{۲z-i}{-۱+zi}\right|=۱$.

۸. در هریک از عبارت‌های زیر مقادیر x و y را طوری به دست آورید که روابط داده شده زیر برقرار باشند.

۱.
$$|x+iy|=|x-iy|$$

۲.
$$x+iy=(x-iy)^{۲}$$

۳.
$$\frac{x+iy}{x-iy}=x-iy$$

۴.
$$\sum_{k=۰}^{۱۰۰} i^{k}=x+iy$$

۹. مقدار عبارت $\left(\frac{۱+i}{\sqrt{۲}}\right)^{n}+\left(\frac{۱-i}{\sqrt{۲}}\right)^{n}$ را برای n های زوج محاسبه کنید.

۱۰. فرض کنید z یک عدد مختلط باشد به طوریکه $|z|=۱$ مقدار $|z-۱|^{۲}+|z+۱|^{۲}$ را حساب کنید.

۱۱. فرض کنید z یک عدد مختلط باشد. آیا برای هر عدد حقیقی $a\geq ۱$ داریم $|z|\leq ۱ \Rightarrow |۱+az|$.

درستی هر یک از روابط زیر را بررسی کنید.

۱.
$$(۱+\cos\theta+i\sin\theta)^{n}+(۱+\cos\theta-i\sin\theta)^{n}=۲^{n}+۱\cos\frac{n\theta}{۲}\cos^{n}\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

۲.
$$\frac{\cos ۵\theta+i\sin ۵\theta}{\cos ۳\theta-i\sin ۳\theta}=\cos ۱۹\theta+i\sin ۱۹\theta$$

۳.

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=-1\quad n=2,3,\cdots$$

۴.

$$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=0\quad n=2,3,\cdots$$

۵.

$$\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}\quad n=2,3,\cdots$$

۶.

$$\cos n\theta=\cos^n\theta\left(1-\binom{n}{2}\tan^2\theta+\binom{n}{4}\tan^4\theta\cdots\right)\quad (n\in\mathbb{N})$$

۷.

$$\sin n\theta=\cos^n\theta\left(1-\binom{n}{2}\tan\theta+\binom{n}{3}\tan^4\theta\cdots\right)\quad (n\in\mathbb{N})$$

۸.

$$\tan(n\theta)=\frac{\binom{n}{1}\tan\theta-\binom{n}{3}\tan^3\theta+\cdots}{1-\binom{n}{2}\tan^2\theta+\binom{n}{4}\tan^2\theta-\cdots}\quad (n\in\mathbb{N})$$

۱۲. اگر P نمایش نقطه z و Q نمایش نقطه $z+\frac{1}{z}$ باشد آنگاه نشان دهید که اگر P روی دایره $|z|=2$ حرکت کند آنگاه Q روی یک بیضی حرکت خواهد کرد و معادله بیضی را به دست آورید.

۱۳. فرض کنید f یک چندجمله‌ای از درجه n با ضرایب حقیقی باشد و $f(z)=0$ که z یک عدد مختلط است. ثابت کنید $f(\overline{z})=0$.

۱۴. مکان هندسی هر یک از عبارت های زیر را توصیف و آن ها را رسم کنید.

۱. $|z+1|=i$

۲. $|z|\leq|2z+1|$

۳. $|z-i|\leq|z+i|$

۴. $|z-1|\leq 2|z+1|$

۵. $|z+1|=|z-1|$

۶. $|z+i|=|z-1|$

۱۵. *ریشه های پنجم واحد را به دست آورید و نشان دهید که آن ها روی رئوس یك پنج ضلعی منتظم قرار دارند.*

۱۶. *ریشه های معادلات مختلط زیر را به دست آورید.*

۱.
$$z^6 + 2z^3 + 2 = 0$$

۲.
$$z^4 + 1 = 0$$

۳.
$$(1 - z)^3 i + 1 - i\sqrt{2} = 0$$

۴.
$$z^3 - 8z = 0$$

۵.
$$z^2 + z + 1 = 0$$

۶.
$$z^4 + 1 + i\sqrt{3} = 0$$

۷.
$$(z + 1)^4 = z^4$$

۸.
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

۹.
$$z^3 - (1 + i)z + i = 0$$

۱۰.
$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

۱۱.
$$z^4-(1+\sqrt{3})z+(\sqrt{3}+i)(1-i) = 0$$

۱۲.
$$(z - 1)^5(z + 1)^5 = 0$$

۱۷. *ریشه‌های ششم عدد مختلط* $\sqrt[5]{\frac{-3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$ *را به دست آورید.*

۱۸. *مکان هندسی نقطه z را که در معادله $\left|\frac{z-1}{z+2}\right| = \frac{1}{2}$ صدق می‌کند را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.*

۱۹. *اگر P نمایش عدد مختلط z باشد مکان P را بیابید در صورتی‌که داشته باشیم $\left|\frac{z-1}{z+2i}\right| = 5$.*

فصل ۳

تابع

یکی از ابزارهای مهم در ریاضیات که در بیشتر شاخه‌های ریاضی مورد استفاده قرار گرفته است، «توابع» می‌باشند. اصولاً در اصطلاح عامیانه وقتی می‌گوییم یك شی تابعی از شی دیگر است یعنی تغییرات شی دوم در شی اول اثر می‌گذارد. به طور مثال مساحت یك دایره تابعی از شعاع آن است یعنی A، مساحت دایره، به شعاع دایره، r، وابسته است. قاعده‌ای که ارتباط A و r را معین می‌سازد توسط معادله‌ی $A = \pi r^۲$ داده شده است. به هر عدد مثبت r یك عددمقدار A وابسته است و می‌گوییم که A تابعی از r است. همچنین هزینه‌ی حمل یك کالا بستگی به وزن آن کالا دارد و لذا می‌توان گفت B، هزینه‌ی حمل کالا، تابعی از وزن آن w است.

این مثال‌ها بیانگر وجود دو متغیر هستند که یکی از متغیرها وابسته به متغیر دیگری است به عبارت دیگر در انتخاب مقادیر برای یك متغیر آزادی عمل داریم که به آن متغیر مستقل می‌گوییم. در مثال‌های اخیر متغیرهای r، شعاع دایره، و w، وزن کالا، متغیرهای مستقل هستند و متغیر دوم پس از قرار دادن مقدار برای متغیرمستقل، دارای مقدار می‌شود مانند A، مساحت دایره، و B، هزینه‌ی حمل کالا، که این متغیرها را متغیرهای وابسته می‌گوییم. معمولاً ارتباط بین متغیرهای مستقل و وابسته به وسیله یك ضابطه یا قانون مشخص می‌شود که در این فصل ضمن تعریف تابع و قانون و ضابطه آن به برخی خواص از جمله نمودار آنها و نیزمعرفی توابع مهم خواهیم پرداخت.

۱.۳ تابع ومشخصات آن

تعریف ۱.۱.۳. *فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. یك تابع مانند f از A به B را که با نماد $f : A \longrightarrow B$ نمایش می‌دهیم عبارت است از رابطه‌ای از A در B که اعضای متمایز آن دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشند یعنی*

$$f \subseteq A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$$

به طوری که اگر $(x_1, y_1), (x_n, y_n) \in f$ و $x_1 = x_n$ آنگاه داشته باشیم $y_1 = y_n$. به عبارت ساده‌تر هیچ دو زوج مرتبی را در f نتوان یافت که مؤلفه‌های اول آنها مساوی و مؤلفه‌های دوم آنها نامساوی باشند.

تعریف ۲.۱.۳. *فرض کنیم A و B دو مجموعه و $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد دامنه‌ی تعریف (قلمرو) تابع f را که با D_f نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$D_f = \{x \in A | \exists y \in B, (x, y) \in f\}.$$

برد تابع f که با R_f نمایش داده می‌شود عبارت است از

$$R_f = \{y \in B | \exists x \in A, (x, y) \in f\}.$$

به بیان دیگر می‌توان گفت که مجموعه‌ی همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب واقع در f دامنه‌ی تعریف f و مجموعه‌ی همه مؤلفه‌های دوم آن برد تابع f هستند.

مثال ۳.۱.۳.

(i) *فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $B = \{$علی, محمد, رضا$\}$ در این‌صورت تابع $f : A \longrightarrow B$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد*

$$f = \{(۱, \text{علی}), (۲, \text{رضا}), (۴, \text{علی})\}$$

توجه داریم که $D_f = \{۱, ۲, ۴\} \subseteq A$ و $R_f = \{$علی, رضا$\}$.

(ii) *فرض کنید $A = \mathbb{N}$ (مجموعه‌ی اعداد طبیعی) و $B = \mathbb{R}$ (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) باشند و $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر بیان شده باشد*

$$f = \{(x, y) | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}, y = x^۲\}$$

در این‌صورت اعضای f عبارتند از

$$f = \{(۱, ۱), (۲, ۴), (۳, ۹), (۴, ۱۶), (۵, ۲۵), \cdots\}$$

چون f اعضای مجموعه‌ی A را تحت ضابطه خاصی به اعضای مجموعه B مرتبط می‌سازد لذا می‌توان تابع f را به صورت ساده‌تر با نماد $f(x) = x^۲$ بیان نمود و معمولاً اینگونه توابع در ریاضیات مورد توجه هستند که به آنها توابع حقیقی می‌گوییم. در این مثال دامنه تعریف f و برد f به صورت زیر است

$$D_f = \mathbb{N}, \quad R_f = \{۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ...\} \subseteq \mathbb{R}.$$

(iii) *فرض کنید $A = B = \mathbb{R}$ و $f(x) = \sqrt{x}$ در این صورت دامنه ی تعریف و برد f عبارتند از*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq ۰\}, \quad R_f = \{y \in R | y \geq ۰\}.$$

تعریف ۴.۱.۳. *فرض کنید $f: A \longrightarrow B$ یک تابع باشد تابع f را یک تابع حقیقی گوییم چنانچه $D_f \subseteq \mathbb{R}$ و $R_f \subseteq \mathbb{R}$.*

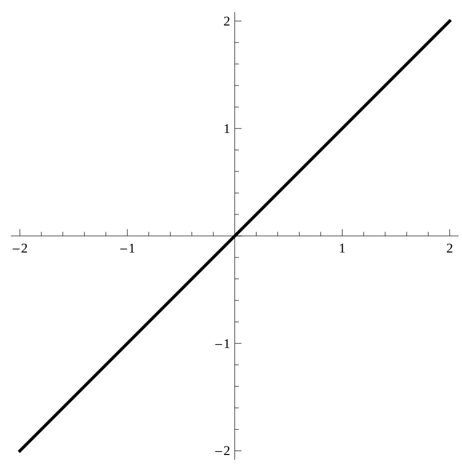
تعریف ۵.۱.۳. *فرض کنید $f: A \longrightarrow B$ یک تابع حقیقی باشد در این صورت نمودار f چنین تعریف می شود*

$$\text{نمودار}f = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} | x \in A, y = f(x)\}$$

به عبارت دیگر نمودار f مکان هندسی نقاطی در صفحه است که در ضابطه تابع f یعنی $y = f(x)$ صدق می کنند.

مثال ۶.۱.۳.

(i) فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x$ تعریف شده باشد در این صورت نمودار f عبارت است از خط نیمساز ناحیه اول ناحیه اول و سوم (شکل ۱.۳ راببینید).

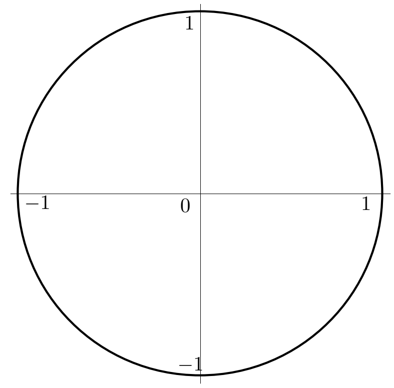


شکل ۱.۳: نمودار تابع $f(x) = x$

(ii) فرض کنید مجمو عه‌ی S به صورت زیر تعریف شده باشد

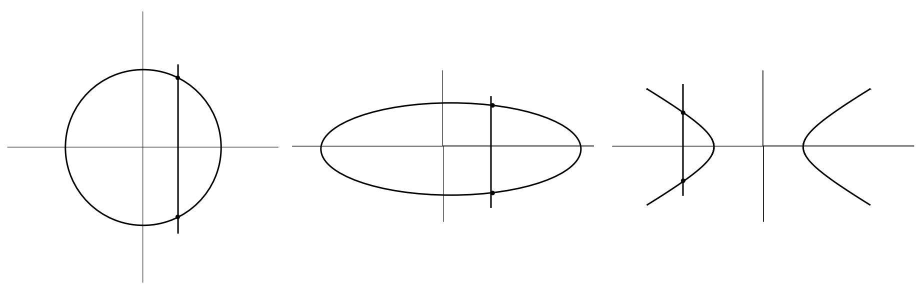
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} | x^۲ + y^۲ = ۱\}$$

در این صورت مکان هندسی نقاط S عبارت است از دایره‌ای به مرکز مبداء مختصات و شعا ع واحد (شکل ۲.۳) مجموعه‌ی S یک تابع را مشخص نمی‌سازد زیرا می‌توان زوج‌های مرتبی در آن یافت که مؤلفه‌های اول آن مساوی و مؤلفه‌های دوم آن نامساوی باشند به عنوان مثال $(۰, ۱)$ و $(۰, -۱)$ که متعلق به S هستند. این گونه مکان هندسی در صفحه را منحنی می‌گوییم و بنابراین تابع حالت خاصی از منحنی است که واجد شرط مورد نظر است.



شکل ۲.۳: نمایش مجموعه‌ی S در دستگاه مختصات دکارتی

تذکر ۷.۱.۳. *خاصیت تابع بودن را می‌توان بدین‌صورت با توجه به نمودار آن بیان کرد که نمودار یك تابع یك منحنی است که اگر خطی دلخواه موازی محور y ها رسم کنیم نمودار آن را حداکثر در یك نقطه قطع کند.*
بنابراین منحنیهای دایره، بیضی و هذلولی هیچکدام نمودار تابع نیستند زیرا خطی به موازات محور y ها در بیش از یك نقطه منحنیها را قطع می‌کند مطابق شکل زیر



شکل ۳.۳: هذلولی، بیضی و دایره هیچکدام تابع نیستند

۲.۳ جبر توابع

در این قسمت به تعریف اعمال جبری میان توابع یعنی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم و ترکیب آنها خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۲.۳. *فرض کنید* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *و* $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *دو تابع،* $D_f \subseteq A$ *و* $D_g \subseteq A$

دامنه‌ی تعریف و $R_f \subseteq \mathbb{R}$ و $R_g \subseteq \mathbb{R}$ برد آنها باشند. همچنین فرض کنیم c یک عدد حقیقی است.
در این‌صورت $f - g$ ، $f + g$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ و cf را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

(i)

$$f + g : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii)

$$f - g : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

(iii)

$$f.g : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f.g)(x) = f(x)g(x)$$

(iv)

$$(\frac{f}{g}) : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq ۰)$$

(v)

$$(cf) : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(cf)(x) = cf(x) \quad (c \in \mathbb{R})$$

توجه داریم که $D_{cf} = D_f$ و $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g$ و
$D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x \in D_g | g(x) = ۰\}$

مثال ۲.۲.۳. فرض کنید $f(x) = x + ۱$ و $g(x) = x^n$ در این صورت $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + ۱ + x^n && ; && D_{f+g} = \mathbb{R}\\
&(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x + ۱ - x^n && ; && D_{f-g} = \mathbb{R}\\
&(f.g)(x) = f(x)g(x) = (x+۱)x^n && ; && D_{f.g} = \mathbb{R}\\
&(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+۱}{x^n} && ; && D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{۰\}\\
&(cf)(x) = c(x+۱) && ; && D_{cf} = \mathbb{R}
\end{aligned}$$

تعریف ۳.۲.۳. فرض کنیم $B \longrightarrow A : f$ و $g : C \longrightarrow D$ دو تابع باشند و $B \subseteq C$ در این صورت به ترتیب ترکیب دو تابع f و g را که با نماد $g \circ f$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

توجه داریم که

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}.$$

می‌توان به سادگی نشان داد که

$$g \circ f = \{(x,y) | \exists z \in D_g \cap R_f, (x,z) \in f, (z,y) \in g\}$$

به طور مشابه $f \circ g$ را می‌توان تعریف نمود.

مثال ۴.۲.۳. فرض کنید $f(x) = x^۲$ و $g(x) = \frac{۱}{x}$ در این‌صورت

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^۲) = \frac{۱}{x^۲}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{۱}{x}\right) = \frac{۱}{x^۲}$$

و

$$\begin{aligned}
D_{g\circ f} &= \{x \in \mathbb{R} | x^۲ \in \mathbb{R} - \{۰\}\} = \mathbb{R} - \{۰\}\\
D_{f\circ g} &= \{x \in \mathbb{R} - \{۰\} | \frac{۱}{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} - \{۰\}
\end{aligned}$$

می توان عمل ترکیب دو تابع رامجدد تکرارکرد و توابع $f \circ g \circ f$ و $f \circ f \circ f$ را نیز به دست آورد.

$$\begin{aligned}
&f \circ g \circ f(x) = f(g \circ f(x)) = f(g(f(x)) = f(g(x^۲)) = f(\frac{۱}{x^۲}) = \frac{۱}{x^۴}\\
&f \circ f \circ f(x) = f(f(\circ f(x)) = f(f(f(x))) = f(f(x^۲)) = f(x^۴) = x^۸
\end{aligned}$$

تذکر ۵.۲.۳. ممکن است این سؤال پیش آید که چه لزومی دارد دامنه تعریف توابع مرکب $f \circ g$ و

$g \circ f$ طبق تعریف فوق محاسبه شوند و آیا پس از محاسبه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ می‌توان مستقیما با توجه به ضابطه به دست آمده دامنه تعریف آنها را محاسبه نمود؟ مثال زیر نشان می‌دهد که محاسبه $f \circ g$ و $D_{f\circ g}$ به طور مستقیم و نیز به کمك تعریف متفاوت می‌باشند اگر چه در موارد زیادی ممکن است دامنه تعریف یکسان از هر دو طریق حاصل گردد.

مثال ۶.۲.۳. فرض کنید $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در این صورت

$$D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = [۱, +\infty), \quad D_g = [۰, +\infty), \quad R_g = [۰, +\infty)$$

پس $(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = x + ۱$ که به طور مستقیم دامنه تعریف $f \circ g$ برابر $\mathbb{R}$ است ولی طبق تعریف داریم

$$D_{f\circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \in [۰, +\infty), \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [۰, +\infty)$$

البته برای $g \circ f$ از هر دو طریق یك نتیجه حاصل می شود

$$(g \circ f)(x) = g(x^۲ + ۱) = \sqrt{x^۲ + ۱}$$

که به طور مستقیم دامنه تعریف $g \circ f$ برابر $\mathbb{R}$ است و بنابه تعریف داریم

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}, x^n + ۱ \in [۰, +\infty)\} = \mathbb{R}$$

۳.۳ توابع حقیقی

همانگونه که در قسمت قبل بیان شد توابع حقیقی توابعی هستند که دامنه تعریف و بردشان حقیقی است در این قسمت به بیان برخی از آنها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۳. تابع حقیقی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را یك تابع ثابت روی $\mathbb{R}$ گوییم اگر مقدار ثابت $k \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = k$.

تعریف ۲.۳.۳. تابع حقیقی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = ax + b$ یك تابع خطی نام دارد که در آن a و b مقادیر ثابت حقیقی هستند نمودار تابع خطی یك خط در صفحه مختصات با شیب a و عرض از مبداء b می‌باشد. (در حالت کلی تابع f را یك تابع خطی نامند هرگاه $f(ax + y) = af(x) + f(y)$ به ازای هر $a, x, y \in \mathbb{R}$.)

تعریف ۳.۳.۳. تابع حقیقی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را یك چند جمله‌ای از درجه n گوییم اگر داشته باشیم

$$f(x) = a_۰ + a_۱ x + a_۲ x^۲ + \cdots + a_n x^n,$$

که در آن $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$ و $a_۰, a_۱, \cdots, a_n$ ثابت حقیقی هستند و $a_n \neq ۰$.

تعریف ۴.۳.۳. فرض کنیم $p(x)$ و $q(x)$ توابع چند جمله‌ای باشند در این صورت $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (با شرط $q(x) \neq ۰$) را یك تابع گویا(کسری) می‌نامیم.

تعریف ۵.۳.۳. *فرض‌کنیم $p(x)$ یک چندجمله‌ای باشد و n یک عدد طبیعی بیشتر از ۱ باشد. توابع به صورت*

$$f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$$

را یک تابع ریشه n ام یا در حالت کلی اصم می‌گوییم. توجه داریم که اگر $n = ۲k + ۱$ آنگاه $D_f = D_p$ و اگر $n = ۲k$ آنگاه D_f جواب نامعادله $p(x) \geq ۰$ است و در این حالت $f(x) \geq ۰$ که در تعیین برد تابع f مؤثر است.

تعریف ۶.۳.۳. *تابع گویای $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $ad \neq bc$ و $c \neq ۰$، یک تابع هموگرافیک می‌گوییم. واضح است $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-c}{d}\right\}$ و $R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{b}\right\}$.*

مثال ۷.۳.۳. *برای هر یک از توابع زیر نوع آنها، دامنه تعریف و برد آنها را مشخص کنید.*

الف) $f(x) = x^۳ + ۲x$

ب) $f(x) = \dfrac{x^۲}{x^۲ + ۱}$

پ) $f(x) = \sqrt[۳]{\dfrac{x + ۱}{۱ - ۲x}}$

ت) $f(x) = \sqrt{\dfrac{۱ - x}{۱ + ۲x}}$

ث) $f(x) = ۴$

ج) $f(x) = \dfrac{x + ۱}{x - ۱}$

حل.

الف) یک تابع چند جمله‌ای از درجه ۳ می‌باشد و $D_f = R_f = \mathbb{R}$.

ب) یک تابع گویا است $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = [۰, ۱)$ زیرا

$$y = f(x) = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱} \Rightarrow yx^۲ - x^۲ + y = ۰ \Rightarrow x^۲(y - ۱) = -y$$

و یا $x^۲ = \frac{-y}{y-۱}$ بنابراین باید داشته باشیم $\frac{-y}{y-۱} \geq ۰$ اولاً $y \neq ۱$ و ثانیاً هنگامی $-y$ و $y - ۱$ هم علامت هستند که $۰ \leq y < ۱$ لذا $[۰, ۱)$ برد تابع f می باشد.

پ) یک تابع اصم می باشد که $n = ۳$ بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{۱}{۲}\}$ و لذا

$$R_f = \mathbb{R} - \left\{\sqrt[۳]{\frac{-۱}{۲}}\right\}.$$

ت) یک تابع اصم است و

$$R_f = [۰, +\infty), \quad D_f = \left(\frac{-۱}{۲}, ۱\right].$$

ث) یك ثابت است و $R_f = \{۴\}$ و $D_f = \mathbb{R}$.

ج) یك تابع هموگرافیك است و $R_f = \mathbb{R} - \{۱\}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{۱\}$.

۴.۳ توابع خاص

در این قسمت به بیان برخی توابع با شرایط خاص می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴.۳. *فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ یك تابع باشد. تابع f را یك تابع یك به یك گوییم هرگاه شرط زیر برقرار باشد*

$$\forall x_۱, x_۲ \in D_f \subseteq A \quad f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱ = x_۲.$$

به عبارت دیگر تابع f عناصر متمایز در D_f را به عناصر متمایز در R_f ببرد. یعنی هیچ دو زوج مرتب متمایزی نتوان یافت که مؤلفه‌های دوم آنها یکسان باشند.

تعریف ۲.۴.۳. *تابع $f : A \longrightarrow B$ را یك تابع پوشا گوییم هرگاه $R_f = B$. به عبارت دیگر به ازای هر y در B عضوی مانند x در D_f وجود داشته باشد به‌طوری که داشته باشیم $f(x) = y$. به بیان ساده‌تر تابع f هنگامی تابع پوشا است که همه اعضای مجموعه B به وسیله تابع f به عناصر A نسبت داده شده باشد.*

مثال ۳.۴.۳. *برای هر یك از توابع زیر یك به یك و پوشا بودن را بررسی کنید*

الف) $\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &f(x) = ۲x + ۵ \end{aligned}$

ب) $\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &f(x) = x^۲ - ۲ \end{aligned}$

پ) $\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &f(x) = \frac{۱}{x} \end{aligned}$

ت) $\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{۰\} \\ &f(x) = x^۲ \end{aligned}$

حل.

الف) f تابعی یك به یك است. زیرا به ازای هر $x_۱, x_۲ \in \mathbb{R}$ اگر $f(x_۱) = f(x_۲)$ آنگاه داریم $۲x_۱ + ۵ = ۲x_۲ + ۵$. پس $۲x_۱ = ۲x_۲$. در نتیجه $x_۱ = x_۲$. همچنین f تابعی پوشا است زیرا اگر $y \in \mathbb{R}$ عضو دلخواهی باشد آنگاه می‌توان $x \in \mathbb{R}$ را چنان یافت که داشته باشیم $f(x) = y$. در واقع با فرض $x = \frac{y-۵}{۲}$ داریم

$$f(x) = f\left(\frac{y-۵}{۲}\right) = ۲\left(\frac{y-۵}{۲}\right) + ۵ = y - ۵ + ۵ = y.$$

ب) f تابعی یک به یک نیست زیرا داریم $f(۱) = f(-۱)$ ولی $-۱ \neq ۱$ همچنین f تابعی پوشا نیست زیرا با فرض $y = -۴ \in \mathbb{R}$ داریم و اگر $x \in \mathbb{R}$ چنان باشد که $f(x) = y$ آنگاه $-۴ = y = x^۲ - ۲$ و یا $x^۲ = -۲$ که غیر ممکن است.

پ) f تابعی یک به یک است زیرا اگر $f(x_۱) = f(x_۲)$ آنگاه $\frac{۱}{x_۱} = \frac{۱}{x_۲}$ و لذا $x_۱ = x_۲$. تابع پوشا نیست زیرا اگر $y = ۰ \in \mathbb{R}$ آنگاه $x \in \mathbb{R}$ وجود ندارد به طوری که $f(x) = y$ زیرا در غیر این صورت $f(x) = \frac{۱}{x} = ۰$ که غیر ممکن است.

ت) f تابع یک به یک نیست استدلال مشابه قسمت ب) است ولی f تابعی پوشاست زیرا اگر $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$ آنگاه با فرض $x = \sqrt{y}$ داریم

$$f(x) = f\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^۲ = y.$$

تعریف ۴.۴.۳. *تابع حقیقی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع زوج گوییم اگر به ازای هر $x \in D_f$ و $-x \in D_f$،*

$$f(-x) = f(x).$$

همچنین تابع حقیقی f را یک تابع فرد گوییم اگر به ازای هر $x \in D_f$ و $-x \in D_f$،

$$f(-x) = -f(x).$$

مثال ۵.۴.۳. *توابع $f(x) = x^۲$ و $g(x) = x^۳$ را در نظر می‌گیریم تابع f یک تابع زوج است زیرا $f(-x) = (-x)^۲ = x^۲ = f(x)$ و تابع g یک تابع فرد است زیرا*

$$g(-x) = (-x)^۳ = -x^۳ = -g(x).$$

تعریف ۶.۴.۳. *تابع f را یک تابع متناوب با دوره تناوب $T > ۰$ گوییم هرگاه برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) = f(x+T)$. کوچکترین مقدار T با خاصیت فوق را دوره تناوب اصلی گوییم.*

مثال ۷.۴.۳. *توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \tan x$ متناوب هستند زیرا برای هر $x \in \mathbb{R}$*

$$g(x+\pi) = \tan(x+\pi) = \tan x = g(x),$$
$$f(x+۲\pi) = \sin(x+۲\pi) = \sin x = f(x).$$

توجه داریم که ۲π و π بترتیب دوره‌های تناوب اصلی توابع f و g می‌باشند.

تعریف ۸.۴.۳. *تابع $f : A \longrightarrow A$ را تابع همانی گوییم اگر به ازای هر $x \in D_f$، $f(x) = x$. تابع همانی را با I نیز نشان می‌دهند.*

نتیجه ۹.۴.۳. *فرض کنیم f یک تابع حقیقی باشد.*

الف) اگر تابع f یك تابع زوج باشد آنگاه نمودار f نسبت به محور y ها متقارن است.

ب) اگر تابع f یك تابع فرد باشد آنگاه نمودار آن نسبت به مبداء مختصات متقارن است.

اصولاً بررسی تقارن‌های یك تابع می‌تواند تا حدود زیادی رسم تابع را سهل‌تر و محاسبات را کوتاه‌تر کند. به طور مثال تقارن نسبت به محور y ها موجب می‌شود که نمودار تابع را فقط در نواحی اول و چهارم رسم کنیم و با تقارن نسبت به مبداء مختصات می‌توانیم تنها در دو ناحیه تابع را رسم نموده و به کمك تقارن قرینه آن را رسم نمائیم. توجه کنید یك تابع غیر صفر نمی‌تواند نسبت به محور xها تقارن داشته باشد (چرا؟).

تعریف ۱۰.۴.۳. *فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ یك تابع یك به یك باشد در این صورت تابع معکوس f وجود دارد آنرا با $f^{-۱} : B \longrightarrow A$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$f^{-۱} = \{(y,x) | y = f(x)\}$$

تذکر ۱۱.۴.۳. *فرض کنیم f یك تابع معکوس‌پذیر و $f^{-۱}$ تابع معکوس آن باشد در این صورت*

(i) $D_f = R_{f^{-۱}}$ و $R_f = D_{f^{-۱}}$.

(ii) $f \circ f^{-۱} = f^{-۱} \circ f = I$.

(iii) $y = f(x)$ اگر و تنها اگر $x = f^{-۱}(y)$.

(iv) نمودار تابع معکوس f قرینه نمودار خود تابع نسبت به خط $y = x$ (نیمساز اول و سوم) می‌باشد.

مثال ۱۲.۴.۳. *فرض کنید $f(x) = \sqrt{x + ۴}$. نشان دهید f معکوس‌پذیر است و ضابطه تابع معکوس را به دست آورید.*

حل. چون تابع $f(x)$ یك به یك است لذا معکوس‌پذیر است (چرا؟). حال ضابطه تابع معکوس را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد

$$y = \sqrt{x + ۴} \Rightarrow y^{۲} = x + ۴ \Rightarrow x = y^{۲} + ۴.$$

بنابراین ضابطه معکوس به صورت زیر می‌باشد

$$f^{-۱}(x) = x^{۲} - ۴$$

تذکر ۱۳.۴.۳. *گاهی ممکن است از تصویر معکوس یك تابع سخن به میان آید باید دقت داشته باشیم که میان تابع معکوس که در ۱۰.۴.۳ تعریف شد و تصویر معکوس یك تابع کاملاً تفاوت وجود دارد و نباید*

آنها با یکدیگر مخلوط شوند. فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد در این صورت تصویر معکوس تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f^{-1}(B) = \{x \in A | f(x) \in B\}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر Y_1 و $Y_2 \subseteq B$ آنگاه داریم

(i) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

(ii) $Y_1 \subseteq Y_2$ *اگر و تنها اگر* $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$.

(iii) $f^{-1}(Y_2 - Y_1) = f^{-1}(Y_2) - f^{-1}(Y_1)$.

اثبات. قسمتهای (i) و (ii) به سهولت با عضوگیری نتیجه می‌شود قسمت (iii) را ثابت می‌کنیم

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(Y_2 - Y_1) &\Leftrightarrow f(a) \in Y_2 - Y_1 \\ &\Leftrightarrow f(a) \in Y_2, f(a) \notin Y_1 \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(Y_2), a \notin f^{-1}(Y_1) \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(Y_2) - f^{-1}(Y_1). \end{aligned}$$

□

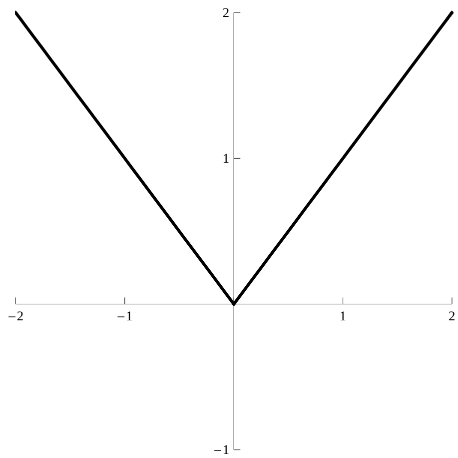
۵.۳ نمودار توابع خاص

در این قسمت با برخی توابع مهم آشنا خواهیم شد. این آشنائی شامل معرفی تابع، دامنه تعریف، برد و نیز رسم تقریبی آن می‌باشد رسم دقیق و اصولی نمودار توابع در قسمت کاربردهای مشتق به طور مفصل بیان خواهد شد.

تعریف ۱.۵.۳. *تابع قدر مطلق که به صورت $f(x) = |x|$ نمایش داده می‌شود همان طوری که در ۱۴.۲.۱ بیان شد به این صورت تعریف می‌شود*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = [0, +\infty)$$

نمودار تابع قدر مطلق به صورت زیر می‌باشد

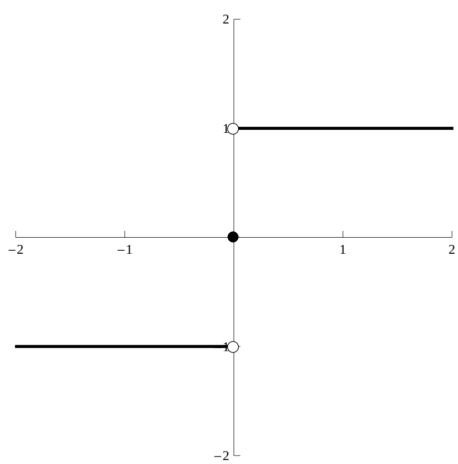


شکل ۴.۳: نمودار تابع $f(x) = |x|$.

تعریف ۲.۵.۳. *تابع علامتی x که به صورت $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ نشان داده می‌شود عبارت است از*

$$f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \{-۱, ۰, ۱\}$$

نمودار آن را در شکل ۵.۳ ملاحظه می‌کنید



شکل ۵.۳: نمودار تابع $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$.

تعریف ۳.۵.۳. فرض کنیم f و g توابع حقیقی باشند در این صورت توابع $\max\{f,g\}$ و $\min\{f,g\}$ به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\max\{f,g\}(x)=\max\{f(x),g(x)\},$$
$$\min\{f,g\}(x)=\min\{f(x),g(x)\}.$$

بسادگی می‌توان نشان داد که (تمرین ۱۶ از مسایل ۸.۶ را ببینید)

$$\max\{f,g\}(x)=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{۲},$$
$$\min\{f,g\}(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{۲}.$$

توجه داریم اگر $\max\{f,g\}=f$ آنگاه $f(x)\geq g(x)$ پس $f(x)-g(x)\geq ۰$ لذا $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$ پس

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{۲}=\frac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{۲}=f(x)$$

همچنین اگر $\max\{f,g\}=g$ آنگاه $f(x)\leq g(x)$ لذا $f(x)-g(x)\leq ۰$ پس

$$|f(x)-g(x)|=-f(x)+g(x)$$

بنابراین

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{۲}=\frac{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)}{۲}=f(x)$$

پس

$$\max\{f,g\}(x)=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{۲}$$

به طور مشابه می‌توان برای $\min\{f,g\}$ آن را ثابت نمود.

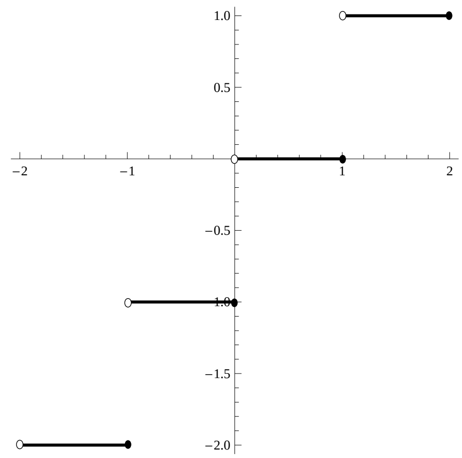
تعریف ۴.۵.۳. فرض کنیم f یک تابع حقیقی و $A\subseteq D_f\subseteq\mathbb{R}$ در این صورت تابع مشخصه روی A را که به صورت $f(x)=\chi_A(x)$ نمایش داده می‌شود چنین تعریف می‌کنیم

$$\chi_A(x)=\begin{cases}۱ & x\in A\\ ۰ & x\notin A\end{cases}$$

واضح است که $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=\{۰,۱\}$.

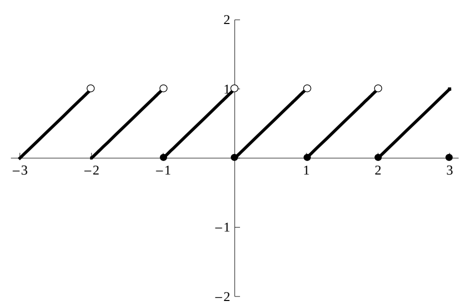
تعریف ۵.۵.۳. تابع پله‌ای یا جزء صحیح که در فصل اول نیز بیان شد عبارت است از $f(x)=[x]$ که اگر $n\leq x<n+۱$ آنگاه $[x]=n$ و n یک عدد صحیح نسبی است. نمودار این تابع در فاصله

$[-۲, ۲]$ به صورت شکل ۶.۳ است توجه داریم $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \mathbb{Z}$.



شکل ۶.۳: نمودار تابع $f(x) = [x]$.

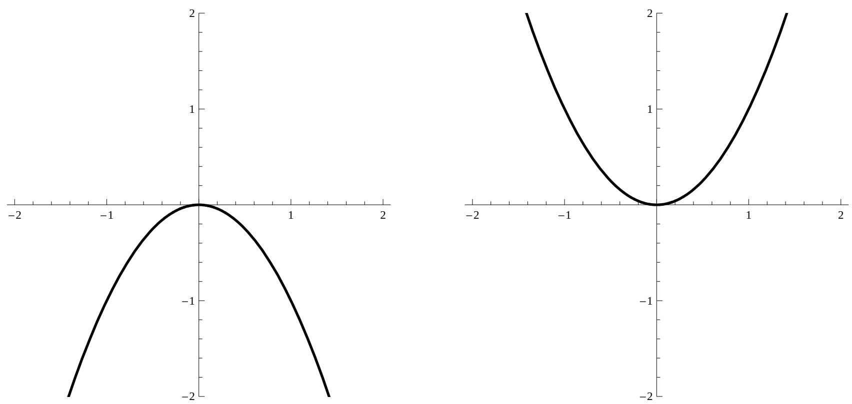
تعریف ۶.۵.۳. *برمبنای تابع جزء صحیح می‌توان تابع دیگری ساخت که به تابع جزء کسری یا تابع دندان اره‌ای مشهور است این تابع روی R با ضابطه $f(x) = x - [x]$ تعریف می‌شود و گاهی از نماد (x) برای نمایش آن استفاده می‌گردد. در شکل ۷.۳ نمودار این تابع در فاصله $[-۳, ۳]$ رسم شده است. باتوجه به شکل ملاحظه می‌شود که $D_f = \mathbb{R}$، $R_f = [۰, ۱)$.*



شکل ۷.۳: نمودار تابع $f(x) = x - [x]$.

تعریف ۷.۵.۳. *تابع سهمی که یکی از توابع مهم می‌باشد به صورت $f(x) = k(x-a)^۲ + b$ نمایش داده می‌شود که در اینجا (a, b) مختصات مرکز سهمی و مثبت یا منفی بودن k جهت سهمی (به طرف بالا یا به طرف پائین) و بزرگ یا کوچک شدن k شیب سهمی را زیاد یا کم می‌کند. دامنه‌ی f برابر $\mathbb{R}$ و*

برد آن اگر $k < ۰$ برابر $(-\infty, b]$ و اگر $k > ۰$ برابر $[b, \infty)$ است. نمودار سهمی در حالت کلی به صورت زیر است.(شکل ۸.۳ را ببینید)

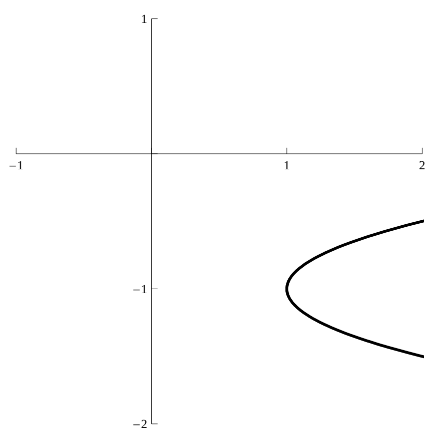


(آ) نمودار تابع $f(x) = x^۲$.

(ب) نمودار تابع $f(x) = -x^۲$.

شکل ۸.۳: نمودار تابع $f(x) = kx^۲$ براي $k = ۱$ و $k = -۱$.

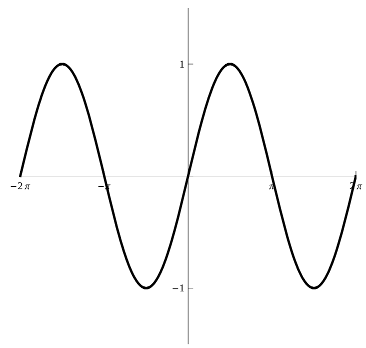
تذکر ۸.۵.۳. *اگر در تابع نقش متغیرهای x و y را جابجا نمائیم سهمی دیگری در جهت چپ یا راست پدید می‌آید که البته دیگر تابع نیست به طور مثال سهمی $x - ۱ = ۴(y + ۱)^۲$ یك سهمی به مرکز $(۱, -۱)$ و در جهت مثبت محور x ها است. (شکل ۹.۳ را ببینید)*



شکل ۹.۳: نمودار سهمی $x - ۱ = ۴(y + ۱)^۲$ برای $y \in [-۲, ۲]$.

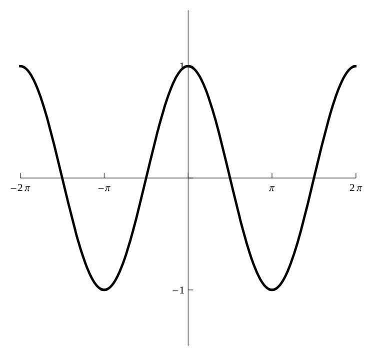
تعریف ۹.۵.۳. *توابع* $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ ، $\cot x$ ، $\sec x$ *و* $\csc x$ *توابع مثلثاتی هستند که با آنها آشنایی کامل دارید جهت یادآوری نمودار آنها را به صورت زیر بیان می‌کنیم*

الف)



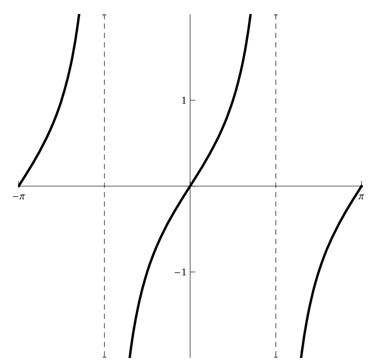
$$f(x) = \sin x,$$
$$D_f = \mathbb{R},$$
$$R_f = [-۱, ۱],$$
$$T = ۲\pi.$$

ب)



$$f(x) = \cos x,$$
$$D_f = \mathbb{R},$$
$$R_f = [-۱, ۱],$$
$$T = ۲\pi.$$

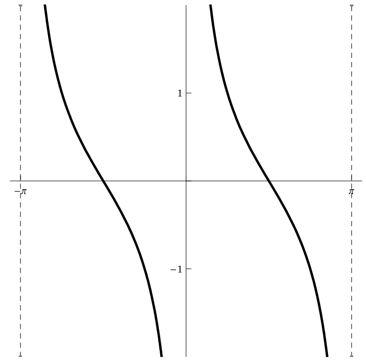
ج)



$$f(x) = \tan x,$$
$$D_f = \mathbb{R} - \{x | \cos x = ۰\}$$
$$= \mathbb{R} - \{(۲k + ۱)\frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\},$$
$$R_f = \mathbb{R},$$
$$T = \pi.$$

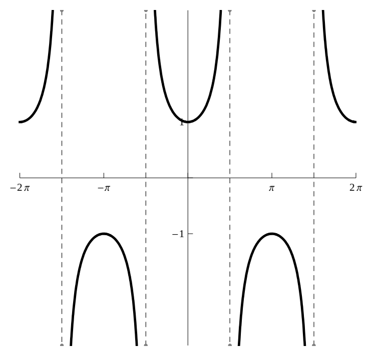
د)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cot x,\\
D_f &= \mathbb{R} - \{x|\sin x = ۰\}\\
&= \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\},\\
R_f &= \mathbb{R},\\
T &= \pi.
\end{aligned}
$$



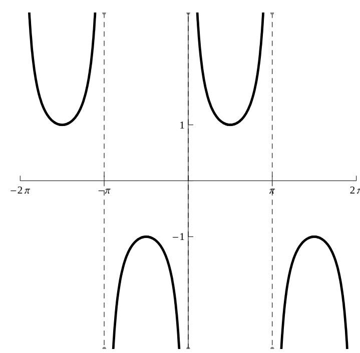
ه)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sec x\\
&= \frac{۱}{\cos x},\\
D_f &= \mathbb{R} - \{x|\cos x = ۰\}\\
&= \mathbb{R} - \left\{(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\right\},\\
R_f &= (-\infty, -۱] \cup [۱, \infty),\\
T &= ۲\pi.
\end{aligned}
$$



و)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \csc x\\
&= \frac{۱}{\sin x},\\
D_f &= \mathbb{R} - \{x|\sin x = ۰\}\\
&= \mathbb{R} - \{x|x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\},\\
R_f &= (-\infty, -۱] \cup [۱, \infty),\\
T &= ۲\pi.
\end{aligned}
$$



۶.۳ انتقال و تغییر مقیاس در توابع

در قسمت قبل با نمودار برخی توابع مهم آشنا شدیم. آنچه در این فصل مورد نظر ما می‌باشد این است که با معرفی تبدیلات معینی روی یك تابع و بکارگیری این تبدیلات بتوان از روی یك نمودار تابع مفروض، نمودار توابع معین وابسته به آن را بدست آوریم و بدین ترتیب میزان کار در رسم نمودار را کاهش دهیم.
به طور مثال تابع $y = f(x)$ مفروض است اگر تابع ثابت $g(x) = c$ راکه $c > ۰$ با تابع f جمع کنیم تابع $y = f(x) + c$ حاصل می‌شود که نمودار آن همان نمودار تابع $y = f(x)$ است که به فاصله c

واحد به سمت بالا انتقال داده شده است و یا اگر تابع $y = f(x-c)$ را در نظر بگیریم نمودار آن همان نمودار تابع $y = f(x)$ است که اندازه c واحد به سمت راست انتقال داده شده است. در این قسمت به معرفی انواع انتقالات و تبدیلات خواهیم پرداخت.

الف) انتقال‌های افقی منظور از یك انتقال افقی، منتقل کردن نمودار یك تابع به سمت چپ یا سمت راست می‌باشد که شامل موارد زیر است:
فرض کنید $c > ۰$ و نمودار تابع $y = f(x)$ داده شد باشد در این صورت

(i) نمودار $y = f(x-c)$ با انتقال نمودار $y = f(x)$ به اندازه c واحد به سمت راست حاصل می‌شود.

(ii) نمودار $y = f(x+c)$ با انتقال نمودار $y = f(x)$ به اندازه c واحد به سمت چپ حاصل می‌شود.

مثال ۱.۶.۳. *نمودار هر یك از توابع زیر را به کمك انتقال‌های افقی رسم کنید.*

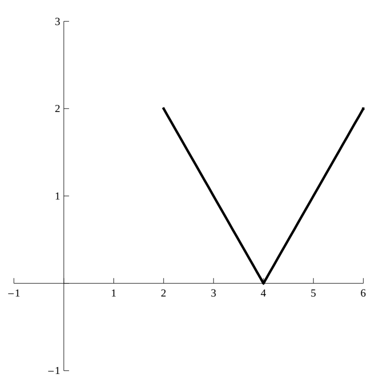
(i) $y = |x - ۴|$.

(ii) $y = (x + ۲)^۲$.

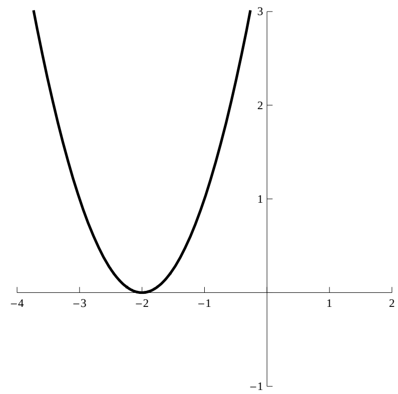
(iii) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{۲}\right)$.

حل.

(i) با توجه به نمودار تابع $y = |x|$ اگر این نمودار را به اندازه ۴ واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار $y = |x - ۴|$ حاصل می‌شود.



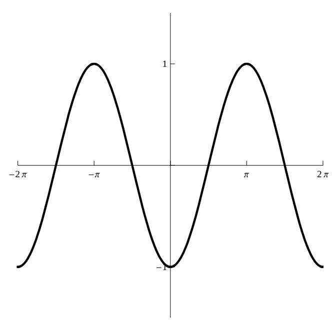
شکل ۱۰.۳: نمودار تابع $f(x) = |x - ۴|$.



شکل ۱۱.۳: نمودار تابع $f(x) = (x + ۲)^۲$.

(ii) نمودار تابع عبارت است از یك سهمی که در شکل ۱۱.۳ نشان داده شده است.

(iii) نمودار این تابع به صورت شکل ۱۲.۳ است.



شکل ۱۲.۳: نمودار تابع $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{۲}\right)$.

ب) انتقال‌های عمودی انتقال عمودی به معنی منتقل کردن نمودار یك تابع به سمت بالا یا پائین می‌باشد که شامل موارد زیر است فرض کنیم $c > ۰$ و نمودار $y = f(x)$ داده شده باشد در این صورت

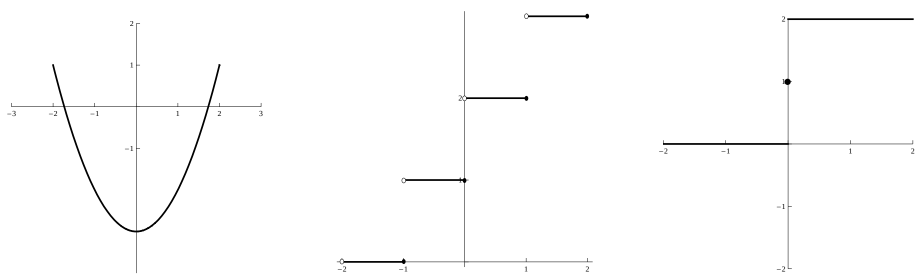
(i) نمودار $y = f(x) + c$ از انتقال به اندازه c واحد نمودار $y = f(x)$ به سمت بالا حاصل می‌شود

(ii) نمودار $y = f(x) - c$ از انتقال به اندازه c واحد نمودار $y = f(x)$ به سمت پائین حاصل می‌شود.

مثال ۲.۶.۳. *هر یک از توابع زیر را به کمک انتقالهای عمودی رسم کنید*

الف) $y = \operatorname{sgn} x + 1$. *ب)* $y = [x] + 2$. *پ)* $y = x^2 - 3$.

حل. شکل ۱۳.۳ را ملاحظه کنید.



(آ) نمودار تابع $y = \operatorname{sgn} x + 1$. (ب) نمودار تابع $y = [x] + 2$. (ج) نمودار تابع $y = x^2 - 3$.

شکل ۱۳.۳: نمودار توابع مثال ۲.۶.۳.

ج) انبساط و انقباض افقی فرض کنید $c > 1$ و نمودار $y = f(x)$ داده شده باشد در این صورت

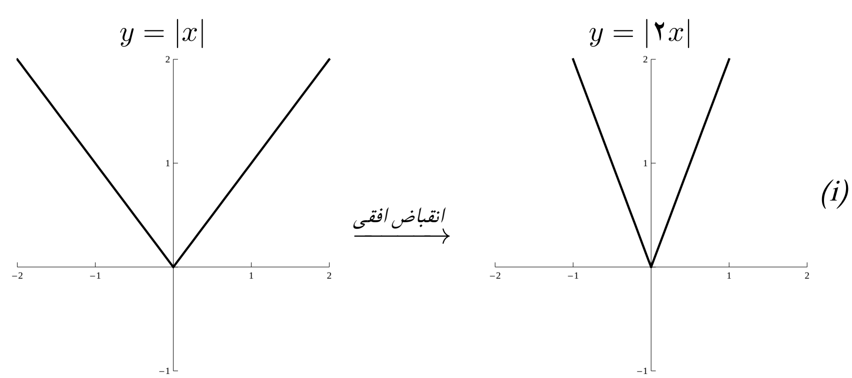
(i) نمودار $y = f(cx)$ از انقباض نمودار $y = f(x)$ توسط عامل c به طور افقی حاصل می‌شود.

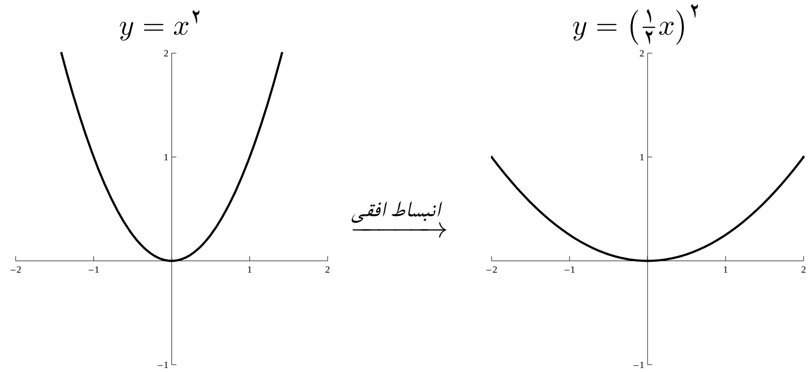
(ii) نمودار $y = f(\frac{1}{c}x)$ از انبساط نمودار $y = f(x)$ توسط عامل c به طور افقی حاصل می‌شود.

مثال ۳.۶.۳. *هر یک از توابع زیر را به کمک انبساط و انقباض افقی رسم کنید*

(i) $y = |2x|$.

(ii) $y = \frac{1}{4}x^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$.





(ii)

د) انبساط و انقباض عمودی فرض کنید $c > ۱$ و نمودار $y = f(x)$ داده شده باشد در این صورت

(i) نمودار $y = cf(x)$ از انبساط نمودار $y = f(x)$ توسط عامل c به طور عمودی حاصل می‌شود.

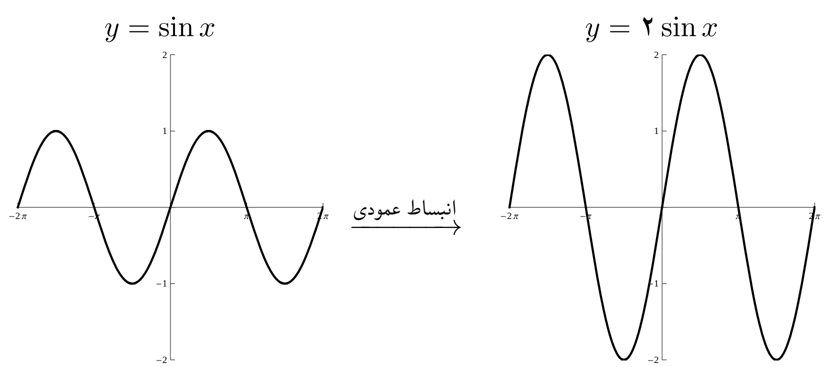
(ii) نمودار $y = \frac{۱}{c}f(x)$ از انقباض نمودار $y = f(x)$ توسط عامل c به طور عمودی حاصل می‌شود.

مثال ۴.۶.۳. *نمودار توابع زیر را رسم کنید.*

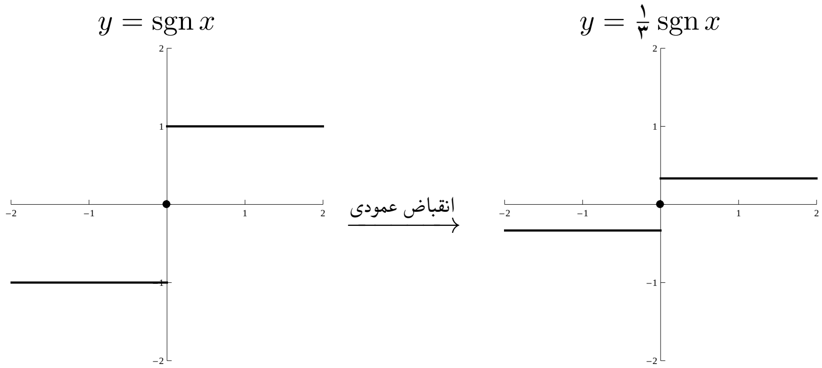
(i) $y = ۲\sin x$.

(ii) $y = \frac{۱}{۳}\operatorname{sgn} x$.

حل. نمودار هر یک به صورت زیراست



(i)



(ii)

ه) انعکاس فرض کنید نمودار $y = f(x)$ داده شده باشد در این صورت

(i) نمودار $y = -f(x)$ از انعکاس نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها حاصل می‌شود.

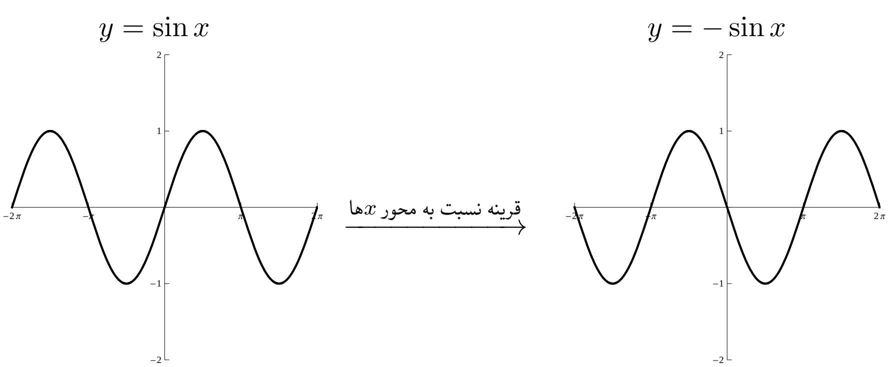
(ii) نمودار $y = f(-x)$ از انعکاس نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور y ها حاصل می‌شود.

مثال ۵.۶.۳. *نمودار توابع زیر را رسم کنید.*

(i) $y = -\sin x$.

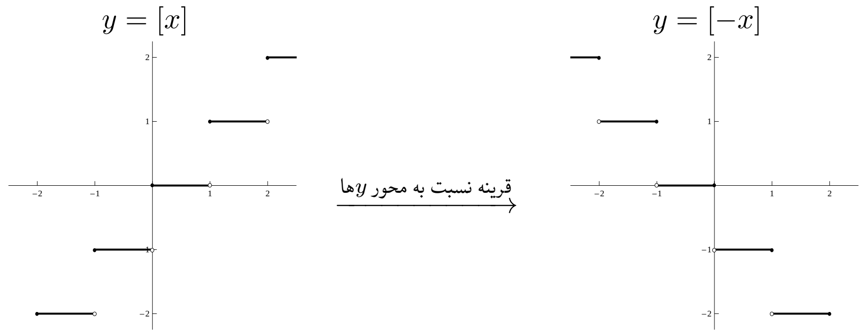
(ii) $y = [-x]$.

حل. با توجه به نمودار توابع سینوس و جزء صحیح داریم



(i)

(ii)



تذکر ۶.۶.۳. *گاهی ممکن است برای یك تابع هم زمان چند تبدیل صورت گرفته باشد. یعنی هم انبساط، هم انتقال و هم انعکاس انجام شده باشد در این موارد باید مرحله به مرحله از نمودار اصلی به نمودار مورد نظر رسید.*

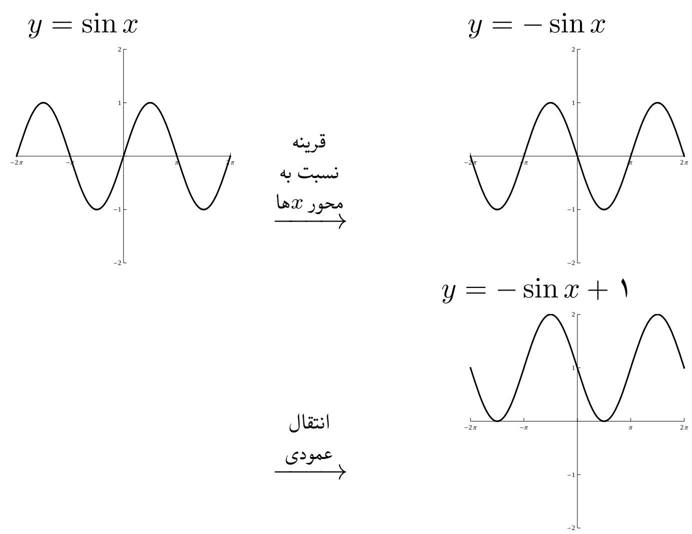
مثال ۷.۶.۳. *نمودار توابع زیر را رسم‌کنید.*

(i) $y = -\sin x + ۱$.

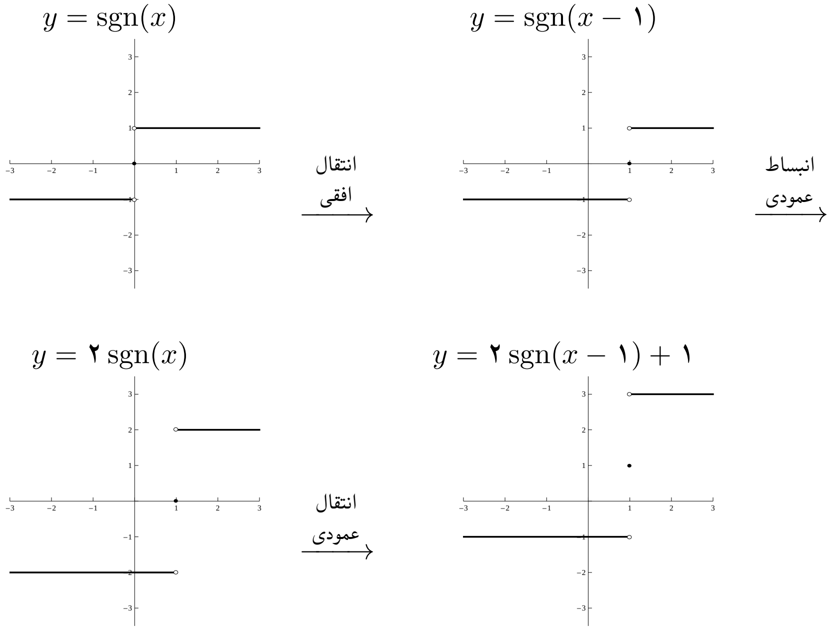
(ii) $y = ۲\,\mathrm{sgn}(x - ۱) + ۱$.

حل.

(i) ابتدا انعکاس تابع $y = \sin x$ را نسبت به محور x ها به دست می‌آوریم و سپس آنرا به اندازه یك واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



(ii) ابتدا انتقال افقی به اندازه یک واحد به سمت راست سپس انبساط عمودی به میزان دو برابر و سپس انتقال عمودی به بالا به اندازه یک واحد صورت می‌گیرد و نمودار حاصل چنین است.



۷.۳ مسایل نمونه حل شده

مساله ۱.۷.۳. *دامنه تعریف هر یک از توابع زیر را به دست آورید.*

(i) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

(ii) $f(x)=\sqrt{\cos(\sin x)}+\sin^{-1}(\frac{1+x^2}{2x})$.

حل.

(i) با توجه به تعریف رادیکال و کسر فوق باید داشته باشیم $|x|-x>0$ و یا $|x|>x$. می‌دانیم که اگر $x\geq 0$ آنگاه $|x|=x$ و لذا $|x|-x=0$ که خلاف فرض است بنابراین باید داشته باشیم $x<0$ که در این صورت خواهیم داشت $|x|=-x>0$ و یا $|x|>x$. بنابراین $D_f=\{x\in\mathbb{R}|x<0\}$.

(ii) با توجه به تعریف رادیکال و دامنه تابع معکوس سینوس باید داشته باشیم
$$\cos(\sin x) \geq 0 \text{ و } \left|\frac{1+x^2}{2x}\right| \leq 1$$

می‌دانیم به ازای هر مقدار حقیقی x نامساوی $\cos(\sin x) \geq 0$ برقرار است (چرا؟) و نیز نامساوی $\frac{1+x^2}{2x} \geq 1$ نیز به ازای مقادیر $|x|=1$ برقرار می‌باشد. بنابراین
$$D_f = \{x \in \mathbb{R}| \quad |x|=1\} = \{-1, 1\}.$$

مساله ۲.۷.۳. *فرض کنید $f(x+\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ در این صورت اولاً تابع $f(x)$ و ثانیاً دامنه تعریف و برد آن را به دست آورید.*

حل. فرض کنیم $t = x + \frac{1}{x}$ در این صورت $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ پس $t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ لذا ضابطه تابع f به صورت $f(t) = t^2 - 2$ حاصل می‌شود. واضح است که $D_f = \mathbb{R}$ و چون $t^2 \geq 0$ پس $R_f = [-2, \infty)$.

مساله ۳.۷.۳. *فرض کنید $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x - 2$ در این صورت کلیه جواب‌های معادله زیر را به دست آورید.*
$$|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)|.$$

حل. داریم
$$|f(x)+g(x)| = |x+1+x-2| = |2x-1|.$$

بنابراین تساوی فوق به صورت $|2x-1| = |x+1| + |x+2|$ تبدیل می‌شود لذا باید نامساوی $|x+1| + |x+2| \geq 0$ را حل نماییم. با تعیین علامت عبارت فوق خواهیم داشت $x \leq -1$ یا $x \geq 2$. بنابراین
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1 \text{ یا } x \geq 2\}.$$

مساله ۴.۷.۳. *مقادیری از x را بیابید که معادله زیر برقرار باشد.*
$$\tan^{-1}\sqrt{x(x+1)} + \sin^{-1}\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}.$$

حل. با توجه به دامنه تعریف توابع معکوس سینوس و تانژانت و نیز تعریف رادیکال داریم
$$x^2 + x \geq 0, \quad 0 \leq x^2 + x + 1 \leq 1$$

پس باید داشته باشیم $x^2 + x = 0$ و یا $x(x+1) = 0$ که جواب های $x = 0$ و $x = -1$ حاصل می‌شود.

مساله ۵.۷.۳. *دامنه تعریف تابع* $f(x) = \frac{۱-۳x^۲+\mathrm{sgn}(|\sqrt{۲-۵x}|)}{\sqrt{۳-۸x}}$ *را به دست آورید.*

حل. با توجه به تعریف رادیکال باید داشته باشیم $۲ - ۵x \geq ۰$، $۳ - ۸x > ۰$ بنابراین $x \leq \frac{۲}{۵}$ و $x < \frac{۳}{۸}$. لذا اشتراک این دو عبارت است از $x < \frac{۳}{۸}$ یعنی $D_f = (-\infty, \frac{۳}{۸})$.

مساله ۶.۷.۳. *توابع* $f(x) = \frac{x+|x|}{۲}$ و

$$g(x) = \begin{cases} x & x < ۰ \\ x^۲ & x \geq ۰ \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. توابع $f \circ g$ *و* $g \circ f$ *را به دست آورید.*

حل. فرض کنیم $x < ۰$ در این صورت $f(x) = \frac{x-x}{۲} = ۰$ و $g(x) = x$ لذا

$$f \circ g(x) = f(x) = ۰.$$

و نیز $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(۰)$. اگر $x \geq ۰$ آنگاه $f(x) = \frac{x+x}{۲} = x$ و $g(x) = x^۲$ لذا

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^۲) = x^۲, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x) = x^۲.$$

بنابراین

$$f \circ g(x) = g \circ f(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ x^۲ & x \geq ۰ \end{cases}$$

مساله ۷.۷.۳. *فرض کنید* $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}$ *و* $g(x) = \frac{۱}{x^۲-۱}$. *در این صورت دامنه‌ی تعریف توابع* f *و* g *و نیز ضابطه، دامنه تعریف و برد تابع* $f \circ g$ *را به دست آورید.*

حل. داریم $D_f = \mathbb{R}$ زیرا $x^۲ + ۱ > ۰$ و نیز $D_g = \mathbb{R} - \{۱, -۱\}$. بنابراین طبق تعریف

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{-۱, ۱\} | \ \frac{۱}{x^۲ - ۱} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} - \{-۱, ۱\}. \end{aligned}$$

همچنین ضابطه $f \circ g$ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\frac{۱}{x^۲ - ۱}) &= \frac{۱}{\sqrt{\left(\frac{۱}{x^۲-۱}\right)^۲ + ۱}} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱+(x^۲-۱)^۲}{(x^۲-۱)^۲}}} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱+x^۴-۲x^۲+۱}{(x^۲-۱)^۲}}} \\ &= \frac{|x^۲ - ۱|}{\sqrt{x^۴ - ۲x^۲ + ۲}}. \end{aligned}$$

مساله ۸.۷.۳. *نشان دهید که تابع $f(x) = \sqrt{۱ + x + x^۲} - \sqrt{۱ - x + x^۲}$ یک تابع فرد است.*

حل. داریم

$$f(-x) = \sqrt{۱ - x + x^۲} - \sqrt{۱ + x + x^۲} = -f(x).$$

مساله ۹.۷.۳. *دوره تناوب هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.*

الف) $f(x) = \sin^۲ ۳x$ *ج)* $f(x) = \sin x - \cos x$

ب) $f(x) = \tan \frac{\pi x}{۲}$ *د)* $f(x) = ۴\sin(۳x + \frac{\pi}{۴})$

حل.

الف) اگر T دوره تناوب f باشد آنگاه بنابه تعریف خواهیم داشت

$$f(x+T) = \sin^۲ ۳(x+T) = \sin^۲ ۳x = f(x).$$

با توجه به تعریف فوق داریم

$$\sin^۲(۳x+T) = \frac{۱ - \cos(۶x + ۶T)}{۲} = \sin^۲ ۳x = \frac{۱ - \cos ۶x}{۲}$$

پس باید داشته باشیم $\cos(۶x + ۶T) = \cos ۶x$ که در این حالت $۶T = ۲k\pi$ و یا $T = \frac{k\pi}{۳}$ و چون T کوچکترین عدد مثبت با خاصیت فوق می‌باشد لذا $T = \frac{\pi}{۳}$.

ب) چون دوره تناوب تابع $\tan$ برابر π است لذا دوره تناوب تابع $f(x) = \tan \frac{\pi x}{۲}$ برابر است با

$$T = \frac{\pi}{\frac{\pi}{۲}} = ۲.$$

ج) چون تفاضل دو تابع متناوب با دوره تناوب T نیز یك تابع متناوب با دوره تناوب T است لذا دوره تناوب تابع f برابر است با $T = ۲\pi$.

د) دوره تناوب تابع برابر است با $T = \frac{۲\pi}{۳}$ زیرا

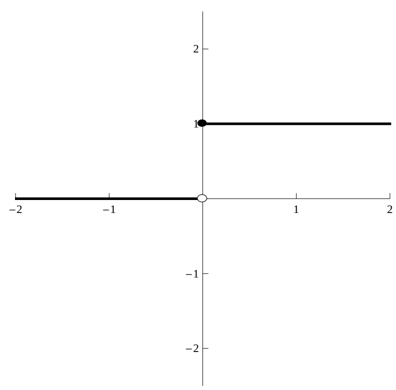
$$f(x+\frac{۲\pi}{۳}) = ۴\sin(۳(x+\frac{۲\pi}{۳})+\frac{\pi}{۴}) = ۴\sin(۳x+۲\pi+\frac{\pi}{۴}) = ۴\sin(۳x+\frac{\pi}{۴}).$$

مساله ۱۰.۷.۳. *تابع پله‌ای واحد را به u نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$u(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$$

نمودار آن را رسم کرده و سپس تابع $u(x) - u(x-۱)$ را به صورت قطعه‌ای تعریف و نمودار آن را نیز رسم کنید.

حل. با توجه به ضابطه تابع u نمودار این تابع به صورت زیر است. با تعیین علامت x و $-x$ داریم لذا



شکل ۱۴.۳: نمودار تابع $u(x)$.

می‌توان $u(x)$ و $u(x-۱)$ را در مقادیر مختلف x به صورت زیر به دست آورد.

$$u(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ & x = ۰ \\ ۱ & ۰ < x < ۱ \\ ۱ & x = ۱ \\ ۱ & x > ۱ \end{cases}$$

و

$$u(x-1)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 0 & 0<x<1 \\ 1 & x=1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

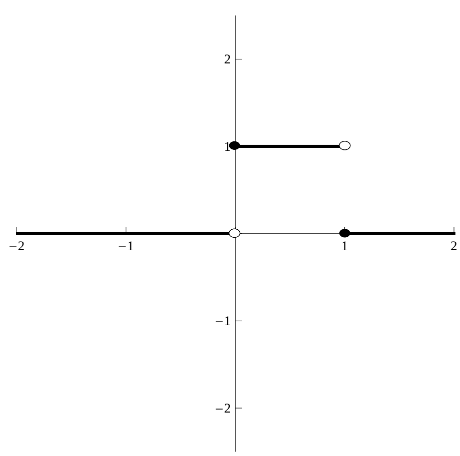
بنابراین

$$u(x)-u(x-1)=\begin{cases} 0-0 & x<0 \\ 1-0 & x=0 \\ 1-0 & 0<x<1 \\ 1-1 & x=1 \\ 1-1 & x>1 \end{cases}$$

و یا به اختصار

$$u(x)-u(x-1)=\begin{cases} 0 & x<0 \ \text{یا}\ x\geq 1 \\ 1 & 0\leq x<1 \end{cases}$$

لذا نمودار این تابع به صورت زیر است



شکل ۱۵.۳: نمودار تابع $u(x)-u(x-1)$.

مساله ۱۱.۷.۳. *یك به یك بودن و پوشا بودن تابع* $f:\mathbb{R}\longrightarrow[0,\infty)$ *را که با ضابطه* $f(x)=\sqrt{x^2-|x|}$ *تعریف شده است را بررسی‌کنید.*

حل. ابتدا یك به یك بودن آن را تحقیق می‌کنیم. فرض کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ در این صورت $\sqrt{x_1^2-|x_1|}=\sqrt{x_2^2-|x_2|}$ و یا $x_1^2-|x_1|=x_2^2-|x_2|$ و یا $x_1^2-x_2^2=|x_1|-|x_2|$ و یا $(x_1-x_2)(x_1+x_2)=|x_1|-|x_2|$. به سادگی می‌توان نشان داد که از رابطه اخیر همواره تساوی $x_1=x_2$ نتیجه نمی‌شود زیرا به طور مثال اگر $x_1=1$ و $x_2=-1$ اختیار کنیم تساوی فوق برقرار است در حالیکه $x_1\neq x_2$. به عبارت دیگر $f(1)=f(-1)=0$ ولی $1\neq-1$ پس تابع f یك به یك نیست. بررسی پوشا بودن با توجه به این که $R_f=[0,\infty)$ بدیهی است بنابراین f یك به یك نیست ولی پوشاست.

مساله ۱۲.۷.۳. *هر یك از توابع زیر را به طور تقریبی رسم کنید.*

(i) $f(x)=x|x|$

(ii) $f(x)=[x^2]\quad -2\leq x\leq 2$

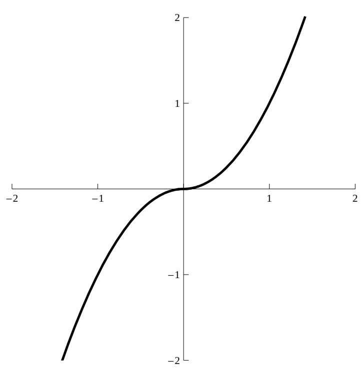
(iii) $f(x)=x\sin x$

(iv) $f(x)=[\frac{x}{2}]\quad -4\leq x\leq 4$

(v) $f(x)=\operatorname{sgn}(x|x|)$

حل.

(i) توجه داریم که اگر $x\geq 0$ آنگاه $|x|=x$ لذا $f(x)=x^2$ و چنانچه $x<0$ آنگاه $|x|=-x$ پس $f(x)=-x^2$ بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر حاصل می‌شود. (شکل ۱۶.۳ را ببینید)



شکل ۱۶.۳: نمودار تابع $f(x)=x|x|$.

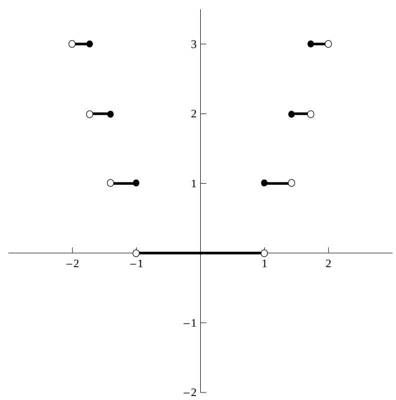
(ii) چون با تبدیل x به $-x$ تغییری در ضابطه تابع حاصل نمی‌شود لذا نسبت به محور y ها تقارن دارد. پس کافی است نمودار تابع در فاصله $0 \le x \le 2$ را رسم نماییم. با توجه به اینکه x^2 باید بین اعداد صحیح متوالی قرار گیرد لذا فاصله‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

$$0 \le x < 1 \quad 0 \le x^2 < 1 \quad y = [x^2] = 0$$

$$1 \le x < \sqrt{2} \quad 1 \le x^2 < 2 \quad y = [x^2] = 1$$

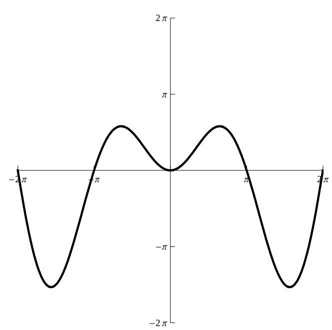
$$\sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \quad 2 \le x^2 < 3 \quad y = [x^2] = 2$$

$$\sqrt{2} \le x < \sqrt{4} \quad 3 \le x^2 < 4 \quad y = [x^2] = 3$$



شکل ۱۷.۳: نمودار تابع $f(x) = [x^2]$.

(iii) با توجه به اینکه $-1 \le \sin x \le 1$ لذا $-x \le x\sin x \le x$. وقتی که $x \ge 0$ همچنین $x\sin x = 0$ نتیجه می‌دهد $x = 0$ یا $x = k\pi$، $(k \in \mathbb{Z})$. چون تابع f زوج است پس داریم



شکل ۱۸.۳: نمودار تابع $f(x) = x\sin x$.

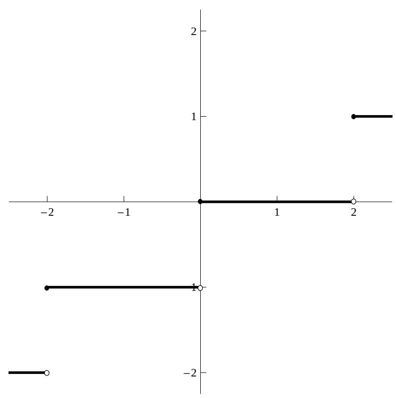
(iv) چون $\frac{x}{۲}$ باید بین اعداد صحیح متوالی قرار گیرد لذا فاصله‌های زیر را در نظر می‌گیریم

$$-۴ \leq x < -۲ \quad -۲ \leq \frac{x}{۲} < -۱ \quad [\frac{x}{۲}] = -۲ \quad y = -۲$$

$$-۲ \leq x < ۰ \quad -۱ \leq \frac{x}{۲} < ۰ \quad [\frac{x}{۲}] = -۱ \quad y = -۱$$

$$۰ \leq x < ۲ \quad ۰ \leq \frac{x}{۲} < ۱ \quad [\frac{x}{۲}] = ۰ \quad y = ۰$$

$$۲ \leq x < ۴ \quad ۱ \leq \frac{x}{۲} < ۲ \quad [\frac{x}{۲}] = ۱ \quad y = ۱$$



شکل ۱۹.۳: نمودار تابع $f(x) = [\frac{x}{۲}]$.

(v) با توجه به این که

$$x|x| = \begin{cases} x^۲ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$$

لذا

$$\operatorname{sgn}(x|x|) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

پس نمودار آن همان نمودار تابع علامتی یعنی $y = \operatorname{sgn} x$ می‌باشد.

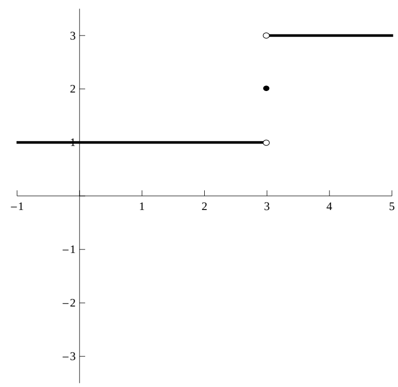
مساله ۱۳.۷.۳. *به کمک انتقالات هر یک از توابع زیر را رسم کنید*

(i) $y = \mathrm{sgn}(x - ۳) + ۲$ (iii) $y = x^۲ - x$

(ii) $y = ۳\sin(x - \pi)$ (iv) $y = ۳|x| - ۱$

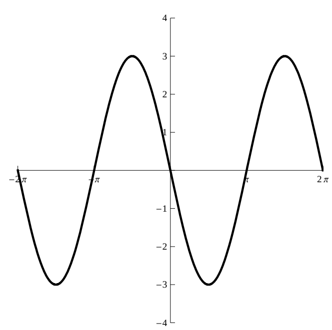
حل.

(i) با سه واحد انتقالی افقی به راست و دو واحد انتقال عمودی به بالا داریم



شکل ۲۰.۳: نمودار تابع $y = \mathrm{sgn}(x - ۳) + ۲$.

(ii) π واحد انتقالی افقی به راست و انبساط عمودی داریم

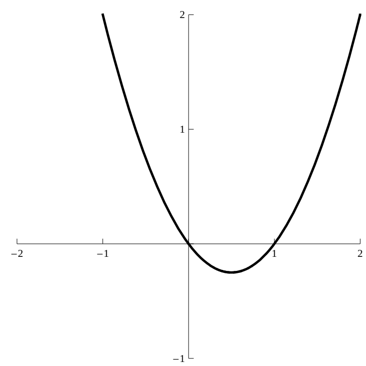


شکل ۲۱.۳: نمودار تابع $y = ۳\sin(x - \pi)$.

(iii) داریم

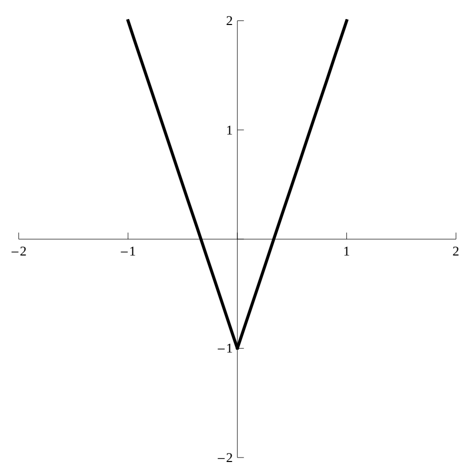
$$y = x^{۲} - x = (x - \frac{۱}{۲})^{۲} - \frac{۱}{۴}$$

یک سهمی به مرکز $(\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۴})$ و به طرف بالاست.



شکل ۲۲.۳: نمودار تابع $y = x^{۲} - x$.

(iv) با انتقال عمودی یک واحد به سمت پایین و انبساط داریم



شکل ۲۳.۳: نمودار تابع $y = ۳|x| - ۱$.

۸.۳ مسایل

۱. *دامنه تعریف هر یک از توابع زیر را به دست آورید.*

۱) $$f(x) = \frac{2}{3x-5}$$

۲) $$f(x) = \sqrt{x^2-4}$$

۳) $$f(x) = x + |x|$$

۴) $$f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$$

۵) $$f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

۶) $$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

۷) $$f(x) = \sqrt{[x]-|x|}$$

۸) $$f(x) = \frac{x-|x|}{\sqrt{[x]-1}}$$

۹) $$f(x) = |[x-2]+1|$$

۱۰) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$$

۱۱) $$f(x) = \sqrt{[x]-[x^2]}$$

۱۲) $$f(x) = \sqrt{\sin x}$$

۱۳) $$f(x) = \tan^{-1}\sqrt{x}$$

۱۴) $$f(x) = \sqrt{\tan x - 1}$$

۱۵) $$f(x) = \operatorname{sgn}(x-[x])$$

۱۶) $$f(x) = \frac{x}{\operatorname{sgn} x - 1}$$

۱۷) $$f(x) = \frac{1}{2-\cos 3x}$$

۱۸) $$f(x) = \sqrt{\sin^{-1}(1-x)}$$

۱۹) $$f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4+2\sin x}\right)$$

۲۰) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + \cos^{-1}\left(\frac{x-2}{3}\right)$$

۲. *برد هر یک از توابع زیر را به دست آورید.*

۱)
$$f(x)=|\cos x|$$

۲)
$$f(x)=[x]+[-x]$$

۳)
$$f(x)=[|x|]$$

۴)
$$f(x)=\sqrt{[|\sin x|]}$$

۵)
$$f(x)=\frac{x}{\operatorname{sgn} x}$$

۶)
$$f(x)=\tan^{-۱}\sqrt{x}$$

۷)
$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{|x|-x}}$$

۸)
$$f(x)=(-۱)^{[x]}$$

۹)
$$f(x)=\operatorname{sgn}(x^{۲}+x+۱)$$

۱۰)
$$f(x)=[۲x]+[-۲x]+۱$$

۱۱)
$$f(x)=۴+\cos^{-۱}x$$

۱۲)
$$f(x)=x^{۲}+\sin^{-۱}x$$

۳. برای هر جفت از توابع f و g داده شده زیر دامنه تعریف و ضابطه توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$، $\frac{f}{g}$، $\frac{g}{f}$، $f\circ g$ و $g\circ f$ را به دست آورید.

۱)
$$f(x)=x,\quad g(x)=\sqrt{x-۱}$$

۲)
$$f(x)=\frac{۱}{x-۲},\quad g(x)=\frac{۱}{x-۱}$$

۳)
$$f(x)=\sqrt{x},\quad g(x)=\sqrt{x+۱}$$

۴)
$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}},\quad g(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۱}$$

۵)
$$f(x)=\sin x,\quad g(x)=\frac{۱}{x}$$

۶)
$$f(x)=\tan^{-۱}x,\quad g(x)=\cos x$$

۷)
$$f(x)=\frac{x+|x|}{۲},\quad g(x)=[x]$$

۴. توابع $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=۳x-۵$ مفروضند. $f^{-۱}$، $(g\circ f)^{-۱}$ و $g^{-۱}$ را به دست

آورید و نشان دهید
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$$

۵. اگر $f(x) = \frac{1}{1+x}$ به ازای چه مقادیری مانند c عضوی مانند x وجود دارد به طوری که $f(x) = f(cx)$.

۶. اگر به ازای همه مقادیر x و y داشته باشیم $f(x+y) = f(x) + f(y)$ و $f(1) \neq 0$ آنگاه ثابت کنید که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $f(n) = nf(1)$ و $f(nx) = nf(x)$

۷. فرض کنید n عددی فرد و $x^2 f(x^n) + \frac{1}{x^2} f(-x^n) = 1$ که در آن $x \neq 0, 1, -1$ در این صورت $f(x)$ را به دست آورید.

۸. توابعی مثال بزنید که برای تمام x و y های حقیقی در شرایط داده شده زیر صدق کنند.

الف)
$$f(2x) = 2f(x)$$

ج)
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

ب)
$$f(2x) = \frac{2f(x)}{1 - f^2(x)}$$

د)
$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

۹. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ و $g(x) = x^2$. به ازای چه مقادیری از x روابط زیر برقرار می‌باشند.

الف)
$$f(x) \leq x$$

ج)
$$g(x) \leq x$$

ب)
$$f(x) \leq g(x)$$

د)
$$g(g(x)) = g(x)$$

همچنین $g(f(x)) - f(x)$ را به دست آورید.

۱۰. فرض کنید f و g دو تابع باشند که به صورت زیر تعریف شده باشند
$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & |x| \leq 2 \\ 2 & |x| > 2 \end{cases}$$

تابع $h(x) = f(g(x))$ را به دست آورده و ضابطه آن را بنویسید. یک به یک بودن هر یک از توابع زیر را تحقیق کنید.

۱۱. اگر $f(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}})=x^{۶}+\frac{۱}{x^{۶}}$ آنگاه $f(x)$ را محاسبه کنید.

۱) $f(x)=\sqrt{۵x^{۳}-۲x}$

۲) $f(x)=x\operatorname{sgn}x$

۳) $f(x)=[\frac{x^{۲}}{۲x^{۲}+۳}]$

۴) $f(x)=(x-[x])^{۲}$

۵) $f(x)=\sqrt{x-[x]}$

۶) $f(x)=\frac{۱-x}{۱+x}$

۷) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad f(x)=\sqrt{x-|x|}$

۸) $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Z}-\{۰\},\quad g(x)=\frac{۱}{[x-۱]}$

۹) $h:\mathbb{R}\longrightarrow[۳,۴],\quad h(x)=۲x-[۲x]+۳$

۱۰) $t:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Z},\quad t(x)=[x]$

۱۱) $u:\mathbb{Z}\longrightarrow\{۰\},\quad u(x)=x-[x]$

۱۲. فرض کنید f و g دو تابع فرد باشند در این صورت نشان دهید.

الف) $f+g$ و $f-g$ توابع فرد هستند.

ب) $f.g$ و $\frac{f}{g}$ توابع زوج هستند.

۱۳. نشان دهید که هر تابع دلخواه را می‌توان به صورت مجموع یك تابع زوج و یك تابع فرد نوشت.

۱۴. تحقیق کنید از توابع زیر کدامیك زوج و کدامیك فرد می‌باشند.

۱) $f(x)=x^{۲}+\tan x$

۲) $f(x)=x\sin x$

۳) $f(x)=\cos ۳x$

۴) $f(x)=\frac{۲x\sin\sqrt{x}}{۱+x^{۲}+x\sqrt{x}}$

۵) $f(x) = \sqrt{۱+x} - \sqrt{۱-x}$

۶) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

۱۵. تحقیق کنید که از توابع زیر کدامیک متناوب می‌باشند و سپس دوره تناوب آنها را به دست آورید.

۱) $y = \left[\frac{x}{۴}\right] + \left[\frac{x}{۶}\right]$

۲) $y = \sin ۲x$

۳) $y = \tan ۲x - \operatorname{cotan} ۲x$

۴) $y = (-۱)^{[x]}$

۵) $y = (-۱)^{[x]} \sin \pi x$

۶) $y = \cos ۳x - ۲\cos x + ۱$

۷) $y = \cos(\sin x)$

۸) $(n \in \mathbb{N}) \quad y = \cos\frac{\pi x}{n} + x - n[\frac{x}{n}]$

۱۶. روابط زیر را ثابت کنید.

الف) $[x+y] \geq [x] + [y]$

ب) $[۲x] = [x] + [x + \frac{۱}{۲}]$

ج)

$$(n \in \mathbb{N}) \quad [nx] = [x] + [x + \frac{n-۱}{n}] + [x + \frac{n-۲}{n}] + ... + [x + \frac{۱}{n}]$$

د)

$$(n \in \mathbb{N}) \quad \left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x]$$

۱۷. آیا تابع $f(x) = x + [x]$ یک به یک است؟ وارون آن را در صورت وجود به دست آورید.

۱۸. هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = |۱ - x^۲| - ۲$

۲) $f(x) = [\sqrt{x}]$

۳)
$$f(x) = [x]^۲ \quad ۰ \le x \le ۳$$

۴)
$$f(x) = \frac{۱ + \operatorname{sgn}(x^۲ - ۴)}{۳}$$

۵)
$$f(x) = ۳ - [۳x]$$

۶)
$$f(x) = \operatorname{sgn} x^۲ - \operatorname{sgn} x$$

۷)
$$f(x) = \max\{\sin x, \cos x\} \quad -۲\pi \le x \le ۲\pi$$

۸)
$$f(x) = (x^۲+۱)[x] \quad -۲ \le x \le ۲$$

۹)
$$f(x) = (x^۲ + ۱)[x] + \operatorname{sgn}(x + ۱)$$

۱۰)
$$f(x) = [x^۲] \quad -۲ \le x \le ۲$$

۱۱)
$$f(x) = \begin{cases} ۲ - x^۲ & |x| \le ۲ \\ ۲ & |x| > ۲ \end{cases}$$

۱۲)
$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

۱۳)
$$f(x) = |x| + \operatorname{sgn} x + [x] \quad -۲ \le x \le ۲$$

۱۴)
$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ ۰ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

۱۵)
$$f(x) = \sin \frac{۱}{x^۲}$$

۱۶)
$$f(x) = x^۳ \sin \frac{۱}{x}$$

۱۷)
$$f(x) = x^۲ \cos \frac{۱}{x^۲}$$

۱۸)
$$f(x) = |x| \sin \frac{۱}{|x|}$$

فصل ۴

حد

مفهوم حد یکی از مفاهیم بسیار مهم ریاضی است و به جرأت می‌توان گفت حد یکی از اساسی‌ترین و قدیمی‌ترین مفاهیم ریاضی است که شالوده و اساس بسیاری از قسمتهای دیگر ریاضی مانند پیوستگی، مشتق پذیری، انتگرال‌گیری، دنباله‌ها و سری‌ها و سری‌ها می‌باشد. و سایر شاخه‌های علوم تجربی و آمار و رشته‌های مهندسی، فیزیك، شیمی، علوم پزشکی و.... و به طور کلی هر جا که ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرد حد بیشترین نقش ممکن را دارا می‌باشد. در واقع می‌توان حد را به یك ماشین تعبیر کرد که براساس رفتار و کردار یك تابع در اطراف یك نقطه می‌تواند رفتار مطلوب آن تابع در آن نقطه را تعین نمایید و یا به تعبیری دیگر حد یکی از وسایل و ابزار بسیار مطمئن ریاضی است که براساس دانستن رفتار یك تابع در یك مجموعه بتوان رفتار آن تابع را در نقاط نزدیك به آن مجموعه تعیین نمود. ما در این فصل ضمن بیان مفهوم دقیق حد و آوردن مثالهای متنوع از آن به بررسی این نکته خواهیم پرداخت که حد صرفا یك خاصیت موضعی است که به رفتار تابع در یك نقطه بستگی ندارد و نشان خواهیم داد که حد خواص جبری توابع و نامساوی‌ها را حفظ می‌نماید. سپس به بررسی مفاهیم حد چپ، حد راست تابع در یك نقطه و رابطه آنها با وجود حد در آن نقطه خواهیم پرداخت و سرانجام در بخش ۳.۴ مفاهیم حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت را بیان و خواص آنها و رابطه آنها را با حد راست و چپ بیان خواهیم کرد.

۱.۴ مفهوم و تعریف حد

دانشجویان در دوران دبیرستان کمابیش با مفهوم حد آشنا شده‌اند در اینجا ابتدا به توضیح مفهوم حد پرداخته و سپس مفهوم دقیق آن را بیان می‌نماییم.

وقتی می‌گوییم حد تابع f برابر b است وقتی که متغیر x به نقطه x_0 میل کند، منظور این است که هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به b نزدیك نماییم در صورتی که x به اندازه کافی به x_0 نزدیك شده باشد. در اینجا صحبت از نزدیکی نقاط به میان می‌آید در واقع دو نقطه a و b بر محور اعداد

حقیقی به‌هم نزدیک هستند هرگاه فاصله بین آنها یعنی $|a-b|$ کوچك باشد. حال اگر b ثابت و a تغییر کند معنی اینکه a به b نزدیك باشد یعنی b در یك همسایگی از a با شعاع کوچك قرار گرفته باشد(برای تعریف همسایگی به ۲۰.۴.۱ مراجعه نمایید). امّا دو عبارت «هر اندازه که بخواهیم $f(x)$ را به b نزدیك نماییم» و «x به اندازه کافی به $x_\circ$ نزدیك شده باشد» به چه معنی است. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه نمایید. تابع

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\neq \circ \text{ اگر } \\ ۵ & x=\circ \text{ اگر } \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که حد تابع f برابر «۱» است وقتی که x به ۰ میل کند. با وجود آن که مقدار تابع در نقطه ۰ برابر ۵ تعریف شده است. برای توضیح این ادعا، بنابه آنچه در بالا ذکر شد اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ را به «۱» به اندازه $\frac{۱}{۱\circ\circ}$ نزدیك کنیم، کافی است x به ۰ به اندازه $\frac{۱}{\sqrt{۱\circ\circ}}$ نزدیك شده باشد چون در این صورت

$$|x-\circ|=|x|<\frac{۱}{\sqrt{۱\circ\circ}}\Longrightarrow |x^{۲}|=|x|^{۲}<\frac{۱}{۱\circ\circ}$$

پس

$$\text{اگر } |x-\circ|<\frac{۱}{\sqrt{۱\circ\circ}} \text{ آنگاه } |x^{۲}+۱-۱|<\frac{۱}{۱\circ\circ}$$

حال آنکه اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ را به «۱» به اندازه $\frac{۱}{۱\circ\circ\circ}$ نزدیك نماییم برای اینکه این منظور ما برآورده شود کافی است x به ۰ به اندازه $\frac{۱}{\sqrt{۱\circ\circ\circ}}$ نزدیك شده باشد. به طور کلی اگر بخواهیم مقدار تابع $f(x)$ به «۱» به اندازه $\epsilon>\circ$ دلخواه نزدیك باشد برای این منظور کافی است x به ۰ به اندازه عدد مثبت $\frac{۱}{\sqrt{\epsilon}}$ نزدیك شده باشد.

اکنون در زیر به معنی دقیق حد می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۴ (حد). *فرض کنید تابع f در یك همسایگی محذوف نقطه $x_\circ$ تعریف شده باشد گوییم حد تابع f وقتی که x به $x_\circ$ میل کند برابر b است(یا تابع f در نقطه $x_\circ$ دارای حد b است) و آن را با نمادهای «$\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=b$» یا «اگر $x\to x_\circ$ آنگاه $f(x)\to b$» نمایش می‌دهیم، هرگاه برای هر $\epsilon>\circ$(خوانده می‌شود اپسیلُن مثبت) عدد $\delta>\circ$(خوانده می‌شود دلتای مثبت) موجود باشد که برای هر $x\in D_f$*

$$\circ<|x-x_\circ|<\delta\Rightarrow |f(x)-b|<\epsilon.$$

توجه نمایید که در تعریف فوق در واقع δ به تابع f، مقدار ϵ و مقدار $x_\circ$ وابسته است و در یك مبحث که تابع f مفروض است مقدار δ به مقدار ϵ و موقعیت $x_\circ$ وابسته است یعنی حتی با ϵ ثابت، اگر نقطه $x_\circ$ تغییر کند و یا با $x_\circ$ ثابت اگر ϵ تغییر کند آنگاه δ تغییر خواهد کرد. همچنین دقت نمایید صفت مثبت بودن جز خواص ذاتی ϵ و δ است یعنی همواره ϵ و δ مقادیر مثبت هستند زیرا که آنها در

واقع شعاع‌های همسایگی‌هایی هستند. در حقیقت تعریف حد به زبان همسایگی را به صورت زیر می‌توان بیان کرد: یادآوری می‌کنیم که $0 < |x - x_0| < \delta$ بدین معنی است که x به همسایگی محذوف $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ از x_0 تعلق دارد که یك همسایگی محذوف x_0 به شعاع δ است (تعریف ۲۱.۴.۱ را ببینید) و $|f(x) - b| < \epsilon$ یعنی $f(x)$ به همسایگی $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ از b تعلق دارد.

پس $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ به این معنی ست که برای هر همسایگی از b به شعاع ϵ مانند $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ همسایگی محذوف $D = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ به شعاع δ موجود باشد به قسمی که برای هر x

$$(x \in D_f \cap D \Rightarrow f(x) \in (b - \epsilon, b + \epsilon))$$

قبل از آنکه به بیان چند مثال بپردازیم، ابتدا نشان می‌دهیم که حد در صورت وجود منحصر به فرد است.

قضیه ۲.۱.۴. *حد یك تابع در یك نقطه در صورت وجود منحصر به فرد است.*

اثبات. فرض کنید $\lim_{x \to x_0} f(x) = b_1$ و $\lim_{x \to x_0} f(x) = b_2$ که $b_1 \neq b_2$ (فرض خلف). چون $b_1 \neq b_2$ پس $|b_1 - b_2| > 0$ در نظر می‌گیریم $\epsilon = \frac{|b_1 - b_2|}{4} > 0$ در این صورت، از اینکه $\lim_{x \to x_0} f(x) = b_1$ بنا به تعریف داریم: $\delta_1 > 0$ موجود است که برای هر $x \in D_f$

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b_1| < \epsilon \qquad (۱.۴)$$

و از اینکه $\lim_{x \to x_0} f(x) = b_1$ پس بنا به تعریف حد: $\delta_2 > 0$ موجود است که برای هر $x \in D_f$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b_2| < \epsilon \qquad (۲.۴)$$

حال در نظر می گیریم $0 < \delta \leq min\{\delta_1, \delta_2\}$.

در این صورت اگر $x \in D_f$ و $0 < |x - x_0| < \delta$ آنگاه

چون $\delta < \delta_1$ پس از ۱.۴ داریم $|f(x) - b_1| < \epsilon$

و از اینکه $\delta < \delta_2$ پس از ۲.۴ داریم $|f(x) - b_2| < \epsilon$

اکنون با جمع کردن طرفین این دو نامساوی داریم

$$|f(x) - b_1| + |f(x) - b_2| < 2\epsilon = \frac{|b_1 - b_2|}{2}$$

بنابراین بنابه نامساوی مثلث نتیجه می‌شود که

$$|b_1 - b_2| = |f(x) - b_2 - (f(x) - b_1)| \leq |f(x) - b_1| + |f(x) - b_2| < \frac{|b_1 - b_2|}{2}$$

یا به عبارت دیگر $1 < \frac{1}{2}$ که یك تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است یعنی اثبات قضیه کامل شده است. □

مثال ۳.۱.۴. *نشان دهید که* $\lim_{x \to -1} (2x + 5) = 3$

حل. فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد. طبق تعریف باید $\delta > ۰$ چنان ارائه نماییم که برای هر x (چون حوزه تعریف تابع مورد بحث که چند جمله‌ای است تمام $\mathbb{R}$ است) اگر $۰ < |x - (-۱)| < \delta$ آنگاه $|۲x - ۵ + ۳| < \epsilon$ برای ارائه $\delta > ۰$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$|۲x + ۵ - ۳| < \epsilon \Leftrightarrow |۲x + ۲| < \epsilon \Leftrightarrow ۲|x - (-۱)| < \epsilon \Leftrightarrow |x - (-۱)| < \frac{\epsilon}{۲} \quad (۳.۴)$$

بدین‌ترتیب کافی است $۰ < \delta \leq \frac{\epsilon}{۲}$ در نظر بگیریم. چون در این صورت اگر $|x - (-۱)| < \delta$ آنگاه بنا به انتخاب δ، چون $\delta \leq \frac{\epsilon}{۲}$ پس داریم $|x - (-۱)| < \frac{\epsilon}{۲}$ که بنابه آنچه در بالا (۳.۴) آمد داریم

$$|۲x - ۵ + ۳| < \epsilon$$

بنابراین حل مسئله کامل شده است. توجه نمایید که در مثال فوق چون تابع خطی بود بدون هیچ محدودیتی برای متغیر x در اطراف $x_۰$ یعنی «۱» از عبارت $|f(x) - b| < \epsilon$ مستقیماً به عبارت $|x - x_۰| < \frac{\epsilon}{K}$ که در آن K مقداری ثابت است رسیدیم یعنی در این مثال خاص دیدیم $|۲x - ۵ + ۳| < \epsilon$ معادل است با $|x - (-۱)| < \frac{\epsilon}{۲}$ که $K = \frac{۱}{۲}$. در این حالت کافی است δ را هر عدد مثبتی کمتر از $\frac{\epsilon}{K}$ اختیار نماییم. اما اگر تابع خطی نباشد برای استخراج $|x - x_۰|$ از $|f(x) - b|$، معمولاً باید x را در اطراف $x_۰$ محدود نماییم و در نتیجه در انتخاب δ نیز باید این محدودیت را در نظر بگیریم برای روشن شدن موضوع به مثال زیر توجه نمایید که تابع f دیگر خطی نیست.

مثال ۴.۱.۴. *نشان دهید که* $\lim\limits_{x \to ۲} ۲x^۲ + ۵ = ۱۳$

حل. فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد در این صورت داریم

$$|۲x^۲ + ۵ - ۱۳| = |۲x^۲ - ۸| = ۲|x - ۲||x + ۲| \quad (۴.۴)$$

همچنان که ملاحظه می‌شود علاوه بر عامل مطلوب $|x - ۲|$، عامل مزاحم $۲|x + ۲|$ نیز ایجاد شده است که بایستی با توجه به اینکه x به سمت ۲ نزدیک می‌شود بتوانیم آنرا محدود کنیم. برای این منظور می‌توان $|x - x_۰| < \alpha$ که در آن α عددی مثبت است قرار داد. عدد α می‌تواند هر عدد مثبتی باشد تا جایی که هیچ یك از سایر ریشه‌های عبارت $f(x) - b$ به جز $x_۰$ در همسایگی $(x_۰ - \alpha, x_۰ + \alpha)$ قرار نگیرند. و سپس با توجه به این محدودیت عامل یا عاملهای مزاحم را محدود می‌نماییم. مثلاً در مثال مورد بحث عبارت $۲x^۲ + ۵ - ۱۳ = ۲x^۲ - ۸$ دارای ریشه‌های ۲ و -۲ می‌باشد که فاصله آنها ۴ است بنابراین بایستی α را عدد کوچکتر از ۴ مثلاً ۳ اختیار نماییم که در این صورت داریم

$$\begin{cases} |x - ۲| < ۳ \Leftrightarrow -۳ < x - ۲ < ۳ \Leftrightarrow -۱ < x < ۵ \\ ۱ < x + ۲ < ۷ \Rightarrow |x + ۲| < ۷ \Rightarrow ۲|x + ۲| < ۱۴ \end{cases} \quad (۵.۴)$$

در نتیجه $۲|x - ۲||x + ۲| \leq ۱۴|x - ۲|$، اکنون قرار می‌دهیم $۱۴|x - ۲| < \epsilon$ و یا $|x - ۲| < \frac{\epsilon}{۱۴}$

حال برای انتخاب δ بایستی α را نیز مدنظر داشته باشیم یعنی در نظر می‌گیریم
$$0 < \delta \leq \min\left\{\frac{\epsilon}{14}, 3\right\}$$
در این صورت اگر $x \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد (چون حوزه تعریف تابع مورد بحث $\mathbb{R}$ است) که $0 < |x-2| < \delta$، چون $\delta \leq 3$ پس $|x-2| < 3$ که بنابه (۵.۴) داریم $2|x+2| < 14$ و چون $\delta < \frac{\epsilon}{14}$ پس داریم $|x-2| < \frac{\epsilon}{14}$ حال با ضرب طرفین دو نامساوی اخیر داریم
$$2|x+2||x-2| < \frac{\epsilon}{14}14 = \epsilon$$
و با توجه (۴.۴) داریم $|2x^2+5-13| = 2|x-2||x+2|$ در نتیجه $|2x^2+5-13| < \epsilon$

مثال ۵.۱.۴. *نشان دهید که* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-3} = -1$.

حل. فرض کنید که $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. در این صورت داریم
$$|\frac{1}{x-3} - (-1)| = |\frac{1}{x-3} + 1| = \frac{|x-2|}{|x-3|} \tag{۶.۴}$$
در اینجا عامل مزاحم $\frac{1}{|x-3|}$ که برای محدود کردن آن کافی است x را در اطراف ۲ محدود نماییم. در اینجا ریشه‌ها ۲ و ۳ هستند پس بایستی فاصله (یعنی α) را چنان انتخاب نماییم که ۳ در آن نباشد یعنی $\alpha < 1$،
پس فرض کنید

$$\begin{aligned}
|x-2| < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{3}{2} - 3 < x-3 < \frac{5}{2} - 3 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x-3 < -\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} < 3-x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{3-x} < 2\\
&\Rightarrow \frac{1}{|x-3|} < 2 \qquad\qquad (۷.۴)
\end{aligned}$$

درنتیجه $\frac{|x-2|}{|x-3|} < 2|x-2|$ بنابراین اگر قرار دهیم $2|x-2| < \epsilon$ یا $|x-2| < \frac{\epsilon}{2}$ در نظر می‌گیریم $0 < \delta \leq \min\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$ در این صورت برای هر $x \neq 3$ داریم، اگر $|x-2| < \delta$. در این صورت چون $\delta \leq \frac{1}{2}$ پس $|x-2| < \frac{1}{2}$ در نتیجه بنا به (۷.۴)، $\frac{1}{|x-3|} < 2$ و چون $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ پس $|x-2| < \frac{\epsilon}{2}$ و با ضرب طرفین دو نامساوی اخیر داریم $\frac{|x-2|}{|x-3|} < \epsilon$ که بنا به (۶.۴) داریم $\left|\frac{1}{x-3} - (-1)\right| < \epsilon$.

اکنون برای ارایه مثالهای مثلثاتی احتیاج به سه نامساوی بسیار مفید داریم که در زیر آنها را بیان و

اثبات می‌کنیم.

قضیه ۶.۱.۴.

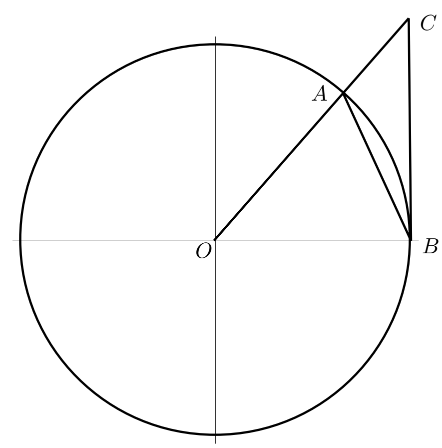
(الف) *برای هر عدد حقیقی* x، $|\sin x| \leq |x|$.

(ب) *برای هر دو عدد حقیقی* x *و* y، $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

(ج) *برای هر عدد حقیقی* x *که* $\circ < |x| < \frac{\pi}{۲}$، *داریم* $\cos x < \frac{\sin x}{x}$.

اثبات.

(الف) دایره مثلثاتی را در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض کنید $\circ < x < \frac{\pi}{۲}$ در این صورت همچنانکه در شکل دیده می‌شود



$$\Delta OAB \text{ مثلث مساحت } < \overline{OAB} \text{ قطاع مساحت} \qquad (۸.۴)$$

امّا داریم که مساحت مثلث OAB برابر است با $\frac{\sin x}{۲}$ (چون $AH = \sin x$ ارتفاع مثلث و شعاع دایره که همان قاعده مثلث است «۱» می‌باشد) و مساحت قطاع OAB برابر است با $\frac{x}{۲}$ رادیان بنابراین از (۸.۴) داریم $\frac{\sin x}{۲} < \frac{x}{۲}$ و یا $\sin x < x$ و چون در ناحیه اول مقادیر سینوس مثبت هستند پس در این حالت یعنی وقتی $\circ < x < \frac{\pi}{۲}$ داریم $|\sin x| < |x|$.

اکنون فرض کنید $-\frac{\pi}{۲} < x < \circ$، در این صورت $\circ < -x < \frac{\pi}{۲}$، پس بنابه نتیجه قبل داریم

$$|\sin(-x)| < |-x| \Leftrightarrow |-\sin x| < |-x| \Leftrightarrow |\sin x| < |x|$$

واضح است که اگر $x = 0$ آنگاه $\sin x = x = 0$. بنابراین تاکنون نشان داده‌ایم که اگر $|x| < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $|\sin x| \leq |x|$. اکنون فرض کنید $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ در این صورت داریم
$$|x| \geq \frac{\pi}{2} > 1 \geq |\sin x|$$
در نتیجه برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $|\sin x| \leq |x|$ و بدین‌ترتیب اثبات (الف) کامل شده است.

(ب) فرض کنید x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند در این صورت از اینکه
$$\sin(x-y) = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
و اینکه $|\cos\frac{x+y}{2}| \leq 1$ و با توجه به قسمت (الف) داریم:
$$\begin{aligned}|\sin(x-y)| &= 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|\end{aligned}$$
و در نتیجه اثبات قسمت (ب) نیز کامل شده است.

(ج) دوباره مانند قسمت (الف) دایره مثلثاتی را در نظر می‌گیریم.(یعنی دایره به شعاع واحد که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت جهت دار شده باشد) ابتدا فرض کنید $0 < x < \frac{\pi}{2}$ یعنی x در ربع اول باشد، در این صورت همچنانکه شکل نشان می‌دهد داریم
$$\text{مساحت مثلث}\ \Delta COB > \text{مساحت قطاع}\ \overline{OAB}$$
امّا مساحت مثلث COB برابر $\frac{\tan x}{2}$ و مساحت قطاع $\overline{OAB}$ برابر $\frac{x}{2}$ است در نتیجه داریم $\frac{\tan x}{2} > \frac{x}{2}$ و یا $x < \tan x$، در نتیجه $x < \frac{\sin x}{\cos x}$ و چون هم x و هم کسینوس x مثبت هستند $\cos x < \frac{\sin x}{x}$، بنابراین در حالت $0 < x < \frac{\pi}{2}$ قضیه اثبات شده است.

حال فرض کنید $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ و یا $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ بنابراین طبق حالت قبل داریم
$$-x < \tan(-x) \quad \text{یا} \quad -x < -\tan x$$
در نتیجه $-x < \frac{-\sin x}{\cos x}$.
توجه نمایید که در این حالت $-x$ و $\cos x$ هر دو مثبت هستند پس داریم $\cos x < \frac{-\sin x}{-x}$ و یا $\cos x < \frac{\sin x}{x}$ و بدین‌ترتیب اثبات قضیه کامل شده است.

$\square$

مثال ۷.۱.۴. *نشان دهید* $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$.

حل. فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد چون طبق قضیه ۶.۱.۴ (الف)

$$|\sin x - 0| \leq |x - 0| \tag{۹.۴}$$

و این نامساوی بدون هیچ محدودیتی برای x در اطراف 0 به دست آمده است پس مقدار δ فقط به ϵ بستگی دارد. در نظر می‌گیریم $0 < \delta \leq \epsilon$ در این صورت اگر $x \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد (حوزه تعریف سینوس تمام اعداد حقیقی است) و $|x| < \delta$ آنگاه چون $\delta \leq \epsilon$ پس $|x| < \epsilon$ و در نتیجه بنابه (۹.۴)

$$|\sin x - 0| = |\sin x| < \epsilon$$

مثال ۸.۱.۴. *نشان دهید* $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

حل. فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد در این صورت بنا به قضیه ۶.۱.۴ (ب) داریم

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| \tag{۱۰.۴}$$

که بدون هیچ محدودیتی برای x در اطراف x_0 نامساوی فوق برقرار است بنابراین اگر قرار دهیم $0 < \delta \leq \epsilon$ در این صورت برای هر عدد حقیقی x که $|x - x_0| < \delta$ داریم:
از اینکه $\delta \leq \epsilon$ پس $|x - x_0| < \epsilon$ و بنابراین از نامساوی ۱۰.۴ داریم

$$|\sin x - \sin x_0| < \epsilon$$

و بدین ترتیب حل مثال کامل شده است.

مثال ۹.۱.۴. *نشان دهید که* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

حل. فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. در این صورت بنابه قضیه ۶.۱.۴ (ج) داریم که اگر $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\cos x < \frac{\sin x}{x}$ در نتیجه $1 - \cos x > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0$. بنابراین با توجه به قضیه ۶.۱.۴ (الف) و اینکه $\frac{\sin x}{2} \leq 1$، داریم

$$|1 - \frac{\sin x}{x}| < 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \leq 2|\sin \frac{x}{2}| \leq 2|\frac{x}{2}| = |x|$$

در نتیجه تاکنون به دست آورده‌ایم که اگر $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$، آنگاه

$$|1 - \frac{\sin x}{x}| < |x| \tag{۱۱.۴}$$

بنابراین برای انتخاب δ بایستی محدودیت x در اطراف 0 را نیز در نظر بگیریم، در نتیجه در نظر می‌گیریم $0 < \delta \leq \min\{\epsilon, \frac{\pi}{2}\}$. در این صورت اگر x_0 دلخواه باشد و فرض کنیم که $|x| < \delta$ آنگاه چون $\delta \leq \frac{\pi}{2}$ پس $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$، در نتیجه بنابه ۱۱.۴ داریم

$$|1 - \frac{\sin x}{x}| < |x|$$

و چون $\epsilon \leq \delta$ پس $|x|< \epsilon$. بنابراین داریم

$$|1 - \frac{\sin x}{x}|< \epsilon$$

که در نتیجه حل مثال کامل شده است.

۲.۴ قضایای حد

اکنون به اثبات قضایایی در مورد حد می‌پردازیم. اولین قضیه بیان می‌دارد که شرط لازم برای وجود حد در یك نقطه کراندار بودن تابع در یك همسایگی محذوف از آن نقطه است و اگر تابعی شرط لازم را در یك نقطه نداشته باشد در آن نقطه دارای حد نخواهد بود.

قضیه ۱.۲.۴. *اگر تابع f در نقطه x_0 دارای حد باشد آنگاه f در یك همسایگی محذوف از x_0 کراندار است یعنی به عبارت دیگر عدد مثبت M و همسایگی محذوف $D = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ موجودند که برای هر x*

$$\text{اگر} \quad x \in D \cap D_f \quad \text{آنگاه} \quad |f(x)|\leq M$$

اثبات. فرض کنید $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$ در این صورت برای $\epsilon = 1$، بنابه تعریف حد داریم همسایگی محذوف $D = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ موجود است که برای هر $x \in D \cap D_f$ داریم

$$|f(x) - b|< 1$$

در نتیجه بنا به نامساوی مثلث داریم $|f(x)|-|b|< 1$ و یا $|f(x)|< 1 + |b|$ اگر $M = 1 + |b|$ در نظر بگیریم اثبات قضیه کامل شده است. □

گزاره ۲.۲.۴. *اگر تابع f در هر همسایگی محذوف x_0 کراندار نباشد آنگاه f در x_0 دارای حد نیست.*

اثبات. طبق قانون عکس نقیض از قضیه ۱.۲.۴ نتیجه حاصل می‌شود. □

مثال ۳.۲.۴. *نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در صفر دارای حد نیست.*

حل. بنابه نتیجه فوق کافی است نشان دهیم که این تابع در هیچ همسایگی محذوف صفر کراندار نیست. فرض کنید که تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در همسایگی محذوف $D = (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ از صفر کرانی مانند $M > 0$ داشته باشد (فرض خلف) یعنی برای هر $x \in D$ داشته باشیم

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leq M$$

فرض کنید عدد طبیعی $n \geq ۲$ دلخواه باشد در این صورت $\delta > \frac{\delta}{n} > ۰$ پس $\frac{\delta}{n} \in D$ در نتیجه
$$\left|\frac{۱}{\delta/n}\right| \leq M$$
و یا $n \leq \delta M$ و این بدین معنی است که اعداد طبیعی از بالا کراندار هستند که یك تناقض است پس فرض خلف باطل است یعنی تابع $\frac{۱}{x}$ در صفر دارای حد نیست. توجه نمایید که عکس نتیجه فوق در حالت کلی برقرار نیست یعنی کراندار بودن فقط یك شرط لازم برای وجود حد می‌باشد. برای اثبات این ادعا به مثال زیر توجه نمایید

مثال ۴.۲.۴. *نشان دهید که تابع*
$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \quad \text{اگر} \\ ۰ & x \notin \mathbb{Q} \quad \text{اگر} \end{cases}$$
در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست. (این تابع به تابع دیریکله معروف است که همان تابع مشخصه اعداد گویا می‌باشد)

حل. نخست توجه نمایید که چون برد تابع مجموعه $\{۱,۰\}$ است پس تابع کراندار است اکنون نشان می‌دهیم که این تابع در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست. فرض کنید که این تابع در نقطه‌ای مانند $x_۰$ دارای حد باشد (فرض خلف) یعنی $\lim_{x\to x_۰} f(x) = b$ در نظر می‌گیریم $\epsilon = \frac{۱}{۴}$ (توجه نمایید که کافی است ϵ را از نصف طول جهش تابع یعنی $\frac{۱}{۲}$ کمتر بگیریم) در این صورت بنابه تعریف حد، همسایگی محذوف $D = (x_۰ - \delta, x_۰) \cup (x_۰, x_۰ + \delta)$ از $x_۰$ موجود است که برای هر $x \in D$ داریم
$$|f(x) - b| < \frac{۱}{۴}$$
بنابه خاصیت چگال بودن اعداد گنگ در اعداد حقیقی فرض کنید $x_۱, x_۲ \in D$ به ترتیب اعداد گویا و گنگ باشند در این صورت داریم
$$|f(x_۱) - b| = |۱ - b| < \frac{۱}{۴}, |f(x_۲) - b| = |۰ - b| = |b| < \frac{۱}{۴}$$
و با جمع کردن این دو نامساوی داریم
$$|۱ - b| + |b| < \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$
یا $\frac{۱}{۲} > ۱$ که یك تناقض است. پس فرض خلف باطل است یعنی تابع دیریکله در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست. حال به اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که نشان می‌دهد که در حالتهای خاص حاصلضرب دو تابع که حتی یکی از آن دو تابع در یك نقطه دارای حد نباشد و فقط شرط لازم یعنی کراندار بودن در یك همسایگی از آن نقطه را دارا باشد می‌تواند دارای حد باشد.

قضیه ۵.۲.۴. *فرض کنید که f در همسایگی محذوفی از $x_\circ$ کراندار و $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)=\circ$ در این صورت تابع $f.g$ در نقطه $x_\circ$ دارای حد بوده و داریم*

$$\lim_{x\to x_\circ}(f.g)(x)=\circ$$

اثبات. فرض کنید که تابع f در همسایگی محذوف $D_۱=(x_\circ-\delta_۱,x_\circ)\cup(x_\circ,x_\circ+\delta_۱)$ دارای کران $M>\circ$ باشد یعنی برای هر $x\in D_f\cap D_۱$ داشته باشیم

$$|f(x)|\leq M \tag{۱۲.۴}$$

و فرض کنید $\epsilon>\circ$ دلخواه باشد. در این صورت از اینکه $\lim\limits_{x\longrightarrow x_\circ} g(x)=\circ$ (بنابه تعریف حد) همسایگی محذوف $D_۲=(x_\circ-\delta_۲,x_\circ)\cup(x_\circ,x_\circ+\delta_۲)$ وجود دارد که برای هر $x\in D_f\cap D-۲$ داریم

$$|g(x)-\circ|<\frac{\epsilon}{۲(M+۱)} \tag{۱۳.۴}$$

حال در نظر می‌گیریم $D=D_f\cap D_۱\cap D_۲$. در این صورت برای هر $x\in D$، از ۱۲.۴ و ۱۳.۴ داریم $|f(x)|\leq M$ و $|g(x)|<\frac{\epsilon}{۲(M+۱)}$ و از ضرب این دو نامساوی داریم

$$|f(x)g(x)|=|f(x)g(x)-\circ|<\epsilon.$$

□

مثال ۶.۲.۴. *نشان دهید که* $\lim\limits_{x\to\circ} x\sin\frac{۱}{x}=\circ$.

حل. اگر چه تابع $\sin\frac{۱}{x}$ در $\circ$ دارای حد نیست (مساله حل شده ۱۱.۵.۴ را ببینید)، امّا چون کراندار است و $\lim\limits_{x\to\circ} x=\circ$ پس بنا به قضیه قبل (یعنی قضیه ۵.۲.۴) داریم

$$\lim_{x\to\circ} x\sin\frac{۱}{x}=\circ$$

قضیه زیر نتیجه مستقیم قضیه قبل است.

گزاره ۷.۲.۴. *فرض کنید برای دو تابع f و g در یک همسایگی محذوف $x_\circ$ داشته باشیم $|f(x)|\leq|g(x)|$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)=\circ$، در این صورت $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=\circ$.*

اثبات. در نظر می‌گیریم

$$h(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{g(x)} & g(x)\neq\circ \quad \text{اگر}\\ \circ & g(x)=\circ \quad \text{اگر}\end{cases}$$

در این صورت با توجّه به فرض در یک همسایگی محذوف $x_\circ$ داریم $|h(x)|\leq ۱$ و $f(x)=h(x)g(x)$ حال بنا به قضیه ۵.۲.۴ داریم

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x)=\lim_{x\to x_\circ} h(x)g(x)=\circ$$

□

اکنون به اثبات پایداری خواص جبری توابع تحت عمل حدگیری می‌پردازیم.

قضیه ۸.۲.۴. *فرض کنید* $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=a$ *و* $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)=b$ *در این صورت*

(الف) $\lim\limits_{x\to x_\circ}(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha a+\beta b=\alpha\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)+\beta\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)$ *(α و β اعداد حقیقی دلخواهی هستند)*

(ب) $\lim\limits_{x\to x_\circ}(f.g)(x)=a.b=[\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)][\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)]$

(ج) $\lim\limits_{x\to x_\circ}[\frac{f}{g}](x)=\frac{a}{b}=\frac{\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)}$ *به شرط آنکه* $b\neq \circ$

(د) $\lim\limits_{x\to x_\circ}\frac{۱}{g(x)}=\frac{۱}{b}=\frac{۱}{\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)}$ *به شرط آنکه* $b\neq \circ$

(ه) $\lim\limits_{x\to x_\circ}|f(x)|=|a|$

(و) $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=\circ$ *اگر و فقط اگر* $\lim\limits_{x\to x_\circ}|f(x)|=\circ$

اثبات.

(الف) فرض کنید $\epsilon>\circ$ و α و β اعداد حقیقی دلخواهی باشند در این صورت از اینکه $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=a$ بنا به تعریف حد داریم همسایگی محذوف $D_۱=(x_\circ-\delta_۱,x_\circ)\cup(x_\circ,x_\circ+\delta_۱)$ موجود است که برای هر x اگر $x\in D_f\cap D_۱$ آنگاه

$$|f(x)-a|<\frac{\epsilon}{۲(۱+|\alpha|)} \qquad (۱۴.۴)$$

و به همین ترتیب از اینکه $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)=b$ همسایگی محذوف

$$D_۲=(x_\circ-\delta_۲,x_\circ)\cup(x_\circ,x_\circ+\delta_۲)$$

موجود است که برای هر X اگر $x\in D_g\cap D_۲$ داریم

$$|g(x)-b|<\frac{\epsilon}{۲(۱+|\beta|)} \qquad (۱۵.۴)$$

حال در نظر می‌گیریم $D=D_۱\cap D_۲$ که یك همسایگی محذوف $x_\circ$ می‌باشد. در این صورت اگر $x\in D_{\alpha f+\beta g}\cap D$ آنگاه $x\in D_f\cap D_g\cap D_۱\cap D_۲$. بنابراین هم نامساوی (۱۴.۴) و هم نامساوی (۱۵.۴) برقرارند یعنی

$$|f(x)-a|<\frac{\epsilon}{۲(۱+|\alpha|)},\qquad |g(x)-b|<\frac{\epsilon}{۲(۱+|\beta|)}$$

حال با توجّه به نامساوی مثلث داریم

$$\begin{aligned}|(\alpha f+\beta g)(x)-(\alpha a+\beta b)| &\leq |\alpha||f(x)-a|+|\beta||g(x)-b|\\ &< \frac{\alpha\epsilon}{۲(۱+|\alpha|)}+\frac{\beta\epsilon}{۲(۱+|\beta|)}\\ &< \frac{\epsilon}{۲}+\frac{\epsilon}{۲}=\epsilon\end{aligned}$$

و بدین ترتیب حکم (الف) اثبات شده است.

(ب) فرض کنید $\epsilon>۰$ دلخواه باشد. از اینکه $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=a$، داریم همسایگی محذوف $D_۱=(x_۰-\delta_۱,x_۰)\cup(x_۰,x_۰+\delta_۱)$ از $x_۰$ وجود دارد که برای هر $x\in D_f\cap D_۱$ داریم

$$|f(x)-a|< \frac{\epsilon}{۲(۱+|b|)} \tag{۱۶.۴}$$

همچنین از اینکه $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=a$ پس بنا به قضیه ۱.۲.۴ تابع f در همسایگی محذوفی از $x_۰$ مانند $D_۲=(x_۰-\delta_۲,x_۰)\cup(x_۰,x_۰+\delta_۲)$ کرانی مانند $M>۰$ دارد یعنی برای هر $x\in D_f\cap D_۲$ داریم

$$|f(x)|\leq M \tag{۱۷.۴}$$

حال از اینکه $\lim\limits_{x\to x_۰} g(x)=b$ همسایگی محذوف $D_۳=(x_۰-\delta_۳,x_۰)\cup(x_۰,x_۰+\delta_۳)$ موجود است که برای هر $x\in D_g\cap D_۳$ داریم

$$|g(x)-b|< \frac{\epsilon}{۲M} \tag{۱۸.۴}$$

اکنون در نظر می‌گیریم $D=D_۱\cap D_۲\cap D_۳$ که همسایگی محذوفی از $x_۰$ می‌باشد.(چون $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ همسایگی‌های محذوفی از $x_۰$ بوده‌اند) اگر در نظر بگیریم $x\in D_{f.g}\cap D$، در این صورت $x\in D_f\cap D_g\cap D_۱\cap D_۲\cap D_۳$ پس هر سه نامساوی (۱۶.۴)، (۱۷.۴) و (۱۸.۴) برقرارند. بنابراین با استفاده از نامساوی مثلث و نامساوی‌های (۱۶.۴)، (۱۷.۴) و (۱۸.۴) داریم

$$\begin{aligned}|(f.g)(x)-ab| &= |f(x)g(x)-bf(x)+bf(x)-ab|\\ &= |f(x)(g(x)-b)+b(f(x)-a)|\\ &\leq |f(x)||g(x)-b|+|b||f(x)-a|\\ &\leq M.\frac{\epsilon}{۲M}+|b|\frac{\epsilon}{۲(۱+|b|)}\\ &< \frac{\epsilon}{۲}+\frac{\epsilon}{۲}=\epsilon\end{aligned}$$

که در این صورت برهان (ب) کامل شده است.

(ج) توجّه نمایید که

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_\circ}\left[\frac{f}{g}\right](x)=\frac{a}{b} \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_\circ}\left[\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{a}{b}\right]=\circ\\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_\circ}\frac{bf(x)-ag(x)}{bg(x)}=\circ\\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_\circ}\frac{۱}{bg(x)}.(bf(x)-ag(x))=\circ\end{aligned}$$

اکنون با توجّه به اینکه $\lim_{x\to x_\circ} f(x)=a$ و $\lim_{x\to x_\circ} g(x)=b$ و با توجّه به قسمتهای (الف) و (ب) داریم $\lim_{x\to x_\circ}(bf(x)-ag(x))=\circ$ پس بنا به قضیه ۵.۲.۴ کافی است نشان دهیم که تابع $\frac{۱}{bg(x)}$ در یک همسایگی محذوف از $x_\circ$ کراندار است چون $\lim_{x\to x_\circ} g(x)=b\neq\circ$ پس $\lim_{x\to x_\circ} bg(x)=b^۲\neq\circ$ حال برای $\epsilon=\frac{b^۲}{۲}$ از تعریف حد داریم که همسایگی محذوف $D=(x_\circ-\delta,x_\circ)\cup(x_\circ,x_\circ+\delta)$ موجود است که برای هر $x\in D_g\cap D$ داریم $|bg(x)-b^۲|<\frac{b^۲}{۲}$ و یا

$$\begin{aligned}\frac{-b^۲}{۲}<bg(x)-b^۲<\frac{b^۲}{۲}\Leftrightarrow \frac{b^۲}{۲}<bg(x)<\frac{۳}{۲}b^۲\\ \Leftrightarrow \circ<\frac{۱}{bg(x)}<\frac{۲}{b^۲}\\ \Rightarrow \left|\frac{۱}{bg(x)}\right|<\frac{۲}{b^۲}=M\end{aligned}$$

یعنی تابع $\frac{۱}{bg(x)}$ در همسایگی محذوف D از $x_\circ$ دارای کران M است که بدین ترتیب اثبات قسمت (ج) نیز کامل است.

(د) حالت خاصی از قسمت (ج) است. توجّه نمایید که در قضیه فوق در صورتی می‌توان جای اعمال جبری جمع، ضرب و تقسیم و حد را عوض کرد که حد عوامل مؤثر در آنها موجود باشند.

(ه) فرض کنید $\epsilon>\circ$ دلخواه باشد. از اینکه $\lim_{x\to x_\circ} f(x)=a$ پس همسایگی محذوف D از $x_\circ$ موجود است که برای هر $x\in D_f\cap D$ داریم $|f(x)-a|<\epsilon$. حال با توجّه به نامساوی مثلث داریم $||f(x)|-|a||<|f(x)-a|$ در نتیجه اگر $x\in D_f\cap D$ آنگاه

$$||f(x)|-|a||<\epsilon$$

یعنی $\lim_{x\to x_\circ}|f(x)|=|a|$

(و) بنا به قسمت (ه) قسمت لزوم شرط اثبات شده است پس فرض کنید $\lim_{x\to x_\circ}|f(x)|=\circ$ و فرض کنید $\epsilon>\circ$ دلخواه باشد بنابراین بنا به تعریف حد همسایگی محذوف D از $x_\circ$ موجود است که برای هر $x\in D\cap D_f$ داریم $||f(x)|-\circ|<\epsilon$ و یا $|f(x)|<\epsilon$ و این بدین معنی است که $\lim_{x\to x_\circ} f(x)=\circ$. توجّه نمایید که (و) برای اعداد غیرصفر برقرار نیست.

توجّه نمایید که به کمك استقراء قضیه فوق را می‌توان برای هر تعداد متناهی از توابع توسعه داد یعنی اگر $\lim_{x\to x_\circ} f_k(x)=a_k$ برای $1\le k\le n$ آنگاه

$$\lim_{x\to x_\circ}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k$$

که در آن α_k برای $1\le k\le n$ اعداد حقیقی دلخواهی هستند. همچنین

$$\lim_{x\to x_\circ}\prod_{k=1}^{n} f_k(x)=\prod_{k=1}^{n} a_k$$

□

مثال ۹.۲.۴. *مطلوب است محاسبه* $\lim_{x\to\circ}\frac{\sin nx}{\sin mx}$ *که در آن* m *و* n *اعداد صحیح غیرصفری هستند.*

حل. به شکل مستقیم در اینجا نمی‌توان از حد خارج قسمت یعنی قسمت (ج) قضیه قبل استفاده کرد زیرا $\lim_{x\to\circ}\sin mx=\circ$. امّا بنا به مثال ۹.۱.۴ داریم $\lim_{x\to\circ}\frac{\sin nx}{nx}=1$ و $\lim_{x\to\circ}\frac{\sin mx}{mx}=1$ بنابراین داریم

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\sin nx}{\sin mx}=\lim_{x\to\circ}\frac{n}{m}\frac{\frac{\sin nx}{nx}}{\frac{\sin mx}{mx}}=\frac{n}{m}\frac{\lim\limits_{x\to\circ}\frac{\sin nx}{nx}}{\lim\limits_{x\to\circ}\frac{\sin mx}{mx}}=\frac{n}{m}$$

مثال ۱۰.۲.۴. *مطلوب است محاسبه* $\lim_{x\to\circ}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{x}$.

حل. در اینجا چون $\lim_{x\to\circ}x=\circ$ پس مستقیماً نمی‌توان از قضیه حد خارج قسمت یعنی ۸.۲.۴ (ج) استفاده کرد. برای محاسبه حد بنا به مثال ۹.۱.۴ و اینکه $\lim_{x\to\circ}\sin x=\circ$ داریم

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=1$$

و به همین ترتیب $\lim_{x\to\circ}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{\sin(\sin x)}=1$ بنابراین

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{x} = \lim_{x\to\circ}\left[\frac{\sin(\sin(\sin x))}{\sin(\sin x)}.\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}.\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to ۰} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\sin(\sin x)} \cdot \lim_{x\to ۰} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} \\ &= ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱ \end{aligned}$$

اکنون به اثبات قضیه مهم دیگری معروف به قضیه فشار یا ساندویچ می‌پردازیم.

قضیه ۱۱.۲.۴. *فرض کنید که برای توابع f ، g و h در همسایگی محذوفی از $x_۰$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ و در این صورت اگر*

$$\lim_{x\to x_۰} f(x) = \lim_{x\to x_۰} h(x) = b$$

آنگاه $\lim_{x\to x_۰} g(x) = b$.

اثبات. از اینکه در یك همسایگی محذوف $x_۰$ داریم $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. پس در این همسایگی محذوف داریم $f(x) - b \leq g(x) - b \leq h(x) - b$ که در این صورت

$$|g(x) - b| \leq \max\{|f(x) - b|, |h(x) - b|\} \leq |f(x) - b| + |h(x) - b|$$

حال چون $\lim_{x\to x_۰} (f(x) - b) = ۰$ و $\lim_{x\to x_۰} (h(x) - b) = ۰$ پس بنا به قضیه ۸.۲.۴ (الف) و (و) داریم $\lim_{x\to x_۰} (g(x) - b) = ۰$ ، یا به عبارت دیگر $\lim_{x\to x_۰} g(x) = b$. □

مثال ۱۲.۲.۴. *فرض کنید n عددی طبیعی باشد در این صورت نشان دهید* $\lim_{x\to ۰} \sqrt[n]{۱ + x} = ۱$.

حل. با استفاده از قضیه فشار، داریم
اگر $-۱ < x < ۱$ (که یك همسایگی از ۰ است). آنگاه

$$\begin{aligned} |x| < ۱ &\Rightarrow ۰ < ۱ - |x| < ۱ \\ &\Rightarrow ۰ < (۱ - |x|)^n \leq ۱ - |x| < ۱ + x \\ &\Rightarrow ۱ - |x| < \sqrt[n]{۱ + x} \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} ۱ < ۱ + |x| &\Rightarrow (۱ + |x|)^n \geq ۱ + |x| \geq ۱ + x > ۰ \\ &\Rightarrow ۱ + |x| \geq \sqrt[n]{۱ + x} \end{aligned}$$

بنابراین تا کنون نشان داده‌ایم که اگر $x \in (-۱, ۱)$ آنگاه

$$۱ - |x| \leq \sqrt[n]{۱ + x} \leq ۱ + |x|$$

امّا $\lim_{x\to ۰}(۱-|x|)=\lim_{x\to ۰}(۱+|x|)=۱$ پس بنا به قضیه فشار داریم
$$\lim_{x\to ۰}\sqrt[n]{۱+x}=۱$$

قضیه ۱۳.۲.۴. *فرض کنید f یک تابع و $\lim_{x\to x_۰}f(x)=b\neq ۰$ در این صورت در یک همسایگی محذوف $x_۰$ تابع f با b هم علامت است.*

اثبات. فرض کنید $b<۰$ در نظر می‌گیریم $\epsilon=\frac{-b}{۲}>۰$ در این صورت با توجّه به تعریف حد همسایگی محذوف $D=(x_۰-\delta,x_۰)\cup(x_۰,x_۰+\delta)$ از $x_۰$ موجود است که برای هر $x\in D_f\cap D$
$$|f(x)-b|<-\frac{b}{۲}$$

یا به طور معادل
$$\frac{b}{۲}<f(x)-b<-\frac{b}{۲}\Leftrightarrow\frac{۳b}{۲}<f(x)<\frac{b}{۲}<۰$$

یعنی برای همسایگی محذوف D از $x_۰$ برای تمام نقاطی که تابع f تعریف شده باشد داریم $f(x)<۰$ که هم علامت b است.

حالت $b>۰$ به صورت مشابه قابل اثبات است که به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. $\square$

اکنون نشان می‌دهیم که حد ترتیب جزیی "$\leq$" در اعداد حقیقی را حفظ می‌کند امّا باید توجه داشت که ممکن است حد ترتیب کلی "$<$" در اعداد حقیقی را حفظ ننماید.

قضیه ۱۴.۲.۴.

(الف) حد ترتیب جزیی در اعداد حقیقی را حفظ می‌کند.
یعنی اگر برای توابع f و g در همسایگی محذوفی از $x_۰$، $f(x)\leq g(x)$ و $\lim_{x\to x_۰}f(x)$ و $\lim_{x\to x_۰}g(x)$ موجود باشند آنگاه
$$\lim_{x\to x_۰}f(x)\leq\lim_{x\to x_۰}g(x)$$

(ب) در حالت کلی حد ترتیب کلی در اعداد حقیقی را حفظ نمی‌کند.
یعنی ممکن است برای توابع f و g داشته باشیم $f(x)<g(x)$ امّا $\lim_{x\to x_۰}f(x)=\lim_{x\to x_۰}g(x)$

اثبات.

(الف) فرض کنید در همسایگی محذوف $D_۱$ از $x_۰$ داشته باشیم $f(x)\leq g(x)$ اما $\lim_{x\to x_۰}f(x)>\lim_{x\to x_۰}g(x)$ (فرض خلف). دراین صورت با توجه به قضیه ۸.۲.۴ (الف) داریم
$$\lim_{x\to x_۰}f(x)-\lim_{x\to x_۰}g(x)>۰\quad\text{یا}\quad\lim_{x\to x_۰}(f(x)-g(x))>۰$$

در نتیجه بنا به قضیه ۱۳.۲.۴ تابع $f-g$ در همسایگی محذوفی از $x_\circ$ مانند $D_۲$، مثبت است حال اگر قرار دهیم $D = D_۱ \cap D_۲$ در این صورت D یك همسایگی محذوف $x_\circ$ است و برای هر $x \in D$ داریم

$$f(x) \leq g(x), \quad f(x) - g(x) > \circ$$

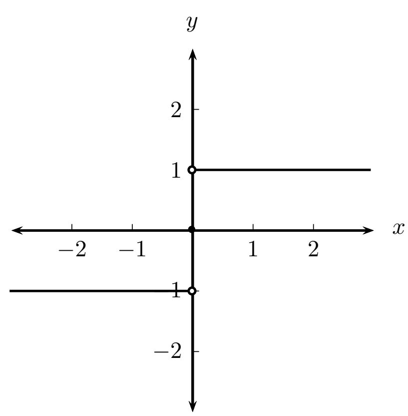
و یا به طور معادل $f(x) \leq g(x)$ و $f(x) > g(x)$ که یك تناقض است. پس فرض خلف باطل است یعنی بند (الف) قضیه اثبات شده است.

(ب) در نظر می‌گیریم $f(x) = \circ$ و $g(x) = x^۲$ که در هر همسایگی محذوف $\circ$ داریم $f(x) < g(x)$امّا داریم $\lim\limits_{x\to\circ} f(x) = \lim\limits_{x\to\circ} g(x) = \circ$.

$\square$

۳.۴ حد چپ و حد راست

در مطالعه مفهوم حد به توابعی همچون تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$ برمی‌خوریم. این تابع دارای نمودار زیر است:



شکل ۱.۴: نمودار تابع $f(x)$.

یعنی برای $x > \circ$ مقدار تابع ۱ و برای $x < \circ$ مقدار تابع ۱− است. این تابع در «۰» دارای حد نیست و در «۰» می‌توان دو تعریف وابسته به حد بیان کرد که آنها را حد راست و حد چپ تابع f در نقطه «۰» نامیم.

۱.۳.۴ تعریف حد راست و حد چپ

فرض کنید که f یك تابع باشد در این صورت گوییم که حد راست تابع f در نقطه $x_\circ$ برابر b است یا تابع f به b میل می‌کند وقتی x از راست به $x_\circ$ میل می‌کند و آن را با نماد $\lim_{x\to x_\circ^+} f(x)=b$ نمایش می‌دهیم. هر گاه برای هر $\epsilon>\circ$ عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x\in D_f$ اگر $\circ<x-x_\circ<\delta$ آنگاه $|f(x)-b|<\epsilon$، که به صورت همسایگی تعریف فوق را می‌توان این طور بیان کرد که برای هر $\epsilon>\circ$، بازه $D=(x_\circ,x_\circ+\delta)$ موجود باشد که برای هر $x\in D\cap D_f$، داشته باشیم $|f(x)-b|<\epsilon$.

به طریق مشابه داریم که حد چپ تابع f در نقطه $x_\circ$ برابر b است هرگاه برای هر $\epsilon>\circ$، عدد $\delta>\circ$ موجود باشد که برای هر $x\in D_f$، اگر $\circ<x_\circ-x<\delta$ آنگاه $|f(x)-b|<\epsilon$ و یا به عبارت دیگر برای هر $\epsilon>\circ$، بازه $D=(x_\circ-\delta,x_\circ)$ موجود باشد که برای هر $x\in D\cap D_f$ داشته باشیم $|f(x)-b|<\epsilon$، حد چپ تابع f در نقطه $x_\circ$ را با نماد $\lim_{x\to x_\circ^-} f(x)=b$ نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال در تابع f که در ابتدای بحث مطرح شد داریم $\lim_{x\to\circ^+} f(x)=۱$ امّا $\lim_{x\to\circ^-} f(x)=-۱$ زیرا اگر $\epsilon>\circ$ دلخواه باشد آنگاه برای هر $\delta>\circ$ (چون تابع در مقادیر بیشتر و کمتر از $\circ$ تابع ثابت است انتخاب δ مستقل از انتخاب ϵ است) داریم اگر $\circ<x-\circ<\delta$، آنگاه $f(x)=۱$ در نتیجه

$$|f(x)-۱|=\circ<\epsilon$$

و به همین ترتیب اگر $\circ<\circ-x<\delta$ یا به طور معادل $-\delta<x<\circ$ آنگاه $f(x)=-۱$، در نتیجه

$$|f(x)-(-۱)|=|-۱-(-۱)|=\circ<\epsilon$$

توجّه نمایید که $\lim_{x\to x_\circ^+} f(x)$ بدین معنی است حد تابع f مطرح است وقتی که x از سمت مقادیر بیشتر از x به سمت $x_\circ$ میل می‌کند یعنی $x-x_\circ>\circ$ و در $\lim_{x\to x_\circ^-} f(x)$ حد تابع f مطرح است وقتی که x از سمت مقادیر کمتر از x به سمت $x_\circ$ می‌کند یعنی $x-x_\circ<\circ$.

مثال ۱.۳.۴. *تابع $f(x)=[x]$ را در نظر می‌گیریم فرض کنید $n\in\mathbb{Z}$ دلخواه باشد در این صورت*

(الف) $\lim_{x\to n^+}[x]=n=[n]$

(ب) $\lim_{x\to n^+}[x]=n-۱$

(ج) $\lim_{x\to x_\circ\notin\mathbb{Z}}[x]=[x_\circ]$

حل.

(الف) فرض کنید $n \in \mathbb{Z}$ دلخواه باشد و فرض کنید $n < x < n + ۱$. دراین صورت با توجّه به تعریف جزء صحیح x داریم $[x] = n$ یعنی در این فاصله تابع جزء صحیح تابعی ثابت است. پس برای $\epsilon > ۰$، انتخاب δ فقط به محدودیت x وابسته بوده و از مقدار ϵ مستقل است بنابراین در نظر می‌گیریم $۰ < \delta < ۱$ در این صورت اگر $۰ < x_۰ - n < \delta$ چون $\delta < ۱$ پس $۰ < x_۰ - n < ۱$ یعنی $n < x < n + ۱$ و داریم

$$|[x] - n| = |n - n| = ۰ < \epsilon$$

(ب) فرض کنید $n - ۱ < x < n$ در این صورت با توجّه به تعریف جزء صحیح داریم $[x] = n - ۱$. برای $\epsilon > ۰$ در نظر می‌گیریم $۰ < \delta < ۱$ حال اگر $۰ < n - x < \delta$ چون $\delta < ۱$ پس داریم: $۰ < n - x < ۱$ و یا $n - ۱ < x < n$، در نتیجه $[x] = n - ۱$. بنابراین داریم:

$$|[x] - (n - ۱)| = |n - ۱ - (n - ۱)| = ۰ < \epsilon$$

(ج) فرض کنید $x_۰ \notin \mathbb{Z}$، در این صورت بنا به آنچه که در فصل اول دستگاه اعداد حقیقی دیدیم (قضیه ۱۲.۴.۱) عدد صحیح منحصر به فرد $n \in \mathbb{Z}$ موجود است که $n < x_۰ < n + ۱$ در واقع $n = [x_۰]$. در این صورت برای $\epsilon > ۰$، چون تابع در فاصله n و $n + ۱$ تابعی ثابت است پس انتخاب δ به ϵ بستگی ندارد بلکه فقط محدودیت در اطراف $x_۰$ را باید در انتخاب δ در نظر گرفت برای این منظور در نظر می‌گیریم

$$۰ < \delta \leq \min\{x_۰ - n, n + ۱ - x_۰\}$$

حال فرض کنید که $|x - x_۰| < \delta$ در این صورت $-\delta < -x + x_۰ < \delta$ پس با توجّه به انتخاب δ داریم

$$\begin{aligned} x_۰ - n - ۱ < -x + x_۰ < x_۰ - n &\Leftrightarrow -(n + ۱) < -x < -n \\ &\Leftrightarrow n < x < n + ۱ \\ &\Rightarrow [x] = n = [x_۰] \\ &\Rightarrow |[x] - [x_۰]| = ۰ < \epsilon \end{aligned}$$

اکنون به اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که وجود حد را با وجود حد چپ و راست، مربوط می‌سازد. به‌خصوص این قضیه در اثبات وجود حد در نقاط مرزی برای توابع چند ضابطه‌ای کاربرد بسیاری دارد.

قضیه ۲.۳.۴. *شرط لازم و کافی برای آنکه* $\lim_{x \to x_۰} f(x) = b$ *آن است که*

$$\lim_{x \to x_۰^+} f(x) = \lim_{x \to x_۰^-} f(x) = b$$

اثبات. **لزوم شرط:** فرض کنید $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=b$ و $\epsilon>\circ$ دلخواه باشد در این صورت بنا به تعریف حد همسایگی محذوف $D=(x_\circ-\delta,x_\circ)\cup(x_\circ,x_\circ+\delta)$ از $x_\circ$ موجود است که برای هر $x\in D\cap D_f$ داریم $|f(x)-b|<\epsilon$. حال فرض کنید $x\in(x_\circ-\delta,x_\circ)\cap D_f\subseteq D\cap D_f$ دلخواه باشد در این صورت بنا به آنچه که در بالا آمد داریم $|f(x)-b|<\epsilon$ یعنی:

$$\lim_{x\to x_\circ^-} f(x)=a$$

همچنین اگر $x\in(x_\circ,x_\circ+\delta)\cap D_f$ دلخواه باشد چون $(x_\circ,x_\circ+\delta)\cap D_f\subseteq D\cap D_f$ پس بنا آنچه در بالا دیدیم داریم $|f(x)-b|<\epsilon$ یعنی به عبارت دیگر $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=a$ و بدین‌ترتیب اثبات لزوم شرط کامل شده است.

بالعکس: فرض کنید $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x)=b$ و $\epsilon>\circ$ دلخواه باشد در این صورت از اینکه $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=b$ پس $\delta_1>\circ$ موجود است که:

برای هر $x\in(x_\circ,x_\circ+\delta_1)\cap D_f$ داریم

$$|f(x)-b|<\epsilon \tag{۱۹.۴}$$

و از اینکه $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=b$ پس $\delta_2>\circ$ موجود است که:

برای هر $x\in(x_\circ-\delta_2,x_\circ)\cap D_f$ داریم

$$|f(x)-b|<\epsilon \tag{۲۰.۴}$$

حال در نظر می‌گیریم $\circ<\delta\leq\min\{\delta_1,\delta_2\}$،

در این صورت اگر $x\in(x_\circ-\delta,x_\circ)\cup(x_\circ,x_\circ+\delta)\cap D_f$ داریم یا ۱۹.۴ و یا ۲۰.۴ برقرارند پس داریم $|f(x)-b|<\epsilon$ یعنی $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=b$. □

مثال ۳.۳.۴. *نشان دهید* $\lim\limits_{x\to n}[x]$، $(n\in\mathbb{Z})$ *موجود نیست.*

حل. بنا به مثال ۱.۳.۴ (الف) داریم $\lim\limits_{x\to n^+}[x]=n$ و بنا به ۱.۳.۴ (ب) داریم $\lim\limits_{x\to n^-}[x]=n-1$ پس $\lim\limits_{x\to n^+}[x]\neq\lim\limits_{x\to n^-}[x]$ پس بنا به قضیه فوق $\lim\limits_{x\to n}[x]$ وجود ندارد.

ملاحظه ۴.۳.۴. *می‌توان بررسی نمود که تمام قضایای حد معادلی در حد چپ و حد راست دارند که به روشی کاملاً مشابه اثبات می‌شوند که به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.*

مثال ۵.۳.۴. *نشان دهید که* $\lim\limits_{x\to\circ} x[\frac{1}{x}]=1$.

حل. بنا به تعریف جزء صحیح داریم

$$\frac{۱}{x} - ۱ < \left[\frac{۱}{x}\right] \leq \frac{۱}{x} \qquad (۲۱.۴)$$

حال اگر $x > ۰$، در این صورت

$$x(\frac{۱}{x} - ۱) < x[\frac{۱}{x}] \leq x.\frac{۱}{x}$$

یعنی $۱ - x < x[\frac{۱}{x}] \leq ۱$ حال چون $\lim\limits_{x\to ۰^+} (۱ - x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} ۱ = ۱$، پس بنا به قضیه فشار برای حد راست داریم

$$\lim_{x\to ۰^+} x\left[\frac{۱}{x}\right] = ۱$$

و اگر $x < ۰$ در این صورت از ۲۱.۴ داریم

$$x(\frac{۱}{x} - ۱) > x\left[\frac{۱}{x}\right] \geq x.\frac{۱}{x}$$

یعنی $۱ - x > x[\frac{۱}{x}] \geq ۱$ و چون $\lim\limits_{x\to ۰^-} (۱ - x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} ۱ = ۱$ پس بنا به قضیه فشار برای حد چپ داریم

$$\lim_{x\to ۰^-} x\left[\frac{۱}{x}\right] = ۱$$

بنابراین بنا به قضیه ۲.۳.۴ داریم $\lim\limits_{x\to ۰} x[\frac{۱}{x}] = ۱$.

۴.۴ حد در بینهایت و حد بینهایت

تاکنون حدهایی را که بررسی کرده‌ایم در تمام حالات هم نقطه‌ای که حدگیری در آن نقطه انجام می‌گرفت و هم مقادیر حد، اعداد حقیقی بودند. حال می‌خواهیم به بررسی حالاتی بپردازیم که یکی یا هر دو اعداد حقیقی نباشند چون تعریف حد در حالتی که نقطه حدگیری و مقدار حد هر دو اعداد حقیقی بودند بر اساس تعریف همسایگی بود پس لازم است که در این حالت جدید نیز مفهوم همسایگی از $+\infty$، $-\infty$ و ∞ را (در اینجا منظور از ∞ ، $\pm\infty$ است که این نماد صرفاً در این بخش به کار خواهد رفت و در سایر موارد ∞ و $+\infty$ به یك معنی بکار خواهند رفت مگر آنکه خلاف آن صریحاً ذکر گردد) تعریف نماییم.

۱.۴.۴ تعریف همسایگی $+\infty$، $-\infty$ و ∞

فرض کنید $M > ۰$ دلخواه باشد در این صورت یك همسایگی از $+\infty$ عبارت است از $\{x \in \mathbb{R} ; x \in M\}$ و یك همسایگی از $-\infty$ عبارت است از $\{x \in \mathbb{R} : x < -M\}$ و یك همسایگی از ∞ عبارت است از $\{x \in \mathbb{R} : |x| > M\}$.

بدین‌ترتیب هم اکنون می‌توانیم نمادهای

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to \infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$$

و ... از این قبیل را تعریف کنیم که به عنوان نمونه $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ را تعریف می‌کنیم و تعاریف بقیه حالات را به خواننده واگذار می‌نماییم.

با توجّه به تعاریف همسایگی‌های $+\infty$ و ∞ داریم $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ بدین معنی است که برای هر $M>0$ عدد $\delta>0$ موجود باشد که برای هر $x\in D_f\cap(x_0,x_0+\delta)$ داشته باشیم $|f(x)|>M$ و توجّه نمایید که این تعریف معادل است با $\lim_{x\to x_0^+}|f(x)|=+\infty$. و $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ بدین معنی است که برای هر $M>0$ عدد $N>0$ موجود است که برای هر $x\in D_f$ که $|x|>N$ داشته باشیم $f(x)>M$.

مثال ۱.۴.۴. *فرض کنید $n\in\mathbb{N}$، در این صورت* $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

حل. فرض کنید $\epsilon>0$ دلخواه باشد در نظر می‌گیریم $M>\frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}}$. در این صورت اگر $x\neq 0$ و $|x|>M$ آنگاه $|x|>\frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}}$ و یا $|x|^n>\frac{1}{\epsilon}$ و در نتیجه $|x^n-0|=\frac{1}{|x^n|}<\epsilon$.

قضیه ۲.۴.۴. *فرض کنید $\lim_{x\to\infty} f(x)=b_1$ و $\lim_{x\to\infty} g(x)=b_2$ که در آن b_1 و b_2 دو عدد حقیقی هستند در این صورت*

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}(f\pm g)(x)=b_1\pm b_2 \qquad (2)\ \lim_{x\to\infty}(f.g)(x)=b_1.b_2$$

$$(3)\ \lim_{x\to\infty}(f/g)(x)=\frac{b_1}{b_2},b_2\neq 0 \qquad (4)\ \lim_{x\to\infty}|f(x)|=|b_1|$$

$$(5)\ \lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{b_1}$$

که اگر n زوج باشد باید $b_1>0$.

اثبات. این قضیه شبیه قضایای مشابه در حد معمولی اثبات می‌شود و اثبات آن به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. □

یادآوری ۳.۴.۴. *نظیر قضیه فوق وقتی‌که $x\to+\infty$ و یا $x\to-\infty$ نیز برقرار است.*

مثال ۴.۴.۴. *نشان دهید که* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ *موجود نیست.*

حل. فرض کنید که حد فوق موجود و برابر b باشد (فرض خلف) در نظر می‌گیریم $\epsilon = \frac{۱}{۲}$. در این صورت بنا به تعریف عدد مثبت M موجود است که برای هر x، اگر $x > M$ آنگاه $|\sin x - b| < \frac{۱}{۲}$ عدد طبیعی n را چنان در نظر می‌گیریم که $x_۱ = (۲n + \frac{۱}{۲})\pi$ و $x_۲ = (۲n - \frac{۱}{۲})\pi$ هر دو از M بزرگتر باشند در این صورت داریم

$$|\sin x_۱ - b| = |\sin(۲n\pi + \frac{\pi}{۲}) - b| = |۱ - b| < \frac{۱}{۲}$$
$$|\sin x_۲ - b| = |\sin(۲n\pi - \frac{\pi}{۲}) - b| = |-۱ - b| = |۱ + b| < \frac{۱}{۲}$$

حال با جمع کردن طرفین داریم $|۱ + b| + |۱ - b| < ۱$ و با استفاده از نامساوی مثلث

$$۲ = |۱ + b + ۱ - b| < ۱$$

که یك تناقض است، در نتیجه فرض خلف باطل است یعنی حد مورد بحث موجود نیست.

مثال ۵.۴.۴. *نشان دهید که* $\lim\limits_{x\to۱}\frac{x}{x-۱} = \infty$.

حل. بنا به تعریف کافی است نشان دهیم که $\lim\limits_{x\to۱}|\frac{x}{x-۱}| = +\infty$ برای این منظور، فرض کنید $M > ۰$ دلخواه باشد در این صورت در نظر می‌گیریم $۰ < \delta < \frac{۱}{M+۱}$، در نتیجه برای هر $x \neq ۱$ داریم اگر $|x - ۱| < \delta$ آنگاه چون $\delta < \frac{۱}{M+۱}$ پس $|x - ۱| < \frac{۱}{M+۱}$ و یا $M + ۱ < \frac{۱}{|x-۱|}$ در نتیجه

$$M < \frac{۱}{|x - ۱|} - ۱ = |\frac{۱}{x - ۱}| - |۱|$$

و با توجّه به نامساوی مثلث داریم

$$M < |\frac{۱}{x - ۱}| - |۱| \leq |\frac{۱}{x - ۱} + ۱| = |\frac{۱ + x - ۱}{x - ۱}|$$

و یا به عبارت دیگر $M < |\frac{x}{x-۱}|$ و بدین ترتیب حل مثال کامل شده است.

توجّه نمایید که در اینجا $\lim\limits_{x\to۱^-}\frac{x}{x-۱} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to۱^+}\frac{x}{x-۱} = +\infty$ امّا چون ∞، $+\infty$ و $-\infty$ عدد نیستند بنابراین قضایایی که در باره حد دیدیم ممکن است برای حد بینهایت برقرار نباشند.

قضیه ۶.۴.۴. *فرض کنید* c *عددی ثابت و* $x_۰$ *یك عدد حقیقی و یا یکی از نمادهای* ∞، $+\infty$ *و* $-\infty$ *باشد در این صورت اگر* $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x) = \infty$ *و* $\lim\limits_{x\to x_۰} g(x) = c$ *آنگاه* $\lim\limits_{x\to x_۰}(f + g)(x) = \infty$ *همچنین اگر* $+\infty$ *یا* $-\infty$ *را جایگزین* ∞ *نماییم قضیه همچنان به قوت خود باقی خواهد بود.*

اثبات. اثبات به عهده خواننده می‌باشد. □

قضیه ۷.۴.۴. *فرض کنیم $c \neq 0$ و x_0 عددی حقیقی یا یکی از نمادهای ∞، $+\infty$ و یا $-\infty$ باشد. در این صورت*

(الف) اگر $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *و* $\lim_{x\to x_0} g(x) = c$ *آنگاه*
$$\lim_{x\to x_0}(f.g)(x) = \begin{cases} +\infty & c > 0 \text{ اگر} \\ -\infty & c < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

(ب) اگر $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *و* $\lim_{x\to x_0} g(x) = c$ *آنگاه*
$$\lim_{x\to x_0}(f.g)(x) = \begin{cases} -\infty & c > 0 \text{ اگر} \\ +\infty & c < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

اثبات. به خواننده واگذار می‌شود. □

قضیه ۸.۴.۴. *شرط لازم و کافی برای $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ آن است که در یک همسایگی محذوف x_0 داشته باشیم $f(x) > 0$ و $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.*

اثبات. **لزوم شرط:** فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد در این صورت از اینکه $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ برای $M = \frac{1}{\epsilon} > 0$ داریم همسایگی $D = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ موجود است که برای هر x که $x \in D \cap D_f$ داریم $f(x) > M$ و یا $\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} = \epsilon$ در نتیجه برای هر $x \in D_f$ اگر $x \in D$ آنگاه $f(x) > 0$ و
$$\left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| = \frac{1}{f(x)} < \epsilon$$
و بدین‌ترتیب اثبات لزوم شرط کامل شده است.
بالعکس: فرض کنید که همسایگی محذوف $D_1 = (x_0 - \delta_1, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_1)$ از x_0 موجود باشد که برای هر $x \in D_f \cap D_1$ داشته باشیم $f(x) > 0$ و $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ برای اثبات $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$، فرض کنید $M > 0$ دلخواه باشد. در نظر می‌گیریم $\epsilon = \frac{1}{M} > 0$. از اینکه $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ پس همسایگی $D_2 = (x_0 - \delta_2, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_2)$ از x_0 موجود است که برای هر $x \in D_f \cap D_2$ داریم
$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M}$$
حال در نظر می‌گیریم $D = D_1 \cap D_2$ که در این صورت D همسایگی محذوفی از x_0 خواهد بود و برای هر $x \in D \cap D_f$ داریم $|\frac{1}{f(x)}| < \frac{1}{M}$ و $f(x) > 0$ بنابراین $\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M}$ و یا $f(x) > M$.
بنابراین اثبات کامل شده است. □

قضیه ۹.۴.۴. *شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ آن است که در یک همسایگی محذوف x_0، $f(x) < 0$ و $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.*

اثبات. شبیه قضیه ۸.۴.۴. □

قضیه ۱۰.۴.۴. *فرض کنید که برای دو تابع حقیقی f و g در یک همسایگی محذوف D از x_0 داشته باشیم $g(x) \leq f(x)$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ در این صورت $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.*

اثبات. بنا به قضیه ۸.۴.۴ همسایگی محذوف D_1 از x_0 موجود است که برای هر $x \in D_g \cap D_1$، داریم $g(x) > 0$ و $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$. در نظر می‌گیریم $D_2 = D_f \cap D_1$ در این صورت D_2 همسایگی محذوفی از x_0 بوده و برای هر $x \in D_2$ داریم $0 < g(x) \leq f(x)$ و یا $f(x) > 0$ و $\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{g(x)}$ بنابراین برای هر $x \in D_2$ از اینکه $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$، بنا به قضیه فشردگی (ساندویچ) داریم $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ پس بنا به قضیه ۸.۴.۴ داریم $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. □

قضیه ۱۱.۴.۴. *فرض کنید که برای دو تابع حقیقی f و g در یک همسایگی محذوف D از x_0 داشته باشیم $g(x) \leq f(x)$ و $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ در این صورت $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$.*

اثبات. شبیه برهان ۱۰.۴.۴. □

قضیه ۱۲.۴.۴. *فرض کنید f تابعی حقیقی، b عددی حقیقی، $+\infty$، $-\infty$ و یا ∞ باشد. در این صورت*

(الف) شرط لازم و کافی برای آن که $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ *آن است که* $\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = b$

(ب) شرط لازم و کافی برای آن که $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ *آن است که* $\lim_{x\to 0^-} f(\frac{1}{x}) = b$

اثبات. اثبات شبیه به اثبات قضیه ۸.۴.۴ است که به خواننده واگذار می‌شود. □

۵.۴ مسائل نمونه حل شده

مساله ۱.۵.۴. *فرض کنید n عدد طبیعی دلخواهی باشد مطلوب است*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^{2^n} - [x^{2^n}]}{3x^{2^n} - [x]^{2^n}}.$$

حل. با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{2x^{2n}-[x^{2n}]}{3x^{2n}-[x]^{2n}}$ بر x^{2n} داریم

$$\frac{2x^{2n} - [x^{2n}]}{3x^{2n} - [x]^{2n}} = \frac{2 - \frac{[x^{2^n}]}{x^{2^n}}}{3 - (\frac{[x]}{x})^{2^n}}$$

بنابراین کافی است $\lim_{x\to\infty} \frac{[x^{2n}]}{x^{2n}}$ و $\lim_{x\to\infty} \frac{[x]}{x}$ را محاسبه نماییم.
برای این منظور از این که $x^{2^n} > 0$ (چون $x \to +\infty$) و خواص تابع جزء صحیح داریم:

$$x^{2n} - 1 < [x^{2n}] \leq x^{2n} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^{2n}} < \frac{[x^{2n}]}{x^{2n}} \leq 1$$

اما چون $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{۱}{x۲^n}=۰$ پس با توجه به قضیه فشار داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[x۲^n]}{x۲^n}=۱$$

همچنین با توجه به تعریف تابع جزء صحیح و این که $x>۰$ داریم:

$$x-۱<[x]\leq x \Leftrightarrow ۱-\frac{۱}{x}<\frac{[x]}{x}\leq ۱$$

و چون $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$ ، پس بنابه قضیه فشار داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=۱$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{[x]}{x})^{۲^n}=۱$. بنابراین با توجه به قضیه **۲.۴.۴** داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x۲^n-[x۲^n]}{۳x۲^n-[x]۲^n}&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{۲-\frac{[x^{۲n}]}{x^{۲n}}}{۳-\frac{[x]}{x}}\right)^{۲n}\\&=\frac{۲-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[x^{۲n}]}{x^{۲n}}}{۳-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{[x]}{x}\right)^{۲n}}\\&=\frac{۲-۱}{۳-۱}=\frac{۱}{۲}\end{aligned}$$

مساله ۲.۵.۴. *مطلوب است محاسبه* $\lim\limits_{x\to۰}\frac{\sqrt{۱+\tan x}-\sqrt{۱+\sin x}}{x^۳}$.

حل. چون

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{۱+\tan x}-\sqrt{۱+\sin x}}{x^۳}&=\frac{۱+\tan x-۱-\sin x}{x^۳(\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱+\sin x})}\\&=\frac{\tan x(۱-\cos x)}{x^۳(\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱+\sin x})}\\&=\frac{۲\tan x\sin^۲\frac{x}{۲}}{x^۳(\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱+\sin x})}\\&=\frac{(\frac{\tan x}{x})(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}})^۲}{۲(\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱+\sin x})}\end{aligned}$$

اما چون

$$\lim_{x\to ۰}\sqrt{۱+\tan x}=\lim_{x\to ۰}\sqrt{۱+\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}=۱$$

پس با توجه به ۸.۲.۴ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+\tan x}-\sqrt{۱+\sin x}}{x^{۳}} &= \lim_{x\to ۰}\frac{(\frac{\tan x}{x})(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}})^{۲}}{۲(\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱+\sin x})}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to ۰}(\frac{\tan x}{x})\lim\limits_{x\to ۰}(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}})^{۲}}{۲(\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{۱+\tan x}+\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{۱+\sin x})}\\ &= \frac{۱}{۲(۱+۱)}=\frac{۱}{۴}\end{aligned}$$

مساله ۳.۵.۴. *مطلوب است محاسبه* $\lim\limits_{x\to +\infty} x(۱-\cos\frac{۱}{x})$.

حل. چون $x(۱-\cos\frac{۱}{x})=۲x\sin^{۲}\frac{۱}{x}$ در نتیجه با توجه به قضیه ۱۲.۴.۴ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} x(۱-\cos\frac{۱}{x}) &= \lim_{x\to +\infty} ۲x\sin^{۲}\frac{۱}{x}\\ &= \lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۲\sin^{۲}x}{x}\\ &= \lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۲\sin x}{x}\sin x\\ &= \lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۲\sin x}{x}\lim_{x\to ۰^{+}}\sin x=۱\times ۰=۰\end{aligned}$$

مساله ۴.۵.۴. *مطلوب است* $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱+\sin x-\cos x}{۱+\sin\alpha x-\cos\alpha x}$ *که در آن* α *عدد حقیقی دلخواهی است.*

حل. با توجه به قضیه ۸.۲.۴ و مثال ۹.۱.۴ داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۰}\frac{۱+\sin x-\cos x}{۱+\sin\alpha x-\cos\alpha x} &= \lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}+۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{\alpha x}{۲}\cos\frac{x}{۲}+۲\sin^{۲}\frac{\alpha x}{۲}}\\ &= \lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{x}{۲}(\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{x}{۲})}{\sin\frac{\alpha x}{۲}(\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{\alpha x}{۲})}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})}{\frac{\sin\frac{\alpha x}{2}}{\frac{\alpha x}{2}}(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{\alpha x}{2})}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{\frac{\sin\frac{\alpha x}{2}}{\frac{\alpha x}{2}}}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}+\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}}{\lim_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}+\lim_{x\to 0}\sin\frac{\alpha x}{2}} = \frac{1}{\alpha}$$

مساله ۵.۵.۴. *اگر دو تابع حقیقی f و g در همسایگی محذوفی از x_0 برابر باشند و حد f و g در نقطه x_0 موجود باشد آنگاه $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.*

حل. فرض کنید D_1 همسایگی محذوفی از x_0 باشد که برای هر $x\in D_1$، $f(x)=g(x)$ و فرض کنید که $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ و $\epsilon > 0$ دلخواه باشد در این صورت بنابه تعریف حد همسایگی‌های محذوف D_2 و D_3 از x_0 موجودند که برای هر $x\in D_2\cap D_f$ داریم

$$|f(x)-\alpha|< \frac{\epsilon}{2}$$

و برای هر $x\in D_3\cap D_g$ داریم

$$|g(x)-\beta|< \frac{\epsilon}{2}$$

حال اگر $D=D_1\cap D_2\cap D_3$ آنگاه D همسایگی محذوفی از x_0 می‌باشد که برای هر $x\in D$، $f(x)=g(x)$. بنابراین برای هر $x\in D\cap D_f = D\cap D_g$ داریم:

$$|f(x)-\alpha|< \frac{\epsilon}{2},\quad |g(x)-\beta|< \frac{\epsilon}{2},\quad f(x)=g(x)$$

و یا

$$|\alpha-\beta| = |g(x)-\beta-(f(x)-\alpha)| \leq |f(x)-\alpha|+|g(x)-\beta| < \epsilon$$

در نتیجه $\alpha=\beta$.

مساله ۶.۵.۴. *فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. مطلوب است* $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}$.

حل. با توجه به تساوی $x-1 = \sqrt[n]{x^n}-1^n = (\sqrt[n]{x}-1)\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x})^k$ داریم $\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt[n]{x}-1}{(\sqrt[n]{x}-1)\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x})^k}$ در نتیجه $\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x})^k}$ برای هر همسایگی محذوف از ۱.

بنابراین بنا به مساله قبل (مساله ۵.۵.۴) و قضیه ۸.۲.۴ داریم

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[n]{x}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sum\limits_{k=۰}^{n-۱}(\sqrt[n]{x})^k}=\frac{۱}{\sum\limits_{k=۰}^{n-۱}\lim\limits_{x\to ۱}x^{\frac{k}{n}}}=\frac{۱}{\sum\limits_{k=۰}^{n-۱}۱}=\frac{۱}{n}$$

مساله ۷.۵.۴. *مطلوب است* $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[۳]{\cos x}}{\sin^۲ x}$.

حل. داریم

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[۳]{\cos x}}{\sin^۲ x}\\
&=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۶]{\cos^۳ x}-\sqrt[۶]{\cos^۲ x}}{\sin^۲ x}\\
&=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۶]{\cos^۲ x}(\sqrt[۶]{\cos x}-۱)}{\sin^۲ x}\\
&=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۶]{\cos^۲ x}(\sqrt[۶]{\cos x}-۱)(\sqrt[۶]{\cos^۵ x}+\sqrt[۶]{\cos^۴ x}+\sqrt[۶]{\cos^۳ x}+\sqrt[۶]{\cos^۲ x}+\sqrt[۶]{\cos x}+۱)}{\sin^۲ x(\sqrt[۶]{\cos^۵ x}+\sqrt[۶]{\cos^۴ x}+\sqrt[۶]{\cos^۳ x}+\sqrt[۶]{\cos^۲ x}+\sqrt[۶]{\cos x}+۱)}\\
&=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۶]{\cos^۲ x}(\cos x-۱)}{\sin^۲ x(\sqrt[۶]{\cos^۵ x}+\sqrt[۶]{\cos^۴ x}+\sqrt[۶]{\cos^۳ x}+\sqrt[۶]{\cos^۲ x}+\sqrt[۶]{\cos x}+۱)}\\
&=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin^۲\frac{x}{۲}\sqrt[۶]{\cos^۲ x}}{۴\sin^۲\frac{x}{۲}\cos^۲\frac{x}{۲}(\sqrt[۶]{\cos^۵ x}+\sqrt[۶]{\cos^۴ x}+\sqrt[۶]{\cos^۳ x}+\sqrt[۶]{\cos^۲ x}+\sqrt[۶]{\cos x}+۱)}\\
&=\frac{-۱}{۲}\frac{\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt[۶]{\cos^۲ x}}{\lim\limits_{x\to ۰}\cos^۲\frac{x}{۲}(\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt[۶]{\cos^۵ x}+\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt[۶]{\cos^۴ x}+\cdots+\lim\limits_{x\to ۰}۱)}\\
&=\frac{-۱}{۲}\frac{۱}{۱(۱+\cdots+۱)}=\frac{-۱}{۱۲}
\end{aligned}$$

مساله ۸.۵.۴. *مطلوب است* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(۱-\sqrt{\sin x})(۱-\sqrt[۳]{\sin x})\cdots(۱-\sqrt[n]{\sin x})}{(۱-\sin x)^{n-۱}}$ *که در آن* $n\geq ۲$ *عدد طبیعی است.*

حل.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{(۱-\sqrt{\sin x})(۱-\sqrt[۳]{\sin x})\cdots(۱-\sqrt[n]{\sin x})}{(۱-\sin x)^{n-۱}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \prod_{k=۲}^{n} \frac{۱-\sqrt[k]{\sin x}}{۱-\sin x}$$
$$= \prod_{k=۲}^{n} \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sqrt[k]{\sin x}}{(۱-\sqrt[k]{\sin x})(۱+\sqrt[k]{\sin x}+\sqrt[k]{\sin^۲ x}\cdots+\sqrt[k]{\sin^{k-۱} x})}$$
$$= \prod_{k=۲}^{n} \frac{۱}{۱+\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(\sqrt[k]{\sin x}+\sqrt[k]{\sin^۲ x}\cdots+\sqrt[k]{\sin^{k-۱} x})}$$
$$= \prod_{k=۲}^{n} \frac{۱}{\underbrace{۱+۱+\cdots+۱}_{k \text{ تا}}} = \prod_{k=۲}^{n} \frac{۱}{k} = \frac{۱}{۲\times ۳\times\cdots\times n} = \frac{۱}{n!}$$

مساله ۹.۵.۴. *مطلوب است* $\lim_{x\to-۱}(-۱-x+[x+۲]-[-۱-x])$.

حل. با توجه به خواص جزء صحیح داریم

$$-۱-x+[x+۲]-[-۱-x] = -۱-x+[x]+۲+۱-[-x] = ۲-x+[x]-[-x]$$

برای محاسبه حد مورد بحث حد چپ و حد راست در نقطه -۱ را جداگانه محاسبه می‌کنیم. برای این منظور داریم اگر $x \to -۱^-$ آنگاه $x < -۱$، فرض کنید $-۲ < x < -۱$. در این صورت $۱ < -x < ۲$، بنابراین $[x] = -۲$ و $[-x] = ۱$، پس

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-۱^-}(-۱-x+[x+۲]-[-۱-x]) &= \lim_{x\to-۱^-}(۲-x+[x]-[-x])\\ &= \lim_{x\to-۱^-}(۲-x-۲-۱)\\ &= \lim_{x\to-۱^-}(-۱-x) = ۰\end{aligned}$$

اگر $x \to -۱^+$ آنگاه $x > -۱$، فرض کنید $-۱ < x < ۰$. در این صورت $۰ < -x < ۱$، بنابراین $[x] = -۱$ و $[-x] = ۰$، پس

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-۱^+}(-۱-x+[x+۲]-[-۱-x]) &= \lim_{x\to-۱^+}(۲-x+[x]-[-x])\\ &= \lim_{x\to-۱^+}(۲-x-۱-۰)\\ &= \lim_{x\to-۱^+}(۱-x) = ۲\end{aligned}$$

چون حد چپ و حد راست برابر نیستند بنابه قضیه ۲.۳.۴ حد مورد بحث وجود ندارد.

مساله ۱۰.۵.۴. *مطلوب است* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ *که در آن* $a_0, a_1, \cdots, a_n$ *و* $b_0, b_1, \cdots, b_m$ *اعدادی حقیقی،* $a_n \neq 0$ *و* $b_m \neq 0$.

حل. چون $a_n \neq 0$ و $b_m \neq 0$ پس

$$\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

$$=\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\left(\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\frac{a_{n-2}}{a_nx^2}+\cdots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+\frac{b_{m-2}}{b_mx^2}+\cdots+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_0}{b_mx^m}}\right)$$

و چون $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{c}{dx^k}=0$، پس با توجه به قضیه ۸.۲.۴ داریم

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\frac{a_{n-2}}{a_nx^2}+\cdots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+\frac{b_{m-2}}{b_mx^2}+\cdots+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_0}{b_mx^m}}\right)=1$$

بنابراین

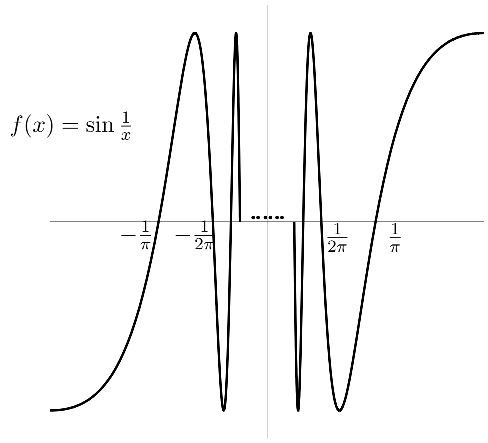
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\frac{a_{n-2}}{a_nx^2}+\cdots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+\frac{b_{m-2}}{b_mx^2}+\cdots+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_0}{b_mx^m}}\right)$$

$$=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m} & n=m \text{ اگر}\\ +\infty & a_nb_m>0, n>m \text{ اگر}\\ -\infty & a_nb_m<0, n>m \text{ اگر}\\ 0 & n<m \text{ اگر}\end{cases}$$

مساله ۱۱.۵.۴. *نشان دهید که* $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ *موجود نیست.*

حل. ابتدا توجه نمایید که $\sin\frac{1}{x}$ مانند تابع $\sin x$ تابعی کران‌دار است (عدد ۱ یک کران آن است). و توجه نمایید که وقتی $x \longrightarrow 0$ تابع $\sin\frac{1}{x}$ نوسان‌های فراوانی بین مقادیر ۱ و ۱− می‌کند و فاصله‌ی بین دفعات متوالی که محور xها را قطع می‌کند، کمتر می‌گردد. (شکل زیر را ببینید)



شکل ۲.۴: نمودار تابع $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

همچنین توجه نمایید که تابع $\sin\frac{۱}{x}$ در $x=۰$ تعریف شده نیست و وقتی $x\longrightarrow ۰$ در نزدیکی عددی نمی‌ماند زیرا همسایگی محذوفی از $x=۰$ نیست که تابع در آن یک نوسان کامل ننماید، (در واقع بی‌نهایت بار نوسان می‌کند) بدین ترتیب پیش‌بینی می‌کنیم که حد فوق وجود ندارد. این مطلب را به برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید $\lim\limits_{x\longrightarrow ۰}\sin\frac{۱}{x}=c$ با انتخاب $\epsilon=\frac{۱}{۲}$ (نصف طول نوسان) با توجه به تعریف حد عدد $\delta>۰$ موجود است که اگر $۰<|x|<\delta$ آن‌گاه $|\sin\frac{۱}{x}-c|<\frac{۱}{۲}$. با انتخاب عدد طبیعی n به اندازه کافی بزرگ برای اعداد $x_۱=\frac{۱}{(۲n+\frac{۱}{۲})\pi}$ و $x_۲=\frac{۱}{(۲n-\frac{۱}{۲})\pi}$ داریم $|x_۱|<\delta$ و $|x_۲|<\delta$ و از طرفی

$$\sin\frac{۱}{x_۱}=\sin(۲n\pi+\frac{\pi}{۲})=۱,\quad \sin\frac{۱}{x_۲}=\sin(۲n\pi-\frac{\pi}{۲})=-۱$$

در نتیجه $|\sin\frac{۱}{x_۱}-c|=|۱-c|<\frac{۱}{۲}$ و $|\sin\frac{۱}{x_۲}-c|=|-۱-c|<\frac{۱}{۲}$. بنابراین با جمع کردن این دو نامساوی داریم

$$۲=|۱-c+۱+c|\leq|۱-c|+|-۱-c|<\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

که یک تناقض است.

۶.۴ مسایل

۱. *حدهای زیر را با استفاده از تعریف حد نشان دهید.*

.۱
$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\quad (a>0)$$

.۲
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x-3}{x^2+x+1}=-2$$

.۳
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$$

.۴
$$\lim_{x\to 2}\frac{4}{x^2}=1$$

.۵
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{100x-\frac{1}{3}}=-3$$

.۶
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2$$

.۷
$$\lim_{x\to 1}(3x^2+2x-1)=4$$

.۸
$$\lim_{x\to 3}x^3=a^3$$

.۹
$$\lim_{x\to a}\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{a}$$

.۱۰
$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x+5}=3$$

.۱۱
$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2-8}=1$$

.۱۲
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-3}{x^2+x+1}=-3$$

.۱۳
$$\lim_{x\to -2}\frac{1+\frac{1}{x+1}}{x+2}=-\infty$$

.۱۴
$$\lim_{x\to \frac{3}{2}}x^2[x]=\frac{9}{4}$$

.۱۵
$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}[x^2]=0$$

.۱۶
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}$$

.۱۷
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{x-100}=0$$

.۱۸
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1-x}{1+x}=-1$$

.۱۹
$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-2}=+\infty$$

.۲۰
$$\lim_{x\to +\infty}(-\sqrt{x^2+2x-1})=-\infty$$

.۲۱
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^2-1)^2}=-\infty$$

.۲۲
$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt[3]{x^3-1}=-\infty$$

.۲۳
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-x}{x-1}=+\infty$$

.۲۴
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=-\infty$$

۲۵.
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

۲۶.
$$\lim_{x\to +\infty} (x - x^2) = -\infty$$

۲۷.
$$\lim_{x\to \infty} |4 - x^2| = +\infty$$

۲۸.
$$\lim_{x\to +\infty} [x] = +\infty$$

۲۹.
$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1}{x}} = +\infty$$

۳۰.
$$\lim_{x\to 2} \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2 - 4} = -\infty$$

۳۱.
$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} [3x] \sin \pi x = 1$$

۳۲.
$$\lim_{x\to \frac{1}{16}} \frac{[|x|]}{\sqrt{\frac{1}{4} - 3x}} = 0$$

۲. با استفاده از تعریف حد، نشان دهید که حدود زیر موجود نیستند.

۱.
$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

۲.
$$\lim_{x\to +\infty} \cos x$$

۳.
$$\lim_{x\to 3} x[x]$$

۴.
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

۵.
$$\lim_{x\to 2} [x^2 - 3x + 1]$$

۶.
$$\lim_{x\to 1} sgn(x - 1)$$

۷.
$$\lim_{x\to 0} [\frac{1}{x}]$$

۸.
$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - x}{x}$$

۹.
$$\lim_{x\to 5} (x - [x])$$

۱۰.
$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - x}{|x|^3 - x^3}$$

۳. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n} \\ x & x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$ نشان دهید $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود ندارد.

۴. همسایگی محذوفی در نقطه $x = 3$ چنان بیان کنید که:

(الف) $|x^2 + x - 12| < \frac{1}{10}$

ب) $|x^{۲}+x-۱۲|<\frac{۱}{۱۰۰}$

ج) $|x^{۲}+x-۱۲|<c$ (c عدد مثبت داده شده است)

۵. فرض کنید $M\geq ۰$ و برای همسایگی محذوفی از $x=۰$ داشته باشیم $f(x)\leq Mx$. نشان دهید $\lim_{x\to ۰} f(x)=۰$.

۶. فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=b_{۱}$ و $\lim_{x\to a} g(x)=b_{۲}$، نشان دهید:

الف) $\lim_{x\longrightarrow a} \max\{f,g\}(x)=\max\{b_{۱},b_{۲}\}$

ب) $\lim_{x\longrightarrow a} \min\{f,g\}(x)=\min\{b_{۱},b_{۲}\}$

۷. فرض کنید در همسایگی محذوفی از $x=a$، $f(x)\leq M$ که در آن M یک عدد حقیقی ثابتی است. نشان دهید که اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود باشد آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)\leq M$.

۸. نشان دهید $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{h\to ۰} f(a+h)$.

۹. حدود زیر را در صورت وجود محاسبه نمایید.

۱. $$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{m}{۱-x^{m}}-\frac{۱}{۱-x^{n}}\right)$$

۲. $$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^{۲}+ax+b}-\sqrt{x^{۲}+cx+d}$$

۳. $$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱}{x-۱}-\frac{۳}{x^{۳}-۱}\right)$$

۴. $$\lim_{x\to -\infty}\frac{x+۸}{\sqrt{x^{۲}-۷}+\sqrt{۲x^{۲}+۱۴}}$$

۵. $$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{x^{n}-۱}{x-۱}\right)$$

۶. $$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{۲x+۱}-۳}{\sqrt{x-۲}-\sqrt{۲}}$$

۷. $$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x}$$

۸. $$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{\sqrt{x}-۱}$$

۹. $$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[m]{x}-۱}{\sqrt[n]{x}-۱}\quad m,n\in\mathbb{N}$$

۱۰. $$\lim_{x\to ۱۰^{-}}\frac{[x^{۳}]-[x]^{۳}}{x-۱۰}$$

۱۱. $$\lim_{x\to ۱}(۱-x+[x]-[۱-x])$$

۱۲. $$\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{x-[x^{۲}]}{۲x-|x|}$$

۱۳.
$$\lim_{x\to 3}\frac{[x^2]-[x]^2}{x^2-9}$$

۱۴.
$$\lim_{x\to 3^+}\frac{[x]^2-9}{x-3}$$

۱۵.
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{[x^3]-[x^2]}{x^3-\operatorname{sgn}x}$$

۱۶.
$$\lim_{x\to 0}x^2\left[\frac{1}{x^2}\right]$$

۱۷.
$$\lim_{x\to 0^+}([x]-x)$$

۱۸.
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^{2000}-[x^{2000}]}{3x^{2000}-[x]^{2000}}$$

۱۹.
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{[x^2]+x}{[x^2]}$$

۲۰.
$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$

۲۱.
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$$

۲۲.
$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}|[x]|$$

۲۳.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3 3x}{x^3}$$

۲۴.
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sin\sqrt{\frac{x+1}{x}}-\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

۲۵.
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x^2}-\frac{1}{x^2}\right)$$

۲۶.
$$\lim_{x\to 0}\sqrt{\left|\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right|}$$

۲۷.
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+[x+\frac{1}{2}]}{x-2}$$

۲۸.
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{|\operatorname{sgn}[x-|x|]|+1}$$

۲۹.
$$\lim_{x\to 3}(x-3)^2\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$$

۳۰.
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}\right)$$

۳۱.
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$$

۳۲.
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\sin x)}{x}-x^2\sin\left[\frac{1}{x}\right]\right)$$

۳۳.
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$$

۳۴.
$$\lim_{x\to 0}(\cos x-1)\sin\left[\frac{1}{x^2}\right]$$

۳۵.
$$\lim_{x\to 0}\left(\csc x-\frac{1}{x}\right)$$

۳۶.
$$\lim_{x\to 3}(x-3)^2\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$$

۳۷.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sin x-\cos x}$$

۳۸.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+\cos x}$$

۳۹.
$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{x-\pi}$$

۴۰.
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x^7+1}-\sin\sqrt{x^9+1}\right)$$

۴۱.
$$\lim_{x\to+\infty}(1-x\cos x)$$

۴۲.
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}$$

۴۳.
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x^7+1}-\sin\sqrt{x^9+1}\right)$$

۴۴.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x}{[x]}$$

۴۵.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{1-\sqrt{1+\tan x}}$$

۴۶.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}$$

۴۷.
$$\lim_{x\to 1}\left((1-x)\tan\frac{\pi x}{2}\right)$$

۴۸.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{2x+5}$$

۴۹.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

۵۰.
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sin\sqrt{\frac{x+1}{x}}-\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

۵۱.
$$\lim_{x\to\frac{2}{5}}\left[[\frac{[x]}{2}]-5\right]$$

۵۲.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x^5}-\sqrt[5]{1+x^2}}{\sqrt[5]{1-x^2}-\sqrt[5]{1-x}}$$

۱۰. نشان دهید که اگر f کراندار و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$ آنگاه $\lim_{x\to+\infty}(f.g)(x)=0$.

۱۱. دو تابع f و g چنان مثال بزنید که هیچ یک در صفر دارای حد نباشند اما $f\pm g$ در صفر دارای حد باشند.

۱۲. دو تابع f و g چنان مثال بزنید که حداقل یکی از آن ها در صفر دارای حد نباشد

در حالیکه $f.g$ و $\frac{f}{g}$ در صفر دارای حد باشند.

۱۳. نشان دهید که برای تابع $f(x)=\begin{cases} 0 & 0<x<1 \\ \frac{1}{q} & (p,q)=1, x=\frac{p}{q}, 0<x<1 \end{cases}$ در هر نقطه $0<x<1$ حد موجود و برابر صفر است.

فصل ۵

پیوستگی

توابع پیوسته، دسته بسیار مهمی از توابع هستند که اجازه عبور حد از خودشان را می‌دهند. همچنانکه در تعریف حد در یك نقطه ذکر شد برای وجود حد، رفتار تابع در اطراف نقطه اهمیت دارد تا جایی که برای وجود حد، حتی تابع و مقدار تابع در نقطه می‌توانند متفاوت باشند. اگر در نقطه‌ای حد تابع موجود و برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد تابع را در آن نقطه پیوسته (متصل) گویند.

۱.۵ تعاریف وخواص عمومی توابع پیوسته

تعریف ۱.۱.۵. *تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را در نقطه $x_\circ\in D_f$ پیوسته گوییم هرگاه $\lim\limits_{x\to x_\circ}=f(x_\circ)$. یا به عبارت دیگر برای هر $\epsilon>\circ$ عدد $\delta>\circ$ موجود باشد که برای هر $x\in D_f$*

$$|x-x_\circ|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_\circ)|<\epsilon$$

تابع f را روی مجموعه $A\subseteq D_f$ پیوسته گوییم هرگاه f در تمام نقاط A پیوسته باشد و تابع f را پیوسته گوییم هرگاه روی D_f پیوسته باشد.

توجه نمایید منظور از پیوستگی تابع f روی $[a,b]$ این است که f روی (a,b) پیوسته بوده و

$$\lim_{x\to a^+}=f(a),\quad \lim_{x\to b^-}=f(b)$$

با توجه به مثالهای فصل حد، عملاً ما در آن مثالها نشان داده‌ایم که توابع ثابت، همانی، سینوس، کسینوس، قدرمطلق و تابع جزء صحیح در $(n\in\mathbb{Z})[n,n+۱)$ پیوسته هستند. اگر تابع f در نقطه‌ای پیوسته نباشد آنرا در آن نقطه ناپیوسته (گسسته یا منفصل) نامند. ناپیوستگی تابع در یك نقطه می‌تواند به دو صورت باشد یکی اینکه تابع در نقطه مورد نظر دارای حد نباشد و دوم آنکه حد تابع در آن نقطه موجود باشد ولی مقدار حد و مقدار تابع در آن نقطه متفاوت باشند در صورت اول ناپیوستگی تابع را

"ناپیوستگی اساسی" و در صورت دوم آنرا "ناپیوستگی رفع شدنی" نامیم. درناپیوستگی اساسی، نمی‌توان با تعریف مجدد تابع به طور مناسب ناپیوستگی را رفع نمود مانند ناپیوستگی تابع جزء صحیح درنقاط صحیح، امّا در مورد دوم با تعریف مناسب تابع در آن نقطه می‌توان ناپیوستگی تابع را به پیوستگی تابع در آن نقطه تبدیل کرد مانند تابع $f(x) = \frac{sinx}{x}$ که طبق آنچه در فصل حد دیدیم $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{sinx}{x} = ۱$ بنابراین اگر تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & x \neq ۰ \text{ اگر} \\ ۱ & x = ۰ \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف کنیم تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. تابع f را ناپیوسته نامیم هرگاه در هیچ نقطه‌ای پیوسته نباشد به عنوان مثال همچنان در فصل حد ذکر شد تابع دیریکله یعنی تابع مشخصه مجموعه اعداد گویا با ضابطه $X_Q(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ ۰ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در هیچ نقطه دارای حد نیست پس این تابع در هر نقطه دارای ناپیوستگی اساسی یا به عبارت دیگر ناپیوسته است اکنون به خواص جبری توابع پیوسته اشاره می‌کنیم که پیوستگی تحت اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم پایا است.

قضیه ۲.۱.۵. *فرض کنیم f و g دو تابع پیوسته باشند در این صورت:*

الف) $\alpha f + \beta g$ که در آن α و β اعداد حقیقی دلخواهی هستند پیوسته است

ب) $f.g$ تابعی پیوسته است

ج) $\frac{f}{g}$ تابعی پیوسته است

اثبات. با توجه قضیه ۸.۲.۴ و تعریف پیوستگی اثبات واضح است. توجه نمایید که در (ج) $\frac{f}{g}$ تابعی پیوسته در حوزه تعریف خود یعنی $D_f \cap D_g - \{x \in D_g : g(x) = ۰\}$ می باشد. بخصوص اگر f پیوسته باشد معکوس عددی آن یعنی $\frac{۱}{f}$ نیز پیوسته است. همچنین به کمك استقراء می‌توان دید که هرگاه توابع $f_۱, f_۲, \cdots, f_n$ پیوسته باشند در این صورت برای هر دسته $\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_n$ از اعداد حقیقی تابع $\sum\limits_{i=۱}^{n} \alpha_i f_i$ و $\prod\limits_{i=۱}^{n} f_i$ نیز پیوسته هستند، حال به بررسی ضرب (ترکیب) دو تابع پیوسته می‌پردازیم. □

قضیه ۳.۱.۵. *فرض کنید $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و f دو تابع باشند که g در نقطه $x_۰$ و f در نقطه $g(x_۰)$ پیوسته باشند در این صورت $f \circ g$ در نقطه $x_۰$ پیوسته است.*

اثبات. فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد. چون تابع f در نقطه $g(x_۰)$ پیوسته است پس $\delta_۱ > ۰$ موجود است که برای هر $y \in D_f$،

$$|y - g(x_۰)| < \delta_۰ \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(g(x_۰))| < \epsilon \qquad (۱.۵)$$

حال ازاینکه تابع g در نقطه x_0 پیوسته است پس برای $0 < \delta_1 = \epsilon$ عدد $0 < \delta$ موجود است که برای $x \in D_f$،

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(x_0)| < \epsilon \tag{۲.۵}$$

اکنون با توجه به ۱.۵ و ۲.۵ برای هر $x \in D_{fog}$ داریم اگر $|x - x_0| < \delta$ آنگاه

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

یا به عبارت دیگر بنا به تعریف پیوستگی تابع fog در نقطه x_0 پیوسته است. □

تذکر ۴.۱.۵. *چون تابع ثابت و تابع همانی پیوسته هستند بنا به ۲.۱.۵ داریم که هر چند جمله‌ای و هر تابع کسری پیوسته است. به عنوان یك مثال، نشان می‌دهیم که پیوستگی تحت عمل ریشه‌گیری نیز پایا است.*

مثال ۵.۱.۵. *اگر r عددی گویای مثبت باشد آنگاه تابع $f(x) = x^r$ در $(0, +\infty)$ پیوسته است.*

حل. با توجه قضیه ۸.۲.۴ یا ۲.۱.۵ کافی است نشان دهیم که برای هر عدد طبیعی n، $x^{1/n}$ پیوسته است. برای این منظور ابتدا ملاحظه نمایید که برای هر $x_0 \in (0, \infty)$ داریم.

$$\begin{aligned}
|x - x_0| &= |(x^{1/n})^n - (x_0^{1/n})^n| \\
&= \left|x^{1/n} - x_0^{1/n}\right| \sum_{i=1}^{n} x^{(n-i)/n} x_0^{i-1/n} \\
&\geq \left|x^{1/n} - x_0^{1/n}\right| x_0^{(n-1/n)}
\end{aligned}$$

در نتیجه برای هر $x \in (0, \infty)$ داریم

$$\left|x^{1/n} - x_0^{1/n}\right| \leqslant x_0^{(1-n)/n} |x - x_0| \tag{۳.۵}$$

حال برای هر $\epsilon > 0$، در نظر می‌گیریم $0 < \delta \leqslant x_0^{(1-n)/n}\epsilon$ در این صورت برای هر $x \in (0, \infty)$ اگر $|x - x_0| < \delta$ چون $\delta \leq x_0^{n-1/n}\epsilon$ پس $|x - x_0| < x_0^{n-1/n}\epsilon$ از طرفی بنا به نامساوی ۳.۵ داریم

$$|x^{1/n} - x_0^{1/n}| \leq x_0^{\frac{(n-1)}{n}} |x - x_0| < x_0^{1-n/n} . x_0^{n-1/n} \epsilon = \epsilon$$

اکنون به یکی از قضایای اساسی مبحث پیوستگی، معروف به قضیه بولزانو (بعضی آنرا قضیه مقدار میانی می‌نامند) می‌پردازیم که عملاً با اصل تمامیت معادل است و بیان می‌دارد که برای هر تابع پیوسته f بر $[a, b]$ که $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند آنگاه معادله $f(x) = 0$ دارای حداقل یك جواب در (a, b) است.

قضیه ۶.۱.۵ (قضیه بولزانو). *فرض کنید* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *پیوسته باشد و* $f(a)f(b) < 0$. *در این صورت* $c \in (a, b)$ *موجود است که* $f(c) = 0$.

اثبات. فرض کنید $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ و در نظر می‌گیریم $A = \{x \in [a, b] : f(x) \leqslant 0\}$ در این صورت $A \subseteq [a, b]$ پس A کراندار است و چون $f(a) < 0$ پس $a \in A$ و در نتیجه $A \neq \{\}$ بنابراین بنا به اصل تمامیت، سوپریمم A موجود است فرض کنید $\sup A = c$ ادعا می کنیم $f(c) = 0$ زیرا اگر اگر $f(c) \neq 0$ (فرض خلف) در این صورت بنا به ۱۳.۲.۴ (۴) یا $f(c) < 0$ و یا $f(c) > 0$. اگر $f(c) > 0$ چون تابع f در c پیوسته است پس بنا به قضیه ۱۳.۲.۴ در یک همسایگی از c مانند $D = (c - \delta, c + \delta)$ مثبت است یعنی برای هر $x \in D$، $f(x) > 0$ از طرفی چون $c - \delta < c$ و $c = \sup A$ پس بنا به خاصیت مشخصه سوپریمم ۴.۴.۱(ب) عضو $x_0 \in A$ موجود است که $c - \delta < x_0 \leq c$، پس $f(x_0) \leq 0$ و چون $(c - \delta, c) \subseteq D$ پس $f(x_0) > 0$، که یك تناقض است. اگر $f(c) < 0$، چون f در c پیوسته است پس بنا به قضیه ۱۳.۲.۴ همسایگی $D_1 = (c - \delta_1, c + \delta_1)$ از c موجود است که برای هر $x \in D_1$، $f(x) < 0$ و $c + \delta_1 < b$ حال در نظر می گیریم $c < x_1 < c + \delta_1$ پس $f(x_1) < 0$، در نتیجه $x_1 \in A$ که متناقض با فرض $\sup A = c$. بنابراین فرض خلف باطل است یعنی $f(c) = 0$. □

اکنون به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که مفهوم پیوستگی را با مسمی می‌نماید، بدین‌ترتیب که تابعی پیوسته است که نمودار آن در هیچ نقطه‌ای بریدگی نداشته باشد یا به عبارت دیگر پیوستگی تابع به معنی پیوستگی نمودار تابع است.

قضیه ۷.۱.۵ (قضیه مقدار میانی). *فرض کنید* f *بر* $[a, b]$ *پیوسته باشد. در این صورت برای هر* $x_1 < x_2$ *که* $f(x_1) \neq f(x_2)$، *تابع* f *تمام مقادیر بین* $f(x_1)$ *و* $f(x_2)$ *را می‌گیرد یعنی برای هر* y *بین* $f(x_1)$ *و* $f(x_2)$، $x \in (x_1, x_2)$ *موجود است که* $f(x) = y$.

اثبات. چون $f(x_1) \neq f(x_2)$، بنا به اصل تثلیث قوی یعنی ۱۳.۲.۱(۴) می‌توان بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض کرد $f(x_1) < f(x_2)$. فرض کنید

$$f(x_1) < y < f(x_2) \qquad (۴.۵)$$

دلخواه باشد. تابع g بر $[a, b]$ را با ضابطه $g(x) = y - f(x)$ در نظر می‌گیریم، که چون تابع f و تابع ثابت y پیوسته هستند پس g پیوسته است و همچنین بنا به (۴.۵) داریم:

$$g(x_1) = y - f(x_1) > 0, \quad g(x_2) = y - f(x_2)$$

پس شرایط قضیه بولزانو برای تابع g روی $[x_1, x_2]$ صادق است پس $x \in (x_1, x_2)$ موجود است که $g(x) = 0$ یا به عبارت دیگر $y - f(x) = 0$، یعنی $f(x) = y$، که بدین‌ترتیب اثبات قضیه کامل شده است. □

اکنون نشان می‌دهیم که برای هر $b > 0$ و هر عدد طبیعی n، عدد مثبت منحصربه‌فرد a موجوداست که $a^n = b$. به عبارت دیگر برای هر عدد مثبت b، ریشه $n-$ام b موجود است که در حد مثبت بودن منحصر به فرد است. بدین ترتیب از قضیه بولزانو (مقدار میانی) وجود اعداد گنگ قابل اثبات است که نمایانگر معادل بودن قضیه بولزانو با اصل تمامیت است (قضیه ۱۶.۴.۱ را ببینید).

مثال ۸.۱.۵. *فرض کنید $b > 0$ و $n \in \mathbb{N}$، در این صورت عدد منحصر به فرد $a > 0$ موجود است* $a^n = b$.

حل. تابع $f(x) = x^n - b$ را در نظر می‌گیریم که یك چندجمله‌ای بر حسب x است پس پیوسته می‌باشد. حال f را روی بازه $[0, b+1]$ در نظر می‌گیریم که داریم

$$f(b+1) = (b+1)^n - b > 0, \quad f(0) = -b < 0$$

پس بنا به قضیه بولزانو $a \in (0, b+1)$ موجود است که $f(a) = 0$. یا به عبارت دیگر $a^n - b = 0$ که معادل است با $a^n = b$ و بدین‌ترتیب قسمت وجودی مثال حل شده است. برای قسمت منحصر به فردی، فرض کنید اعداد مثبت $a_1 \neq a_2$ موجود باشند که $a_1^n = b = a_2^n$. در نتیجه

$$a_1^n - a_2^n = 0$$

یا به طور معادل

$$(a_1 - a_2)\sum_{j=1}^{n} a_1^{n-j} a_2^{j-1} = 0$$

اما چون a_1 و a_2 مثبت هستند و اعداد مثبت تحت اعمال ضرب و جمع القاء شده از $\mathbb{R}$ بسته هستند (۱.۲.۱)، پس $\sum_{j=1}^{n} a_1^{n-j} a_2^{j-1} > 0$ در نتیجه بنا به ۱۰.۲.۱ (۲) داریم $a_1 - a_2 = 0$ و یا $a_1 = a_2$ که متناقض با فرض $a_1 \neq a_2$ پس فرض خلف $a_1 \neq a_2$ باطل است و چنین aیی منحصربه‌فرد است.

نتیجه ۹.۱.۵. *برای هر عدد طبیعی فرد n و $b < 0$ فقط یك عدد $a < 0$ وجود دارد که* $a^n = b$.

اکنون به این واقعیت می‌پردازیم که هر تابع پیوسته بر هر بازه بسته کراندار است.

۲.۵ خواص دیگر توابع پیوسته

اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد در این صورت اگر حوزه تعریف f بسته و کراندار نباشد نمی‌توان تضمین کرد که f تابعی کراندار باشد به عنوان مثال تابع $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$، اگر چه حوزه تعریف آن یعنی بازه $(0, 1)$ کراندار است اما چون بسته نیست f کراندار نیست. همچنین تابع $g : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = \frac{1}{2-x}$، اگر چه g پیوسته و کراندار است و داریم

$$\inf\{g(x) : x \in (0, 1)\} = \frac{1}{2}, \quad \sup\{g(x) : x \in (0, 1)\} = 1$$

ولی تابع به کران‌های خود نمی‌رسد یعنی برای هر $x \in (\circ, ۱)$ داریم $۱ > g(x) > \frac{۱}{۲}$. در قضایای مطالعه شده در این بخش نشان می‌دهیم که برای توابع پیوسته در صورتیکه حوزه تعریف آنها به بازه‌های بسته محدود شود تابع نه تنها کراندار است بلکه کرانهای خود را نیز اختیار می‌کند و حتی نشان می‌دهیم که در این حالت بُرد تابع نیز یك بازه بسته است.

قضیه ۱.۲.۵. *اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f کراندار است.*

اثبات. در نظر می‌گیریم $A = \{x \in [a,b]$ کراندار است: $[a,x]$ بر $f\}$. در این صورت $A \subseteq [a,b]$ در نتیجه A کراندار است و چون $a \in A$ پس $A \neq \{\}$. در نتیجه بنا به اصل تمامیت ۷.۴.۱ سوپریمم A موجود است فرض کنید $\sup A = \alpha$. ادعا می‌کنیم که $\alpha = b$. زیرا در غیر این صورت چون b یك کران بالای A است پس $\alpha < b$ (فرض خلف). در این صورت f در α پیوسته است پس f در همسایگی از α مانند $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ کراندار است (قضیه ۱.۲.۴) می‌توان $\delta > \circ$ را چنان اختیار کرد که $(\alpha-\delta,\alpha+\delta) \subseteq [a,b]$. حال چون $\alpha - \delta < \alpha$، پس بنا به خاصیت مشخصه سوپریمم (۴.۴.۱). عضوی از A مانند x موجود است که $x - \delta < x < \alpha$ بنابراین f بر $[a,x]$ کراندار است. از طرفی برای هر y که $\alpha < y < \alpha + \delta$، f بر $[x,y]$ نیز کراندار است پس f بر $[a,x] \cup [x,y] = [a,y]$ کراندار است. در نتیجه بنا به تعریف A، $y \in A$، اما $y > \alpha$ و این یك تناقض است. پس فرض خلف باطل است یعنی $\alpha = b$. اکنون نشان می‌دهیم که f بر $[a,b]$ کراندار است. برای این منظور چون f در b پیوسته است پس بنا به تعریف پیوستگی در b، $\delta > \circ$ چنان موجود است که f بر $(b-\delta, b]$ کراندار است. همچنین با توجه به خاصیت مشخصه سوپرمم عضو $x \in A$ موجود است که f بر $[a,x]$ کراندار باشد. از طرفی f بر $[x,b] \subseteq (b-\delta,b]$ نیز کراندار است. پس f بر اجتماع آنها یعنی $[a,x] \cup [x,b] = [a,b]$ کراندار است و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل است. □

در قضیه زیر یکی از خواص مهم توابع پیوسته بر بازه‌های بسته را بیان می‌کنیم. توجه نمایید که بسته بودن در قضیه زیر از خواص اساسی است که قابل حذف نیست.

قضیه ۲.۲.۵. *اگر f بر $[a.b]$ پیوسته باشد آنگاه f بر $[a,b]$ هم ماکزیمم و هم می‌نیمم خود را اختیار می‌کند یعنی اعضاء $x_\circ$ و $x_۱$ از بازه $[a,b]$ موجودند که*

$$f(x_\circ) = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}, \quad f(x_۱) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

اثبات. در نظر می‌گیریم $A = \{f(x) : x \in [a.b]\}$. بنا به قضیه قبل (۱.۲.۵) Aکراندار است و چون به وضوح $A \neq \{\}$، پس بنا به اصل تمامیت سوپرمم و اینفیمم A وجود دارند فرض کنید $\sup A = \alpha$ و $\inf A = \beta$ برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که $x_\circ$ و $x_۱$ در $[a,b]$ موجودند که $\alpha = f(x_۱)$ و $\beta = f(x_\circ)$ به دلیل تشابه استدلال، ما فقط وجود $x_۱$ با شرط $f(x_۱) = \alpha$ را اثبات می‌نماییم. و وجود $x_\circ$ با شرط $f(x_\circ) = \beta$ به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. فرض

کنید برای هر $x \in [a,b]$، $f(x) \neq \alpha$ (فرض خلف) و چون α یک کران بالای A است پس داریم $f(x) < \alpha$ برای تمام $x \in [a,b]$. تابع g روی $[a,b]$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم.

$$g(x) = \frac{۱}{\alpha - f(x)}$$

دراین صورت بنابه ۲.۱.۵(ج)، g بر $[a,b]$ تابعی‌پیوسته و مثبت است. از اینکه $\sup A = \alpha$، بنا به خاصیت مشخصه سوپرمم، برای هر $\epsilon > ۰$، عضو $x \in [a,b]$ موجود است که

$$\alpha - \epsilon < f(x) < \alpha$$

یا به طور معادل $۰ < \alpha - f(x) < \epsilon$. در نتیجه $\frac{۱}{\alpha - f(x)} > \frac{۱}{\epsilon}$، به عبارت دیگر برای هر $\epsilon > ۰$، عضو $x \in [a,b]$ موجود است که $g(x) > \frac{۱}{\epsilon}$ و این بدین‌معنی است که g بر $[a,b]$ کراندار نیست که متناقض با قضیه قبل ۱.۲.۵ می‌باشد. پس فرض خلف باطل است و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل شده است. □

اکنون در موقعیتی هستیم که نشان دهیم که تصویر هر تابع پیوسته بر هر بازه بسته، یک بازه بسته است. در واقع اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه تصویر $[a,b]$ تحت f یعنی $f([a,b])$ که همان بُرد f است بازه‌ای به شکل $[c_۱, c_۲]$ است که در آن

$$c_۱ = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}, \quad c_۲ = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

قضیه ۳.۲.۵. *اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه برد f نیز یک بازه بسته است. یا به عبارت دیگر $c_۱ \leq c_۲$ موجودند که $f : [a,b] \longrightarrow [c_۱, c_۲]$ پوشا است.*

اثبات. با توجه به قضیه قبل ۲.۲.۵، فرض کنید

$$c_۱ = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$$
$$c_۲ = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

در این صورت اگر $c_۱ = c_۲$ که قضیه اثبات شده است. پس فرض کنیم که $c_۱ < c_۲$. کافی است نشان دهیم که f تمام مقادیر بین $c_۱$ و $c_۲$ را می‌گیرد. بنابه قضیه ۲.۲.۵ داریم $c_۱ = f(x_۰)$ و $c_۲ = f(x_۱)$ که $x_۰$ و $x_۱$ اعضایی از $[a,b]$ هستند. بنابراین داریم $f(x_۰) < f(x_۱)$ و چون f تابع است پس $x_۰ \neq x_۱$. فرض کنید $x_۰ < x_۱$. حال چون f بر $[a.b]$ پیوسته است پس بر هر زیربازه آن از جمله بازه $[x_۰, x_۱]$ نیز پیوسته خواهد بود. پس بنابه قضیه مقدار میانی f تمام مقادیر بین $f(x_۰)$ و $f(x_۱)$ را می‌گیرد. □

توجه نمایید که در قضیه فوق نمی‌گوییم $f(a) = c_۱$ و $f(b) = c_۲$. به عنوان مثال اگر $f(x) = |x|$ بر بازه $[-۱, ۱]$ باشد آنگاه $f([-۱,۱]) = [۰, ۱]$ ولی $f(-۱) \neq ۰$. درحقیقت

$$f(-۱) = f(۱) = \max\{f(x) : x \in [-۱, ۱]\} = ۱$$

همچنین توجه نمایید که قضیه فوق را می‌توان به هر بازه‌ای نه لزوماً بسته به شرح زیر تعمیم داد. فرض کنید I بازه‌ای دلخواه باشد که $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است. اگر f هردو مقداری مثل $y_۱ \neq y_۲$ را اختیار کند آنگاه f هر مقدار بین آن دو را نیز اختیار خواهد کرد. فرض کنید a و $b \in I$ چنان باشند که $f(a) = y_۱$ و $f(b) = y_۲$. در این صورت چون $y_۱ \neq y_۲$ پس $a \neq b$. فرض کنید $a < b$. در این صورت تحدید f به بازه بسته و کراندار $[a, b]$ نیز پیوسته است پس بنابه قضیه مقدار میانی f تمام مقادیر بین $y_۱$ و $y_۲$ را اختیار می‌کند.

بحث خود را درباره خواص دیگری از توابع پیوسته ادامه می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۵. *تابع $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را صعودی (نزولی) گوییم هرگاه برای هر دو عدد حقیقی $x < y$ در حوزه تعریف f، داشته باشیم*

$$f(x) \leq f(y) \quad (f(x) \geq f(y))$$

هر تابع صعودی یا نزولی را یك تابع یکنوا نامند. تابع اکیداً یکنوا. تابعی است که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد. توجه نمایید که هر تابع اکیداً یکنوا، یك به یك بوده و در نتیجه معکوس‌پذیر است. یعنی تابع $f^{-۱}: R_f \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان موجود است که $f^{-۱} of: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ همانی است. توجه نمایید که اگر f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد $f^{-۱}$ نیز چنین است.

قضیه ۵.۲.۵. *فرض کنید $f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و اکیداً صعودی باشد در این صورت تابع معکوس f یعنی تابع $f^{-۱}: f((a, b)) \longrightarrow \mathbb{R}$ نیز تابعی پیوسته اکیداً صعودی خواهد بود. برای توابع پیوسته و اکیداً نزولی نیز حکم مشابهی برقرار است. بعلاوه مجموعه $f((a, b))$ نیز یك بازه باز است.*

اثبات. فرض کنید $y_۱, y_۲ \in f((a, b))$ و $y_۱ < y_۲$. آنگاه چون تابع f، یك به یك است پس اعداد $x_۱ \neq x_۲$ در (a, b) موجودند که $f(x_۱) = y_۱$ و $f(x_۲) = y_۲$ و چون تابع f اکیداً صعودی است پس $x_۱ < x_۲$ زیرا اگر $x_۱ > x_۲$ آنگاه $f(x_۱) > f(x_۲)$، یعنی $y_۱ > y_۲$ که متناقض با فرض است. اما در این صورت داریم $x_۱ = f^{-۱}(y_۱)$ و $x_۲ = f^{-۱}(y_۲)$. در نتیجه فرض $y_۱ < y_۲$ نتیجه می‌دهد $f^{-۱}(y_۱) < f^{-۱}(y_۲)$ یعنی تابع $f^{-۱}$ روی $f((a, b))$ اکیدا صعودی است. چون (a, b) یك بازه است پس طبق آنچه که بعد از اثبات قضیه ۳.۲.۵ دیدیم $f((a, b))$ نیز یك بازه است. برای اینکه نشان دهیم که $f((a, b))$ یك بازه باز و $f^{-۱}$ پیوسته است ابتدا ملاحظه کنید که اگر $x_۱ < x_۲$ در بازه (a, b) دلخواه باشند در این صورت بنا به ۳.۲.۵ داریم $f([x_۱, x_۲]) = [c_۱, c_۲]$ که در آن

$$c_۱ = \min\{f(x) : x \in [x_۱, x_۲]\}, \quad c_۲ = \max\{f(x) : x \in [x_۱, x_۲]\}$$

و چون f اکیداً صعودی است پس $c_۱ = f(x_۱)$ و $c_۲ = f(x_۲)$. بنابراین $f((x_۱, x_۲)) = (c_۱, c_۲)$. اکنون نشان می‌دهیم که تابع $f^{-۱}$ بر $f((a, b))$ پیوسته است. برای این منظور بنا به تعریف کافی است نشان دهید که بر هر نقطه از $f((a, b))$ پیوسته است. فرض کنید $y_۰ \in f((a, b))$ دلخواه باشد. آنگاه چون f، یك به یك است $x_۰$ منحصر به فردی در بازه (a, b) موجود است که $f(x_۰) = y_۰$ فرض کنید

$\epsilon > ۰$ دلخواه باشد چون (a,b) باز و $x_۰ \in (a,b)$، $\epsilon_۱ > ۰$ موجود است که $\epsilon_۱ < \epsilon$ و
$$(x_۰ - \epsilon_۱, x_۰ + \epsilon_۱) \subseteq (a,b)$$

حال فرض کنید $\epsilon_۲ > ۰$ چنان باشد که $(x_۰ - \epsilon_۲, x_۰ + \epsilon_۱) \subseteq (x_۰ - \epsilon_۱, x_۰ + \epsilon_۱)$ و قرار می‌دهیم

$$y_۱ = f(x_۰ - \epsilon_۲), \quad y_۲ = f(x_۰ - \epsilon_۱)$$

دراین‌صورت طبق مشاهدات بالا $y_۱ < y_۰ < y_۲$، فرض‌کنید $۰ < \delta \leq \min\{y_۰ - y_۱, y_۲ - y_۰\}$ در این صورت به سادگی می‌توان دید که برای هر $y \in f((a,b))$ که $|y - y_۰| < \delta$ داریم
$$|f^{-۱}(y) - f^{-۱}(y_۰)| < \epsilon_۱ < \epsilon$$

یعنی $f^{-۱}$ تابعی پیوسته است همچنین $(y - \delta, y + \delta) \subseteq f((a,b))$ که خود نمایانگر باز بودن بازه $f((a,b))$ است. □

به عنوان کاربردی از قضیه فوق تابع $f(x) = x^۲$ روی $(۰,\infty)$تابعی پیوسته و اکیدا صعودی خواهد بود. به طور کلی با استدلال مشابهی برای هر $r \in \mathbb{Q}$ تابع $f(x) = x^r$ بر حوزه تعریف مناسبی پیوسته است. اکنون به نوع دیگری از پیوستگی اشاره می‌کنیم که فقط در یك نقطه قابل تعریف نیست و پیوستگی تابع از آن نتیجه می‌شود و به پیوستگی یکنواخت موسوم است.

۳.۵ پیوستگی یکنواخت

تعریف ۱.۳.۵. *تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را پیوسته یکنواخت گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > ۰$، $\delta > ۰$ چنان موجود باشد که برای هر $x_۱$ و $x_۲$ در دامنه تابع f،*
$$|x_۱ - x_۲| < \delta \Rightarrow |f(x_۱) - f(x_۲)| < \epsilon$$

از تعریف فوق واضح است که اگر تابع f پیوسته یکنواخت باشد آنگاه پیوسته است. ولی عکس آن در حالت کلی برقرار نیست به عنوان مثال تابع $f(x) = x^۲$ روی هیچ بازه بازی پیوسته یکنواخت نیست. و به عنوان مثال تابع $f(x) = \sin x$ به طور یکنواخت پیوسته است زیرا برای هر $\epsilon > ۰$ کافی است $۰ < \delta \leq \epsilon$ در نظر بگیریم در این صورت اگر $|x_۱ - x_۲| < \delta$ آنگاه چون $\delta \leq \epsilon$ پس $|x_۱ - x_۲| < \epsilon$ امّا بنابه آنچه که در فصل حد دیدیم همواره
$$|\sin x_۱ - \sin x_۲| \leq |x_۱ - x_۲|$$

د رنتیجه
$$|\sin x_۱ - \sin x_۲| < \epsilon$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که تابع $\cos x$، تابع $\frac{۱}{۱+x^۲}$ و تابع قدرمطلق به طور یکنواخت پیوسته

هستند. بطور کلی تحدید یك تابع پیوسته بر یك بازه بسته بطور یکنواخت پیوسته است.

۴.۵ تابع جمعی

تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را جمعی نامیم هرگاه برای هر دو عدد حقیقی x و y داشته باشیم. (بخش ۸.۳ تمرین ۶ را ببینید)

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

به عنوان مثال تابع $f(x)=ax$ که در آن a عددی ثابت است تابعی جمعی است.

۵.۵ خواص تابع جمعی

فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی جمعی باشد در این صورت:

(۱) $f(0)=0$

(۲) برای هر عدد گویای r، $f(rx)=rf(x)$

(۳) اگر f در یك نقطه پیوسته باشد آنگاه f به طور یکنواخت پیوسته است.

(۴) اگر f صعودی یا نزولی باشد آنگاه f به طور یکنواخت پیوسته است.

اثبات.

(۱) داریم:

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$$

در نتیجه $f(0)=0$

(۲) اگر $n\in\mathbb{N}$ آنگاه

$$f(nx)=f(\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n\text{مرتبه}})=\underbrace{f(x)+f(x)+\cdots+f(x)}_{n\text{مرتبه}}=nf(x)$$

بنابراین

$$f(x)=f\left[\frac{nx}{n}\right]=f\left[n\frac{x}{n}\right]=nf\left[\frac{x}{n}\right]$$

یا

$$f\left[\frac{x}{n}\right]=\frac{1}{n}f(x)$$

حال برای هر $x \in \mathbb{R}$، بنا به (۱) داریم

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

یا به عبارت دیگر $f(-x) = -f(x)$. بنابراین برای هر $m \in \mathbb{Z}$، داریم $f(mx) = mf(x)$. زیرا اگر $m < 0$ آنگاه $-m \in \mathbb{N}$ و درنتیجه

$$f(mx) = f((-m)(-x)) = -mf(-x) = m(-f(-x)) = mf(x)$$

اکنون برای $r \in \mathbb{Q}$، بنا به تعریف اعداد گویا، اعداد $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ موجودند که $r = \frac{m}{n}$ درنتیجه

$$f(rx) = f\left[\frac{m}{n}x\right] = f\left[m\frac{x}{n}\right] = mf\left[\frac{x}{n}\right] = \frac{m}{n}f(x) = rf(x)$$

(۳) فرض کنید f در نقطه x_0 پیوسته و $\epsilon > 0$ دلخواه باشد در این صورت $\delta > 0$ چنان موجود است که برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

در این صورت اگر برای $x \in \mathbb{R}$، $|x| < \delta$ آنگاه $|(x + x_0) - x_0| = |x| < \delta$ پس

$$|f(x)| = |f(x + x_0 - x_0)| = |f(x + x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

یعنی f در 0 پیوسته است. حال فرض کنید x_1 و x_2 دو عدد حقیقی دلخواه باشند که $|x_1 - x_2| < \delta$ در این صورت چون

$$|(x_1 - x_2) - 0| = |x_1 - x_2| < \delta$$

پس $|f(x_1 - x_2) - f(0)| < \epsilon$ امّا بنا به (۱) و (۲) داریم

$$|f(x_1 - x_2) - f(0)| = |f(x_1) - f(x_2)|$$

در نتیجه داریم

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

یعنی f به طور یکنواخت پیوسته است.

(۴) با توجه به (۳) کافی است نشان دهیم که تابع f فقط در 0 پیوسته است که اثبات آنرا به خواننده واگذار می‌کنیم.

□

۶.۵ مسایل نمونه حل شده

مساله ۱.۶.۵. *فرض کنید $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته باشند. نشان دهید که توابع $\max\{f, g\}$ و $\min\{f, g\}$ که در آن $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ و $\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ نیز پیوسته هستند.*

حل. توجه نمایید که همواره داریم:

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{۲}$$
$$\min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{۲}$$

در نتیجه داریم

$$\max\{f, g\}(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{۲}$$
$$\min\{f, g\}(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{۲}$$

که چون تابع قدرمطلق پیوسته است بنا به ۲.۱.۵ توابع فوق پیوسته خواهند بود.

مساله ۲.۶.۵. *نشان دهید که تابع $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ در مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است و نمودار آنرا رسم نمایید.*

حل. چون تابع جزء صحیح در نقاط غیر صحیح و تابع ریشه‌گیری مثال ۵.۱.۵ پیوسته هستند بنابراین بنا به قضیه ۲.۱.۵ داریم که تابع f در تمام نقاط غیر صحیح پیوسته است. حال فرض کنیم $x = n$ عددی صحیح باشد در این صورت بنا به آنچه که در قسمت حد دیده‌ایم داریم

$$\lim_{x \longrightarrow n^-} [x] = n - ۱, \quad \lim_{x \longrightarrow n^+} [x] = n$$

پس داریم:

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [x] + \sqrt{\lim_{x \to n^+} x - \lim_{x \to n^+} [x]}$$
$$= n + \sqrt{n - n} = n$$

(چون تابع $\sqrt{x}$ پیوسته است) همچنین

$$\begin{aligned}\lim_{x\to n^-} f(x) &= \lim_{x\to n^-}[x] + \sqrt{\lim_{x\to n^-} x - \lim_{x\to n^-}[x]}\\ &= n - ۱ + \sqrt{n-(n-۱)}\\ &= n - ۱ + (+۱) = n\end{aligned}$$

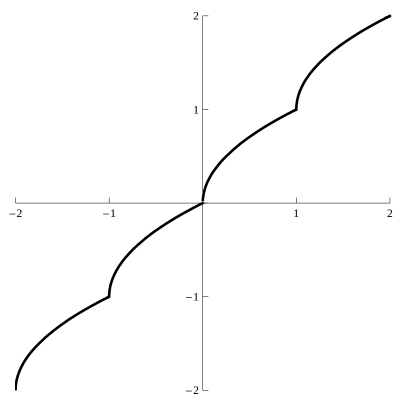
در نتیجه $\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^-} f(x) = n$ و بنابراین

$$\lim_{x\to n} f(x) = n = f(x)$$

پس تابع f پیوسته است. برای رسم نمودار تابع فوق برای $x \in [n, n+۱)(n \in \mathbb{Z})$ داریم:

$$f(x) = n + \sqrt{x-n}$$

و این بدین معنی است که تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را به نقطه n انتقال داده‌ایم پس نمودار تابع فوق به صورت زیر خواهد بود. (بخش ۶.۳ را ببینید)



شکل ۱.۵: نمودار تابع $f(x) = [x] + \sqrt{x-[x]}$

مساله ۳.۶.۵. *فرض کنید b و c مقادیری دلخواه و ثابت باشند a را چنان تعیین کنید که تابع f با ضابطه*

$$f(x) = \begin{cases}\sin x & x \le c\\ ax+b & x > c\end{cases}$$

همواره پیوسته باشد.

حل. چون توابع $\sin x$ و $ax+b$ همواره پیوسته هستند پس کافی است a را چنان به دست آوریم که تابع f در نقطه c پیوسته باشد در این صورت باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)=\sin c$$

اما برای $x>c$ داریم $f(x)=ax+b$ پس

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=ac+b$$

در نتیجه بایستی داشته باشیم $ac+b=\sin c$ بنابراین داریم: $a=\frac{\sin c-b}{c}$ در صورتی که $c\neq ۰$. اگر $c=۰$ در این صورت با شرط $b=۰$ تابع f برای تمامی مقادیر a پیوسته است.

مساله ۴.۶.۵. *نشان دهید که تابع*

$$f(x)=\begin{cases} x^k & x\in\mathbb{Q} \\ ۰ & x\notin\mathbb{Q}\end{cases} \quad k\in\mathbb{N}$$

فقط در ۰ پیوسته است.

حل. ابتدا نشان می‌دهیم که f در ۰ پیوسته است. برای این منظور فرض کنید $۰<\epsilon$ دلخواه باشد در نظر می‌گیریم $۰<\delta\le\min\{۱,\epsilon\}$. در این صورت اگر $|x|<\delta$ آنگاه بنا به تعریف δ داریم $|x|<۱$ و $|x|<\epsilon$ پس $|x|^k<\epsilon|x|^{k-۱}<\epsilon$ اما $|x|^k=|x^k|$، پس اگر $x\in\mathbb{Q}$ آنگاه

$$|f(x)-f(۰)|=|f(x)|=|x^k|=|x|^k<\epsilon$$

و اگر $x\notin\mathbb{Q}$ آنگاه

$$|f(x)-f(۰)|=۰<\epsilon$$

پس f در ۰ پیوسته است. حال اگر فرض کنیم (فرض خلف) که f در نقطه $x_۰\neq ۰$ نیز پیوسته باشد با انتخاب $\epsilon=\frac{|x_۰|^k}{۳}$، از اینکه f در $x_۰$ پیوسته است $۰<\delta$ موجود است که برای هر x،

$$|x-x_۰|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_۰)|<\epsilon$$

حال اگر $x_۰\in\mathbb{Q}$، آنگاه $x\in\mathbb{Q}'$ را چنان اختیار می‌کنیم که $|x-x_۰|<\delta$ (توجه نمایید با توجه به چگال بودن اعداد اصم در اعداد حقیقی چنین انتخابی ممکن است) در این صورت داریم $f(x)=۰$ پس

$$|f(x)-f(x_۰)|=|-x_۰^k|=|x_۰|^k<\frac{|x_۰|^k}{۳}\Rightarrow ۱<\frac{۱}{۳}$$

که یك تناقض است. اگر $x_\circ \notin \mathbb{Q}$ آنگاه $x \in \mathbb{Q}$ را چنان اختیار می‌کنیم که $|x - x_\circ| < \delta$ و $|x_\circ| < |x|$ در این صورت

$$f(x) = x^k, \quad f(x_\circ) = \circ$$

$$|f(x) - f(x_\circ)| < \frac{|x_\circ|^k}{۳} \Rightarrow |x^k| = |x|^k < \frac{|x_\circ|^k}{۳}$$

همچنین $|x_\circ| < |x|$ نتیجه می‌دهد که $|x_\circ|^k < |x|^k$، پس داریم $|x_\circ|^k < \frac{|x_\circ|^k}{۳}$ یعنی $۱ < \frac{۱}{۳}$ که یك تناقض است. پس فرض خلف باطل است یعنی تابع f فقط در $\circ$ پیوسته است.

مساله ۵.۶.۵. *اگر تابع f در نقطه $x_\circ$ پیوسته بوده و برای هر همسایگی از $x_\circ$، f هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را اختیار کند آنگاه $f(x_\circ) = \circ$.*

حل. فرض کنید (فرض خلف) $f(x_\circ) \neq \circ$ پس یا $f(x_\circ) > \circ$ یا $f(x_\circ) < \circ$. اگر $f(x_\circ) > \circ$ در این صورت f در یك همسایگی از $x_\circ$ مثبت است که متناقض با فرض است اگر $f(x_\circ) < \circ$ آنگاه f در یك همسایگی از $x_\circ$، منفی است که متناقض با فرض است بنابراین فرض خلف باطل است یعنی $f(x_\circ) = \circ$.

مساله ۶.۶.۵. *فرض کنید $f : [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, ۱]$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید معادله $f(x) = x^r$، $(r \in \mathbb{Q}^+)$ دارای یك نقطه ثابت روی $[\circ, ۱]$ است. (یعنی یک $x_\circ$ منحصر به فرد در $[\circ, ۱]$ موجود است که $f(x_\circ) = x_\circ$).*

حل. اگر $f(\circ) = \circ$ یا $f(۱) = ۱$ در این صورت مسئله حل شده است.
پس فرض کنید $f(\circ) \neq \circ$ و $f(۱) \neq ۱$، در این صورت داریم $f(۱) < ۱$ و $f(\circ) > \circ$ حال تابع $g : [\circ, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $g(x) = x^r - f(x)$ در نظر می‌گیریم که چون f و تابع x^r پیوسته هستند پس بنا به ۲.۱.۵ تابع g پیوسته است و داریم $g(\circ) = -f(\circ) < \circ$ و $g(۱) = ۱ - f(۱) > \circ$ پس بنا به قضیه بولزانو، تابع g روی $(\circ, ۱)$ دارای یك نقطه مانند $x_\circ$ است که $g(x_\circ) = \circ$ به عبارت دیگر $x_\circ^n - f(x_\circ) = \circ$ یا $f(x_\circ) = x_\circ^n$.

مساله ۷.۶.۵. *فرض‌کنید $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید که معادله $f(x) = b + a - x$ دارای یك نقطه ثابت روی $[a, b]$ است.*

حل. اگر $f(a) = b$ یا $f(b) = a$ در این صورت داریم

$$f(a) = b = b + a - a, \text{ یا } \quad f(b) = a = b + a - b$$

یعنی معادله $f(x) = b + a - x$ دارای نقطه ثابت است و مسئله حل شده است. پس فرض کنید $f(a) \neq b$ $f(b) \neq a$ در نتیجه چون $f([a,b]) \subseteq [a,b]$، پس $f(a) < b$ و $f(b) > a$ در این صورت تابع $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = f(x) + x - b - a$$

در این صورت چون f و تابع $x - b - a$ بر $[a,b]$ پیوسته هستند پس بنابه ۲.۱.۵ تابع g روی $[a,b]$ پیوسته است و داریم

$$g(a) = f(a) + a - b - a = f(a) - b < ۰$$

و

$$g(b) = f(b) + b - b - a = f(b) - a > ۰$$

پس بنابه قضیه بولزانو$x_۰ \in (a,b)$ موجود است که $g(x_۰) = ۰$ یا به عبارت دیگر

$$f(x_۰) + x_۰ - b - a = ۰$$

که معادل است با $f(x_۰) = b + a - x_۰$ و بدین‌ترتیب حل مسئله کامل شده است.

مساله ۸.۶.۵. *نشان دهید که معادله $x^n - ۴x^۲ + x + \cos x = ۰$ دارای حداقل یك جواب مثبت است.*

حل. در نظر می‌گیریم $f(x) = x^n - ۴x^۲ + x + \cos x$ که چون چند جمله‌ایها و تابع کسینوس توابعی پیوسته هستند پس f تابعی پیوسته است پس بخصوص اینکه f بر $[۰,۱]$ نیز پیوسته است. امّا داریم

$$f(۰) = \cos ۰ = ۱ > ۰,$$

$$f(۱) = ۱ - ۴ + ۱ + \cos ۱ = -۲ + \cos ۱ < -۲ + ۱ = -۱ < ۰$$

در نتیجه بنابه قضیه بولزانو f دارای یك صفر در بازه $(۰,۱)$ است یا به عبارت دیگر $x_۰ \in (۰,۱)$ موجود است که $x_۰^n - ۴x_۰^۲ + x_۰ + \cos x_۰ = ۰$. توجه نمایید که در واقع، نشان داده‌ایم که معادله فوق دارای لااقل یك جواب در $(۰,۱)$ است.

مساله ۹.۶.۵. *فرض کنید $f : [۰,۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی با ضابطه زیر باشد*

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ ۱ - x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

در این صورت نشان دهید

(۱) برای هر $x \in [۰,۱]$، $f(f(x)) = x$.

(۲) *برای هر* $x \in [۰, ۱]$، $f(x) + f(۱ - x) = ۱$.

(۳) f *در* $x = \frac{۱}{۲}$ *پیوسته است.*

(۴) f *تمام مقادیر بین ۰ و ۱ را اختیار می‌کند.*

(۵) *برای هر* x *و* y *در* $[۰, ۱]$ *عدد* $f(x + y) - f(x) - f(y)$ *گویا است.*

حل.

(۱) فرض کنید $x \in [۰, ۱]$ دلخواه باشد در این صورت اگر x گویا باشد آنگاه

$$f(f(x)) = f(x) = x$$

و اگر x گنگ باشد آنگاه $f(x) = ۱ - x$، پس

$$f(f(x)) = f(۱ - x) = ۱ - (۱ - x) = x$$

چون اگر x گنگ باشد آنگاه $۱ - x$ نیز گنگ است.

(۲) فرض کنید $x \in [۰, ۱]$ دلخواه باشد، در این صورت اگر $x \in \mathbb{Q}$ آنگاه $۱ - x$ نیز گویا بوده و داریم:

$$f(x) + f(۱ - x) = x + (۱ - x) = ۱$$

و اگر x گنگ باشد آنگاه $۱ - x$ نیز گنگ بوده و داریم

$$f(x) + f(۱ - x) = (۱ - x) + ۱ - (۱ - x) = ۱$$

(۳) ابتدا نشان می‌دهیم که تابع f در $x = \frac{۱}{۲}$ پیوسته است. برای این منظور فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد فرض کنید $۰ < \delta \leq \epsilon$ در این صورت اگر $|x - \frac{۱}{۲}| < \delta$ پس $|x - \frac{۱}{۲}| < \epsilon$ حال اگر x گویا باشد آنگاه داریم:

$$\left|f(x) - f(\frac{۱}{۲})\right| = \left|x - \frac{۱}{۲}\right| < \epsilon$$

و اگر x گنگ باشد آنگاه داریم:

$$\left|f(x) - f(\frac{۱}{۲})\right| = \left|۱ - x - \frac{۱}{۲}\right| = \left|x - \frac{۱}{۲}\right| < \epsilon$$

پس f در $x = \frac{۱}{۲}$ پیوسته است.

(۴) چون برای هر $x \in [۰, ۱]$ داریم $۰ \leq f(x) \leq ۱$ و بنا به قسمت (۱) $f(f(x)) = x$ یعنی f تمام مقادیر بین ۰ و ۱ را می‌گیرد.

(۵) فرض کنید x در y در $[۰, ۱]$ دلخواه باشند در این صورت: اگر x و y گویا باشند آنگاه $x+y$ نیز گویا است پس بنابه ضابطه تابع، $f(x)$، $f(y)$ و $f(x+y)$ گویا هستند در نتیجه $f(x+y)-f(x)-f(y)$ نیز گویا خواهد بود اگر x و y گنگ باشند آنگاه

$$f(x+y)-f(x)-f(y)$$
$$= \begin{cases} ۱-x-y-(۱-x)-(۱-y)=-۱\in\mathbb{Q} & \text{اگر } x+y \text{ باشند گنگ} \\ x+y-(۱-x)-(۱-y)=-۲+۲(x+y)\in\mathbb{Q} & \text{اگر } x+y \text{ باشند گویا} \end{cases}$$

اگر x گنگ و y گویا باشد آنگاه $x+y$ نیز گنگ خواهد بود پس
$$f(x+y)-f(x)-f(y)=۱-(x+y)-(۱-x)-y=-۲y\in\mathbb{Q}$$

مساله ۱۰.۶.۵. *نشان دهید که هیچ تابع پیوسته‌ای بر $[۰, ۱]$ به روی $(۰, ۱)$ وجود ندارد.*

حل. فرض کنید $f:[۰,۱]\longrightarrow(۰,۱)$ تابعی پوشا با $D_f=[۰,۱]$ باشد در این صورت اگر f پیوسته باشد آنگاه بنا به ۳.۲.۵ بایستی برد بازه‌ای بسته باشد امّا برد f در این حالت بازه باز $(۰, ۱)$ است که یك تناقض است پس f نمی‌تواند تحت این شرایط پیوسته باشد.

مساله ۱۱.۶.۵. *فرض کنید $f:[۰,۱]\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته باشد. نشان دهید*

(۱) اگر f فقط مقادیر گویا را اختیار کند، آنگاه f تابعی ثابت است.

(۲) اگر f فقط مقادیر گنگ را اختیار کند، آنگاه f تابعی ثابت است.

(۳) اگر f فقط مقدار متناهی از مقادیر را اختیار کند آنگاه f تابعی ثابت است.

حل.

(۱) اگر f تابعی ثابت نباشد پس مقادیر گویای $r_۱<r_۲$ در برد وجود خواهند داشت در این صورت بنابه قضیه مقدار میانی برای هر $r_۱<y<r_۲$، عضو $x_۰\in[۰,۱]$ موجود است که $f(x_۰)=y$ امّا می‌دانیم که بین هر دو عدد، اعداد گنگ نیز وجود دارند پس y را می‌توان گنگ نیز اختیار کرد یعنی برد f شامل مقادیر گنگ نیز می‌باشد که متناقض با فرض است. در نتیجه فرض خلف باطل است یعنی f تابعی ثابت است.

(۲) حل (۲) مشابه (۱) است که به خواننده واگذار می‌شود.

(۳) فرض کنید که برد f از یك مقدار داشته باشد. در نتیجه $y_۱ < y_۲$ در برد f وجود خواهند داشت در این صورت بنا به قضیه مقدار میانی f تمام مقادیر بین $y_۱$ و $y_۲$ را نیز اختیار می‌کند یعنی برد f نامتناهی خواهد بود که متناقض با فرض است پس برد f دارای یك مقدار است یعنی f ثابت است.

مساله ۱۲.۶.۵. *فرض کنید f تابعی حقیقی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد که برای هر x و y در $\mathbb{R}$ داشته باشیم:*

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

نشان دهید که هرگاه f در ۰ پیوسته باشد آنگاه f در همه نقاط پیوسته است.

حل. ابتدا توجه نمایید که اگر برای $x_۰ \in \mathbb{R}$، $f(x_۰)=۰$ آنگاه f تابع ثابت ۰ است زیرا در این صورت برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم

$$f(x)=f(x-x_۰+x_۰)=f(x-x_۰).f(x_۰)=۰$$

در نتیجه f پیوسته خواهد بود. پس فرض کنیم که برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x)\neq ۰$ نشان می‌دهیم که f در x پیوسته است، برای این منظور فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد. در این صورت از اینکه f در ۰ پیوسته است داریم $\delta > ۰$ موجود است که برای هر عدد حقیقی y

$$|y|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(۰)|<\frac{\epsilon}{|f(x)|}$$

توجه نمایید که چون $f(۰)\neq ۰$ و داریم:

$$f(۰)=f(۰+۰)=f(۰)^۲$$

پس $f(۰)=۱$ بنابراین برای هر y، که $|y|<\delta$ داریم

$$|f(y)-۱|<\left|\frac{\epsilon}{|f(x)|}\right|$$

حال فرض کنید $|y-x|<\delta$ در نتیجه داریم:

$$|f(y-x)-۱|<\left|\frac{\epsilon}{|f(x)|}\right| \tag{۵.۵}$$

امّا داریم:

$$۱=f(۰)=f(x-x)=f(x).f(-x)$$

یا به عبارت دیگر

$$f(-x)=\frac{۱}{f(x)}$$

در نتیجه از ۵.۵ داریم

$$\left|\frac{f(y)}{f(x)}-1\right|<\frac{\epsilon}{|f(x)|}\Rightarrow |f(y)-f(x)|<\epsilon$$

یعنی f در x پیوسته است.

مساله ۱۳.۶.۵. *اگر $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ توابعی پیوسته باشند در این صورت اگر f و g روی $\mathbb{Q}$ یا روی $\mathbb{Q}'$ برابر باشند آنگاه f و g روی $\mathbb{R}$ برابرند.*

حل. فرض کنید $x\in\mathbb{R}$ دلخواه باشد. کافی است نشان دهیم که برای هر $\epsilon>0$، $|f(x)-g(x)|<\epsilon$ چون f و g در x پیوسته هستند پس اعداد مثبت δ_1 و δ_2 موجودند که برای هر $y\in\mathbb{R}$

$$|y-x|<\delta_1\Rightarrow |f(y)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2}$$
$$|y-x|<\delta_2\Rightarrow |g(y)-g(x)|<\frac{\epsilon}{2}$$

اگر در نظر بگیریم $0<\delta\leq\min\{\delta_1,\delta_2\}$ آنگاه برای هر $y\in\mathbb{R}$

$$|y-x|<\delta\Rightarrow |f(y)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2},\quad |g(y)-g(x)|<\frac{\epsilon}{2}$$

در نظر می‌گیریم $r\in\mathbb{Q}$ به قسمی که $|r-x|<\delta$ (بنابه چگال بودن اعداد گویا انتخاب چنین r ممکن است) پس داریم:

$$|f(r)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2},\quad |g(r)-g(x)|<\frac{\epsilon}{2}$$

با توجه به نامساوی مثلث داریم

$$|f(r)-f(x)-g(r)-g(x)|\leq |f(r)-f(x)|+|g(r)-g(x)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

امّا بنابه فرض $f(r)=g(r)$ پس داریم:

$$|f(x)-g(x)|<\epsilon$$

و بدین ترتیب حل مسئله برای حالتی که $f|_{\mathbb{Q}}=g|_{\mathbb{Q}}$ کامل شده است. به طریق مشابه و با استفاده از چگال بودن اعداد گنگ در اعداد حقیقی می‌توان نشان داد که اگر $f|_{\mathbb{Q}'}=g|_{\mathbb{Q}'}$ آنگاه $f=g$ که آنرا به خواننده واگذار می‌کنیم.

۷.۵ مسایل

۱. *در تمرینات زیر بازه‌هایی را بیابید که هر یک از توابع داده شده در آن‌ها پیوسته هستند.*

۱. $f(x) = x^{17} - 3x^{15} + 2$

۲. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

۳. $f(x) = \sqrt[4]{x}$

۴. $f(x) = \frac{1}{x+9}$

۵. $f(x) = \frac{-17x}{x^2-1}$

۶. $f(x) = \frac{1}{(x-10)^{15}}$

۷. $f(x) = \frac{2x}{x^3-8}$

۸. $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$

۹. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

۱۰. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

۱۱. $f(x) = [x] + 1$

۱۲. $f(x) = \frac{[x]}{x} \quad x \neq 0$

۱۳. $f(x) = |[x]|$

۲. نشان دهید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ پیوسته است.

۳. برای چه مقادیری از a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-a} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ پیوسته است.

۴. نشان دهید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۵. برای چه مقادیری از a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته است؟

۶. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leqslant x < 1 \\ x^3 & x \geqslant 1 \end{cases}$. نمودار f را رسم نموده و نشان دهید که f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۷. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} p(x) & x \leqslant x_0 \\ q(x) & x > x_0 \end{cases}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای هستند. تحت چه شرایطی $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ موجود است؟

۸. مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = \frac{x^3+3x^2+2x+1}{x+1}$ روی بازه $[0, 1]$ را بیابید.

۹. مثالی را از یک تابع کراندار روی بازه $[0, 1]$ ارائه نمایید که روی بازه $(0, 1]$ پیوسته باشد اما در نقطه $x = 0$ پیوسته نباشد.

۱۰. تابعی مانند f مثال بزنید که پیوسته نباشد اما $|f|$ پیوسته باشد.

۱۱. نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [x] + (x - [x])^{۲}$ را بیابید.

۱۲. اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در a پیوسته و $f(a) > ۰$. نشان دهید که عدد مثبت h وجود دارد به طوری که برای هر $x \in (a - h, a + h)$، $f(x) > ۰$.

۱۳. نشان دهید که اگر f در a پیوسته باشد و $f(a) \neq ۰$، نشان دهید که عدد مثبت h وجود دارد به طوری که برای هر $x \in (a - h, a + h)$، $| f(x) | > ۰$.

۱۴. مثالی از یک تابع بیاورید که روی $\mathbb{R}$ پیوسته بوده و حوزه مقادیرش عبارت باشد از

الف) $(۰, \infty)$

ب) $[۰, \infty)$

ج) $(۰, ۱)$

د) $[۰, ۱]$

۱۵. فرض کنید $f : (۰, ۱) \to [۰, ۱]$ تابعی باشد که برای هر عدد گویای $r = \frac{p}{q}$، $f(r) = \frac{۱}{q}$ که در آن p و q اعداد صحیحی هستند که عامل مشترک ندارند و $q > ۰$ و برای هر عدد گنگ x در $(۰, ۱)$، $f(x) = ۰$. در این صورت نشان دهید

الف) f در هیچ عدد گویایی پیوسته نیست.

ب) f در هر عدد گنگ پیوسته است.

ج) نشان دهید که می‌توانیم f را به تابعی مانند g در $\mathbb{R}$ توسیع دهیم به طوری که g در هر عدد گنگ پیوسته باشد ولی در هیچ عدد گویا پیوسته نباشد.

۱۶. فرض کنید $f : [۰, ۲] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(۰) = f(۲)$. نشان دهید که x و yیی در $[۰, ۲]$ موجودند به قسمی که $| y - x | = ۱$ و $f(x) = f(y)$. (راهنمایی: تابع $g(x) = f(x + ۱) - f(x)$ را در نظر بگیرید.)

۱۷. کدام یک از توابع پیوسته زیر روی مجموعه‌های مشخص شده به طور یکنواخت پیوسته است؟

۱. $f(x) = x^{۳}$ روی $[۰, ۱]$

۲. $f(x) = x^{۳}$ روی $(۰, ۱)$

۳. $f(x) = x^{۳}$ روی $\mathbb{R}$

۴. $f(x) = \frac{۱}{x^{۲}}$ روی $(۰, ۱]$

۵. $f(x) = \sin \frac{۱}{x^{۲}}$ روی $(۰, ۱]$

۶. $f(x) = \sin \frac{۱}{x}$ روی $(۰, ۱]$

۷. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ روی $[0, \infty)$

۸. $f(x) = \sin x^2$ روی $[0, \infty)$

۱۸. *نشان دهید که اگر f روی هر مجموعه کراندار $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f روی $\mathbb{R}$ کراندار است. (راهنمایی: روش برهان خلف را می‌توانید به کار ببرید.)*

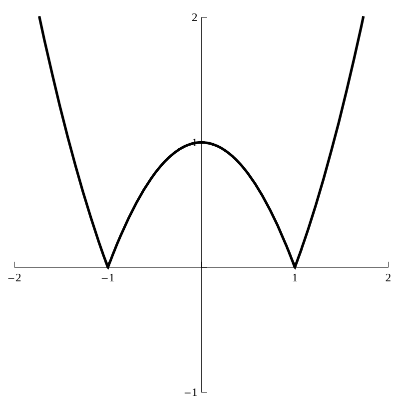
۱۹. *به کمک تمرین ۱۸ نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ روی $(0, 1)$ پیوسته یکنواخت نیست.*

۲۰. *فرض کنید f یک تابع حقیقی روی $[a, b]$ باشد که قدرمطلق شیب هر خط قاطع بر نمودار f نابیشتر از ۱ باشد. نشان دهید که f روی $[a, b]$ پیوسته یکنواخت است.*

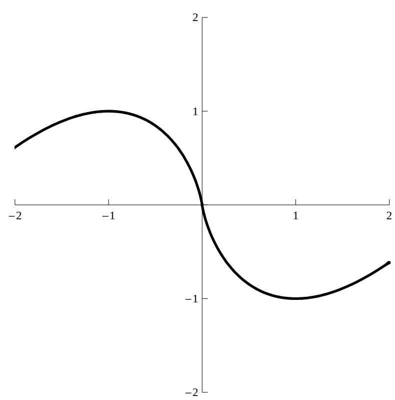
فصل ۶

مشتق

در فصل قبل با توابع پیوسته آشنا شدیم و ملاحظه نمودیم که توابع پیوسته توابعی هستند که دارای این خاصیت هستند که نمودار آنها هیچ جا قطع نشده است و آن را می توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم نمود مانند توابع $y = |x|$ و $y = x^۲$. حال در این فصل توابع مشتق‌پذیر را معرفی خواهیم کرد. این توابع، توابعی هستند که علاوه بر خاصیت پیوستگی دارای این خاصیت نیز هستند که در هر نقطه از آن می‌توان خط مماس را رسم کرد و البته این خط مماس بر محور x ها عمود نیست. این خاصیت ایجاب می‌کند که نمودار تابع نباید هیچگونه شکستگی، گوشه یا پیچ ناگهانی داشته باشد زیرا در غیر این‌صورت برای این‌گونه نقاط خط مماس وجود ندارد یا در صورت وجود منحصر به فرد نیست به عنوان مثال نمودار توابع زیر را در نظر بگیرید. در نمودار تابع شکل (الف) در نقاط $x = ۱, -۱$ خط مماس



(آ) خط مماس در $x = ۱, -۱$ منحصر به فرد نیست.



(ب) خط مماس در $x = ۰$ وجود ندارد.

منحصر به فرد وجود ندارد به عبارت دیگر دو نیمه خط مماس با امتدادهای متفاوت می‌توان رسم کرد

و در نمودار تابع شکل (ب) در نقطه $x = 0$ خط مماس وجود ندارد بنابراین دو تابع در نقاط فوق مشتق‌پذیر نیستند. در ادامه این فصل با مثال‌های متنوع این نکته را بیشتر توضیح خواهیم داد حال به تعریف ریاضی و سپس تعبیر دقیق هندسی مشتق می‌پردازیم.

۱.۶ مشتق و فرمولهای مشتق‌گیری

در این قسمت به تعریف مشتق و سپس محاسبه مشتق توابع مختلف و فرمول‌های مشتق‌گیری خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۱.۶. *تابع $y = f(x)$ را در نقطه $a \in D_f$ مشتق‌پذیر یا دارای مشتق گوییم هرگاه مقدار حد زیر وجود داشته باشد و مقدار آن متناهی باشد.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{۱.۶}$$

در این صورت حاصل حد را با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را مشتق تابع f در نقطه $x = a$ می‌نامیم. اگر حد راست عبارت فوق را با $f'^{+}(a)$ و حد چپ را با $f'^{-}(a)$ نمایش دهیم آنگاه می‌توانیم $f'^{+}(a)$ را مشتق راست تابع و $f'^{-}(a)$ را مشتق چپ تابع در نقطه $x = a$ بنامیم و بنابراین با توجه به تعریف می‌توان گفت تابع $f(x)$ در $x = a$ مشتق‌پذیر است. اگر و فقط اگر $f'^{+}(a) = f'^{-}(a)$. همان طوری که بیان شد $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و

$$f'(a) = \lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad f'(a) = \lim_{x\to a^{-}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{۲.۶}$$

حال فرض کنیم $\Delta x = x - a$ در این صورت $x = a + \Delta x$ و لذا $f'(a)$ را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\longrightarrow 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \tag{۳.۶}$$

تابع $y = f(x)$ را یک تابع مشتق‌پذیر گوییم اگر در تمام نقاط دامنه تعریف خود مشتق‌پذیر باشد.

مثال ۲.۱.۶. *مشتق هر یک از توابع زیر را در نقاط داده شده به دست آورید.*

(الف)

$$f(x) = x, \quad x = 0$$

(ب)

$$f(x) = x^{2}, \quad x = 1$$

(ج)

$$f(x) = \sin x, \quad x = ۰$$

حل.

(الف) بنابه تعریف مشتق در رابطه ۳.۶ داریم:

(ب)

$$f'(۰) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۰ + \Delta x) - f(۰)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta x - ۰}{\Delta x} = ۱$$

(ج) مشابه قسمت i داریم

$$\begin{aligned} f'(۱) &= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۱ + \Delta x) - f(۱)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{(۱ + \Delta x)^۲ - ۱}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۱ + (\Delta x)^۲ + ۲\Delta x - ۱}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to ۰} (\Delta x + ۲) = ۲. \end{aligned}$$

با تعریف مشتق در رابطه ۱.۶ داریم

$$\begin{aligned} f'(۰) &= \lim_{x \to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} \\ &= \lim_{x \to ۰} \frac{\sin x - \sin ۰}{x - ۰} \\ &= \lim_{x \to ۰} \frac{\sin x - \sin ۰}{x - ۰} \\ &= \lim_{x \to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱. \end{aligned}$$

مثال ۳.۱.۶. *مشتق هر یک از توابع زیر را در نقطه دلخواه x به دست آورید.*

(الف) $f(x) = x^۲$

(ب) $f(x) = \sin x$

(ج) $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$

حل.

(الف)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{(x+\Delta x)^{۲}-x^{۲}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{(\Delta x^{۲}+۲x\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to ۰}(\Delta x+۲x)=۲x. \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۲\cos\left[\frac{x+\Delta x+x}{۲}\right]\sin\left[\frac{x+\Delta x-x}{۲}\right]}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۲\cos\left[x+\frac{\Delta x}{۲}\right]\sin x\left[\frac{\Delta x}{۲}\right]}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to ۰}\cos\left[x+\frac{\Delta x}{۲}\right]\frac{\sin\left[\frac{\Delta x}{۲}\right]}{\left[\frac{\Delta x}{۲}\right]}\\ &= \lim_{\Delta x\to ۰}\cos\left[x+\frac{\Delta x}{۲}\right]\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\sin\left[\frac{\Delta x}{۲}\right]}{\left[\frac{\Delta x}{۲}\right]}\\ &= (\cos x)\times ۱=\cos x. \end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{(x+\Delta x)^{n}-x^{n}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{x^n+\binom{n}{۱}x^{n-۱}\Delta x+\binom{n}{۲}x^{n-۲}(\Delta x)^{۲}+\ldots+\binom{n}{n-۱}x(\Delta x)^{n-۱}}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\binom{n}{n}(\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\\
= &\lim_{\Delta x\to ۰}\left(\binom{n}{۱}x^{n-۱}+\binom{n}{۲}x^{n-۲}\Delta x+\cdots+\binom{n}{n-۱}x(\Delta x)^{n-۲}\right.\\
&\left.+\binom{n}{n}(\Delta x)^{n-۱}\right)\\
= &\binom{n}{۱}x^{n-۱}\\
= &\frac{n!}{۱!\,(n-۱)!}x^{n-۱}=nx^{n-۱}.
\end{aligned}
$$

قضیه ۴.۱.۶. *فرض کنیم f یک تابع ثابت باشد در این صورت $f'(x)=۰$.*

اثبات. فرض کنیم $f(x)=k$ که k مقدار ثابتی است در این صورت بنا به تعریف مشتق داریم

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{k-k}{\Delta x}=۰.$$

□

یادآوری ۵.۱.۶. *همان‌گونه که در ابتدا این فصل بیان شد مشتق‌پذیر بودن خاصیت قوی‌تری نسبت به پیوسته بودن است. در واقع نشان خواهیم داد که هر تابع مشتق‌پذیر پیوسته است ولی عکس این مطلب نیز صحیح نیست و ممکن است توابعی باشند که پیوسته‌اند ولی مشتق‌پذیر نیستند. اثبات این مطلب همراه با بیان مثال‌های نقض را به قسمت ۶.۶ موکول می‌نماییم.*

قضیه ۶.۱.۶ (فرمولهای مشتق‌گیری). *فرض کنیم توابع f و g توابع مشتق‌پذیری باشند در این صورت*

الف)

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

ب)

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$$

ج)

$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

د)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

ذ)

$$(cf)'(x) = cf'(x) \quad (c\text{ مقدار ثابت})$$

اثبات. الف)

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{\Delta x \to} \frac{(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

(ب) حل گزینه (ب) مشابه به (الف) می‌باشد.

(ج) برای (ج) داریم

$$\begin{aligned}
&(fg)'(x) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(fg)(x+\Delta x) - (fg)(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

حال به بیان اثبات گزینه (د) می‌پردازیم

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+\Delta x) - \left(\frac{f}{g}(x)\right)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}.$$

با اضافه و کم کردن جمله $f(x)g(x)$ در صورت داریم

$$= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}$$
$$= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}$$
$$= \frac{\lim_{\Delta x\to ۰} g(x) \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to ۰} f(x) \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{g(x+\Delta x)g(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x\to ۰} g(x+\Delta x) \lim_{\Delta x\to ۰} g(x)}$$
$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^۲}.$$

(ذ)

$$(cf')(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{(cf)(x+\Delta x) - (cf)(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to ۰} c\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= c\lim_{\Delta x\to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= cf'(x).$$

□

نتیجه ۷.۱.۶. *فرض کنید* $f(x) = x^{-n}$ *و* $(n \in \mathbb{N})$ *در این صورت*
$$f'(x) = -nx^{-n-۱}.$$

اثبات. با توجه به فرمولهای مشتق گیری در قضیه ۶.۱.۶ قسمت (د) مثال ۳.۱.۶ گزینه (ج) داریم $f(x) = \frac{1}{x^n}$ در نتیجه:

$$f'(x) = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

□

نتیجه ۸.۱.۶. *در حالی‌که $f(x) = x^n$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ فرمول $f'(x) = nx^{n-1}$ مجدداً حاصل شود.*

نتیجه ۹.۱.۶ (مشتق توابع مثلثاتی). *با توجه به مشتق توابع $\sin x$ و $\cos x$ می‌توان مشتق بقیه توابع مثلثاتی را به کمک فرمولهای مشتق‌گیری قضیه ۶.۱.۶ به صورت زیر به دست آورد.*

تابع	*مشتق تابع*
$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
$\cot x$	$-(1 + \cot^2 x) = -\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$

مثال ۱۰.۱.۶. *مشتق هر یک از توابع زیر را به دست آورید.*

الف)

$$f(x) = (1 + x\sin x)^2$$

ب)

$$f(x) = (x^2 + 1)\sec^2 x$$

ج)

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{x^2 \tan x}$$

حل.

الف)

$$f'(x) = 2(\sin x + x\cos x)(1 + x\sin x)$$

ب)

$$f'(x) = ۲x\sec^۲ x + ۲(x^۲+۱)\sec x(\sec x\tan x)$$

ج)

$$f'(x) = \frac{(\cos x - \sin x)(x^۲\tan x) - [۲x\tan x + x^۲(۱+\tan^۲ x)](\sin x + \cos x)}{x^۴\tan^۲ x}$$

تذکر ۱۱.۱.۶. *فرض کنیم $y = f(x)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد در این صورت نمادهای زیر را می‌توان برای مشتق تابع به صورت زیر به‌کار برد.*

$$f'(x),\quad Df(x),\quad y',\quad \frac{d}{dx}f(x),\quad \frac{dy}{dx}$$

در مورد دو نماد سمت راست در فصل آینده بیشتر توضیح داده خواهد شد.

۲.۶ مشتق توابع مرکب و معکوس

در این قسمت مشتق ترکیب دو تابع و در حالت کلی قاعده زنجیره‌ای را بیان خواهیم کرد و سپس به محاسبه مشتق تابع معکوس خواهیم پرداخت.

قضیه ۱.۲.۶. *فرض کنیم تابع f در نقطه $g(a)$ و تابع g در نقطه a مشتق‌پذیر باشند در این صورت تابع $f\circ g$ در نقطه a مشتق‌پذیر است و داریم*

$$(f\circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

اثبات. چون تابع g در a مشتق‌پذیر است لذا در نقطه a پیوسته می‌باشد اثبات این مطلب را در قسمت بعد بیان خواهیم کرد. بنابراین $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$ اگر تابع $g(x)$ در همسایگی از a تابع ثابت باشد آنگاه تابع $f\circ g$ نیز در یک همسایگی از a تابع ثابت خواهد بود و تساوی به وضوح برقرار می‌باشد لذا فرض کنیم g تابع ثابت در همسایگی نقطه a نباشد در این صورت بنا به تعریف مشتق و پیوستگی تابع g در نقطه a داریم.

$$\begin{aligned}
(f\circ g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f\circ g)(x) - (f\circ g)(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x)) - (g(a))}{g(x)-g(a)} \times \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x)-g(a)}\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= f'(g(a))g'(a)
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۲.۲.۶.

الف) *فرض کنید* $y = f(u)$ *و* $u = g(x)$ *در این صورت:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

ب) *در حالت کلی می‌توان از فرمول مشتق تابع مرکب به تعداد لازم استفاده نمود که آن را قاعده زنجیری می‌نامیم. به طور مثال اگر داشته باشیم:*

$$Y = f(u), \quad u = g(v), \quad v = h(w), \quad w = k(x)$$

آنگاه داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx}.$$

اصطلاح زنجیری بدین جهت است که سمت چپ همانند حلقه‌های زنجیری است که حلقه اول آن dy و حلقه آخر آن dx است و وجود حلقه‌های بین این دو حلقه استفاده از مشتق ترکیب توابع را برای متغیرهای جدید مشخص می‌سازد. قاعده زنجیری گاهی محاسبات را بسیار ساده می‌سازد و به علاوه احتمال اشتباه در محاسبات را به مراتب کاهش می‌دهد. مثال‌های زیر این حقیقت را آشکار می‌سازند.

مثال ۳.۲.۶. *مشتق هر یک از توابع زیر را بدست آورید.*

الف)

$$y = \sqrt{۱ + \sqrt{x}}$$

ب)

$$y = \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + \sqrt{x}}}}$$

ج)

$$y = \sin(۱ + \cos\sqrt{۱ + x^{۲}})$$

حل.

الف) قرار می‌دهیم $u = ۱ + \sqrt{x}$ پس $y = \sqrt{u}$ در این صورت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{۱}{۲\sqrt{u}}\frac{۱}{۲\sqrt{x}} = \frac{۱}{۴\sqrt{۱ + \sqrt{x}}\sqrt{x}} = \frac{۱}{۴\sqrt{x(۱ + \sqrt{x})}}$$

ب) قرار می‌دهیم $y=\sqrt{u}$ و $u=۱+\sqrt{v}$ و $v=۱+\sqrt{w}$ و $w=۱+\sqrt{x}$ در این صورت داریم.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx}\\&=\frac{۱}{۲\sqrt{u}}\frac{۱}{۲\sqrt{v}}\frac{۱}{۲\sqrt{w}}\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\\&=\frac{۱}{۱۶\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{x}}}}\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{x}}}}\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{x}}}\sqrt{x}}\end{aligned}$$

ج) فرض کنیم $y=\sin u, u=۱+\cos v$ و $v=\sqrt{۱+x^۲}$ در این صورت

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}\\&=(\cos u)(-\sin v)\left(\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\right)\\&=\frac{x\sin\sqrt{۱+x^۲}\cos(۱+\cos\sqrt{۱+x^۲})}{\sqrt{۱+x^۲}}\end{aligned}$$

قضیه ۴.۲.۶ (مشتق تابع معکوس). *فرض کنیم f تابعی مشتق پذیر و یک به یک باشد و $(f'(f^{-۱}(x)))\neq ۰$ به ازای هر $x\in D_{f^{-۱}}$ در این صورت $f^{-۱}$ نیز مشتق‌پذیر است و داریم.*

$$(f^{-۱})'(x)=\frac{۱}{f'(f^{-۱}(x))}$$

اثبات. چون f تابع یک به یک است بنابراین $f^{-۱}$ موجود است. فرض کنیم $b\in D_{f^{-۱}}$ عضو دلخواهی باشد بنا به فرض $(f'(f^{-۱}(b))\neq ۰$ و داریم.

$$(f^{-۱})'(b)=\lim_{h\to ۰}\frac{f^{-۱}(b+h)-f^{-۱}(b)}{h}$$

فرض کنیم $f^{-۱}(b)=a$ چون f یک به یک است لذا $f(a)=b$ و در نتیجه مقدار منحصر به فرد k وجود دارد به طوری که $f^{-۱}(b+h)=a+k$ لذا $f(a+k)=b+h$ و یا

$h = f(a+k) - f(a)$ پس می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned}(f^{-۱})'(b) &= \lim_{k\to ۰} \frac{a+k-a}{f(a+k)-f(a)} \\ &= \lim_{k\to ۰} \frac{۱}{\frac{(a+k)-f(a)}{k}} \\ &= \frac{۱}{\lim\limits_{k\to ۰} \frac{f(a+k)-f(a)}{k}} \\ &= \frac{۱}{f'(a)} = \frac{۱}{f'(f^{-۱}(b))}\end{aligned}$$

و حکم ثابت است. □

مثال ۵.۲.۶. *فرض کنید $y = \sin^{-۱} x$ در این صورت $x = \sin y$ و با مشتق‌گیری از طرفین رابطه نسبت به x داریم*

$$\begin{aligned}۱ = y' \cos y \Rightarrow y' &= \frac{۱}{\cos y} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۱ - \sin^{۲} y}} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}.\end{aligned}$$

بنابراین
به طور مستقیم نیز می‌توان به کمک قضیه مشتق تابع معکوس فوق را بدست آورد.

$$y' = (\sin^{-۱} x)' = \frac{۱}{\cos(\sin^{-۱} x)} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \sin^{۲}(\sin^{-۱} x)}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$$

۳.۶ مشتق توابع معکوس مثلثاتی

به کمک فرمول‌های مشتق توابع مثلثاتی می‌توان مشتق توابع معکوس مثلثاتی را بدست آورد. در مثال ۵.۲.۶ مشتق تابع معکوس سینوس یعنی $\sin^{-۱} x$ به دست آمد مشابه روش فوق می‌توان در مورد توابع $\sec^{-۱} x$، $\cot^{-۱}(x)$، $\tan^{-۱} x$، $\cos^{-۱} x$ و $csc^{-۱}x$ مشتق را محاسبه کرد.

(الف)

$$y=\cos^{-۱}x \Rightarrow x=\cos y \Rightarrow ۱=-y^{-۱}\sin y \Rightarrow y'=\frac{۱}{\sin y}$$
$$=\frac{-۱}{\sqrt{۱-\cos^{۲} y}}$$
$$=\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

(ب)

$$\begin{aligned} y=\tan^{-۱} &\Rightarrow x=\tan y \\ &\Rightarrow ۱=y'(۱+\tan^{۲} y) \\ &\Rightarrow y'=\frac{۱}{۱+\tan^{۲} y} \\ &=\frac{۱}{۱+x^{۲}} \end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned} y=\cot^{-۱}x &\Rightarrow x=\cot y \\ &\Rightarrow ۱=-y'(۱+\cot^{۲} y) \\ &\Rightarrow y'=\frac{-۱}{۱+\cot^{۲} y} \\ &=\frac{-۱}{۱+x^{۲}} \end{aligned}$$

(د)

$$\begin{aligned} y=\sec^{-۱}x &\Rightarrow x=\sec y \\ &\Rightarrow ۱=y'\sec y.\tan y \\ &\Rightarrow y'=\frac{۱}{\sec y.\tan y} \\ &=\frac{۱}{x\sqrt{x^{۲}-۱}} \end{aligned}$$

در حالت کلی چنان چه $y = sin^{-1}u$ ،$y = cos^{-1}u$ و غیره که u تابعی بر حسب x است مشتق توابع معکوس مثلثاتی به صورت زیر حاصل می‌شوند.

تابع	مشتق تابع
$\sin^{-1} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\cos^{-1} u$	$\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}$
$\tan^{-1} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\cot^{-1} u$	$\frac{-u'}{1+u^2}$
$\sec^{-1} u$	$\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$\csc^{-1} u$	$\frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$

مثال ۱.۳.۶. *مشتق عبارت زیر را بدست آورید.*

$$y = \tan^{-1}(\sin^{-1}(x + x^3))$$

حل. فرض کنیم $u = \sin^{-1} v$ ،$y = \tan^{-1} u$ و $v = x + x^3$ در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \\ &= \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1+3x^2) \\ &= \frac{1}{1+[\sin^{-1}(x+x^3)]^2}\frac{1}{\sqrt{1-(x+x^3)^2}}(1+3x^2) \end{aligned}$$

۴.۶ مشتقات مراتب بالاتر

قبلا دیدیم که مشتق تابع $y = x^3$ تابع $y' = 3x^2$ می‌باشد که این خود تابعی مشتق‌پذیر است و می‌توانیم مجددا از این تابع مشتق بگیریم با انجام این فرایند مشتقات مرتبه دوم و سوم و بالاتر حاصل می‌شود. همان طور که در قبل ملاحظه نمودیم برای مشتق تابع $y = f(x)$ از نماد $f'(x)$ یا y' استفاده می‌کردیم و برای مشتقات بالاتر یعنی مشتق مرتبه دوم می‌توان از نماد $f''(x)$ یا y'' و مشتق مرتبه سوم از نماد $f'''(x)$ یا y''' و به همین ترتیب برای مشتق مرتبه nام از نماد $f^{(n)}(x)$ یا $y^{(n)}$ استفاده نموده البته چنانچه از نماد $\frac{dy}{dx}$ برای مشتق مرتبه اول استفاده نماییم برای مشتق مرتبه دوم نماد $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ و برای مرتبه سوم نماد $\frac{d^3y}{dx^3}$ و برای مشتق nام از نماد $\frac{d^ny}{dx^n}$ می‌توان استفاده نمود. حال به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱.۴.۶. *مشتق دوم عبارت زیر را بدست آورید.*

$$Y = (x + x^2 \sin x)^2$$

حل. داریم

$$Y' = ۲(۱ + ۲x\sin x + x^۲\cos x)(x + x^۲\sin x)$$

بنابراین با یک بار دیگر مشتق‌گیری داریم.

$$\begin{aligned}Y'' &= ۲(۲\sin x + ۲x\cos x + ۲x\cos x - x^۲\sin x)(x + x^۲\sin x)\\ &\quad + ۲(۱ + ۲x\sin x + x^۲\cos x)(۱ + ۲x\sin x + x^۲\cos x)\\ &= ۲(۲\sin x + ۴x\cos x - x^۲\sin x)(x + x^۲\sin x) + (۱ + ۲x\sin x + x^۲\cos x)^۲\end{aligned}$$

مثال ۶.۴.۲. *مشتق nام هر یک از توابع زیر را بر حسب n به دست آورید.*

الف) $y = \sin x$

ب) $y = \frac{۱}{x}$

ج) $y = \cos x$

حل. برای حل (الف) داریم

$$\begin{aligned}y = \sin x \Rightarrow y' &= \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{۲})\\ \Rightarrow y'' &= -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin(x + \frac{۲\pi}{۲})\\ \Rightarrow y''' &= -\cos x = \sin(x + \frac{۳\pi}{۲})\\ \Rightarrow y^{(۴)} &= \sin x = \sin(x + ۲\pi) = \sin(x + \frac{۴\pi}{۲})\end{aligned}$$

بنابراین

$$y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{۲})$$

برای حل (ب) داریم

$$\begin{aligned}y = \frac{۱}{x} = x^{-۱} \Rightarrow y' &= (-۱)x^{-۲}\\ \Rightarrow y'' &= ۱.۲.x^{-۳}\\ \Rightarrow y''' &= -۱.۲.۳.x^{-۴}\end{aligned}$$

بنابراین

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\, x^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

برای قسمت (ج) مشابه قسمت الف به سادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$y^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

۵.۶ مشتق‌گیری ضمنی

توابعی که تاکنون دیده‌ایم با بیان صریح یک متغیر بر حسب متغیر دیگر بیان شده بودند یعنی به صورت $y = f(x)$ با این حال بعضی توابع به طور ضمنی توسط رابطه‌ای بین x و y مانند $x^2 + y^3 - 2xy = 0$ یا $x^3 + y^3 = 6xy^2$ تعریف می‌شوند و گاهی ممکن است چنین رابطه هایی قابل حل برای بدست آوردن y به عنوان یک یا چند تابع صریح از x نباشد لذا محاسبه y' پس از محاسبه y دشوار خواهد بود در این قسمت به نحوه محاسبه y' بدون محاسبه y خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۵.۶. *فرض کنیم y تابعی از x بوده و داشته باشیم $f(x,y) = 0$ در این صورت تابع f را یک تابع ضمنی از متغیرهای x و y می‌نامیم.*
محاسبه y' از تابع ضمنی $f(x,y) = 0$ را مشتق‌گیری ضمنی می‌گوییم و نحوه محاسبه y' بدین صورت است که از طرفین معادله باید نسبت به x مشتق بگیریم. سپس معادله حاصل که در آن y' وجود دارد را حل کرده و y' را از آن به دست می‌آوریم و بنابراین مقدار y' بر حسب x و y حاصل می‌شود.

مثال ۲.۵.۶. *مشتق ضمنی هر یک از توابع ضمنی زیر را بدست آورید.*

الف) $x^2 + y^2 = 35$

ب) $x^3 + 4y^3 = y^2 - x$

حل.

الف) از طرفین رابطه نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$2x + 2yy' = 0$$

و یا

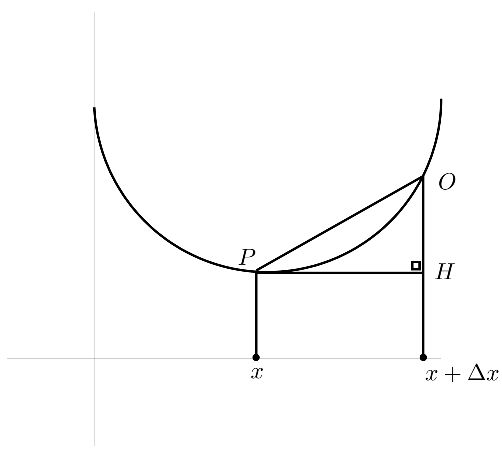
$$y' = \frac{-x}{y}$$

ب) با مشتق‌گیری از طرفین رابطه فوق نسبت به xنتیجه می‌شود $۳x^۲ + ۱۲y^۲y' = ۲yy' - ۱$
و یا $(۲y - ۱۲y^۲)y' = ۳x^۲ + ۱$ بنابراین
$$y' = \frac{۳x^۲ + ۱}{۲y(۱ - ۶y)}$$

۶.۶ تعبیر هندسی مشتق

تابع $y = f(x)$ را در نظر می‌گیریم بنا به تعریف مشتق داریم.
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

اگر کسر $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ را با توجه به شکل زیر در نظر بگیریم ملاحظه خواهیم کرد که



$$f(x + \Delta x) - f(x) = O\overline{H}, \quad \Delta x = P\overline{H}$$

لذا
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{O\overline{H}}{P\overline{H}} = \tan O\hat{P}H$$

فرض کنیم $\hat{\theta} = O\hat{P}H$ در این صورت هنگامی $\Delta x \to ۰$ آنگاه نقطه O به نقطه P نزدیک می‌شود و وتر $P\overline{O}$ به سمت خط مماس L در نقطه x نزدیکتر می‌شود به عبارت دیگر
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

بنابراین $f'(x)$ برابر شیب خط مماس بر نمودار $y = f(x)$ در نقطه x است بنابراین تعبیر هندسی مشتق هر تابع در هر نقطه از دامنه تعریف خود عبارت از شیب خط مماس در آن نقطه است. شاید بر

اساس همین تعبیر هندسی است که مشتق‌پذیری در نقطه x معادل وجود خط مماس منحصر به فرد در این نقطه شده است. این نکته بحث توصیف مشتق‌پذیری را که در ابتدای این فصل بیان شده بود کامل و آشکارتر می‌سازد. حال در اینجا به ارتباط بین مشتق‌پذیری و پیوستگی که از قبل آن را وعده داده بودیم می‌پردازیم.

قضیه ۱.۶.۶. *فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در نقطه $a \in D_f$ مشتق‌پذیر باشد در این صورت تابع f در این نقطه پیوسته است.*

اثبات. چون تابع $y = f(x)$ در $a \in D_f$ مشتق‌پذیر است لذا داریم:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a}(x - a) \\
&= f'(a) \times ۰ = ۰
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

پس $\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = ۰$ یعنی $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ بنابراین تابع $f(x)$ در $x = a$ پیوسته است. □

عکس قضیه فوق برقرار نیست یعنی توابع زیادی وجود دارند که در نقاطی پیوسته‌اند ولی مشتق‌پذیر نیستند. مثال زیر اشاره به این نکته است.

مثال ۲.۶.۶. *نشان دهید توابع زیر در نقطه داده شده پیوسته‌اند ولی مشتق‌پذیر نیستند.*

الف) $f(x) = |x|$ *در نقطه* $x = ۰$.

ب) $f(x) = ۱ + |x^۲ + ۱|$ *در نقطه* $x = ۱$.

حل.

الف) واضح است که $\lim\limits_{x\to ۰}|x|=۰$ لذا در $x=۰$ پیوسته است حال برای بررسی مشتق‌پذیری بنا به تعریف داریم

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{|x|-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{|x|}{x}.$$

ولی می‌دانیم $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{|x|}{x}=\frac{۱}{۱}=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{|x|}{x}=-۱$ بنابراین $f'(۰)$ موجود نیست یعنی تابع $f(x)=|x|$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

ب) تابع مورد نظر در $x=۱$ پیوسته است زیرا

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=\lim_{x\to ۱}۱+|x^۲-۱|=۱.$$

ولی برای بررسی مشتق‌پذیری داریم

$$\begin{aligned} f'(۱)&=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\\ &=\lim_{x\to ۱}\frac{۱+|x^۲-۱|-۱}{x-۱}\\ &=\lim_{x\to ۱}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}\\ &=\lim_{x\to ۱}\frac{|x+۱||x-۱|}{x-۱}. \end{aligned}$$

لذا داریم

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x+۱||x-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x+۱)(x-۱)}{x-۱}=۲$$

و نیز

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x+۱||x-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x+۱)(-x+۱)}{x-۱}=-۲.$$

بنابراین $f'(۱)$ موجود نیست.

یادآوری ۳.۶.۶. *برای مشتق تعابیر دیگری را می‌توان مطرح کرد که از جمله آنها می‌توان تعبیر مشتق به عنوان نرخ تعبیر را به صورت زیر بیان نمود.*
فرض کنید y کمیتی است که به کمیت دیگر x وابسته است یعنی $y=f(x)$ اگر x از $x_۱$ به $x_۲$ تغییر یابد آنگاه تغییر در x که نمو x نامیده می‌شود عبارت است از $\Delta x=x_۲-x_۱$ و تغییر متناظر در y، $\Delta y=f(x_۲)-f(x_۱)$ می‌باشد که نسبت تفاضل‌ها $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-(f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$ نرخ میانگین تغییر y نسبت به x بر بازه $[x_۱,x_۲]$ نامیده می‌شود. حد این نرخ متوسط را وقتی $x_۲$ به $x_۱$ و یا حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتی Δx به ۰ میل می‌کند را نرخ لحظه‌ای‌index)سرعت لحظه‌ای(نرخ لحظه‌ای تغییر y نسبت به x در

$x = x_۱$ *می‌نامیم. بنابراین*

$$\text{نرخ لحظه‌ای تغییر} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_۲ \to x_۱} \frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱} = f'(x_۱)$$

مثال ۴.۶.۶. *درجه حرارت T (به درجه سانتیگراد) در یک روز در یک شهر، در هر ساعت از نیمه شب در جدول زیر ثبت شده است زمان x به ساعت و از نیمه شب اندازه‌گیری شده است. نرخ متوسط تغییر*

x ساعت	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
T درجه c°	۶/۵	۶/۱	۵/۶	۴/۹	۴/۲	۴/۰	۴/۰	۴/۸۶	۱۸/۳	۱۸/۳	۱۰/۰	۱۲/۱	۱۴/۳
x ساعت		۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
T درجه c°		۱۶/۰	۱۷/۳	۱۸/۲	۱۸/۸	۱۷/۶	۱۶/۰	۱۴/۱	۱۱/۵	۱۰/۲	۹/۰	۷/۹	۷

درجه حرارت را نسبت به زمان (i) از ظهر تا ۳ بعد از ظهر (ii) از ظهر تا ۲ بعد از ظهر (iii) از ظهر تا ۱ بعد از ظهر به دست آورید.

حل.

(i) از ظهر تا ۳بعد از ظهر درجه حرارت از $۱۴/۳^\circ$ تا $۱۸/۲^\circ$تغییر می‌یابد در نتیجه
$$\Delta T = T(۱۵) - T(۱۲) = ۱۸/۲ - ۱۴/۳ = ۳/۹^\circ$$

در حالی که تغییر در زمان $\Delta x = ۳$ ساعت است بنابراین نرخ متوسط تغییر حرارت نسبت به زمان عبارت است از:

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{۳/۹}{۳} = ۱/۳ \text{ درجه بر ساعت}$$

(ii) از ظهر تا ۲ بعد از ظهر نرخ متوسط تغییر عبارت است از:

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T(۱۴) - T(۱۲)}{۱۴ - ۱۲} = \frac{۱۷/۳ - ۱۴/۳}{۲} = ۱/۵ \text{ درجه بر ساعت}$$

(iii) از ظهر تا ۱ بعد از ظهر نرخ متوسط تغییر عبارت است از:

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T(۱۳) - T(۱۲)}{۱۳ - ۱۲} = \frac{۱۶/۰ - ۱۴/۳}{۱} = ۱/۷ \text{ درجه بر ساعت}$$

۷.۶ مسائل نمونه حل شده

مساله ۱.۷.۶. *با استفاده از تعریف مشتق فرمول مشتق هرکدام از توابع زیر را بدست آورید.*

الف) $y = \sqrt{x}$

ب) $y = \cos x$

حل.

(الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

ب) مشابه قسمت الف داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x(\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x(-2\sin^2(\Delta x/2) - \sin x \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(-\cos x)(\sin(\frac{\Delta x}{2}))\frac{(\sin \Delta x/2)}{\Delta x/2} - (\sin x)(\frac{\sin \Delta x}{\Delta x})\right] \end{aligned}$$

$$= \quad (-\cos x) \lim_{\Delta x \to ۰} \sin(\frac{\Delta x}{۲}) \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{(\sin \Delta x/۲)}{\Delta x/۲} - \sin x \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \quad (-\cos x)(۰)(۱) - (\sin x)(۱) = -\sin x$$

مساله ۲.۷.۶. *a و b را طوری تعیین کنید که تابع f تعریف شده با ضابطه*

$$f(x) = \begin{cases} x + a \sin x & x < ۰ \\ ۲x + b & x \geq ۰ \end{cases}$$

مشتق‌پذیر باشد و سپس $f'(۰)$ را بدست آورید.

حل. واضح است که تابع f در تمام نقاط $x > ۰$ و $x < ۰$ مشتق‌پذیر است. لذا کافی است در نقطه $x = ۰$ نیز مشتق‌پذیر باشد بدین منظور داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} ۱ + a \cos x & x < ۰ \\ ۲ & x \geq ۰ \end{cases}$$

$$f'^{-}(۰) = ۱ + a, f'^{+}(۰) = ۲ \Rightarrow ۱ + a = ۲ \Rightarrow a = ۱$$

همچنین می‌دانیم هر تابع مشتق‌پذیر در یک نقطه در آن نقطه نیز پیوسته است لذا در نقطه $x = ۰$ داریم.

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = \lim_{x \to ۰^-} x + a \sin x = ۰$$
$$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = \lim_{x \to ۰^+} ۲x + b = b = f(۰)$$

پس $b = ۰$ و در نتیجه ضابطه تابع f به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin x & x < ۰ \\ ۲x & x \geq ۰ \end{cases}$$

مساله ۳.۷.۶. *تابع*

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ \sin \frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید f در نقطه $x = ۰$ مشتق‌پذیر است ولی f' در این نقطه پیوسته نیست.

حل. بنا به تعریف مشتق داریم $f'(\circ) = \lim_{x\to\circ} \frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ} = \lim_{x\to\circ} x\sin\frac{1}{x} = \circ$ پس f در ۰ مشتق‌پذیر است و $f'(\circ) = \circ$. از طرف دیگر به ازای $x \neq \circ$ با استفاده از فرمول‌های مشتق‌گیری داریم:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}.\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

بنابراین

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x\neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$$

چون حد $\cos\frac{1}{x}$ در ۰ موجود نیست پس $\lim_{x\to\circ} f'(x)$ موجود نمی‌باشد لذا f' در ۰ پیوسته نیست.

مساله ۴.۷.۶. *مشتق توابع داده شده زیر را محاسبه کنید.*

الف) $y = \sin(\cos(\tan x))$

ب) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

حل.

الف) با استفاده از قاعده زنجیره ای فرض کنیم $u = \tan x$و $v = \cos u$ و $y = \sin v$در این صورت داریم.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} = (\cos v)(-\sin u)(1 + tan^2 x) \\ &= \cos(\cos(\tan x))(-\sin(\tan x))(1 + \tan^2 x) \end{aligned}$$

ب) فرض کنیم $w = x + \sqrt{x}$ و $v = x + \sqrt{w}$ و $u = x + \sqrt{v}$ و $y = \sqrt{u}$ در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{dv}{dx}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{v}}(1 + \frac{1}{2\sqrt{w}}\frac{dw}{dx})\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{v}(1 + \frac{1}{2\sqrt{w}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})})}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{۱}{۲\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}\left[۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\right.$$
$$\left.\left(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x+\sqrt{x}}}(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})\right)\right]$$

مساله ۵.۷.۶. *فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد به طوری که $f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ و $f(۱)=۱$ تابع g را به صورت $g(x)=f(f(x))$ تعریف می‌کنیم مطلوب است محاسبه $g'(۱)$ و $g''(۱)$.*

حل. می‌دانیم

$$\begin{aligned} g'(x)=f'(f(x))f'(x) \Rightarrow g''(x) &= [f'(f(x))]'f'(x)+f'(f(x))f''(x)\\ &= [f''(f(x))][f'(x)]^۲+f'(f(x)f''(x)\end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$f''(x)=\frac{۰-\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}}}{۱+x^۲}=-\frac{x}{(۱+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

در نتیجه

$$f(۱)=۱,\quad f'(۱)=\frac{۱}{\sqrt{۲}},\quad f''(۱)=-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g'(۱) &= f'(f(۱))f'(۱)=f'(۱)f'(۱)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}.\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲}\\ g''(۱) &= f''(f(۱))[f'(۱)]^۲+f'(f(۱))f''(۱)\\ &= f''(۱)[f'(۱)]^۲+f'(۱)f''(۱)\\ &= -\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲+\frac{۱}{\sqrt{۲}}(-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=-\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{\sqrt{۲}}+۱)\\ &= -\frac{۱}{۴}(\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{۲+\sqrt{۲}}{۸}\end{aligned}$$

مساله ۶.۷.۶. *تابع $f(x)=x^۶+۳x^۳+x+۱$ مفروض است. مقدار مشتق تابع $f^{-۱}$ را در*

$b=۶$ *به‌دست آورید.*

حل. با توجه به قضیه مشتق تابع معکوس داریم.

$$(f^{-۱})(x)=\frac{۱}{f'(f^{-۱}(x))}$$

حال فرض کنیم $f(a)=b=۶$ در این صورت $a^۶+۳a^۳+a+۱=۶$ و یا $a^۶+۳a^۳+a-۵=۰$ چون مجموع ضرایب این چندجمله‌ای صفر است لذا یک جواب آن $a=۱$ می‌باشد و داریم $f(۱)=۶$ در نتیجه $f^{-۱}(۶)=۱$ همچنین $f'(x)=۶x^۵+۹x^۲+۱$ بنابراین خواهیم داشت.

$$(f^{-۱})'(۶)=\frac{۱}{f'(f^{-۱}(۶))}=\frac{۱}{f'(۱)}=\frac{۱}{۱۶}$$

مساله ۷.۷.۶. *اگر تابع f در a مشتق‌پذیر باشد ثابت کنید.*

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

حل. داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)-a(f(x)-f(a))}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}[f(a)-a\frac{f(x)-f(a)}{x-a}]\\&=\lim_{x\to a}f(a)-\lim_{x\to a}a.\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\&=f(a)-af'(a)\end{aligned}$$

مساله ۸.۷.۶. *فرض کنید* $f(x)=\begin{cases}x^۲[\frac{۱}{x}] & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ *، در صورت وجود $f'(۰)$ را حساب کنید.*

حل. بنا به تعریف مشتق داریم:

$$
\begin{aligned}
f'(۰ &= \lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}\\
&= \lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}[۱/x]-۰}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} x[\frac{۱}{x}]
\end{aligned}
$$

می‌دانیم همواره $\frac{۱}{x} \leq [\frac{۱}{x}] < ۱ - \frac{۱}{x}$ در نتیجه $۱ \leq x[\frac{۱}{x}] < x - ۱$ لذا بنا به قضیه ساندویچ داریم $\lim\limits_{x\to ۰} x[\frac{۱}{x}] = ۱$ (مثال ۵.۳.۴ را ببینید)، بنابراین $f'(۰)$ موجود و مقدار آن برابر ۱ است.

مساله ۹.۷.۶. *فرض کنید* $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq a \\ g(x) & x \geq a \end{cases}$ *به طوری که* $f(a) = g(a)$ *و مشتق چپ* f *در نقطه* a *مساوی مشتق راست* g *در نقطه* a *است. ثابت کنید تابع* h *در نقطه* a *مشتق‌پذیر است.*

حل. کافی است ثابت کنیم مشتق چپ h و مشتق راست h در نقطه a موجود و با یکدیگر برابرند. داریم:

$$
\begin{aligned}
f'^{+}(a) &= \lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^{+}}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'^{+}(a)\\
f'^{-}(a) &= \lim_{x\to a^{-}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^{-}}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'^{-}(a)
\end{aligned}
$$

چون $g'^{+}(a) = f'^{-}(a)$ لذا $f'^{+}(a) = f'^{-}(a)$ پس f در نقطه a مشتق‌پذیر است.

مساله ۱۰.۷.۶. *معادله منحنی به صورت معادله ضمنی زیر داده شده است.*

$$\sqrt{y} + \sqrt[۴]{y} + \sqrt[۵]{y} = xy^{۲}$$

مشتق منحنی فوق را در نقطه‌ای به عرض ۱ واقع بر نمودار آن بدست آورید.

حل. با استفاده از مشتق ضمنی از طرفین معادله منحنی نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\frac{y'}{۲\sqrt{y}} + \frac{y'}{۴\sqrt[۴]{y^{۳}}} + \frac{y'}{۵\sqrt[۵]{y^{۴}}} = y^{۲} + ۲xyy'$$

و یا

$$y' = \frac{y^{۲}}{\frac{۱}{۲\sqrt{y}} + \frac{۱}{۴\sqrt[۴]{y^{۳}}}\frac{۱}{۵\sqrt[۵]{y^{۴}}} - ۲xy}$$

چون $y=۱$ و نقطه روی نمودار منحنی است پس $x=\frac{\sqrt{y}+\sqrt[۴]{y}+\sqrt[۵]{y}}{y^۲}=\frac{۳}{۱}=۳$ در نتیجه مقدار y' در نقطه $(۳,۱)$ برابر است با:

$$y'=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-۶}=-\frac{۲۰}{۱۰۱}$$

مساله ۱۱.۷.۶. *منحنی پارامتری با معادلات* $\begin{cases}x=t\cos t-۱\\ y=t\sin t+۱\end{cases}$ *مفروض است. نقطه‌ای روی این منحنی بیابید که شیب خط مماس در این نقطه صفر باشد.*

حل. با توجه به مشتق پارامتری داریم:

$$y'=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$$

حال اگر $y'=۰$ آنگاه باید داشته باشیم $\sin t+t\cos t=۰$ و این به ازای $t=۰$ برقرار است لذا نقطه مورد نظر عبارت است از $(-۱,۱)$.

۸.۶ مسایل

۱. *با استفاده از تعریف مشتق، مشتق هرکدام از توابع زیر را بدست آورید.*

$$۱)f(x)=\sqrt{x}\qquad ۲)f(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}\qquad ۳)f(x)=\tan x$$
$$۴)f(x)=\frac{۱}{x}\qquad ۵)f(x)=\sec x\qquad ۶)f(x)=\tan^{-۱}x$$

۲. *مقادیر a و b را طوری پیدا کنید که تابع*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+a}{x+b} & x\geq ۱\\ ۳[-x]|x-۲|-۲ & x<۱\end{cases}$$

در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر است.

۳. *a و b را طوری بیابید که تابع*

$$f(x)=\begin{cases}ax^۲+bx+۲ & |x|\leq ۲\\ \sqrt{x^۲+۴x+۴} & |x|>۲\end{cases}$$

در تمام نقاط مشتق‌پذیر باشد.

۴. مشتق چپ تابع $f(x)=x|x|[x]$ را در نقطه مبدا مختصات بدست آورید.

۵. اگر تابعی f مشتق‌پذیر و برای هر دو عدد حقیقی x_1 و x_2 داشته باشیم.

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq (x_1-x_2)^2$$

ثابت کنید f تابعی ثابت است.

۶. فرض کنید f و g توابعی مشتق‌پذیر بوده و در روابط $f'(x)=g(x)$ و $f''(x)=-f(x)$ صدق کنند. اگر $h(x)=f^2(x)+g^2(x)$ و $h(0)=5$ مطلوب است محاسبه $h(10)$.

۷. مشتق تابع زیر را بدست آورید.

۱.
$$f(x)=2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+4x^{\frac{1}{4}}+5x^{\frac{1}{5}}$$

۲.
$$f(x)=x^2\sin x.\cos x$$

۳.
$$f(x)=\frac{1}{1+\tan^2 x}$$

۴.
$$f(x)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan^{-1}(x)}+\cos x\right)$$

۵.
$$f(x)=\frac{\sin^{-1}x}{\cos^{-1}x}$$

۶.
$$f(x)=\cos\sqrt{1+\sqrt{x}}$$

۷.
$$f(x)=\frac{x\sin^3 x-x^3\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$$

۸. مشتق توابع ضمنی زیر را به دست آورید.

۱.
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$$

۲.
$$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=1$$

۳.
$$x=\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{y}$$

۴.
$$3x^2y+xy^2+y=0$$

۹. به کمک قاعده و زنجیری مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱.
$$y=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}$$

۲.
$$y=\frac{1}{x+\frac{1}{1+1/x}}$$

۳. $y = \tan^{-1}(\sin^{-1}(\cos^{-1}(\sqrt{x})))$

۴. $y = \sin(x + \sin(x + \sin x))$

۱۰. مشتق n اُم هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

۱. $y = \sin x$

۲. $y = \cos x$

۳. $y = \sqrt{x}$

۴. $y = \frac{1}{x}$

۵. $y = \frac{x+1}{x+2}$

۶. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

۱۱. اگر $g(a) = 1$ و $g'(a) = 2$ و $f(x) = g^3(x) + \frac{1}{g(x)}$ مقدار $f'(a)$ چقدر است؟

۱۲. اگر $f(x) = x^3 - 1$ و $g'(x) = \sqrt{3x+16}$ و مشتق $g \circ f(x)$ را در $x = 1$ بدست آورید.

۱۳. اگر مشتق تابع $f(x)$ برابر $\frac{1}{x}$ باشد مقدار مشتق تابع $f(\sin^2(x))$ را نسبت به x حساب کنید.

۱۴. اگر $f(x) = 2x^3 + x + 1$ باشد در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر f^{-1} مشتق آن را حساب کنید.

۱۵. تابع $f(x) = x^3 + x - 6$ مفروض است در نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر تابع معکوس f خطی بر نمودار آن مماس می‌کنیم شیب خط را بدست آورید.

۱۶. تابع $f(x) = x^3 - 4x + 7$ با دامنه $[2, \infty)$ مفروض است مقدار مشتق تابع معکوس f را در $b = 7$ ($b \in D_f - 1$) پیدا کنید.

۱۷. با حذف پارامتر t در معادلات پارامتری $\begin{cases} y = \sin t - 1 \\ x = \cos t + 1 \end{cases}$ معادله منحنی را به صورت ضمنی بنویسید و $\frac{dy}{dx}$ را به دو طریق پارامتری و ضمنی بدست آورده و با هم مقایسه کنید.

فصل ۷

قضایای بنیادی مشتق

در فصل قبل با قضایای اساسی مشتق نظیر فرمول‌های مشتق گیری، مشتق توابع معکوس، مرکب و غیره آشنا شدیم. در این فصل ازدیدگاه دیگری به قضایای بنیادی مشتق می‌پردازیم. این دیدگاه کاملاً به جنبه‌های کاربردی مشتق اختصاص دارد. قضایای بنیادی که دراین فصل بیان خواهند شد عبارتند از قضایای ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، قضایای رل و مقدار میانگین و کوشی، قاعده هوپیتال و قضیه تیلور. برخی از این قضایا در فصل هشتم که اختصاص به کاربردهای مشتق دارد مورد استفاده قرار می‌گیرند. که در آن‌جا نیز به آن‌ها اشاره خواهیم نمود.

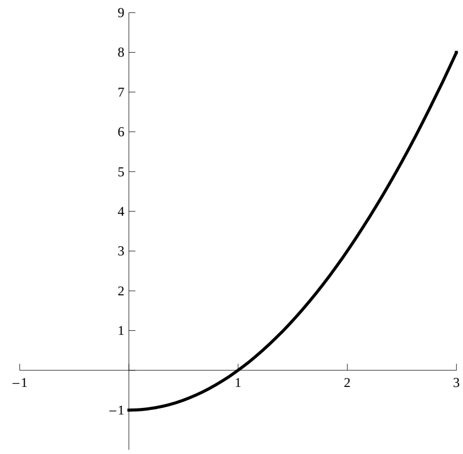
۱.۷ ماکزیمم و می‌نیمم

یکی از کاربردهای مهم مبحث مشتق در ریاضیات مسائل بهینه‌سازی می‌باشد که در آنها نیاز به یافتن راه بهینه (بهترین) انجام کاری را داریم. در بسیاری از حالات این مسائل منجر به یافتن مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم یك تابع می‌شود. در این قسمت به بیان مفاهیم ماکزیمم و می‌نیمم اعم ازمطلق یا نسبی و نیز قضایای مربوطه خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۱.۷. *تابع $y = f(x)$ مفروض است. نقطه $x_\circ \in D_f$ را یك نقطه ماکزیمم مطلق گوییم هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) \leq f(x_\circ)$. به طور مشابه نقطه $x_\circ \in D_f$ یك نقطه می‌نیمم مطلق است اگر به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) \geq f(x_\circ)$.*

مثال ۲.۱.۷. *تابع $f(x) = x^۲ - ۱$ را در بازه‌ی $[\circ, ۳]$ در نظر بگیرید. با توجه به نمودار تابع مشاهده می‌شود که $x_\circ = \circ$ نقطه می‌نیمم مطلق و $x_\circ = ۳$ ماکزیمم مطلق است.*

تعریف ۳.۱.۷. *تابع $y = f(x)$ مفروض است. نقطه $x_\circ \in D_f$ را یك نقطه ماکزیمم نسبی تابع f گوییم اگر یك همسایگی از نقطه $x_\circ$ مانند $D = (x_\circ - \delta, x_\circ + \delta)$ وجود داشته باشد به طوری‌که داشته*



شکل ۱.۷: نمودار تابع $f(x) = x^۲$ در بازه‌ی $[۰, ۳]$.

باشیم:

$$\forall x \in D \cap D_f : f(x) \leq f(x_۰)$$

به طور مشابه نقطه $x_۰ \in D_f$ یك نقطه می‌نیمم نسبی است اگر

$$\forall x \in D \cap D_f : f(x) \geq f(x_۰).$$

مثال ۴.۱.۷. *باتوجه به نمودار $f(x) = x^۲$ و $g(x) = x^۳$ نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی آنها به صورت زیر می‌باشند.*

$$f(x) = x^۲$$

$$g(x) = x^۳$$

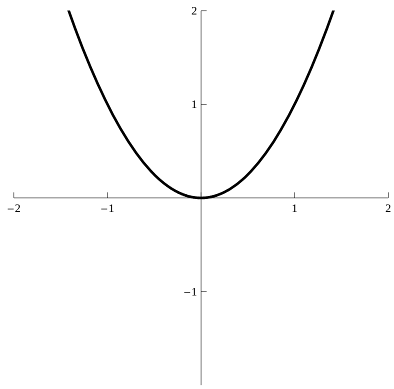
نقطه $x_۰ = ۰$ یك نقطه می‌نیمم نسبی و نیز می‌نیمم مطلق برای تابع $f(x)$ است و دارای هیچ نقطه ماکزیمم نسبی یا مطلق نمی‌باشد. تابع $g(x)$ دارای هیچ نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی مطلق نمی‌باشد.

در قضیه زیر که معروف به قضیه فرما می‌باشد نشان می‌دهیم که برای توابع مشتق‌پذیر، خط مماس در نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی به صورت افقی است.

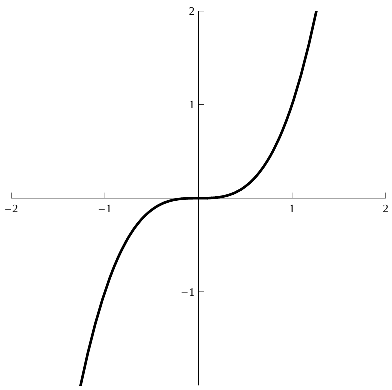
قضیه ۵.۱.۷ (قضیه فرما). *فرض کنیم تابع f در نقطه $x_۰$ مشتق‌پذیر و $x_۰$ یك نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی باشد. در این صورت $f'(x_۰) = ۰$.*

اثبات. فرض کنیم $x_۰$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع f باشد. دراین صورت بنا به تعریف، همسایگی $D = (x_۰ - \delta, x_۰ + \delta)$ وجود دارد به طوری‌که

$$\forall x \in D \cap D_f : f(x) \leq f(x_۰).$$



(آ) نمودار تابع $f(x) = x^2$.



(ب) نمودار تابع $f(x) = x^3$.

حال تابع $g(h)$ را برای $h \neq 0$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$g(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

برای هر h که $x_0 \pm h \in D \cap D_f$ داریم $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$. بنابراین اگر $h > 0$ آن‌گاه $g(h) \leq 0$ و اگر $h < 0$ آن‌گاه $g(h) \geq 0$. بنابراین $\lim_{h \to 0^-} g(h) \geq 0$ و $\lim_{h \to 0^+} g(h) \leq 0$. چون تابع f در x_0 مشتق‌پذیر است پس $\lim_{h \to 0} g(h) = f'(x_0)$. بنابراین

$$0 \leq \lim_{h \to 0^-} g(h) = \lim_{h \to 0^+} g(h) = \lim_{h \to 0} g(h) \leq 0$$

پس $\lim_{h \to 0} g(h) = 0$. و در نتیجه $f'(x_0) = 0$ در حالتی که x_0 نقطه می‌نیمم نسبی باشد استدلال به طور مشابه است. □

نتیجه ۶.۱.۷.

(الف) در توابع مشتق‌پذیر خطوط مماس در نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی به صورت افقی یعنی دارای شیب صفر هستند.

(ب) ریشه‌های مشتق f نقاط کاندید برای ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی هستند.

در انتهای این فصل نحوه تعیین وضعیت این نقاط را تحت عنوان آزمون‌های اول و دوم مشتق بیان خواهیم کرد.

تذکر ۷.۱.۷. *عکس قضیه فرما در حالت کلی برقرار نیست. به عنوان مثال در تابع $f(x) = x^3$ داریم $f'(0) = 0$ ولی $x_0 = 0$ یک نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی نیست.*

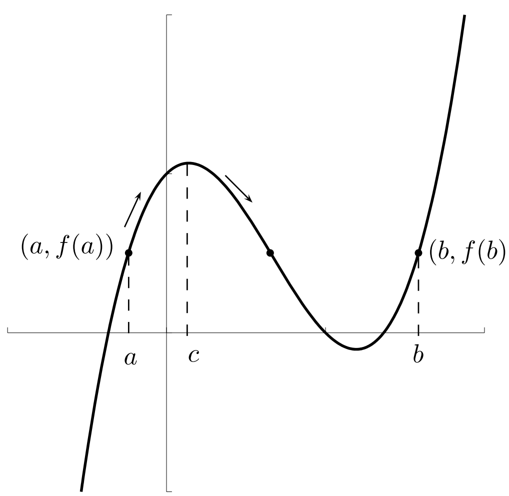
۲.۷ قضایای رل و مقدار میانگین

از جمله قضایای بنیادی و مهم در مشتق قضایای رل ومقدار میانگین می‌باشد. اهمیت این قضایا براساس کاربردهای بسیار و متنوع آنهاست. دراین قسمت به بیان این قضایا و تعابیر هندسی آنها و نیز چند نمونه از کاربردهای آنها می‌پردازیم. در این جا لازم است به قضیه (رُل) نیز اشاره‌ای داشته باشیم. که توابع پیوسته در بازه، $[a,b]$ ماکزیمم و می‌نیمم خود را دراین بازه اختیار می‌کند.

قضیه ۱.۲.۷ (قضیه رل). *فرض‌کنید تابع* $f(x)$ *در بازه بسته* $[a,b]$ *پیوسته و در بازه* (a,b) *مشتق‌پذیر باشد و به علاوه* $f(a)=f(b)$ *در این صورت نقطه‌ای مانند* $c\in(a,b)$ *وجوددارد به طوری‌که* $f'(c)=0$.

اثبات. چون تابع f در $[a,b]$ پیوسته است لذا بنا به قضیه ۲.۲.۵ ماکزیمم و می‌نیمم خود را در $[a,b]$ اختیار می‌کند. لذا فرض کنیم $x_1\in[a,b]$ نقطه ماکزیمم و $f(x_1)=M$ و $x_2\in[a,b]$ نقطه می‌نیمم و $f(x_2)=m$ باشد. اگر $m=M$ آن‌گاه f تابع ثابت است و مشتق آن در هر نقطه‌ای صفر است. بنابراین فرض کنیم $m\neq M$ دراین صورت چون $f(a)=f(b)$ پس حداقل یکی از نقاط x_1 یا x_2 در بازه (a,b) هستند. فرض کنید $a<x_1<b$ در این صورت طبق فرض $f'(x)$ موجود است. چون x_1 نقطه ماکزیمم نسبی است. بنا به قضیه فرما $f'(x_1)=0$ و حکم برقرار است. □

تعبیر هندسی قضیه رل را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد. چون f تابع ثابت نیست و $f(a)=f(b)$ لذا اگر از نقطه $(a,f(a))$ روی نمودار به سمت بالا حرکت کنیم چون باید از نقطه $(b,f(b))$ بگذریم. تابع $f(x)$ باید به سمت پایین برگردد در این هنگام است که نقطه ماکزیمم نسبی c به وجود می‌آید و خط مماس در این نقطه به صورت افقی یعنی موازی محور xها می‌شود.



مثال ۲.۲.۷. *نشان دهید که معادله $x^3 + x - 1 = 0$ دقیقا دارای یک ریشه است.*

حل. ابتدا به کمک قضیه بولتزانو نشان می‌دهیم که $f(x) = x^3 + x - 1$ دارای ریشه است چون $f(0) = -1 < 0$ لذا معادله $f(x) = 0$ دارای ریشه $0 < c < 1$ می‌باشد. حال ادعا می‌کنیم که ریشه دیگری وجود ندارد. به برهان خلف فرض کنیم c' ریشه دیگر معادله $f(x) = 0$ باشد. چون $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای است پس در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. به علاوه $f(c) = f(c_1) = 0$ لذا بنا به قضیه رل نقطه‌ای مانند c_2 بین c و c_1 وجود دارد به طوری‌که $f'(c_2) = 0$. از طرف دیگر می‌دانیم معادله $f'(x) = 3x^2 + 1 = 0$ دارای جواب نیست که تناقض است پس $f(x) = 0$ دارای دقیقا یک ریشه است.

قضیه زیر حالت کلی‌تری از قضیه رل می‌باشد که به نام قضیه مقدار میانگین معروف شده است و اولین بار توسط ریاضیدان فرانسوی لاگرانژ بیان شد.

قضیه ۳.۲.۷ (قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ)). *فرض کنید تابع f در $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت نقطه‌ای مانند $a < c < b$ وجوددارد به طوری‌که*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

قبل ازاثبات قضیه، معقول بودن آن را به وسلیه تعبیر هندسی مورد بررسی قرار می‌دهیم تابع $y = f(x)$ و نقاط $A = (a, f(a))$ و $B = (b, f(b))$ را از این تابع در نظر می‌گیریم. شیب پاره‌خط AB از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود

$$mAB = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

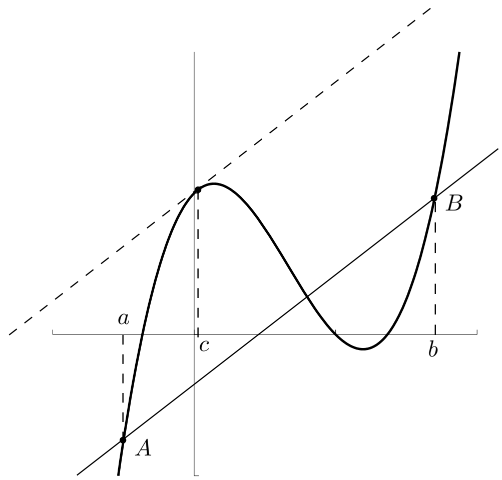
که دقیقا همان عبارت سمت راست حکم است. از طرف دیگر $f'(c)$ بنا به تعبیر هندسی مشتق شیب خط مماس بر تابع در نقطه $(c, f(c))$ می‌باشد. بنابراین قضیه مقدار میانگین را می‌توان به این صورت بیان کرد که نقطه‌ای چون $(c, f(c))$ وجوددارد به طوری‌که خط مماس در این نقطه موازی باپاره‌خط AB است شکل مقابل این حقیقت را آشکارتر می‌سازد.

اثبات. تابع $g(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

شرایط قضیه رل را برای تابع $g(x)$ بررسی می‌کنیم. $g(x)$ در $[a, b]$ پیوسته است. زیرا مجموع دو تابع پیوسته و یک چند جمله‌ای درجه یک می‌باشد. $g(x)$ در (a, b) مشتق‌پذیر است زیرا هر دو تابع f و چند جمله‌ای درجه یک مشتق‌پذیرند در نتیجه

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



(توجه کنید $f(a)$ و $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ توابع ثابت هستند.) از طرفی داریم

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

و

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0$$

بنابراین طبق قضیه رل نقطه‌ای مانند $a < c < b$ وجود دارد به طوری‌که $g'(c) = 0$. یعنی $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و حکم ثابت است. □

مثال ۴.۲.۷. *هر یک از نامساوی‌های زیر را ثابت کنید (قضیه ۶.۱.۴ را ببینید).*

(الف) $\sin x \leq x \quad (x > 0)$

(ب) $\tan^{-1} x < x \quad (x > 0)$

حل.

(الف) فرض کنید $f(x) = \sin x$ و بازه $[0, x]$ را درنظر بگیرید. تابع $f(x)$ در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می کند لذا $0 < c < x$ وجود دارد به طوری‌که

$$\cos x = f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}.$$

از طرفی $\cos \leq 1$ بنابراین $\sin x \leq x$

(ب) قضیه مقدار میانگین برای تابع $f(x) = \tan^{-1} x$ در بازه $[0, x]$ صدق می‌کند لذا $0 < c < x$ وجود دارد به طوری‌که
$$\frac{1}{1+c^2} = f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\tan^{-1} x - \tan^{-1} 0}{x - 0} = \frac{\tan^{-1} x}{x}.$$
چون $\frac{1}{1+c^2} < 1$ بنابراین $\tan^{-1} x < x$.

مثال ۵.۲.۷. *فرض کنید تابع $f(x)$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز و بر $\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید که $f''(x)$ حداقل یك ریشه حقیقی دارد.*

حل. فرض کنیم c_1, c_2 و c_3 ریشه‌های $f(x)$ باشند یعنی $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$. می‌توان فرض کرد $c_1 < c_2 < c_3$ در این صورت قضیه رل را برای تابع f در بازه‌های $[c_1, c_2]$ و $[c_2, c_3]$ به کار می‌بریم.
$$\exists\, k_1 \in (c_1, c_2) : f'(k_1) = 0$$
$$\exists\, k_2 \in (c_2, c_3) : f'(k_2) = 0$$

حال مجدد قضیه رل را برای تابع $f'(x)$ و بازه $[k_1, k_2]$ به کار می‌بریم. در این صورت $k_1 < k_2 < k_3$ وجود دارد به طوری‌که $f''(k_3)$. یعنی $f''(x)$ حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

قضیه زیر تعمیمی از قضیه مقدار میانگین می‌باشد که ابتدا توسط کوشی بیان گردیده است .

قضیه ۶.۲.۷ (قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته (کشی)). *فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $[a, b]$ پیوسته ودر (a, b) مشتق‌پذیر باشند. در این صورت نقطه‌ای مانند $a < c < b$ وجود دارد به طوری‌که*
$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

(توجه داریم اگر $g(x) = x$ اختیار کنیم آن‌گاه $g'(x) = 1$ قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ) حاصل می‌شود.)

اثبات. تابع $h(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.
$$h(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)].$$

چون توابع $f(x)$و $g(x)$ در $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر می‌باشند لذا تابع $h(x)$ نیز در $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر است همچنین $h(a) = h(b)$ زیرا
$$h(a) = g(a)[f(b) - f(a)] - f(a)[g(b) - g(a)] = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$
$$h(b) = g(b)[f(b) - f(a)] - f(b)[g(b) - g(a)] = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$

بنابراین شرایط قضیه رل برای تابع $h(x)$ و بازه $[a, b]$ برقرار است لذا نقطه $a < c < b$ وجود دارد

به طوری‌که $h'(c)=0$. چون
$$h'(c)=g'(x)[f(b)-f(a)]-f'(x)[g(b)-g(a)]$$

پس
$$g'(c)[f(b)-f(a)]-f'(c)[g(b)-g(a)]=0.$$

در نتیجه
$$f'(c)[g(b)-g(a)]=g'(c)[f(b)-f(a)].$$

□

تذکر ۷.۲.۷. *قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته را در حالتی‌که $g(b)-g(a)\neq 0$ می‌توان به صورت زیر بیان نمود.*
$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

قضیه ۸.۲.۷. *فرض کنید به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f'(x)=0$ دراین صورت f تابعی ثابت است.*

اثبات. کافی است ثابت کنیم که به ازای هر دو مقدار دلخواه x_1 و x_2 در D_f داریم $f(x_1)=f(x_2)$. فرض کنیم $x_2\in D_f$ و $x_1<x_2$ دلخواه باشند. در این صورت بازه $[x_1,x_2]$ را درنظر می‌گیریم چون تابع f مشتق‌پذیر است پس پیوسته نیز هست و شرایط قضیه مقدار میانگین برقراراست. یعنی $x_1<c<x_2$ وجود دارد به طوری‌که $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)=0$ پس $f(x_1)=f(x_2)$ لذا f تابعی ثابت است. □

نتیجه ۹.۲.۷. *فرض کنیم به ازای هر x در بازه (a,b) داشته باشیم $f'(x)=g'(x)$ در این صورت $f-g$ تابعی ثابت است. یعنی $f(x)=g(x)+K$ که K مقدار ثابتی است.*

تعریف ۱۰.۲.۷. *تابع مفروض f را بر $(a,b)\in D_f$ صعودی گوییم هرگاه به ازای هر $x_1,x_2\in(a,b)$ که $x_1\leq x_2$ داشته باشیم $f(x_1)\leq f(x_2)$ و اکیدا صعودی گوییم هرگاه $x_1<x_2$ نتیجه دهد $f(x_1)<f(x_2)$.*
به طور مشابه تابع f را نزولی گوییم اگر
$$\forall x_1,x_2\in(a,b)\in D_f: x_1\geq x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$$

و اکیدا نزولی گوییم هرگاه
$$x_1>x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

قضیه ۱۱.۲.۷. *تابع $f(x)$ برای هر $x \in (a,b)$ مفروض است اگر f' روی (a,b) اکیدا مثبت باشد آن‌گاه f روی (a,b) اکیدا صعودی است. به طور مشابه چنانچه f' روی (a,b) منفی باشد آن‌گاه f روی (a,b) اکیدا نزولی است.*

اثبات. فرض کنیم برای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) > 0$ و نیز فرض کنیم $x_1 < x_2$. در این صورت اگر قضیه مقدار میانگین را برای تابع $f(x)$ و بازه $[x_1, x_2]$ به کار ببریم آن‌گاه نقطه $x_1 < c < x_2$ وجود خواهد داشت به طوری‌که $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. چون $f'(c) > 0$ و $x_2 - x_1 > 0$ پس باید داشته باشیم $f(x_2) - f(x_1) > 0$. یعنی $f(x_1) < f(x_2)$. بنابراین تابع f اکیدا صعودی است قسمت دوم به طور مشابه ثابت می‌شود که به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌گردد. □

مثال ۱۲.۲.۷. *نقاطی را که در آن تابع $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ صعودی و نیز نقاطی را که در آن تابع f نزولی است بیابید.*

حل. داریم $f' = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$. با تعیین علامت $f'(x)$ بنا به قضیه قبل جاهایی را که f صعودی یا نزولی هستند را مشخص می‌کنیم. توجه داریم نقاط ۰ و ۱−

f	$f'(x)$	$x+1$	$x-2$	$12x$	بازه
بر $(-\infty, -1]$، نزولی	$-$	$-$	$-$	$-$	$x \leq -1$
بر $(-1, 0]$ صعودی	$+$	$+$	$-$	$-$	$-1 < x \leq 0$
بر $(0, 2)$ نزولی	$-$	$+$	$-$	$+$	$0 < x < 2$
بر $(2, \infty)$ صعودی	$+$	$+$	$+$	$+$	$x > 2$

و ۲ ریشه‌های مشتق f می‌باشند که ممکن است نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی باشند. در قسمت بعد به کمك آزمون‌های ماکزیمم و می‌نیمم نوع آنها راتعیین خواهیم نمود.

۳.۷ قاعده هوپیتال

قبلاً در فصل حد دیده‌ایم که $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ این حد را براساس جایگزینی $x = 0$ در تابع $\frac{\sin x}{x}$ نمی‌توان به دست آورد. $\frac{\sin x}{x}$ را یك صورت مبهم از نوع $\frac{0}{0}$ می‌نامیم. حد یك چنین صورت مبهمی می‌تواند هر عددی باشد مثلاً

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{ax^2}{x^2} = a$$

انواع دیگر صور مبهم موجود است که بعضی از آنها به صورت $\frac{\infty}{\infty}$، $0.\infty$، $\infty - \infty$، ∞^0، 0^0 و 1^∞ می‌باشند. در این بخش برای محاسبه حد صور مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ روش‌هایی به نام قوانین هوپیتال را ارائه

می‌کنیم.برای صور مبهم 0^0 و ∞^0 و 1^∞ به فصل یازده مراجعه شود. برای یافتن حد بعضی از صور مبهم دیگر معمولاً می‌توان به وسیله محاسبات جبری و به کمک تابع لگاریتم آنها را به یکی ازدو نمونه فوق تبدیل کرد و بسیاری از صور مبهم را می‌توان با ساده کردن صورت ومخرج به سادگی محاسبه کرد. قوانین هوپیتال فقط وقتی مورد استفاده قرار می‌گیرند که روش‌های ساده کردن قابل استفاده نباشند.

قضیه ۱.۳.۷ (قاعده هوپیتال). *فرض کنید* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *مشتق‌پذیر* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ *و* $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *در این صورت* $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

اثبات. فرض کنید $A \in \mathbb{R}$ اعداد P, r را چنان اختیار می‌کنیم $A < r < p$ بنابراین طبق فرض داریم $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A < r$. بنابراین در یك همسایگی c مانند $D = (c - \delta', c + \delta')$ داریم که اگر $x \in D$ آن‌گاه $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$. حال فرض کنید که $c < x < y < c + \delta$ که در آن x, y دلخواه هستند. در این صورت بنا به قضیه مقدار میانگین کوشی $t \in (x, y)$ چنان موجود است که:

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

چون $(x, y) \subseteq D$ پس داریم:

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} < r$$

اکنون اگر $y \to c$ آن‌گاه داریم:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to c} \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \leq r$$

پس برای هر عدد دلخواه Pکه $A < P$ داریم $\delta' > 0$ موجود است که برای هر $x \in (c, c + \delta')$ داریم $\frac{f(x)}{g(x)} < p$. به طریق مشابه اگر $q < A$ دلخواه باشد عدد $\delta'' > 0$ موجود است که برای هر $x \in (c - \delta'', c)$ داریم $\frac{f(x)}{g(x)} > q$. حال فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد در نظر می‌گیریم $q = A - \frac{\epsilon}{2}$ و $p = A + \frac{\epsilon}{2}$ و $0 < \delta \leq \min\{\delta', \delta''\}$ دراین صورت برای هر $x \in (c - \delta, c + \delta)$ داریم $|\frac{f(x)}{g(x)} - A| < \epsilon$ و بدین ترتیب اثبات قضیه تکمیل شده است. □

تذکر ۲.۳.۷. *در قضیه ۱.۳.۷*

الف) A *می‌تواند* $\pm\infty$ *باشد.*

ب) توابع f, g *می‌توانند به جای* $\mathbb{R}$ *روی بازه بازی مانند* (a, b) *مشتق‌پذیر باشند و* c *می‌تواند* $a < c < b$ *و* $c = a^+, c = b^-$

ج) می‌تواند $c = \pm\infty$

د) هرگاه $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ و بقیه فرض‌ها به قوت خود مجددا باقی باشند در تمامی حالات فوق قضیه برقرار خواهد ماند.

مثال ۳.۳.۷. *مطلوب است محاسبه* $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

حل. این حد از نوع $\infty - \infty$ است. برای محاسبه آن داریم.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0\end{aligned}$$

تذکر ۴.۳.۷. *در مواردی ممکن است $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ نیز به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ باشد دراین صورت مجددا قاعده هوپیتال را به کار می‌بریم و این عمل را می‌توان تا به دست آمدن حد تکرار کرد. در مثال فوق و همچنین در مثال زیر این امر اتفاق افتاده است.*

مثال ۵.۳.۷. *مطلوب است* $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}$.

حل. با جایگذاری ۰ به جای x صورت مبهم $\frac{0}{0}$ به دست می‌آید. حال با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

مثال ۶.۳.۷. *مطلوب است* $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$.

حل. با جایگذاری ۰ به جای x صورت مبهم $\frac{0}{0}$ به دست می‌آید حال با استفاده از قاعده هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

چون حد سمت راست هنوز مبهم از نوع $\frac{0}{0}$ است با استفاده مجدد از این قاعده داریم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}$$

و مجددا چون حد صورت مخرج در صفر، برابر صفر است پس با استفاده مجدد از این قاعده داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4\sec^2 x\tan^2 x + 2\sec^4 x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

مثال ۷.۳.۷. *مطلوب است* $\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1-\cos x}$.

حل. اگر کورکورانه سعی در استفاده از قاعده هوپیتال بنماییم به دست می‌آوریم

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$$

و این غلط است اگرچه وقتی $x\to\pi^-$ صورت کسر یعنی $\sin x\to 0$ ولی توجه کنید که مخرج یعنی$(1-\cos x)$ به صفر میل نمی‌کند. پس قاعده هوپیتال را در این جا نمی‌توان به کار برد. حد مطلوب در واقع چون صورت و مخرج توابعی پیوسته بوده ومخرج غیرصفر است به سادگی از جایگذاری به دست می‌آید و برابر است با:

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{\sin\pi}{1-\cos\pi} = \frac{0}{1-(-1)} = 0$$

۴.۷ قضیه تیلور

این که بسیاری از توابعی که در عمل با آنها سروکار داریم دارای پیچیدگیهای زیاد هستند یك واقعیت است به عنوان مثال یك تابع پیوسته می‌تواند خیلی پیچیده باشد برای این منظور ریاضیدانان روش‌هایی را برای تقریب توابع معینی برحسب توابعی که بتوان به سادگی با آنها کارکرد ابداع نموده‌اند چند جمله‌ای‌ها از جمله این توابع می‌باشند. قضیه تیلور در واقع بیانگر این واقعیت است که توابعی که دارای مراتب مشتق به اندازه کافی بالا باشند را می‌توان با چند جمله‌ای‌ها تقریب زد، برای بیان قضیه تیلور ابتدا چند جمله‌ای مرتبه n-ام تیلور یك تابع راتعریف می‌نماییم.

تعریف ۱.۴.۷. *فرض کنید f روی بازه‌ای شامل c تا مرتبه $(n+1)$- ام مشتق‌پذیر باشد در این صورت چند جمله‌ای تیلور مرتبه n ام تابع f در نقطه c عبارت است از:*

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{(1)(2)\cdots(n)}(x-c)^n$$

قضیه ۲.۴.۷ (تیلور). *فرض کنید f بر (a,b) تا مرتبه $(n+1)$- ام مشتق‌پذیر و $c \in (a,b)$ دراین صورت برای هر $x \in (a,b)$ عددی مانند z بین c, x موجود است که*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(1)(2)\cdots(n)(n+1)}(x-c)^{n+1}$$

اثبات. در نظر می‌گیریم $G(t) = (x-t)^{n+1}$ و $F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(1)(2)\cdots(k)}(x-t)^k$ در این صورت داریم $G(x) = F(x) = 0$، $G(c) = (x-c)^{n+1}$ و $F(c) = f(x) - P_n(x)$ همچنین

$$\begin{aligned} G'(t) &= -(n+1)(x-t)^n \quad , \\ F'(t) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{(1)(2)\cdots(k)}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)k}{(1)(2)\cdots(k)}(x-t)^k \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{(1)(2)\cdots(n)}(x-t)^n \end{aligned}$$

باتوجه به قضیه مقدار میانگین کوشی G, F روی بازه بسته‌ای که نقاط انتهایی آن c, x باشند واجد شرایط این قضیه می‌باشند. بنابراین z ای بین c, x موجود است که:

$$\frac{F(c) - F(x)}{G(c) - G(x)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}$$

حال با جایگذاری مقادیر مربوطه دراین تساوی داریم:

$$\frac{f(x) - p(x) - 0}{(x-c)^{n+1} - 0} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(z)(x-z)^n}{(1)(2)\cdots(n)}}{-(n+1)(x-z)^n}$$

و یا پس از ساده کردن کسر و طرفین وسطین داریم:

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(1)(2)\cdots(n)(n+1)}(x-c)^{n+1}$$

□

در فصل ۱۵ قضیه تیلور را برای بسط تیلور توابع به کار خواهیم برد.

مثال ۳.۴.۷. *برای تابع $f(x) = \sin x$ چندجمله‌ای تیلور مرتبه پنجم را در ۰ محاسبه نمایید .*

حل. داریم:

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad f''(x) = -\sin x \\
&\Rightarrow \quad f'''(x) = -\cos x \\
&\Rightarrow \quad f^{(۴)}(x) = \sin x \\
&\Rightarrow \quad f^{(۵)}(x) = \cos x
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{array}{lll}
f(۰) = ۰, & f'(۰) = ۱, & f''(۰) = ۰, \\
f'''(۰) = -۱, & f^{(۴)}(۰) = ۰, & f^{(۵)}(۰) = ۱.
\end{array}$$

و بدین ترتیب:

$$\begin{aligned}
P_۵(x) &= f(۰) + f'(۰) + \frac{f''(۰)}{(۱)(۲)} + \frac{f'''(۰)}{(۱)(۲)(۳)} + \frac{f^{(۴)}(۰)}{(۱)(۲)(۳)(۴)} + \frac{f^{(۵)}(۰)}{(۱)(۲)(۳)(۴)(۵)} \\
&= x - \frac{x^۳}{۶} + \frac{x^۵}{۱۲۰}
\end{aligned}$$

مثال ۴.۴.۷. *چندجمله‌ای تیلور مرتبه پنجم تابع $f(x) = \sin x$ را در $c = \frac{\pi}{۶}$ محاسبه نمایید.*

حل. باتوجه به مشتقات محاسبه شده در مثال قبل داریم:

$$\begin{aligned}
f(\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۲} \quad &\Rightarrow \quad f'(\frac{\pi}{۶}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\
&\Rightarrow \quad f''(\frac{\pi}{۶}) = -\frac{۱}{۲} \\
&\Rightarrow \quad f'''(\frac{\pi}{۶}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\
&\Rightarrow \quad f^{(۴)}(\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۲} \\
&\Rightarrow \quad f^{(۵)}(\frac{\pi}{۶}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}
\end{aligned}$$

بنابراین دراین حالت داریم.

$$\begin{aligned}
P_۵(x) &= \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}(x - \frac{\pi}{۶}) - \frac{۱}{۲}\frac{(x - \frac{\pi}{۶})^۲}{(۱)(۲)} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\frac{(x - \frac{\pi}{۶})^۳}{(۱)(۲)(۳)} + \frac{۱}{۲}\frac{(x - \frac{\pi}{۶})^۴}{(۱)(۲)(۳)(۴)} \\
&\quad + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\frac{(x - \frac{\pi}{۶})^۵}{(۱)(۲)(۳)(۴)(۵)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{6})^{2}-\frac{\sqrt{3}}{12}(x-\frac{\pi}{6})^{3}+\frac{1}{48}(x-\frac{\pi}{6})^{4}$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{240}(x-\frac{\pi}{6})^{5}$$

مثال ۵.۴.۷. *چند جمله‌ای تیلور مرتبه پنجم تابع* $f(x)=\frac{1}{1-x}$ *را در* $c=0$ *محاسبه نمایید.*

حل. داریم:

$$\begin{aligned}
f(x)=\frac{1}{1-x} \quad &\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{(1-x^{2})}\\
&\Rightarrow \quad f''(x)=\frac{2}{(1-x^{3})}\\
&\Rightarrow \quad f'''(x)=\frac{6}{(1-x)^{4}}\\
&\Rightarrow \quad f^{(4)}(x)=\frac{24}{(1-x^{5})}\\
&\Rightarrow \quad f^{(5)}(x)=\frac{120}{(1-x)^{6}}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{array}{lll}
f(0)=1, & f'(0)=1, & f''(0)=2,\\
f'''(0)=6, & f^{(4)}(0)=24, & f^{(5)}(0)=120.
\end{array}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
P_5(x) &= 1+x+2\frac{x^{2}}{(1)(2)}+\frac{6x^{3}}{(1)(2)(3)}\\
&= \frac{24x^{4}}{(1)(2)(3)(4)}+\frac{120x^{5}}{(1)(2)(3)(4)(5)}\\
&= 1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+x^{5}.
\end{aligned}$$

توجه نمایید که در مثال‌های ۳.۴.۷ و ۴.۴.۷ تابع مربوطه دارای مشتق از هر مرتبه‌ای در تمامی اعداد حقیقی بود اما در مثال ۵.۴.۷ تابع در بازه‌ای به صورت $(-b,b)$ که $b<1$ تعریف شده است در این مثال قضیه تیلور در هر بازه‌ای که شامل ۱ باشد برقرار نیست همواره ضروری است که مفروضات قضیه تیلور در بازه داده شده چک شود.

۵.۷ آزمون‌های ماکزیمم و می‌نیمم

در این آزمون به بیان دو روش برای تعیین نقاط، ماکزیمم و می‌نیمم نسبی برای یك تابع پیوسته در بازه می‌پردازیم .در ابتدا لازم است تعریف یك نقطه بحرانی یا اکسترمم را برای یك تابع f بیان کنیم.

تعریف ۱.۵.۷. *فرض کنیم f یك تابع باشد در این صورت نقطه c را یك نقطه بحرانی یا اکسترمم f گوییم هرگاه $f'(c) = 0$ چنانچه f' در نقطه c موجود نباشد آن‌گاه c را یك نقطه تکین f می‌نامیم.*

اولین روش برای تعیین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی به کمك علامت مشتق اول می‌باشد که به همین علت به نام آزمون مشتق اول نامگذاری شده است. در قضیه زیر به بیان آن می‌پردازیم.

قضیه ۲.۵.۷ (آزمون مشتق اول). *فرض کنید f دربازه (a, b) پیوسته در تمام نقاط (a, b) بجز احتمالاً در نقطه c مشتق‌پذیر باشد در این صورت*

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در زیر بازه (d, c) داشته باشیم $f'(x) > 0$ و به ازای تمام مقادیر x در زیر بازه (c, e) نیز داشته باشیم $f'(x) < 0$. آن‌گاه f دارای یك ماکزیمم نسبی در c است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در زیر بازه (d, c) داشته باشیم $f'(x) < 0$ و به ازای تمام مقادیر x در زیر بازه (c, e) و $f'(x) > 0$ آن‌گاه f دارای یك می‌نیمم نسبی در c است.

اثبات. الف) از قضیه ۱۱.۲.۷ نتیجه می‌شود که f روی $[d, c]$ صعودی است و روی $[c, e]$ نزولی است. چون f روی $[d, c]$ صعودی است اگر x در $[d, c]$ واقع شود و $x_1 \neq c$ آن‌گاه $f(x_1) < f(c)$. همچنین چون f روی $[c, e]$ نزولی است اگر x_2 در $[c, e]$ واقع شود و $x_2 \neq c$ آن‌گاه $f(c) < f(x_2)$ بنابراین f دارای یك ماکزیمم نسبی در نقطه c است.

ب) اثبات قسمت (ب) به طور مشابه می‌باشد.

□

مثال ۳.۵.۷. *نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع $f(x) = x^2$ را به دست آورید.*

حل. بنا به قضیه فرما ابتدا لازم است که ریشه‌های مشتق f را پیدا کنیم لذا داریم $f'(x) = 2x = 0$ پس $x = 0$ بنابراین $x = 0$ کاندیدا برای ماکزیمم و می‌نیمم نسبی است. حال از آزمون مشتق اول برای تعیین نوع نقطه $x = 0$ استفاده می‌نماییم داریم

$$\forall x \in (-\infty, 0), \quad f'(x) < 0$$

$$\forall x \in (0, +\infty), \quad f'(x) > 0.$$

بنابراین f دارای می‌نیمم نسبی در نقطه $x = 0$ می‌باشد.

مثال ۴.۵.۷. *نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع $f(x) = x^{۳} - ۳x$ را به دست آورید.*

حل. برای تعیین ریشه‌های مشتق داریم

$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۳ = ۳(x^{۲} - ۱) = ۰ \quad \Rightarrow x = \pm ۱.$$

حال اگر جدول تعیین علامت مشتق f را مشخص نماییم با توجه به علامت $f'(x)$ ملاحظه می‌شود که نقطه $x = -۱$ یك نقطه ماکزیمم نسبی و نقطه $x = ۱$ یك نقطه می‌نیمم نسبی است. روش دوم برای تعیین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم استفاده از مشتق دوم f می‌باشد که در قضیه زیر به آن اشاره می‌نماییم.

قضیه ۵.۵.۷ (آزمون مشتق دوم). *فرض کنید c یك نقطه بحرانی f باشد و همچنین f دوبار مشتق‌پذیر باشد در این صورت*

الف) اگر $f''(c) > ۰$ آن‌گاه f دارای می‌نیمم نسبی در c است.

ب) اگر $f''(c) < ۰$ آن‌گاه f دارای ماکزیمم نسبی در c است.

اثبات. باتوجه به تعریف مشتق داریم

$$f''(c) = \lim_{h \to ۰} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}.$$

چون c یك نقطه بحرانی f است پس بنا به تعریف ۱.۵.۷ داریم $f'(c) = ۰$ در نتیجه

$$f''(c) = \lim_{h \to ۰} \frac{f'(c+h)}{h}.$$

حال اگر $f''(c) > ۰$ آن گاه عدد $\delta > ۰$ وجود دارد که از $|h| < \delta$ نتیجه می‌شود $\frac{f'(c+h)}{h} > ۰$ بنابراین به ازای $۰ < h < \delta$ باید داشته باشیم $f'(c+h) > ۰$ و به ازای $-\delta < h < ۰$ باید داشته باشیم $f'(c+h) < ۰$ اکنون بنا به قضیه ۲.۵.۷، f در نقطه c دارای می‌نیمم نسبی است. اثبات قسمت (ب) مشابه است. □

مثال ۶.۵.۷. *نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع $f(x) = x^{۴} - ۴x^{۲}$ را به دست آورید.*

حل. برای تعیین ریشه‌های مشتق از $f'(x) = ۰$ داریم

$$f'(x) = ۴x^{۳} - ۸x = ۴x(x^{۲} - ۲) = ۰.$$

در نتیجه ریشه‌های مشتق f عبارتند از $x = ۰$ و $x = \pm\sqrt{۲}$ حال مشتق دوم f را محاسبه می‌کنیم. $f''(x) = ۱۲x^{۲} - ۸$ لذا بنا به آزمون مشتق دوم داریم $f''(۰) = -۸ < ۰$ و $f''(-\sqrt{۲}) = f''(\sqrt{۲}) = ۱۶ > ۰$ بنابراین $x = ۰$ نقطه ماکزیمم نسبی و $x = \sqrt{۲}$ و $x = -\sqrt{۲}$ نقاط می‌نیمم نسبی f می‌باشند.

تذکر ۷.۵.۷. *ممکن است این سؤال مطرح شود که چه موقع در تعیین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی یك تابع f از آزمون اول مشتق و چه موقع از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم. پاسخ به این سؤال به دو نکته زیر بستگی دارد.*

الف) تعیین علامت مشتق اول f

ب) محاسبه مشتق دوم f

با توجه به راحتی محاسبه در هرکدام از موارد فوق می‌توان بدین صورت اولویت‌بندی کرد که اگر محاسبه مشتق دوم f به سادگی انجام‌پذیر باشد آن‌گاه استفاده از آزمون مشتق دوم ما را سهل‌تر و سریعتر به تعیین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم می‌رساند و در غیر این صورت باید از آزمون مشتق اول استفاده نمود. به‌علاوه ممکن است گاهی محاسبه مشتق دوم f به سادگی انجام پذیر ولی در نقطه بحرانی مقدار مشتق دوم صفر شود. دراین حالت نیز باید از آزمون مشتق اول کمك گرفت. مثال‌های زیر این حقیقت را آشکار می‌سازد .

مثال ۸.۵.۷. *نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع $f(x) = x^۳$ را به دست آورید.*

حل. داریم:

$$f''(x) = ۶x, f'(x) = ۳x^۲$$

لذا $x = ۰$ یك نقطه بحرانی f است. ملاحظه می‌شود $f''(۰) = ۰$ لذا از آزمون دوم مشتق نمی‌توان استفاده کرد حال بنا به آزمون مشتق اول چون به ازای تمام مقادیر x در $(-\infty, ۰)$ و $(۰, +\infty)$ همواره $f'(x) > ۰$ لذا از آزمون دوم مشتق نمی‌توان استفاده کرد حال بنا به آزمون مشتق اول چون به ازای تمام مقادیر x در $(-\infty, ۰)$ و$(۰, +\infty)$ همواره $f'(x) > ۰$ لذا $x = ۰$ نه ماکزیمم نسبی و نه می‌نیمم نسبی است. به عبارت دیگر f دارای هیچ نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی نمی‌باشد.

قضیه ۹.۵.۷. *فرض کنیم $f''(c)$ موجود باشد اگر f دارای یك می‌نیمم نسبی (ماکزیمم نسبی) در c باشد آن‌گاه $f''(c) \geq ۰$ $\quad$ $(f''(c) \leq ۰)$.*

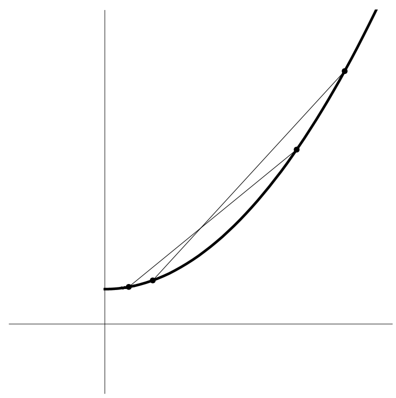
اثبات. فرض کنید f دارای یك می‌نیمم نسبی در c باشد ادعا می‌کنیم $f''(c) \geq ۰$ زیرا در غیر این صورت باید داشته باشیم $f''(c) < ۰$. حال بنا به آزمون مشتق دوم، f دارای یك ماکزیمم نسبی در نقطه c است بنابراین در یك بازه شامل c تابع f یك تابع ثابت خواهدبود یعنی $f''(c) = ۰$ که تناقض است بنابراین $f''(c) \geq ۰$ در حالت ماکزیمم نسبی اثبات مشابه است. □

۶.۷ تقعر و تحدب

در این قسمت به توصیف دو خاصیت مهم هندسی در توابع می‌پردازیم که در رسم آنها اهمیت بسزایی دارد. اگرچه ممکن است برای بسیاری از توابع اطلاع ازمشتقات اول ودوم برای رسم نمودار آنها کافی به نظر رسد.

تعریف ۱.۶.۷. *تابع f را روی یك بازه محدب گوییم هرگاه به ازای هر b و a دراین بازه پاره‌خط و اصل دو نقطه $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ در بالای نمودار f واقع باشد.*

برای توصیف بهتر تعریف فوق می‌توان به شکل زیر توجه نمود. اگر معادله خط و اصل بین نقاط



$(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ را با تابع g نشان دهیم آن گاه خواهیم داشت

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

ملاحظه می‌شود که این خط در بالای نمودار f قرار دارد لذا به ازای هر $x \in (a, b)$ داریم $g(x) > f(x)$ به عبارت دیگر $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a) > f(x)$ آن گاه از رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

حال از رابطه اخیر می‌توان تعریف جدیدی از تابع محدب به صورت زیر ارائه نمود.

تعریف ۲.۶.۷. *تابع f را روی بازه I محدب (مقعر به بالا) گوییم هرگاه به ازای هر a و x و b در I که $a < x < b$ داشته باشیم*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

هرگاه به ازای هر x, b, a در I که $a < x < b$ داشته باشیم
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
آن‌گاه f را روی بازه I مقعر (مقعر به پایین) می‌گوییم.

اکنون به بیان برخی روابط میان خاصیت‌های محدب و مشتق‌پذیری در قضایای زیر می‌پردازیم.

قضیه ۳.۶.۷. *فرض کنید f روی بازه I شامل a و b و $(a < b)$ محدب باشد. اگر f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه*

الف) نمودار f به جز در نقطه $(a, f(a))$ در بالای خط مماس بر منحنی f در $(a, f(a))$ واقع است.

ب) اگر $a < b$ و f در a, b مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه $f'(a) < f'(b)$.

اثبات. الف) فرض کنیم $h_۱$ و $h_۲$ دو عدد حقیقی دلخواه باشند به طوری که $۰ < h_۱ < h_۲$ و $a + h_۱$ و $a + h_۲$ در I باشند آن‌گاه چون f تابع محدب است داریم:
$$\frac{f(a+h_۱)-f(a)}{h_۱} < \frac{f(a+h_۲)-f(a)}{h_۲} \tag{۱.۷}$$

نامساوی فوق نشان میدهد که به ازای هر $h > ۰$ و $f'(a) < \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ و این بدان معنی است که به ازای هر $h > ۰$ شیب خط واصل میان نقاط $(a, f(a))$ و $(a+h, f(a+h))$ بیشتر از شیب خط مماس بر f در نقطه $(a, f(a))$ است در نتیجه $(a+h, f(a+h))$ در بالای خط مماس واقع است. هرگاه $h < ۰$ نیز شرایط مشابه حالت $h > ۰$ است زیرا اگر $h_۱$ و $h_۲$ اعداد حقیقی دلخواهی باشند به طوری که $h_۱ < h_۲ < ۰$ و $a + h_۱$ و $a + h_۲$ در I واقع باشند آن‌گاه داریم
$$\frac{f(a+h_۱)-f(a)}{h_۱} > \frac{f(a+h_۲)-f(a)}{h_۲}.$$

و نامساوی فوق نشان می‌دهدکه به ازای هر $h < ۰$، $f'(a) > \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ و این نتیجه می‌دهد که هرگاه $h < ۰$ نقطه $(a+h, f(a+h))$ در بالای خط مماس واقع است و این برهان (الف) را تکمیل می‌کند.

ب) فرض کنید $a < b$ و f در نقاط a, b مشتق‌پذیر باشد در این صورت بنا به قسمت الف داریم.
$$\text{اگر } b-a > ۰ \text{ آنگاه } \quad f'(a) < \frac{f(a+(b-a))-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\text{اگر } b-a < ۰ \text{ آنگاه } \quad f'(b) > \frac{f(b+(a-b))-f(b)}{a-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $f'(a) < f'(b)$ و حکم ثابت است.

$\square$

تبصره ۴.۶.۷. *می‌توان دید که محدب و مقعر بودن یک تابع مانند f را به صورت زیر می‌توان بیان کرد.*
تابع f را در بازه‌ی (a,b) محدب گوییم هرگاه برای هر $0 < \lambda < 1$ داشته باشیم
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

و تابع f در (a,b) مقعر است هرگاه برای $0 < \lambda < 1$ داشته باشیم
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

بررسی معادل بودن تعاریف فوق را به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۵.۶.۷. *فرض کنید f یک تابع مشتق‌پذیر بر (a,b) و f' تابعی صعودی باشد. در این صورت f یک تابع محدب روی (a,b) است.*

اثبات. فرض کنیم که $x_1 < x_2$ دو نقطه‌ی دلخواه از (a,b) باشند و $0 < \lambda < 1$ دلخواه باشد در نظر می‌گیریم $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.
بایستی نشان دهیم که $f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.
اما با توجه به اینکه $f(x) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)(f(x_2) - f(x))$، کافی ست نشان دهیم
$$\lambda(f(x) - f(x_1)) \leq (1-\lambda)(f(x_2) - f(x)).$$

با توجه به تعریف x داریم $x_1 < x < x_2$. بنابراین با توجه به مفروضات قضیه شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین لاگرانژ برای f روی بازه‌های $[x_1, x]$ و $[x, x_2]$ برقرارند بنابراین مقادیر $c_1 \in (x_1, x)$ و $c_2 \in (x, x_2)$ موجودند که $f(x_2) - f(x) = f'(c_2)(x_2 - x)$ و $f(x) - f(x_1) = f'(c_1)(x - x_1)$ همچنین داریم $c_1 < c_2$ بنابراین با توجه به مفروضات قضیه $f'(c_1) < f'(c_2)$. حال از اینکه $x + (1-\lambda)x = x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ داریم
$$\lambda(x - x_1) = (1-\lambda)(x_2 - x).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\lambda(f(x) - f(x_1)) &= \lambda f'(c_1)(x - x_1) \\
&\leq (1-\lambda)(f(x_2) - f(x) \\
&= (1-\lambda)f'(c_2)(x_2 - x)
\end{aligned}$$

و به این ترتیب اثبات کامل شده است. $\square$

قضیه ۶.۶.۷. *فرض کنید f بر (a,b) مشتق‌پذیر و f' تابعی نزولی باشد در این‌صورت f بر (a,b) مقعر است.*

اثبات. برهان مشابه قضیه ۵.۶.۷ است و به خواننده واگذار می‌شود. □

قضیه ۷.۶.۷. *فرض کنید f روی بازه I مشتق‌پذیر باشد و خط مماس بر f در هر نقطه از بازه I به جز در نقطه تماس در زیر نمودار f قرار گیرد. در این صورت f یک تابع محدب روی بازه I است.*

اثبات. کافی است بنا به قضیه ۵.۶.۷ ثابت کنیم f' تابع صعودی است. فرض کنیم $a < b$ در این صورت ثابت می‌کنیم $f'(a) < f'(b)$.
واضح است که اگر نقطه $(b, f(b))$ در بالای خط مماس در نقطه $(a, f(a))$ باشد و $(a, f(a))$ در بالای خط مماس در نقطه $(b, f(b))$ واقع باشد آن‌گاه شیب خط مماس در $(b, f(b))$ از شیب خط مماس در $(a, f(a))$ بیشتر است زیرا فرض کنیم خط مماس در $(a, f(a))$ با تابع $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ نمایش داده شده باشد دراین صورت چون $(b, f(b))$ در بالای خط مماس بر f در $(a, f(a))$ است لذا داریم

$$f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad f(b) > f'(a)(b-a) + f(a) \qquad (۲.۷)$$

و به طور مشابه اگر خط مماس بر f در $(b, f(b))$ با تابع

$$h(x) = f'(b)(x-a) + f(b)$$

بیان شود آن‌گاه چون $(a, f(a))$ در بالای خط مماس بر f در $(b, f(b))$ واقع است داریم

$$f(a) > f'(b)(a-b) + f(b), \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(b) \qquad (۳.۷)$$

بنابراین از نامساوی‌های ۲.۷ و ۳.۷ نتیجه می‌شود $f'(a) < f'(b)$ پس f' تابع صعودی است لذا بنا به قضیه ۵.۶.۷ تابع f یک تابع محدب است. □

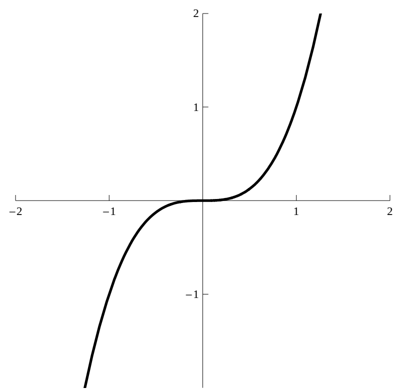
نتیجه ۸.۶.۷. *هرگاه مشتق دوم تابع f موجود باشد آن‌گاه با توجه به قضیه ۵.۶.۷ جهت تعیین نواحی تقعر و تحدب کافی است مشتق دوم f را تعیین علامت کنیم زیرا می‌دانیم اگر f'' در یک ناحیه دارای علامت مثبت باشد آن‌گاه f' تابع صعودی است و اگر f'' دارای علامت منفی باشد آن‌گاه f' نزولی است. حالتی که f'' برابر صفر باشد را به طور جداگانه در ادامه این فصل مورد بررسی قرار خواهیم داد.*

مثال ۹.۶.۷. *نواحی تعقر و تحدب را برای تابع $f(x) = x^۲$ مشخص کنید.*

حل. داریم $f'(x) = ۲x$ و $f''(x) = ۲$ چون علامت مشتق دوم f همواره مثبت است لذا نمودار f در سراسر ناحیه محدب (دارای تقعر به سمت بالا) است .

مثال ۱۰.۶.۷. *نواحی تقعر و تحدب را برای تابع $f(x) = x^۳$ مشخص کنید.*

حل. داریم $f'(x)=۳x^{۲}$ و $f''(x)=۶x$ لذا به ازای مقادیر $x>۰$ مشتق دوم f دارای علامت مثبت و برای مقادیر $x<۰$ مشتق دوم f دارای علامت منفی است بنابراین به ازای $x>۰$، f محدب (دارای تقعر به سمت بالا) و به ازای $x<۰$، f تقعر (دارای تقعر به سمت پایین) است. شکل زیر را ملاحظه نمایید.



شکل ۲.۷: نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$.

اکنون به معرفی یکی از نکات مهم در نمودار f که مشتق دوم در آن صفر می‌باشد می‌پردازیم.

تعریف ۱۱.۶.۷. *فرض‌کنید تابع f دربازه I شامل نقطه c پیوسته باشد دراین صورت نقطه c را نقطه عطف f می‌گوییم هرگاه نمودار f در نقطه c دارای خط مماس باشد و در دو طرف c دارای جهت تقعر متفاوت باشد. باتوجه به تعریف نقطه عطف ملاحظه می‌کنیم‌که اگر مشتق دوم تابع f در نقطه c موجود باشد و c نقطه عطف f باشد آن‌گاه باید داشته باشیم $f''(c)=۰$ البته توجه داریم‌که شرط $f''(c)=۰$ وجود نقطه عطف برای نمودار تابع f در نقطه c را نتیجه نمی‌دهد.*

مثال ۱۲.۶.۷. *وجود نقطه عطف را برای هرکدام از توابع $f(x)=x^{۴}$ و $g(x)=x^{۳}$ و $h(x)=-x^{۴}$ را بررسی‌کنید.*

حل. داریم $f''(۰)=g''(۰)=h''(۰)=۰$ ولی نقطه $x=۰$ تنها برای تابع g نقطه عطف است و برای توابع f و h نقطه عطف نمی‌باشد.

۷.۷ مسایل نمونه حل شده

مساله ۱.۷.۷. *فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر بر روی (a,b) باشد اگر $a < x_۱ < x_۲ < b$ و c بین $f'(x_۱)$ و $f'(x_۲)$ باشد آن‌گاه حداقل یك نقطه مانند x در $(x_۱,x_۲)$ موجود است به قسمی‌که $f'(x)=c$.*

حل. فرض کنیم $f'(x_۱) < c < f'(x_۲)$. برای هر $x \in (a,b)$ درنظر می‌گیریم $g(x) = f(x) - cx$ دراین صورت $g'(x_۱) < ۰ < g'(x_۲)$ چون تابع g روی بازه $[x_۱,x_۲]$ پیوسته است پس می‌نیمم مقدار خود را در نقطه‌ای مانند $x_۰ \in [x_۱,x_۲]$ اختیار می‌کند (قضیه ۲.۲.۵) و چون $g'(x_۱) = \lim_{t\to x_۱} \frac{g(t)-g(x_۱)}{t-x_۱}$ پس $g(t)-g(x_۱)$ باید برای t های نزدیك به $x_۱$ و بزگتر از آن منفی باشد. به ویژه نقطه‌ای مانند $t_۱ \in (x_۱,x_۲)$ موجود است که $g(t_۱) < g(x_۱)$ بنابراین باید $x_۰ \neq x_۲$. بنابراین $x_۰ \in (x_۱,x_۲)$ و باتوجه قضیه فرما $g'(x_۰) = ۰$ پس $f'(x_۰) = g'(x_۰) + c = c$

مساله ۲.۷.۷. *نشان دهیدکه معادله $x^۷ + ۵x^۳ + x - ۶ = ۰$ دقیقا دارای یك ریشه حقیقی است.*

حل. در نظر می‌گیریم $f(x) = x^۷ + ۵x^۳ + x - ۶$. در این صورت داریم $f(۱) = f(۰) = -۶$ چون f یك چندجمله‌ای است پس پیوسته است بنابراین بنا قضیه بولزانو دارای حداقل یك ریشه در بازه $(۰,۱)$ می‌باشد حال نشان می‌دهیم f فقط دارای یك ریشه است فرض کنید f دارای بیشتر از یك ریشه باشد و $x_۱ < x_۲$ ریشه‌های f باشند دراین صورت چون همواره $f'(x) = ۷x^۶ + ۱۵x^۲ + ۱$ مثبت است و طبق قضیه رول نقطه‌ای مانند $c \in (x_۱,x_۲)$ موجود است که $f'(c) = ۰$ که غیرممکن است و بدین ترتیب حل مثال کامل شده است .

مساله ۳.۷.۷. *فرض کنید f روی بازه $[۲,۵]$ پیوسته باشد و برای هر $x \in [۲,۵]$، $۱ \leq f'(x) \leq ۴$ نشان دهیدکه $۳ \leq f(۵) - f(۲) \leq ۱۲$.*

حل. طبق فرض شرایط قضیه مقدار میانگین لاگرانژ برای تابع f روی $[۲,۵]$ برقرار است پس $c \in [۲,۵]$ موجود است که $f(۵) - f(۲) = (۵-۲)f'(c)$ حال چون برای هر $x \in [۲,۵]$، $۱ \leq f'(x) \leq ۴$ پس داریم:

$$۳ \leq f(۵) - f(۲) \leq ۱۲$$

مساله ۴.۷.۷. *فرض کنید $f(x) = \frac{۱}{x}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ ۱ + \frac{۱}{x} & x < ۰ \end{cases}$ نشان دهید $f'(x) = g'(x)$*

برای تمام x های حوزه تعریف آنها. آیاازاین جا طبق نتیجه ۹.۲.۷ می‌توان نتیجه گرفت $f-g$ تابعی ثابت است.

حل. برای $x>0$ داریم $f(x)=g(x)$ بنابراین $f'(x)=g'(x)$ برای $x<0$ داریم

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}=g'(x)$$

اما حوزه تعریف g عبارت است از $g=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ که یک بازه نیست بنابراین نمی‌توان از ۹.۲.۷ نتیجه گرفت $f-g$ تابعی ثابت است.

مساله ۵.۷.۷. *نشان دهید که برای اعداد دلخواه a,b و عدد طبیعی زوج n معادله $x^n+ax+b=0$ حداکثر دارای دو جواب است اگر n فرد باشد آیا این موضوع درست است.*

حل. در نظر می‌گیریم $f(x)=x^n+ax+b$ اگر فرض کنیم که معادله مورد نظر دارای سه جواب $x_1<x_2<x_3$ پس شرایط قضیه مقدار میانگین برای تابع f روی بازه‌های $[x_1,x_2]$ و $[x_2,x_3]$ برقرار است پس طبق این قضیه $c_2\in(x_2,x_3)$ و $c_1\in(x_1,x_2)$ موجودند که $f'(c_1)=f'(c_2)=0$ و $c_1<c_2$ دوباره شرایط قضیه مقدار میانگین برای تابع f' روی بازه $[c_1,c_2]$ برقرار است بنابراین $c\in(c_1,c_2)$ موجود است که $f''(c)=0$ اما برای هر x

$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$$

و این یک تناقض است. اگر n فرد باشد این موضوع دیگر درست نیست چون $x^3-x=0$ دارای سه جواب است.

مساله ۶.۷.۷. *فرض کنید $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ توابعی مشتق‌پذیرند و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $g(x)f'(x)=f(x)g'(x)$ اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$، $g(x)\neq 0$ نشان دهید عدد c در $\mathbb{R}$ چنان موجود است که برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)=cg(x)$*

حل. تابع $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ را درنظر می‌گیریم. دراین صورت داریم.

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0$$

پس باتوجه به نتیجه ۹.۲.۷، h تابعی ثابت است پس عدد حقیقی c چنان موجود است $f(x)=cg(x)$

مساله ۷.۷.۷. *فرض I بازه‌ای باز و n یک عدد صحیح غیرمنفی باشد و فرض کنید $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ دارای n مشتق است. همچنین فرض کنید در نقطه x_0 از I برای هر عدد صحیح k که*

$0 \le k \le n-1$،
$$f^{(k)}(x_0) = 0$$

دراین صورت بدون استفاده از قضیه تیلور نشان دهید برای هرنقطه $x \neq x_0$ در I، نقطه‌ای مانند z اکیدا بین x و x_0 قراردارد چنان موجود است که
$$f(x) = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-x_0)^n$$

حل. تابع $g(x) = (x-x_0)^n$ روی I درنظر می‌گیریم دراین صورت برای هر $0 \le k \le n-1$، $g^{(k)}(x_0) = 0$ و $g^{(n)}(x_0) = n!$ فرض کنید x نقطه‌ای در I باشد که $x \neq x_0$ می‌توان فرض کرد $x > x_0$ با اعمال قضیه مقدار میانگین‌کشی برای توابع $g, f : [x_0, x] \Rightarrow \mathbb{R}$ می‌توانیم نقطه x_1 را در (x_0, x) چنان انتخاب کنیم که:
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \tag{۴.۷}$$

حال قضیه مقدار میانگین کشی را برای توابع $g', f' : [x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ اعمال کنید تا نقطه x_2 در (x_0, x_1) چنان انتخاب گردد که
$$\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{g'(x_1) - g'(x_0)} = \frac{f''(x_2)}{g''(x_2)}$$

حال با توجه به ۴.۷ داریم: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(x_2)}{g''(x_2)}$ با این روند به طور متوالی با مشتق‌های بالاتر، نقطه x_n در (x_0, x) چنان به دست می‌آید که
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_n)}{g^{(n)}(x_n)} = \frac{f''(x_2)}{g''(x_2)}$$

با قرار دادن $z = x_n$ حکم قضیه اثبات شده است .

مساله ۸.۷.۷. *فرض کنید f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند که برای هر x، $(gf' + f'g)(x) \neq 0$، نشان دهید که f و g دارای ریشه‌های متمایز نیستند.*

حل. فرض کنید که α یك ریشه f و β یك ریشه g باشد که $\alpha < \beta$. در نظر می‌گیریم $h(x) = f(x)g(x)$ در این صورت شرایط قضیه میانگین برای تابع h روی بازه $[\alpha, \beta]$ برقراراست پس بنا به این قضیه $c \in (\alpha, \beta)$ چنان موجود است که $h(\beta) - h(\alpha) = h'(c)(\beta - \alpha)$. اما باتوجه به تعریف h داریم $h(\alpha) = h(\beta) = 0$ بنابراین باید $h'(c) = 0$ که بنا به فرض غیر ممکن است سپس حکم ثابت شده است.

مساله ۹.۷.۷. *فرض کنید $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق کراندار باشد برای هر $\epsilon > 0$ در نظر می‌گیریم $f(x) = x + \epsilon g(x)$ نشان دهید که برای ϵ به اندازه کافی کوچك تابع f یك به یك است.*

حل. فرض کنید برای اعداد حقیقی y, x و $f(x) = f(y)$ در این صورت داریم $x + \epsilon g(x) = y + \epsilon g(y)$ و $x - y = \epsilon(g(y) - g(x))$ در نتیجه داریم:
$$|x - y| = \epsilon |g(x) - g(y)| \tag{۵.۷}$$

باتوجه به مفروضات، شرایط قضیه مقدار میانگین برای تابع g روی بازه‌ای با نقاط انتهایی y, x برقرار است. پس $t_\circ$ی بین y, x موجود است که
$$g(y) - g(x) = g'(t_\circ)(y - x). \tag{۶.۷}$$

چون طبق فرض تابع g' کراندار است پس $M > \circ$ موجود است که برای هر $t \in \mathbb{R}$، $|g'(t)| < M$ حال از ۵.۷ داریم
$$|g(y) - g(x)| = |g'(t_\circ)||y - x| \leq M|y - x|.$$

سپس با توجه به ۵.۷ داریم:
$$|y - x| < \epsilon M |y - x| \tag{۷.۷}$$

چون $\epsilon > \circ$ به اندازه کافی کوچک است می‌توان $\epsilon > \circ$ را چنان اختیار کرد که $\circ < \epsilon M < ۱$ در این صورت از ۷.۷ داریم: $|y - x| < |y - x|$ و این غیرممکن است مگر $x = y$

مساله ۱۰.۷.۷. *فرض کنید از مقادیر $c_\circ, c_۱, \cdots c_n$ اعداد ثابتی باشند که*
$$c_\circ + \frac{c_۱}{۲} + \frac{c_۲ x^۳}{۳} + \cdots \frac{c_n x^{n+۱}}{n + ۱} = \circ$$
نشان دهید که معادله $c_\circ + c_۱ x + \cdots + c_n x^n = \circ$ لااقل دارای یک جواب بین ۰ و ۱ است.

حل. تابع $f(x) = c_\circ x + \frac{c_۱ x^۲}{۲} + \frac{c_۲ x^۳}{۳} + \cdots + \frac{c_n x^n}{n+۱}$ را روی بازه $[\circ, ۱]$ در نظر می‌گیریم. دراین صورت داریم $f(۱) = f(\circ) = \circ$ پس f واجد شرایط قضیه مقدار میانگین است و داریم
$$f'(x) = c_\circ + c_۱ x + \cdots + c_n x^n$$

پس طبق قضیه مقدار میانگین عددی مانند c بین ۰ و ۱ موجود است که
$$f(۱) - f(\circ) = f'(c).$$

اما $f(۱) = f(\circ) = \circ$ پس $f'(c) = \circ$.

۸.۷ مسایل

۱. در تمرین‌های زیر مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ومطلق توابع داده شده را بیابید. و نمودار آن را رسم کنید.

۱) $f(x) = |4x - 1| \quad , (0 \leq x \leq 2)$

۲) $f(x) = 1 - x^2 \quad , (-2 \leq x \leq 1)$

۳) $f(x) = 1+(1+x)^2 \quad , (-2 \leq x \leq -1)$

۴) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad , (0 < x \leq 1)$

۵) $f(\theta) = \tan\theta \quad , (\dfrac{-\pi}{4} \leq \theta < \dfrac{\pi}{2})$

۶) $f(\theta) = \cos\dfrac{\theta}{2} \quad , (-\pi < \theta < \pi)$

۷) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$

۸) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$

۹) $f(x) = x - 2\tan^{-1}(x)$

۱۰) $f(x) = 2x^3 - \sin^{-1} x$

۱۱) $f(x) = \sin|x|$

۱۲) $f(x) = |\sin x|$

۱۳) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}$

۱۴) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^{\frac{2}{3}}$

۲. اگر تابع f دارای ماکزیمم مطلق باشد آیا f دارای ماکزیمم نسبی خواهد بود؟

۳. اگر تابع f دارای ماکزیمم مطلق باشد آیا $|f|$ نیز دارای ماکزیمم مطلق خواهد بود پاسخ خود را توجیه کنید.

۴. نشان دهید که تابع $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ نه دارای ماکزیمم نسبی و نه دارای می‌نیمم نسبی است.

۵. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x\sin x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ نشان دهید که f در بازه $[0, \infty)$ پیوسته و در بازه $(0, \infty)$ مشتق‌پذیر است، اما در نقطه $x = 0$ نه دارای ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی است.

۶. فرض کنید f در بازه (a,b) پیوسته باشد $-\infty \leq a < b \leq \infty$ و

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

نشان دهید f در (a,b) دارای می‌نیمم مطلق می‌باشد.

۷. در تمرینات زیر تحقیق کنید که تابع داده شده در مفروضات قضیه رل صدق می‌کند و سپس تمام اعداد c را که در نتیجه‌گیری این قضیه صدق می‌کنند بیابید.

۱) $f(x) = \sin x + \cos x \quad , [0, 2\pi]$

۲) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1 \quad , [-2, 0]$

۸. برای $c > 0$ ثابت کنید که معادله زیر وقتی‌که $0 < x < 1$، دارای دو جواب نیست.

$$x^3 - 3x + c = 0$$

۹. برای اعداد a, b ثابت کنید معادله زیر دقیقا دارای سه جواب است اگر و تنها اگر $4a^3 + 27b^2 < 0$ و $x^3 + ax + b = 0$.

۱۰. تحقیق کنید که تابع $f(x) = x^4 - 6x^3 + 4x - 1$ در مفروضات قضیه مقدار میانگین بر بازه $[0, 1]$ صدق می‌کند.

۱۱. فرض کنید $f(x) = |x - 1|$ نشان دهید که هیچ مقدار c به طوری که

$$f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$$

وجود ندارد. چرا این مثال قضیه مقدار میانگین را نقص نمی‌کند؟

۱۲. فرض کنید $f(x) = \frac{x-1}{x-1}$ نشان دهید که هیچ مقدار c به طوری که

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

باشد وجود ندارد. چرا این مثال قضیه مقدار میانگین را نقض نمی‌کند؟

۱۳. نشان دهید که یک چند جمله‌ای درجه n حداکثر n ریشه حقیقی دارد.

۱۴. فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و دو ریشه دارد نشان دهید که f' حداقل یک ریشه دارد.

۱۵. الف) فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و سه ریشه دارد نشان دهید که f'' حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

ب) فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر است و سه ریشه دارد نشان دهیدکه f'' حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

ج) آیا می‌توانید قسمت‌های (الف) و (ب) راتعمیم دهید .

۱۶. قضیه مقدار میانگین را برای اثبات نامساوی $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ به‌کار ببرید .

۱۷. یک تابع روی $[a, b]$ انقباضی نامیده می‌شود هرگاه برای هر x, y در $[a, b]$، $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ وقتی‌که $۰ < \lambda < ۱$. نشان دهید که اگر f مشتق پذیر باشد و برای هر $x \in [a, b]$، $|f'(x)| \leq \lambda < ۱$. آن‌گاه f یک تابع انقباضی روی $[a, b]$ است.

۱۸. فرض کنید $P(x) = c_۰ + c_۱ x + c_۲ x^۲ + \cdots + c_n x^n$.

الف) ثابت کنید اگر $P'(x_۱) = P'(x_۲) = ۰$ و $P'(x) \neq ۰$ برای هر $x_۱ < x < x_۲$، آن‌گاه حداکثر یک عدد $x_۳ \in (x_۱, x_۲)$ موجود است که $P(x_۳) = ۰$.

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که تنها ریشه‌ی معادله‌ی $x^۵ - ۵x = ۰$ در بازه $(-۱, ۱)$، $x = ۰$.

۱۹. فرض کنید f روی $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد اگر $f'(b)$ و $f'(a)$ مختلف العلامت باشند نشان دهید حداقل یک عدد c در (a, b) وجود دارد که $f'(c) = ۰$. (f' پیوسته فرض نشده است)

۲۰. نتیجه ۹.۲.۷ را برای اثبات همانی‌های زیر به‌کار ببرید.

۱) $\sin^{-۱} \frac{x-۱}{x+۱} = ۲ \tan^{-۱} \sqrt{x} - \frac{\pi}{۲}$

۲) $۲ \sin^{-۱} x = \cos^{-۱}(۱ - ۲x^۲) \quad (x \geq ۰)$

۲۱. در تمرین‌های زیر بازه‌هایی را که در آنها f تابعی صعودی یا نزولی است بیابید مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم نسبی f را پیدا کنید و نمودار f را رسم نمایید.

۱) $f(x) = x\sqrt{۱ - x^۲}$

۲) $f(x) = x - ۲ \sin x \quad (۰ \leq x \leq ۲\pi)$

۳) $f(x) = \sin^۳ x + \cos^۳ x \quad (۰ \leq x \leq ۲\pi)$

۴) $f(x) = x \sin x + \cos x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$

۵) $f(x) = ۲ \tan x - \tan^۳ x$

۶) $f(x) = \frac{x}{x^۲+۱} \quad (-۵ \leq x \leq ۵)$

۲۲. نشان دهید که هرگاه $۱ < a < b$ آن‌گاه $a + \frac{۱}{a} < b + \frac{۱}{b}$.

۲۳. نشان دهید که هرگاه $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ آن‌گاه $\frac{b}{a} < \frac{\tan b}{\tan a}$.

۲۴. اگر $x > 1$ آن‌گاه $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$.

۲۵. اگر $x > 0$ آن‌گاه $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

۲۶. نشان دهید که اگر $x > 0$ آن‌گاه $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

۲۷. چند جمله‌ای درجه ۳، $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ را چنان تعیین کنید که در -2 یک مقدار ماکزیمم نسبی برابر ۳ و در ۱ یک مقدار می‌نیمم نسبی برابر ۰ داشته باشد.

۲۸. الف) اگر f و g بر بازه باز I صعودی باشد، نشان دهید که $f + g$ نیز بر I صعودی است.

ب) اگر f و g بر بازه I صعودی و مثبت باشند نشان دهید که fg نیز بر I صعودی است.

۲۹. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو بار مشتق پذیر و برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f'(x) \leq 0$ و $f''(x) \geq 0$. نشان دهید f تابع ثابت است.

۳۰. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو بار مشتق پذیر باشد و $f(0) = 0$ و برای هر x، $f'(x) \leq f(x)$. آیا برای هر x، $f(x) = 0$.

۳۱. فرض کنید $f(x) = (x + 1)^p (x - 1)^q$ وقتی‌که p, q اعداد طبیعی ناکمتر از ۲ می‌باشند.

الف) نشان دهید $f' = 0$ اگر $x = \frac{p-q}{p+q}$ یا $x = 1$ یا $x = -1$.

ب) اکسترمم نسبی f را به دست آورید.

۳۲. فرض کنید p یک چند جمله‌ای حداکثر ازدرجه پنج باشد و فرض کنید که برای عدد حقیقی x_0 داریم

$$p(x_0) = p'(x_0) = \cdots = p^{(5)}(x_0) = 0.$$

ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{R}, p(x) = 0$.

۳۳. فرض کنید توابع حقیقی f و g بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر باشند و برای هر $x \in (a, b)$ و $|g'(x)| > 0$ ثابت کنید برای هر $u, v \in [a, b]$ و $|f(u) - f(v)| \geq |g(u) - g(v)|$.

۳۴. فرض کنید $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ ثابت کنید عدد $M > 0$ موجود است که برای هر $x \in (-1, 1)$، $|f(x)| \leq M|x|^n$.

۳۵. هر یک از حدهای زیر را محاسبه کنید یا عدم وجود آنها را معین کنید.

(۱
$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱+x}{x}$$

(۲
$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲-۲(۱+x)^{\frac{۳}{۲}}}{x}$$

(۳
$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲x^۲+x^۳}{x|x|}$$

(۴
$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{a}}{x-a},\quad (a\neq ۰)$$

(۵
$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۱۰}x}{\sin(x^{۱۰})}$$

(۶
$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲x-\sin^{-۱}x}{۲x+\tan^{-۱}x}$$

(۷
$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^۲}$$

(۸
$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\sec\sqrt{x}\cos ۳x$$

(۹
$$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\cot x$$

(۱۰
$$\lim_{x\to ۰}(\frac{۱}{x}-\csc x)$$

(۱۱
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^۳}{x^۲-۱}-\frac{x^۳}{x^۲+۱})$$

(۱۲
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{۲x+۳\sin x}$$

(۱۳
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^۲+۱}-\sqrt{x^۲-۴x})$$

(۱۴
$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x+\tan^۲x}{x\sin x}$$

(۱۵
$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲x\sin x}{\sec x-۱}$$

۳۶. اگر f' پیوسته باشد با استفاده از قاعده هوپیتال نشان دهید که
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{۲h}=f'(x).$$

۳۷. اگر f'' پیوسته باشد نشان دهید
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-۲f(x)+f(x-h)}{h^۲}=f''(x).$$

۳۸. در تمرین‌های زیر بازه‌هایی که در آن f صعودی یا نزولی، مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، بازه‌هایی f مقعر به سمت بالا یا پایین و مختصات نقاط عطف را بیابید و سپس این اطلاعات را برای رسم نمودار f به‌کار ببرید.

۱) $f(x) = 8 - \sqrt[3]{x}$ ۴) $f(\theta) = \cos^2\theta$

۲) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ ۵) $f(t) = t + \cos t$

۳) $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$ ۶) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$

۳۹. *نمودار تابعی را که در تمام شرایط داده شده زیر صدق نماید پیدا کنید.*

۴۰. $f'(-1) = f'(1) = 0$ و $f'(x) < 0$ اگر $|x| < 1$، $f'(x) > 0$ اگر $|x| > 1$

۴۱. $f'(-1) = 0, f'(2) = 0$، $f(-1) = f(2) = -1$ و $f(-3) = 4$ و $f'(x) = 0$ اگر $x < -3$ و $f'(x) < 0$ بر $(-3,-1) \cup (0,2)$، $f'(x) > 0$ بر $(-1,0) \cup (2,\infty)$ و $f''(x) > 0$ بر $(-3,0) \cup (0,5)$، $f''(x) < 0$ بر $(5,\infty)$.

۴۲. *نشان دهید که هر تابع درجه سوم* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$، $a \neq 0$ *دقیقا دارای یك نقطه عطف است.*

۴۳. *نشان دهید که اگر* $(c, f(c))$ *یك نقطه عطف نمودار* f *بوده و* f'' *در بازه بازی که شامل* c *است موجود باشد آن‌گاه* $f''(c) = 0$.

۴۴. *نشان دهید که تابع* $g(x) = x|x|$ *یك نقطه عطف در* $(0,0)$ *دارد اما* $g''(0)$ *موجود نیست.*

۴۵. *فرض کنید* f *و* g *بر بازه* I *دو بار مشتق‌پذیر باشد در این صورت نشان دهید که*

الف) *اگر* f *و* g *بر* I *به بالا مقعر باشند آن‌گاه* $f+g$ *بر* I *نیز به بالا مقعر است.*

ب) *اگر* f *بر* I *مثبت و به بالا مقعر باشد آن‌گاه تابع* $g(x) = [f(x)]^2$ *بر* I *به بالا مقعر است.*

ج) *اگر* f *و* g *بر* I *مثبت و به بالا مقعر باشند آن‌گاه حاصل‌ضرب آنها* fg *بر* I *به بالا مقعر است.*

۴۶. *فرض کنید* f, g *بر* $\mathbb{R}$ *دو بار مشتق‌پذیر باشند و هر دونیز به بالا مقعر باشند تحت چه شرایطی تابع مرکب* $h(x) = f(g(x))$ *به بالا مقعر است.*

۴۷. *نشان دهید که تابع* f *بر بازه* (a,b) *محدب است اگر و فقط اگر برای هر* $x_1, x_2 \in (a,b)$ *اگر* $x_1 < x_2$ *آن‌گاه برای هر* $0 < \lambda < 1$ *داشته باشیم*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

۴۸. *نشان دهید که تابع* f *بر بازه* (a,b) *محدب است اگر و فقط برای هر عدد طبیعی* $n \geq 2$ *و هر* n *نقطه* $a < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < b$ *و* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ *که در آن* $0 \leq \lambda_i \leq 1$ *داشته باشیم*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

۴۹. *نشان دهید تابع f بر بازه (a,b) محدب است اگر و فقط اگر برای هر $a<v<t<u<b$ داشته باشیم*

$$\frac{f(t)-f(v)}{t-v} \leq \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \leq \frac{f(u)-f(t)}{u-t}.$$

۵۰. *نشان دهید که هر تابع محدب پیوسته است.*

فصل ۸

کاربردهای مشتق

در دو فصل گذشته با مفهوم مشتق، فرمول‌های مشتق‌گیری و قضایای بنیادی مشتق آشنا شدیم و به کمک آن‌ها در این فصل می‌خواهیم به تعدادی از کاربردهای مشتق اشاره نماییم. در ابتدا به رسم یک تابع خواهیم پرداخت، سپس تعریف دیفرانسیل یک تابع که یک مفهوم وابسته به مشتق می‌باشد را مورد بررسی قرار خواهیم داد و در ادامه به بیان مسائل تحلیلی ماکزیمم و می‌نیمم می‌پردازیم.

۱.۸ رسم یک تابع

در جهان امروز اهمیت توابع بر کسی پوشیده نیست. توجه داریم که یک تابع می‌تواند بیانگر خیلی از مسائل مهم در زمینه‌های مختلف اقتصادی، اجتماعی و فرهنگی و غیره باشد. مانند توابع سود و هزینه, توابع مربوط به بهینه‌سازی و تعادل عرضه و تقاضا در مسائل اقتصادی، توابع مربوط به رشد یا کاهش جمعیت و پیش‌بینی‌های آینده‌ی جمعیتی، توابع مربوط به میزان رضایت‌مندی افراد یک جامعه از انجام یک فعالیت یا یک تصمیم‌گیری یا یک بخشنامه و هزاران مورد دیگر نشانگر اهمیت توابع می‌باشند. به عبارت دیگر هنگامی یک مساله یا مشکل می‌خواهد از شکل بیان شفاهی به صورت یک بیان ریاضی صورت پذیرد توابع هستند که این امر را امکان‌پذیر می‌سازند. در اینجاست که رسم توابع کمک زیادی در بیان و نمایش اطلاعات مربوط به آن‌ها می‌باشد و از روی نمودار یک تابع است که می‌توان به بسیاری از نکات مهم یا خاصیت‌های آن که گاهی نگران کننده و گاهی امیدوار کننده‌اند در مسائل ناشی از آن تابع می‌باشند پی برد. حال با توجه به این مقدمه کوتاه در اهمیت رسم توابع به بیان چگونگی ترسیم آن‌ها می‌پردازیم.

تبصره ۱.۱.۸. *فرض کنید f یک تابع باشد در این صورت برای رسم تابع f، لازم است مطابق مراحل زیر اطلاعات مورد نیاز را بدست آوریم تا به کمک آن‌ها به رسم دقیق‌تر تابع f دست یابیم.*

۱. *پیدا کردن نقاط تلاقی نمودار f با محورهای مختصات*

۲. *پیدا کردن تقارنهای تابع f (شامل تقارن نسبت به محورهای عرض‌ها، تقارن نسبت به مبدا مختصات یا تقارن نسبت به یک خط خاص مانند نیمسازهای ناحیه‌ای اول و سوم یا دوم و چهارم)*

۳. *پیدا کردن دوره‌ی تناوب تابع f (در صورتی‌که f تابع متناوب باشد)*

۴. *تعیین صعودی یا نزولی بودن f در فواصل مربوط به دامنه تعریف f*

۵. *پیدا کردن نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع f در صورت وجود*

۶. *تعیین تقعر و تحدب تابع در فواصل مختلف مربوط به دامنه‌ی تعریف f*

۷. *تعیین نقاط عطف در صورت وجود*

۸. *تعیین مجانب‌ها (شامل مجانب‌های قائم، افقی و مایل)*

موارد فوق اطلاعات اساسی و مهم یک تابع است که با بیشتر آن‌ها در فصول ششم و هفتم آشنا شدیم اکنون به توضیح بیشتر و روش بدست آوردن هر کدام از مراحل فوق می‌پردازیم.

۱. پیدا کردن نقاط تلاقی نمودار با محور مختصات

برای تعیین نقاط برخورد تابع f با محورهای مختصات به صورت زیر عمل می‌کنیم.

الف) تلاقی با محور yها

کافی است در معادله تابع مقدار $x = \circ$ را قرار دهیم نقطه $(\circ, y)$ محل برخورد f با محور yها است. توجه داریم که تابع f حداکثر یک نقطه برخورد با محور yها دارد. (بنا به خاصیت تابع بودن)

ب) تلاقی با محور xها

اگر در معادله تابع $y = f(x)$ مقدار $y = \circ$ را قرار دهیم آنگاه تمام نقاط به صورت $(x, \circ)$ محل برخورد با محور xها است. یک تابع ممکن است تعداد نقاط برخورد زیادی با محور xها داشته باشد.

۲. پیدا کردن تقارن‌های f

ابتدا توجه داریم که تابع f تقارن نسبت به محور xها نمی‌تواند داشته باشد زیرا با تعریف تابع در تناقض است لذا تقارن نسبت به محور yها و مبدا مختصات و نیز تقارن نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم یعنی خط $y = x$ را بررسی می‌کنیم.

(الف) تقارن نسبت به محور yها

اگر در معادله‌ی $y = f(x)$ مقدار x رابه $-x$ تبدیل کنیم و مقدار y تغییر نکند آنگاه تابع را متقارن نسبت به محور yها گوییم. به عبارت دیگر تابع f نسبت به محور yها متقارن است اگر داشته باشیم

$$f(-x) = f(x)$$

(ب) تقارن تابع نسبت به مبدا مختصات

تابع f را متقارن نسبت به مبدا گوییم هرگاه دارای این خاصیت باشد که اگر x را به $-x$ آنگاه y را به $-y$ تبدیل گردد به عبارت دیگر داشته باشیم

$$f(-x) = -f(x)$$

(ج) تقارن نسبت به خط $y = x$

تابع f را متقارن نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم یعنی خط $y = x$ گوییم هرگاه با تبدیل x به y و y به x معادله تغییر نکند.

۳. دوره‌ی تناوب

تابع f را متناوب با دوره‌ی تناوب T گوییم هرگاه داشته باشیم

$$f(x+T) = f(x)$$

۴. صعودی یا نزولی بودن f

تابع f در یک فاصله صعودی است چنانچه داشته باشیم $f'(x) > 0$ و چنانچه $f'(x) < 0$ آنگاه تابع f نزولی خواهد بود.

۵. نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی

نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع f در فصل هفتم به طور کامل بحث شده است می‌توانید به قسمت مربوطه مراجعه نمایید.

۶. جهت تقعر و تحدب

جهت تقعر و تحدب در فصل گذشته توضیح داده شده‌اند.

۷. نقاط عطف

نقاط عطف در فصل گذشته توضیح داده شده است.

۸. تعیین مجانب‌ها

الف) مجانب افقی خط $y=b$ را مجانب افقی تابع f گوییم هرگاه داشته باشیم
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=b \text{ یا } \quad \lim_{x\longrightarrow\infty} f(x)=b.$$

ب) مجانب قائم خط $x=a$ را یک خط مجانب قائم برای تابع f می‌نامیم اگر حداقل یکی از گزاره‌های زیر برقرار باشد.

$$\begin{array}{ll} \lim_{x\longrightarrow a^-} f(x)=-\infty & \lim_{x\longrightarrow a^-} f(x)=\infty \\ \lim_{x\longrightarrow a^+} f(x)=-\infty & \lim_{x\longrightarrow a^+} f(x)=\infty \end{array}$$

ج) مجانب مایل خط $y=mx+b$ را یک مجانب مایل برای تابع f گوییم هرگاه داشته باشیم
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}(f(x)-(mx+b))=0, \quad \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-(mx+b))=0.$$

اکنون با توجه به نکات فوق به بیان چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۲.۱.۸. *تابع* $y=x^4-4x^3$ *را رسم کنید.*

حل. ابتدا توجه داریم که دامنه‌ی تعریف این تابع برابر $\mathbb{R}$ است یعنی x هر مقدار حقیقی را می‌تواند اختیار کند. حال مطابق مراحل بیان شده برای رسم یک تابع عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $x=0$ در این صورت $y=0$ پس محل برخورد تابع f با محور yها در نقطه‌ی مبدا مختصات است چنانچه $y=0$ قرار دهیم آنگاه خواهیم داشت
$$0=y=x^4-4x^3=x^3(x-4)\Rightarrow x=0,4.$$

بنابراین محل برخورد تابع f با محور xها در نقاط $(0,0)$ و $(4,0)$ است.
تابع f دارای تقارن نسبت به محور xها، محور yها، مبدا مختصات و نیز خط $y=x$ نمی‌باشد. همچنین تابع f متناوب نیست. اکنون به تعیین نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی، صعودی و نزولی، نقاط عطف و جهت تعقر و تحدب f می‌پردازیم. داریم

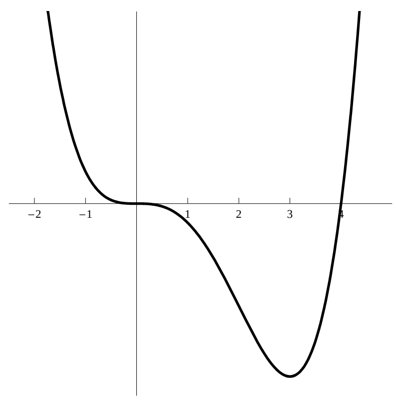
$$\begin{aligned} f'(x)&=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)\\ f''(x)&=12x^2-24x=12x(x-2)\end{aligned}$$

نقاط بحرانی عبارتند از $x=0$ و $x=3$ و نقاط احتمالاً عطف عبارتند از $x=0$ و $x=2$ حال

برای تعیین دقیق این نقاط از جدول تغییرات استفاده می‌کنیم.

x	$+\infty$	۳		۲		۰	$-\infty$
$f'(x)$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$-$
$f''(x)$	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$
تغییرات	صعودی تقعر رو به بالا	|	نزولی تقعر رو به بالا	|	نزولی تقعر رو به پایین	|	نزولی تقعر رو به بالا
		مینیمم نسبی		عطف		عطف	

تابع f دارای خطوط مجانب افقی، قائم و مایل می‌باشد. با توجه به اطلاعات فوق نمودار تابع به صورت زیر است.



شکل ۱.۸: نمودار تابع $x^{۴} - ۴x^{۳}$.

مثال ۳.۱.۸. *تابع* $y = x + \frac{۱}{x}$ *را رسم کنید.*

حل. توجه داریم که تابع f محورهای مختصات را قطع نمی‌کند و نسبت به مبدا مختصات متقارن است و تابع متناوب نیست. همچنین داریم:

$$y' = ۱ - \frac{۱}{x^{۲}} = ۰ \Longrightarrow x = \pm ۱, \quad y'' = \frac{۲}{x^{۳}}$$

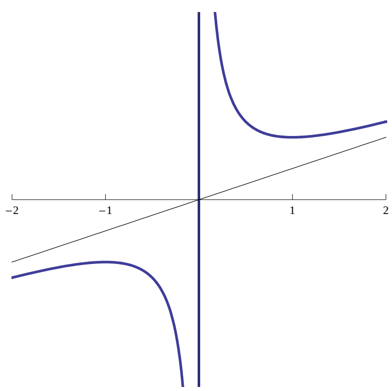
لذا جدول تغییرات f به صورت زیر است:

x	$+\infty$	۱		۰		۱-	$-\infty$
y'	+	۰	−		−	۰	+
y''	+		+		−		−
تغییرات	صعودی تقعر رو به بالا	|	نزولی تقعر رو به بالا	|	نزولی تقعر رو به پایین	|	صعودی تقعر رو به پایین
		مینیمم		مجانب قائم		ماکزیمم	

همانطور که ملاحظه می شود $\lim_{x\longrightarrow ۰^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\longrightarrow ۰^+} f(x) = +\infty$. خط $x = ۰$ مجانب قائم می‌باشد. همچنین

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}(y-x) = \lim_{x\longrightarrow +\infty}(x+\frac{۱}{x}-x) = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{۱}{x} = ۰$$

پس خط $y = x$ مجانب مایل تابع f است.



شکل ۲.۸: نمودار تابع $y = x + \frac{۱}{x}$.

مثال ۴.۱.۸. *نمودار خم $y = \frac{۲x^۲}{x^۲-۱}$ را رسم نمایید.*

حل. قلمرو برابر است با

$$\{x|x^۲-۱\neq ۰\} = \{x|x\neq \pm ۱\} = (-\infty,-۱)\cup(-۱,۱)\cup(۱,\infty)$$

طول و عرض از مبدا هر دو صفر هستند و چون $f(-x) = f(x)$، f زوج است. خم حول محور yها متقارن است.

$$\lim_{x\longrightarrow \pm\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲-۱} = \lim_{x\longrightarrow \pm\infty}\frac{۲}{۱-\frac{۱}{x^۲}} = ۲$$

بنابراین خط $y = ۲$ یک مجانب افقی است. چون وقتی $x = \pm ۱$ مخرج ۰ می شود. حدود زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\lim_{x\longrightarrow ۱^+}\frac{۲x^۲}{x^۲-۱} = +\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow ۱^-}\frac{۲x^۲}{x^۲-۱} = -\infty$$
$$\lim_{x\rightarrow -۱^+}\frac{۲x^۲}{x^۲-۱} = -\infty \qquad \lim_{x\rightarrow -۱^-}\frac{۲x^۲}{x^۲-۱} = +\infty$$

در این صورت خطوط $x = ۱$ و $x = -۱$ مجانب های قائم هستند.

$$f'(x) = \frac{۴x(x^۲ - ۱) - ۲x^۲ \times ۲x}{(x^۲ - ۱)^۲} = \frac{-۴x}{(x^۲ - ۱)^۲}$$

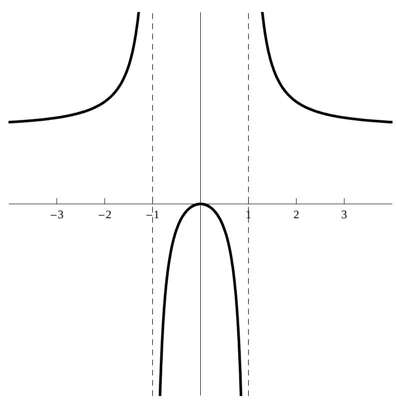
چون $f'(x) > ۰$ وقتی $x < ۰$ $(x \neq ۱)$ و $f'(x) < ۰$ وقتی $x > ۰$ $(x \neq ۱)$، f بر $(-\infty, -۱)$ و $[-۱, ۰]$ صعود می کند و بر $(۱, \infty)$ و $[۰, ۱)$ نزول می‌کند. تنها نقطه‌ی بحرانی $x = ۰$ است. چون f' در صفر از مثبت به منفی تغییر می‌کند بنابر آزمون مشتق اول $f(۰) = ۰$ یک بیشینه‌ی موضعی است.

$$f''(x) = \frac{-۴(x^۲ - ۱)^۲ + ۴x۲(x^۲ - ۱)۲x}{(x^۲ - ۱)^۲} = \frac{۱۲x^۲ + ۴}{(x^۲ - ۱)^۲}$$

چون برای هر x، $۱۲x^۲ + ۴ > ۰$ داریم :

$$f''(x) > ۰ \Leftrightarrow x^۲ - ۱ > ۰ \Leftrightarrow |x| > ۱ \text{و} f''(x) < ۰ \Leftrightarrow |x| < ۱$$

پس خم بر بازه‌های $(۱, \infty)$ و $(-\infty, -۱)$ به بالا و بر $(-۱, ۱)$ به پایین مقعر است. چون ۱ و -۱ در قلمروی f نیستند هیچ نقطه‌ی عطفی وجود ندارد.



شکل ۳.۸: نمودار تابع $y = \frac{۲x^۲}{x^۲ - ۱}$.

مثال ۵.۱.۸. *نمودار* $f(x) = \frac{x^۲}{\sqrt{x+۱}}$ *را رسم‌کنید.*

حل. $(-۱, \infty) = \{x | x > -۱\} = \{x | x + ۱ > ۰\} =$ قلمرو x است و طول و عرض از مبدا هر دو صفر هستند و هیچ تقارنی ندارد. چون $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^۲}{\sqrt{x+۱}} = \infty$ هیچ مجانب افقی ندارد. چون وقتی $x \longrightarrow -۱^+$، $\sqrt{x + ۱} \longrightarrow ۰$ و $f(x)$ همیشه مثبت است و داریم

$$\lim_{x \longrightarrow -۱^+} \frac{x^۲}{\sqrt{x + ۱}} = \infty$$

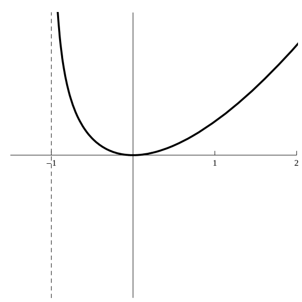
در نتیجه خط $x = -۱$ یک مجانب قائم است.

$$f'(x) = \frac{۲x\sqrt{x+۱} - x^۲ \times \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}{x+۱} = \frac{x(۳x+۴)}{۲(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}}$$

توجه کنید که $f'(x) = ۰$ وقتی که $x = ۰$ یا $x = \frac{-۴}{۳}$ در قلمروی f نیست. پس تنها عدد بحرانی صفر است . چون $f'(x) < ۰$ وقتی $-۱ < x < ۰$ و $f'(x) > ۰$ وقتی $x > ۰$، f بر $(-۱, ۰]$ نزولی و بر $[۰, \infty)$ صعودی است. چون $f'(۰) = ۰$ و f' در ۰ از منفی به مثبت تغییر می کند بنا بر آزمون مشتق اول $f(۰) = ۰$ یک کمینه‌ی موضعی و مطلق می‌باشد.

$$f''(x) = \frac{۲(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}(۶x+۴) - (۳x^۲+۴x)۳(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}}{۴(x+۱)^۳} = \frac{۳x^۲+۸x+۸}{۴(x+۱)^{\frac{۵}{۲}}}$$

توجه کنید مخرج آن همیشه مثبت است. صورت کسر چند جمله‌ای درجه‌ی دوم $۳x^۲ + ۸x + ۸$ است که چون مبین آن $b^۲ - ۴ac = -۳۲$ منفی و ضریب $x^۲$ مثبت است همواره مثبت می‌باشد. پس به ازای تمام xها $f''(x) > ۰$ که به معنی بالا مقعر بودن f بر $(-۱, \infty)$ است و در این صورت هیچ نقطه‌ی عطفی وجود ندارد.



شکل ۴.۸: نمودار تابع $\frac{x^۲}{\sqrt{x+۱}}$.

مثال ۶.۱.۸. *نمودار* $f(x) = ۲\cos x + \sin ۲x$ *را رسم کنید.*

حل. قلمرو $\mathbb{R}$ است. عرض ازمبدا y برابر $f(۰) = ۲$ است. طول از مبدا x وقتی رخ می‌دهد که $۲\cos x + \sin ۲x = ۲\cos x + ۲\sin x \cos x = ۲\cos x(۱ + \sin x) = ۰$ یعنی وقتی $\cos x = ۰$ یا $\sin x = -۱$ پس در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ طول‌های از مبدا x عبارتند از $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$. f نه زوج است و نه فرد. اما $f(x + ۲\pi) = f(x)$ برای تمام xها و در نتیجه f تناوبی است با دوره‌ی تناوب ۲π. پس در آنچه به دنبال می‌آید نیازمند به در نظر گرفتن تابع تنها برای $۰ \leq x \leq ۲\pi$ هستیم و سپس خم را توسط انتقال بسط می‌دهیم. تابع هیچ مجانبی ندارد.

$$f'(x) = -۲\sin x + ۲\cos ۲x = -۲\sin x + ۲(۱ - ۲\sin^۲ x)$$

$$= \quad -2(2\sin^2 x + \sin x - 1) = -2(2\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

پس $f'(x) = 0$ هرگاه $\sin x = \frac{1}{2}$ یا $\sin x = -1$ در نتیجه در $[0, 2\pi]$، $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

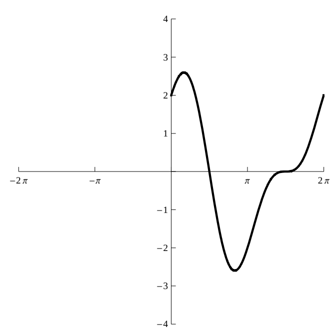
f	$f'(x)$	بازه
صعودی بر $[0, \frac{\pi}{6}]$	$+$	$0 < x < \frac{\pi}{6}$
صعودی بر $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$	$-$	$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$
صعودی بر $[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]$	$+$	$\frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$
صعودی بر $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	$+$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

از جدول بالا آزمون مشتق اول بیان می‌کند که $f(\frac{\pi}{6}) = 3\sqrt{\frac{3}{2}}$ یک بیشینه‌ی موضعی و $f(\frac{5\pi}{6}) = -3\sqrt{\frac{3}{2}}$ یک کمینه‌ی موضعی است. اما در $\frac{3\pi}{2}$ هیچ قرینه‌ای ندارد. یک مماس افقی دارد.

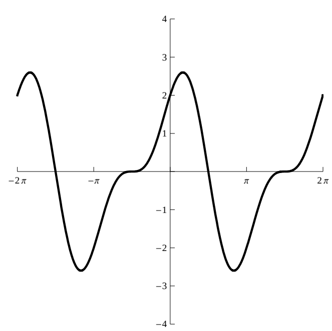
$$f''(x) = -2\cos x - 4\sin 2x = -2\cos x(1 + 4\sin x)$$

پس $f''(x) = 0$ هنگامی که $\cos x = 0$ (در نتیجه $x = \frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$) و هنگامی که $\sin x = \frac{-1}{4}$. از شکل زیر (آ) می‌بینیم که دو مقدار x بین 0 و 2π وجود دارند که برای آن‌ها $\sin x = \frac{-1}{4}$. اجازه دهید آن‌ها را a_1 و a_2 بنامیم. پس $f''(x) > 0$ بر $(\frac{\pi}{2}, a_1)$ و $(\frac{3\pi}{2}, a_2)$ در نتیجه در اینجاها f به بالا مقعر است. همچنین $f''(x) < 0$ بر $(0, \frac{\pi}{2})$ و $(a_1, \frac{3\pi}{2})$ و $(a_2, 2\pi)$ در نتیجه f در اینجاها به پایین مقعر است. نقاط عطف وقتی رخ می‌دهند که $x = \frac{\pi}{2}, a_1, \frac{3\pi}{2}, a_2$.

نمودار تابع محدود شده به $0 \leq x \leq 2\pi$ در شکل زیر (آ) رسم شده است. سپس با استفاده از تناوبی بودن آنرا بسط داده‌ایم تا نمودار کامل آن در شکل زیر (ب) حاصل گردد.



(آ) نمودار تابع $f(x)$ در بازه $[0, 2\pi]$.



(ب) نمودار تابع $f(x)$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$.

مثال ۷.۱.۸. *نمودار تابع* $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ *را رسم نمایید.*

حل. دامنه $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ است. طول و عرض از مبدا هر دو صفراند. چون $f(x) = -f(-x)$، f فرد بوده و نمودارش حول مبدا متقارن است. چون $x^۲ + ۱$ هرگز صفر نمی‌شود هیچ مجانب قائمی ندارد. چون وقتی $x \longrightarrow \infty$، $f(x) \longrightarrow \infty$ و وقتی $x \longrightarrow -\infty$، $f(x) \longrightarrow -\infty$ هیچ مجانب افقی ندارد. اما تقسیم طولانی نتیجه میدهد $f(x) = \frac{x^۳}{x^۲+۱} = x - \frac{x}{x^۲+۱}$ و وقتی $x \longrightarrow \infty$، $f(x) - x = \frac{-x}{x^۲+۱} = -\frac{\frac{۱}{x}}{۱+\frac{۱}{x^۲}} \longrightarrow ۰$ در نتیجه خط $y = x$ یک مجانب مایل است.

$$f'(x) = \frac{۳x^۲(x^۲+۱) - x^۳ \times ۲x}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{x^۲(x^۲+۳)}{(x^۲+۱)^۲}$$

چون $f'(x) > ۰$ برای هر x (به جز ۰) f بر $(-\infty, \infty)$ صعودی می‌باشد. اگر چه $f'(۰) = ۰$، f' در صفر تغییر علامت نمی‌دهد. در نتیجه هیچ بیشینه و یا کمینه‌ی موضعی وجود ندارد.

$$f''(x) = \frac{(۴x^۳ + ۶x)(x^۲+۱)^۲ - (x^۴ + ۳x^۲) \times ۲(x^۲+۱)۲x}{(x^۲+۱)^۴} = \frac{۲x(۳ - x^۲)}{(x^۲+۱)^۴}$$

چون وقتی $x = ۰$ یا $x = \pm\sqrt{۳}$، $f''(x) = ۰$ جدول زیر را ببینید.

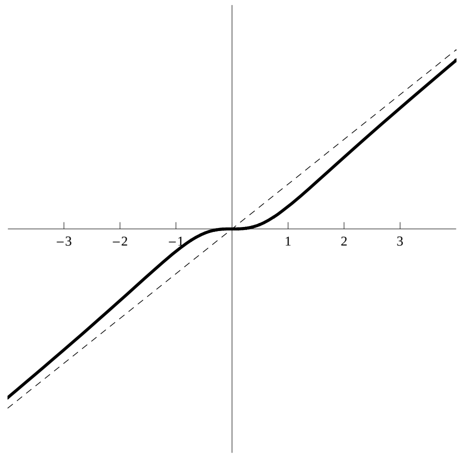
f	$f''(x)$	$(x^۲+۱)^۳$	$۳ - x^۲$	x	بازه
مقعر به بالا $(-\infty, -\sqrt{۳})$	$+$	$+$	$-$	$-$	$x < -\sqrt{۳}$
مقعر به پایین $(-\sqrt{۳}, ۰)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-\sqrt{۳} < x < ۰$
مقعر به بالا $(۰, \sqrt{۳})$	$+$	$+$	$+$	$+$	$۰ < x < \sqrt{۳}$
مقعر به پایین $(\sqrt{۳}, \infty)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x > \sqrt{۳}$

نقاط عطف عبارتند از $(\sqrt{۳}, ۳\sqrt{\frac{۳}{۴}})$، $(۰, ۰)$ و $(-\sqrt{۳}, -۳\sqrt{\frac{۳}{۴}})$.

۲.۸ نرخ‌های مرتبط

در یک مساله‌ی نرخ های مرتبط، ایده‌ی محاسبه‌ی نرخ تغییر کمیتی، بر حسب نرخ تغییر کمیت دیگری است (که ممکن است آسانتر اندازه‌گیری شود)، این فراگرد بدین صورت است که معادله‌ای را که دو کمیت را به هم وابسته می‌کند یافته و سپس با استفاده از قاعده زنجیره از دو طرف آن نسبت به زمان مشتق می‌گیریم.

مثال ۱.۲.۸. *هوا به داخل یک بالن کروی طوری وارد می‌شود که حجم آن با نرخ ۱۰۰ سانتیمتر مکعب بر ثانیه افزایش می‌یابد . مطلوب است تعیین سرعت افزایش شعاع بالن وقتی‌که قطر آن ۵۰ سانتیمتر است.*



شکل ۵.۸: نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

حل. اگر V حجم بالن و r شعاع بالن باشد آنگاه معادله‌ی

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{1.8}$$

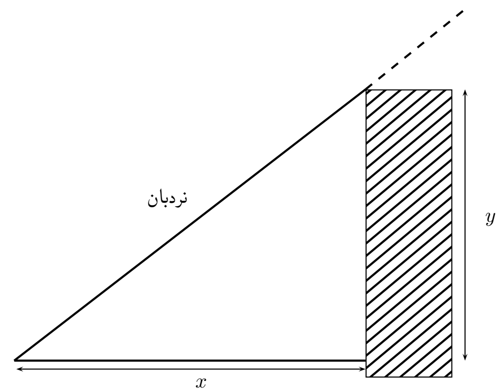
و از ما خواسته شده است که وقتی $r = 25cm$ است مقدار $\frac{dV}{dt}$ را بیابیم. با استفاده از قاعده‌ی زنجیره از دو طرف معادله‌ی ۱.۸ مشتق می‌گیریم $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ و بنابراین $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \times \frac{dV}{dt}$. با قرار دادن $r = 25$ و $\frac{dV}{dt} = 100$ در این معادله بدست می‌آوریم $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2} 100 = \frac{1}{25}\pi$ پس شعاع بالن با نرخ $\frac{1}{25}\pi$ سانتیمتر بر ثانیه افزایش می‌یابد.

مثال ۲.۲.۸. *نردبانی به طول ۱۰ متر به دیواری قائم تکیه داده شده است. اگر ته نردبان با نرخ ۱ متر بر ثانیه از دیوار به داخل کشیده شود با چه سرعتی سر نردبان از دیوار به طرف پایین کشیده می‌شود زمانیکه ته آن ۶ متر از دیوار فاصله داشته باشد.*

حل.

ابتدا نموداری رسم کرده و آن را مانند شکل بالا علامت گذاری می‌کنیم. فرض کنید فاصله‌ی پای نردبان تا دیوار x متر و فاصله‌ی سر آن تا زمین y متر باشد. توجه کنید که x و y هر دو توابعی از t (زمان) هستند.

می‌دانیم که $\frac{dx}{dt} = 1$ متر بر ثانیه و مطلوب ما $\frac{dy}{dt}$ است وقتی $x = 6$ متر می‌باشد. در اینجا رابطه‌ی بین x و y توسط قضیه فیثاغورث $x^2 + y^2 = 100$ داده می‌شود. با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به t و به کار گیری قاعده زنجیری داریم $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$. با حل این معادله برای نرخ مطلوب بدست



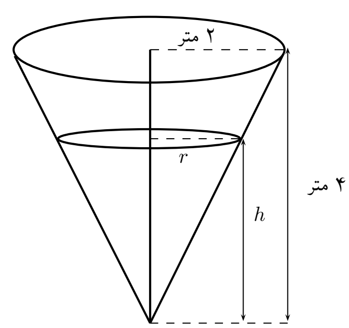
شکل ۶.۸: مربوط به مثال ۲.۲.۸.

می‌آید: $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$. وقتی ۶ $= x$ قضیه فیثاغورث بدست می‌دهد ۸ $= y$ و بنابراین با جاگذاری این مقادیر و استفاده از ۱ $= \frac{dx}{dt}$ داریم

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{۶}{۸}(۱) = -\frac{۳}{۴}\text{ متر بر ثانیه.}$$

مثال ۳.۲.۸. *مخزن آبی دارای شکل یک مخروط مدور وارونه با شعاع قاعده ۲ متر و ارتفاع ۴ متر است. اگر آب با نرخ* $۲m^۳/min$ *به داخل مخزن وارد شود مطلوب است نرخی که با آن سطح آب بالا می‌آید هنگامی که عمق آب ۳ متر باشد.*

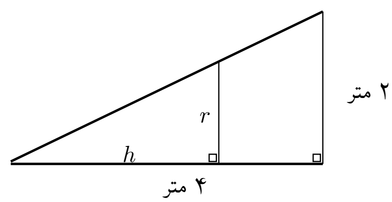
حل.



شکل ۷.۸: مربوط به مثال ۳.۲.۸.

ابتدا شکل مخروط را رسم کرده و آن را علامت گذاری می‌کنیم. فرض کنید V و r و h به ترتیب حجم آب و شعاع قاعده و ارتفاع آب در زمان t باشند که در آن t بر حسب دقیقه اندازه‌گیری می‌شود.

به ما داده شده است که $\frac{dV}{dt} = ۲m^۳/min$ و از ما خواسته شده است که وقتی h برابر ۳ متر است $\frac{dh}{dt}$ را بیابیم. کمیت‌های V و h توسط معادله‌ی $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ مرتبط هستند اما لازم است V را به عنوان تابعی از h تنها بیان کنیم.



شکل ۸.۸: مربوط به مثال ۳.۲.۸.

برای حذف از مثلث‌های متشابه به شکل بالا استفاده کرده می‌نویسیم : $r = \frac{h}{۲}$ و $\frac{r}{h} = \frac{۲}{۴}$ و عبارت V به صورت زیر می‌شود $V = \frac{۱}{۳}\pi(\frac{h}{۲})^۲ h = \frac{\pi}{۱۲}h^۳$ حال می‌توانیم از دو طرف نسبت به t مشتق‌گیری کنیم:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{۴}h^۲\frac{dh}{dt}, \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{۴}{\pi h^۲}\frac{dV}{dt}$$

با جایگذاری $h = ۳m$ و $\frac{dV}{dt} = ۲m^۳/min$ داریم:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{۴}{\pi(۳)^۲} \times ۲ = \frac{۸}{۹\pi} \approx \frac{۸}{۲۸}m/min$$

تبصره ۴.۲.۸. *یاد آوری بعضی اصول حل مسئله و تطابق آنها با نرخ‌های مرتبط با توجه به تجربیات کسب شده در مثال‌های ۱.۲.۸ تا ۳.۲.۸ مفید می‌باشد.*

۱. *مسئله را به طور دقیق بخوانید.*

۲. *در صورت امکان شکلی برای آن رسم کنید.*

۳. *نمادهای لازم را معرفی کنید. به تمام کمیت‌هایی که توابعی از زمان است نمادهایی اختصاص دهید.*

۴. *اطلاعات داده شده و نرخ‌های مطلوب را بر حسب مشتقات بیان کنید.*

۵. *معادله‌ای بنویسید که کمیت‌های مختلف مسئله را به هم ربط دهد. در صورت لزوم مشخصات هندسی موقعیت را برای حذف یکی از متغیرها توسط جایگذاری بکار برید. (مانند مثال ۳.۲.۸)*

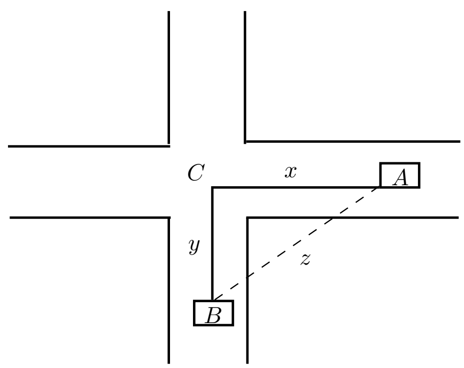
۶. *قاعده زنجیره را برای مشتق‌گیری از دو طرف نسبت به t بکار برید.*

۷. *اطلاعات داده شده را در معادله‌ی حاصل قرار داده آن را برای نرخ مجهول حل کنید.*

هشدار: *یک خطای متداول جایگذاری بسیار زود اطلاعات عددی داده شده (برای کمیت‌هائی که با زمان تغییر می‌کنند) می‌باشد. این عمل تنها بعد از مشتق‌گیری باید انجام گردد. (مرحله ۷ به دنبال مرحله‌ی ۶ می‌آید). به عنوان نمونه در مثال ۳.۲.۸ با مقادیر عام h سر و کار داشتیم تا اینکه سرانجام در مرحله‌ی آخر $h=۳$ را جایگذاری کردیم. (اگر $h=۳$ را زودتر قرار داده بودیم بدست می‌آوردیم $\frac{dV}{dt}=۰$ که به روشنی نادرست است.)*

مثال ۵.۲.۸. *خودرو A با سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت به سوی غرب و خودرو B با سرعت ۱۲۰ کیلومتر در ساعت به طرف شمال در حرکت می‌باشند. هر دو به طرف تقاطع این جاده می‌روند. با چه نرخی دو خودرو به هم نزدیک می‌شوند هنگامی که خودرو A به اندازه‌ی ۰/۳ کیلومتر و خودروی B به اندازه‌ی ۰/۴ کیلومتر از تقاطع فاصله دارند؟*

حل.



شکل ۹.۸: شکل مربوط به ۵.۲.۸.

شکل بالا را که در آن C تقاطع دو جاده است رسم می‌کنیم. در یک زمان داده شده‌ی t فرض کنید x فاصله‌ی خودروی A از C و y فاصله‌ی خودروی B از C و z فاصله‌ی دو خودرو باشد. که در آن x و y و z بر حسب کیلومتر اندازه‌گیری می‌شوند.
داریم که $\frac{dx}{dt}=-۱۰۰km/h$ و $\frac{dy}{dt}=-۱۲۰km/h$ (مشتقات را بدین جهت منفی می‌گیریم که x و y کاهش می‌یابند.) مطلوب یافتن $\frac{dz}{dt}$ است. معادله‌ای که x و y و z را مرتبط می‌سازد بنا بر قضیه فیثاغورث $z^۲=x^۲+y^۲$ می‌باشد. با مشتق‌گیری از هر طرف نسبت به t داریم

$$۲z\frac{dz}{dt}=۲x\frac{dx}{dt}+۲y\frac{dy}{dt}\Rightarrow\frac{dz}{dt}=\frac{۱}{z}(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}).$$

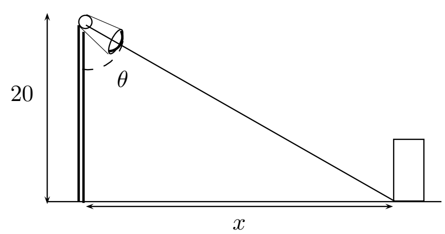
بنابر قضیه‌ی فیثاغورث وقتی $x=۰/۳km$ و $y=۰/۴km$ آنگاه $z=۰/۵km$ در نتیجه

$$\frac{dz}{dt}=\frac{۱}{۰/۵}[۰/۳(-۱۰۰)+۰/۴(-۱۲۰)]=-۱۵۶km/h.$$

دو خودرو با نرخ ۱۵۶ کیلومتر بر ساعت در حال نزدیک شدن به همدیگر می‌باشند.

مثال ۶.۲.۸. *مردی باتندی ۴ متر بر ثانیه در امتداد یک جاده‌ی مستقیم قدم می‌زند. نورافکنی در فاصله‌ی ۲۰ متر جاده قرار دارد که روی این مرد متمرکز شده است. هنگامی که مرد به اندازه‌ی ۱۵ متر از نزدیک‌ترین نقطه‌ی جاده به نورافکن قرار دارد نورافکن با چه نرخی می‌چرخد؟*

حل.



شکل ۱۰.۸: مربوط به مثال ۶.۲.۸.

شکل بالا را رسم کرده و فرض می‌کنیم x فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی جاده به نورافکن تا مرد و زاویه‌ی بین شعاع نوری نورافکن و خط قائم بر جاده باشد.
داریم $\frac{dx}{dt} = ۴m/s$ و مطلوب یافتن $\frac{d\theta}{dt}$ هنگامی که $x = ۱۵$. معادله‌ای که x و θ را ارتباط می‌دهد از شکل بالا به این صورت بدست می‌آید: $x = ۲۰\tan\theta \quad \frac{x}{۲۰} = \tan\theta$
با مشتق‌گیری از دو طرف نسبت به t بدست می‌آوریم $\frac{dx}{dt} = ۲۰\sec^۲\theta\frac{d\theta}{dt}$ در نتیجه

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۲۰}\cos^۲\theta\frac{dx}{dt} = \frac{۱}{۲۰}\cos^۲\theta(۴) = \frac{۱}{۵}\cos^۲\theta$$

هنگامی که $x = ۱۵$ است طول شعاع نوری ۲۵ و در نتیجه

$$\cos\theta = \frac{۴}{۵}, \frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۵}(\frac{۴}{۵})^۲ = \frac{۱۶}{۱۲۵} = ۰/۱۲۸.$$

نورافکن با نرخ ۰/۱۲۸ رادیان بر ثانیه در حال چرخش است.

۳.۸ دیفرانسیل‌ها و تقریب‌های خطی

ما نماد لایب‌نیتز $\frac{dy}{dx}$ را به عنوان یک وجود مجرد برای نمایش مشتق y نسبت به x استفاده کرده‌ایم و نه به عنوان یک نسبت. در این بخش به کمیت‌های dy و dx معانی جداگانه‌ای خواهیم داد بطوری که نسبت آن‌ها همان مشتق را نشان دهد. همچنین خواهیم دید که این کمیت‌ها که دیفرانسیل نامیده می‌شوند در محاسبه‌ی مقادیر تقریبی توابع مفید می‌باشند.

تعریف ۱.۳.۸. *فرض کنید $y = f(x)$ تابع‌های مشتق‌پذیر باشد. آنگاه دیفرانسیل dx یک متغیر مستقل است یعنی dx می‌تواند هر مقداری از اعداد حقیقی را اختیار نماید و دیفرانسیل dy بر حسب dx توسط معادله‌ی $dy = f'(x)dx$ تعریف می‌گردد.*

تبصره ۲.۳.۸. *دیفرانسیل‌های dx و dy هر دو متغیرند اما dx متغیر مستقل است در حالیکه dy متغیر وابسته است در واقع آن به مقادیر x و dx وابسته است. اگر مقدار مشخصی به dx داده شود و x مقدار معینی از قلمرو f را اختیار نماید آنگاه مقدار عددی dy معین خواهد بود.*

تبصره ۳.۳.۸. *اگر $dx \neq 0$ می‌توانیم طرفین معادله‌ی در تعریف ۱.۳.۸ را بر dx تقسیم نموده بدست آوریم $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. معادلات مشابه‌ای را قبلا دیده‌ایم اما حالا طرف چپ را می‌توان به درستی به عنوان نسبت دیفرانسیل‌ها تعبیر نمود.*

مثال ۴.۳.۸. *(الف) اگر $y = x^3 + 2x^2$ و dy را بیابید.*
(ب) مقدار dy را وقتی $x = 2$ و $dx = 0/1$ پیدا کنید.

حل.

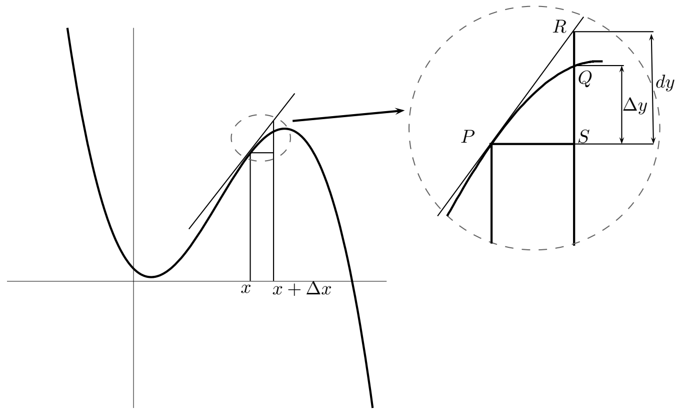
(الف) اگر $f(x) = x^3 + 2x^2$ آنگاه $f'(x) = 3x^2 + 4x$ در نتیجه $dy = (3x^2 + 4x)dx$

(ب) با جایگذاری $x = 2$ و $dx = 0/1$ در عبارت dy به دست می‌آوریم
$$dy = (3 \times 2^2 + 4 \times 2)(0/1) = 20.$$

معنای هندسی دیفرانسیل‌ها در شکل زیر نشان داده شده است. فرض کنید $P(x, f(x))$ و $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ نقاطی روی نمودار f باشند و قرار دهید $dx = \Delta x$. تغییر متناظر در y عبارت است از
$$|QS| = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

شیب خط مماس PR مشتق $f'(x)$ است اما از مثلث PRS می‌بینید که شیب خط مماس را همچنین می‌توان به صورت $\frac{|RS|}{|PS|}$ نوشت. در این صورت
$$|RS| = f'(x)|PS| = f'(x)dx = dy.$$

بنابراین dy نشان دهنده‌ی میزان بالا یا پایین رفتن خط مماس است. جائیکه Δy نشان دهنده‌ی میزان بالا یا پایین رفتن خم $y = f(x)$ است هنگامی که x به اندازه‌ی dx تغییر کرده باشد. چون $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتی Δx کوچک باشد. داریم
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}.$$



شکل ۱۱.۸: دیفرانسیل تابع dy تقریبی از مقدار واقعی تغییرات، Δy است.

(به تعبیر هندسی، این بیان می‌دارد که وقتی Δx کوچک باشد شیب خط قاطع PQ بسیار نزدیک به شیب خط مماس در P خواهد بود.)

اگر فرض کنیم $dx = \Delta x$ آنگاه

$$\Delta y \approx dy \tag{۲.۸}$$

که بیان می‌کند که اگر Δx کوچک باشد آنگاه تغییر واقعی در y تقریبا با دیفرانسیل dy برابراست. (مجددا این مطلب در حالتی که در شکل بالا تشریح شده است از نظر هندسی آشکار است.) تقریب داده شده توسط ۲.۸ می‌تواند برای محاسبه‌ی مقادیر تقریبی توابع بکار برده شود.

تصور کنید $f(x_۱)$ عددی معلوم است و مطلوب محاسبه‌ی مقدار تقریبی $f(x_۱+\Delta x)$ که در آن Δx کوچک است، باشد. چون $f(x_۱+\Delta x) = f(x_۱) + \Delta x$ و ۲.۸ بدست می‌دهد

$$f(x_۱+\Delta x) \approx f(x_۱) + dx. \tag{۳.۸}$$

مثال ۵.۳.۸. *مقادیر Δy و dy را هرگاه $y = f(x) = x^۳ + x^۲ - ۲x + ۱$ و x*

(الف) از ۲ تا ۲/۰۵.

(ب) از ۲ تا ۲/۰۱ تغییر کند بیابید.

حل.

(الف) داریم

$$f(۲) \;=\; ۲^۳ + ۲^۲ - ۲(۲) + ۱ = ۹$$

$$\begin{aligned} f(۲/۰۵) &= (۲/۰۵)^{۳} + (۲/۰۵)^{۲} - ۲(۲/۰۵) + ۱ = ۹/۷۱۷۶۲۵ \\ \Delta y &= f(۲/۰۵) - f(۲) = ۰/۷۱۷۶۲۵ \end{aligned}$$

در حالت کلی $dy = (۳x^{۳} + ۲x - ۲)dx$ و $dy = f'(x)$ پس هنگامی که $x = ۲$ و $dx = \Delta x = ۰/۰۵$ این می‌شود

$$dy = [۳(۲)^{۲} + ۲(۲) - ۲](۰/۰۵) = ۰/۷.$$

(ب)

$$\begin{aligned} f(۲/۰۱) &= (۲/۰۱)^{۳} + (۲/۰۱)^{۲} - ۲(۲/۰۱) + ۱ = ۹/۱۴۰۷۰۱ \\ \Delta y &= f(۲/۰۱) - f(۲) = ۰/۱۴۰۷۰۱ \end{aligned}$$

و وقتی $dx = \Delta x = ۰/۰۱$ باشد داریم

$$dy = [۳(۲)^{۲} + ۲(۲) - ۲](۰/۰۱) = ۰/۱۴.$$

توجه کنید که تقریب $\Delta y \approx dy$ وقتی Δx در مثال ۵.۳.۸ کوچک‌تر شود بهتر می‌شود .همچنین dy آسانتر از Δy محاسبه شد. برای توابع پیچیده‌تر محاسبه مقدار دقیق Δy می‌تواند غیر ممکن باشد. در چنین حالاتی تقریب دیفرانسیل‌ها بخصوص مورد استفاده واقع می‌شوند.

مثال ۶.۳.۸. *دیفرانسیل‌ها را برای تقریب کردن مقداری برای $\sqrt[۳]{۶۵}$ بکار برید.*

حل. فرض کنید $y = f(x) = \sqrt[۳]{x} = x^{\frac{۱}{۳}}$. آنگاه $dy = \frac{۱}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}}dx$ چون $f(۶۴) = ۴$ انتخاب می‌کنیم $x_۱ = ۶۴$ و $dx = \Delta x = ۱$. این می‌دهد $dy = \frac{۱}{۳}(۶۴)^{\frac{-۲}{۳}}(۱) = \frac{۱}{۳\times۱۶} = \frac{۱}{۴۸}$ بنابراین (۳.۸) نتیجه می‌دهد

$$\sqrt[۳]{۶۵} = f(۶۴ + ۱) \approx f(۶۴) + dy = ۴ + \frac{۱}{۴۸} \approx ۴۰۲۱$$

توجه ۷.۳.۸. *مقدار واقعی $\sqrt[۳]{۶۵}$ برابر ۴/۰۲۰۷۲۵۷۰۰۰ می‌باشد. پس تقریب دیفرانسیل‌ها در مثال ۶.۳.۸ حتی وقتی $\Delta x = ۱$ باشد تا ۳ رقم اعشاری دقت دارد.*

مثال ۸.۳.۸. *شعاع کره ای با خطای ممکن حداکثر ۰/۰۵ سانتیمتر اندازه‌گیری شده برابر ۲۱ سانتیمتر بدست آمده است. خطای بیشینه حجم این کره که با این شعاع محاسبه می‌شود چقدر است؟*

حل. اگر شعاع کره r باشد آنگاه حجم آن $V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ است. اگر خطای اندازه‌گیری r با

$dr = \Delta r$ نمایش داده شود آنگاه خطای متناظر در محاسبه‌ی مقدار V برابر ΔV است که توسط دیفرانسیل $dV = ۴\pi r^۲ dr$ تقریب می‌شود. وقتی $r = ۲۱$ و $dr = ۰/۰۵$ این می‌شود $dV = ۴(۲۱)^۲\pi(۰/۰۵) \approx ۲۷۷$ خطای بیشینه در محاسبه‌ی حجم حدود ۲۷۷ سانتیمتر مکعب است.

توجه ۹.۳.۸. *اگر چه خطای ممکن در مثال ۸.۳.۸ تقریبا بزرگ به نظر می‌رسد تصویر بهتری توسط خطای نسبی داده می‌شود که از تقسیم این خطا بر حجم کل بدست می‌آید:*

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} \approx \frac{۲۷۷}{۳۸۷۹۲} \approx ۰/۰۰۷۱۴$$

پس خطای نسبی $\frac{dr}{r} = \frac{۰/۰۵}{۲۱} \approx ۰/۰۰۲۴$ در شعاع خطای نسبی‌ای حدود ۰/۰۰۷ در حجم ایجاد می‌کند.

۴.۸ تقریب‌های خطی

معادله‌ی خط مماس بر خم $y = f(x)$ در $(x_۱, f(x_۱))$ برابر $y = f(x_۱) + f'(x_۱)(x - x_۱)$ است و طرف راست این معادله همان $f(x_۱) + f'(x_۱)dx$ یا $f(x_۱) + dy$ است. پس وقتی تقریب (۳.۸) را بکار می‌بریم. در واقع داریم خط مماس در $P(x_۱, f(x_۱))$ را به عنوان تقریبی برای خم $y = f(x)$ وقتی x نزدیک $x_۱$ است بکار می‌بریم. به این دلیل تقریب

$$f(x) \approx f(x_۱) + f'(x_۱)(x - x_۱) \qquad (۴.۸)$$

تقریب خطی یا تقریب خط مماس f در $x_۱$ نامیده می‌شود و تابع

$$L(x) = f(x_۱) + f'(x_۱)(x - x_۱) \qquad (۵.۸)$$

(که نمودارش خط مماس است) خطی‌سازی f در $x_۱$ نامیده می‌شود.

مثال ۱.۴.۸. *خطی‌سازی تابع $f(x) = \sqrt{x + ۳}$ را در $x_۱ = ۱$ بیابید و آن را برای تقریب کردن $\sqrt{۳/۹۸}$ و $\sqrt{۴/۰۵}$ بکار برید.*

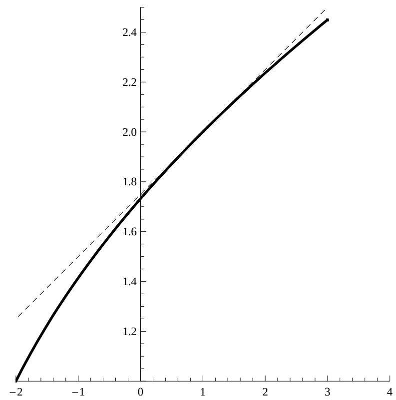
حل. مشتق $f(x) = \sqrt{x + ۳}$ برابر است با $f'(x) = \frac{۱}{۲}(x + ۳)^{\frac{-۱}{۲}} = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}$ و بنابراین داریم $f(۱) = ۱$ و $f'(۱) = \frac{۱}{۴}$. با قرار دادن این مقادیر در معادله‌ی ۵.۸ می‌بینیم که خطی‌سازی آن عبارت است از:

$$L(x) = f(۱) + f'(۱)(x - ۱) = ۲ + \frac{۱}{۴}(x - ۱) = \frac{۷}{۴} + \frac{x}{۴}$$

تقریب خطی متناظر ۴.۸ برابر است با $\sqrt{x + ۳} \approx \frac{۷}{۴} + \frac{x}{۴}$ به خصوص داریم:

$$\sqrt{۳/۹۸} \approx \frac{۷}{۴} + \frac{۰/۹۸}{۴} = ۱/۹۹۵ \qquad \sqrt{۴/۰۵} \approx \frac{۷}{۴} + \frac{۱/۰۵}{۴} = ۲/۰۱۲۵$$

تقریب خطی مثال ۱.۴.۸ در شکل بالا تشریح شده است . می‌بینید که واقعا تقریب خط مماس تقریب



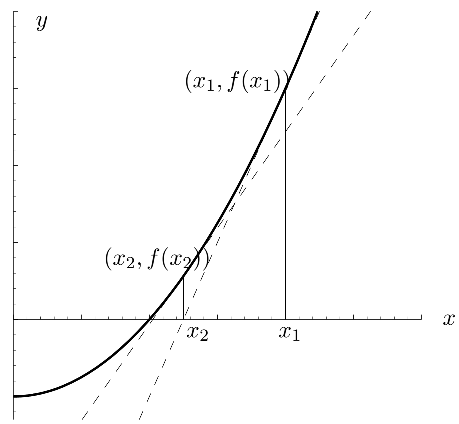
خوبی برای تابع داده شده است وقتی که x به ۱ نزدیک باشد. البته با یک ماشین حساب می‌توان تقریب‌هایی برای $\sqrt{۳/۹۸}$ و $\sqrt{۴/۰۵}$ بدست آورد اما تقریب خطی برای یک بازه‌ی بسته چنین تقریبی را بدست می‌دهد.

۵.۸ روش نیوتن

بسیاری از مسائل در علوم و مهندسی و ریاضیات منجر به مسئله یافتن ریشه‌های معادله‌ای به صورت $f(x) = ۰$ می‌شوند که در آن‌ها f تابعی مشتق‌پذیر است. برای معادله‌ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ فرمول شناخته‌شده‌ای برای ریشه‌ها وجود دارد. برای معادلات درجه‌ی سوم و چهارم نیز فرمول‌هایی برای ریشه‌ها موجودند لیکن آن‌ها بسیار پیچیده‌اند. اگر f یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۵ یا بالاتر باشد چنین فرمول‌هایی ابدا وجود ندارد. به همین ترتیب هیچ فرمولی که ما را قادر به یافتن ریشه‌های دقیق معادلات مثلثاتی مثل $\cos x = x$ نماید وجود ندارد. با این حال روش‌هایی وجود دارند که تقریب‌هایی برای ریشه‌های چنین معادلاتی را بدست می‌دهند.
یکی از روش‌ها روش نیوتن یا روش نیوتن – رافسن نامیده می‌شود. ایده‌ی این روش در شکل زیر که در آن ریشه‌ی مجهول مورد نظر نقطه r می‌باشد نشان داده شده است.

ابتدا با اولین تقریب $x_۱$ که با حدس زدن یا از روی نمودار تقریبی f بدست آمده است شروع می‌کنیم. L خط مماس بر خم $y = f(x)$ در نقطه‌ی $(x_۱, f(x_۱))$ را در نظر گرفته و به طول از مبدا L که با $x_۲$ مشخص شده است نگاه می‌کنیم. اگر $x_۱$ نزدیک r باشد $x_۲$ حتی نزدیک‌تر به r ظاهر می‌گردد و آن را به عنوان دومین تقریب r بکار می‌بریم. برای یافتن فرمولی برای $x_۲$ بر حسب $x_۱$ از این حقیقت که شیب L برابر $f'(x_۱)$ است استفاده می‌کنیم. پس معادله‌ی آن عبارت است از:

$$y - f(x_۱) = f'(x_۱)(x - x_۱)$$



چون طول از مبدا L برابر است قرار می دهیم $y = ۰$ و بدست می‌آوریم
$$۰ - f(x_۱) = f^{'}(x_۱)(x_۲ - x_۱)$$

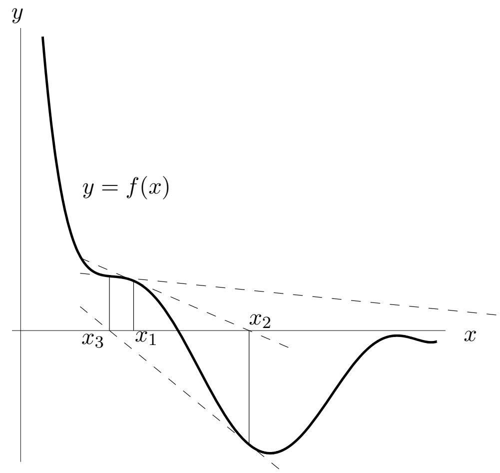
اگر $f^{'}(x_۱) \neq ۰$ می‌توانیم این معادله را برای $y = ۰$ حل کنیم:
$$x_۲ = x_۱ - \frac{f(x_۱)}{f^{'}(x_۱)}$$

سپس این روش کار را با جایگذاری $x_۲$ برای $x_۱$ و استفاده از خط مماس در نقطه‌ی $(x_۱, f(x_۱))$ تکرار می‌کنیم. این سومین تقریب r را بدست می‌دهد:
$$x_۳ = x_۲ - \frac{f(x_۲)}{f^{'}(x_۲)}$$

اگر همین طور این فراگرد را ادامه دهیم دنباله‌ای از تقریب‌های $x_۱, x_۲, x_۳, \cdots$ به طوری که در شکل زیر نشان داده شده است بدست می‌آوریم. به طور کلی اگر nامین تقریب x_n باشد و $f^{'}(x_n) \neq ۰$ آنگاه تقریب بعدی توسط
$$x_{(n+۱)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} \qquad (۶.۸)$$

داده می‌شود. اگر وقتی n بزرگ می‌شود اعداد x_n به r نزدیک و نزدیک‌تر شود آنگاه می‌گوئیم که این دنباله به r همگرا است و می‌نویسیم
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = r$$

(فصل نهم را برای بحثی در مورد دنباله‌ها به طور کلی ملاحظه کنید) اگر چه دنباله تقریب‌های متوالی برای توابع از نوعی که در شکل بالا تشریح شده است به ریشه‌ی مطلوب میل می‌کند در موقعیت‌های خاصی دنباله ممکن است همگرا نباشد. برای مثال موقعیت نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.



می‌بینید که $x_۲$ تقریبی بدتر از $x_۱$ است. این وقتی محتمل است که $f'(x_۱)$ به صفر نزدیک باشد. حتی ممکن است اتفاق افتد که تقریبی (مانند $x_۳$ در شکل بالا) خارج قلمروی f قرار بگیرد. در اینصورت روش نیوتن شکست خورده است وتقریب اولیه‌ی $x_۱$ بهتری باید انتخاب گردد.

مثال ۱.۵.۰.۸. *با شروع از $x_۱ = ۲$ تقریب سوم $x_۳$ رابرای ریشه‌ی معادله $x^۳ + ۲x - ۵ = ۰$ بیابید.*

حل. روش نیوتن را با $f'(x) = ۳x^۲ + ۲$ و $f(x) = x^۳ - ۲x - ۵$ را بکار برید. خود نیوتن این معادله را برای تشریح روش خود استفاده کرد و پس از چند آزمایش او انتخاب نمود $x_۱ = ۲$ زیرا که $f(۱) = -۶$، $f(۳) = ۱۶$ و $f(۲) = -۱$. معادله‌ی ۶.۸ می‌شود

$$x_{(n+۱)} = x_n - \frac{x_n^۳ - ۲x_۱ - ۵}{۳x_n^۲ - ۲}.$$

با $n = ۱$ داریم

$$x_۲ = x_۱ - \frac{x_۱^۳ - ۲x_۱ - ۵}{۳x_۱^۲ - ۲} = ۲ - \frac{۲^۳ - ۲(۲) - ۵}{۳(۲)^۲ - ۲} = ۲/۱.$$

آنگاه با $n = ۲$ بدست می‌آوریم

$$x_۳ = x_۲ - \frac{x_۲^۳ - ۲x_۲ - ۵}{۳x_۲^۲ - ۲} = ۲/۱ - \frac{(۲/۱)^۳ - ۲(۲/۱) - ۵}{۲(۲/۱)^۲ - ۲}$$

این طور از کار در می‌آید که تقریب سوم $x_۳ \approx ۲/۰۹۴۶$ تا سه رقم اعشار صحیح است.

فرض کنید می‌خواهید با استفاده از روش نیوتن به دقت معینی مثلا تا هشت رقم اعشار نائل شویم. چگونه می‌فهمیم چه وقت متوقف شویم؟ قاعده‌ی عملی که عموما به کار می‌رود این است که وقتی می‌توانیم متوقف شویم که تقریب‌های متوالی x_n و $x_{n+۱}$ تا هشت رقم اعشار توافق داشته باشند.

توجه کنید که روش عملی در رفتن از n و $n+۱$ برای تمامی مقادیر n یکسان است. (آن را یک فراگرد تکراری می‌گویند.) این بدین معنی است که روش نیوتن مخصوصا برای استفاده با ماشین حساب‌های قابل برنامه‌نویسی و کامپیوتر راحت است.

مثال ۲.۵.۸. *روش نیوتن را برای یافتن $\sqrt[۶]{۲}$ با دقت ۸ رقم اعشار بکار برید.*

حل. ابتدا مشاهده می‌کنیم که یافتن $\sqrt[۶]{۲}$ معادل یافتن ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^۶ - ۲ = ۰$ است. پس فرض می‌کنیم $f(x) = x^۶ - ۲$ و آنگاه $f'(x) = ۶x^۵$ و فرمول (۶.۸) (روش نیوتن) می‌شود
$x_{n+۱} = x_n - \frac{x_n^۶ - ۲}{۶x_n^۵}$
اگر $x_۱ = ۱$ را به عنوان اولین تقریب انتخاب کنیم بدست می‌آوریم

$$\begin{array}{lll} x_۲ \approx ۱/۱۶۶۶۶۶۶۶۷ & x_۳ \approx ۱/۱۲۶۴۴۳۶۷۸ & x_۴ \approx ۱/۱۲۲۴۹۷۰۶۷ \\ x_۵ \approx ۱/۱۲۲۴۶۲۰۵۱ & x_۶ \approx ۱/۱۲۲۴۶۲۰۴۸. & \end{array}$$

چون $x_۶$ و $x_۵$ تا ۸ رقم اعشار توافق دارند نتیجه می‌گیریم که تا ۸ رقم اعشار $\sqrt[۶]{۲} \approx ۱/۱۲۲۴۶۲۰۵۰$.

مثال ۳.۵.۸. *با دقت ۶ رقم اعشار ریشه‌ی معادله‌ی $\cos x = x$ را بیابید.*

حل. ابتدا معادله را به صورت استاندارد $\cos x - x = ۰$ می‌نویسیم. بنابراین قرار می‌دهیم $f(x) = \cos x - x$. آنگاه $f'(x) = -\sin x - ۱$ و در نتیجه فرمول ۶.۸ می‌شود

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{\sin x_n - ۱} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\sin x_n + ۱}.$$

به منظور حدس مقداری مناسب برای $x_۱$ نمودار $y = x$ و $y = \cos x$ را در شکل زیر می‌بینید.
شکل
به نظر می‌رسد که آن‌ها در نقطه‌ای با مختصه x کمتر از ۱ تلاقی می‌کنند پس به عنوان اولین تقریب مناسب $x_۱ = ۱$ را انتخاب می‌کنیم. آنگاه

$$x_۲ \approx ۰/۷۵۰۳۶۳۸۷ \quad x_۳ \approx ۰/۷۳۹۱۱۲۸۹$$

$$x_۴ \approx ۰/۷۳۹۰۸۵۱۳ \quad x_۵ \approx ۰/۷۳۹۰۸۵۱۳.$$

چون $x_۵$ و $x_۴$ تا ۶ رقم اعشار (در واقع هشت رقم) توافق دارند. نتیجه می‌گیریم که ریشه‌ی معادله با دقت تا ۸ رقم اعشار برابر ۰/۷۳۹۰۸۵ می‌باشد.

۶.۸ مسائل کاربردی کمینه و بیشینه

روش‌هایی که برای یافتن مقادیر اکسترمم در این فصل آموخته‌ایم در بسیاری از مسائل روزمره کاربردهای عملی دارند.

یک کاسب می‌خواهد مخارج را کمینه و سود را بیشینه کند. اصل فرما در نورشناسی بیان می‌دارد که نور از مسیری عبور می‌کند که کمترین زمان را داشته باشد. در اینجا مسائلی مانند بیشینه کردن مساحت‌ها و حجم‌ها و سودها و کمینه کردن فاصله‌ها و زمان‌ها و هزینه‌ها را حل خواهیم کرد.

در حل چنین مسائل علمی غالبا بزرگ‌ترین مشکل تغییر مساله مورد بحث به مساله‌ای بیشینه–کمینه و تعیین تابعی است که باید کمینه یا بیشینه گردد.

مراحل حل مسائل کاربردی کمینه و بیشینه

۱. فهمیدن مسئله.

اولین مرحله خواندن دقیق مسئله است تا وقتی که به وضوح فهمیده شود. از خودتان بپرسید: چه چیزی نامعلوم است؟ چه چیزهایی کمیت‌های داده شده‌اند؟ شرایط داده شده چه هستند؟

۲. رسم نمودار.

در بیشترین مسائل رسم نمودار و مشخص کردن کمیت‌های داده شده و مورد نیاز بر روی نمودار مفید واقع می‌شود.

۳. معرفی نماد.

به کمیتی که قرار است کمینه یا بیشینه شود نمادی اختصاص دهید (اجازه دهید درحال حاضر آن را با Q نشان دهیم). همچنین نمادهای $a, b, c, \cdots, x, y$ را برای کمیت‌های نامعلوم دیگر انتخاب نموده و نمودار را با این نمادها مشخص کنید. استفاده از مخفف‌ها به عنوان نمادهایی مثل A برای مساحت و h برای ارتفاع و t برای زمان ممکن است مفید واقع شوند.

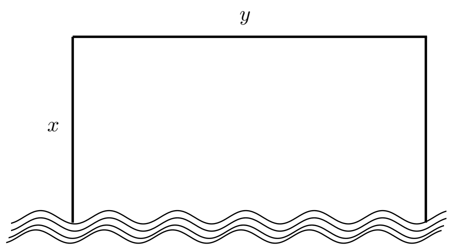
۴. Q را بر حسب بعضی از نمادهای دیگر مرحله‌ی ۳ بیان نمائید.

۵. اگر در مرحله‌ی ۴، Q به عنوان تابعی از بیش از یک متغیر بیان شده باشد اطلاعات داده شده را برای یافتن روابط بین این متغیرها به صورت معادلات استفاده کنید. سپس این معادلات را برای حذف تمام بجز یکی از این متغیرها در عبارت Q استفاده نمائید. دراین صورت Q به عنوان تابعی ازیک متغیر x مثلا $Q = f(x)$ داده می‌شود. قلمرو این تابع را بنویسید.

۶. روش‌های فصل هفتم را برای یافتن مقادیر بیشینه یا کمینه مطلق f بکار برید.

مثال ۱.۶.۸. *کشاورزی ۲۴۰۰ متر حصارکشی دارد و می‌خواهد مزرعه‌ای مستطیلی شکل را که کنار رودخانه‌ی مستقیمی قرار دارد حصاربندی کند. در امتداد رودخانه حصار لازم ندارد. ابعاد مزرعه‌ای که بیشترین مساحت را در بر می‌گیرد چقدر است؟*

حل. ابتدا نموداری رسم می‌کنیم. می‌خواهیم مساحت A از این مستطیل را بیشینه کنیم. فرض کنید که



x و y عرض و طول این مستطیل (بر حسب متر) باشند. سپس A را بر حسب x و y بیان می‌کنیم:

$$A = xy$$

می‌خواهیم A را به عنوان تابعی از یک متغیر بیان کنیم. پس با بیان y بر حسب x، y را حذف می‌نمائیم. برای انجام این امر اطلاع معلوم طول کل حصار را که ۲۴۰۰ متر است به کار می‌گیریم. پس $2x + y = 2400$ از این معادله داریم $y = 2400 - 2x$ که به دست می‌دهد

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

توجه کنید که $x \geq 0$ و $x \leq 1200$ (در غیر این صورت $A < 0$). در نتیجه تابعی که می‌خواهیم آن را بیشینه کنیم عبارت است از

$$A(x) = 2400x - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 1200$$

برای یافتن اعداد بحرانی معادله‌ی $A'(x) = 2400 - 4x = 0$ را حل می‌کنیم که جواب می‌دهد $x = 600$.

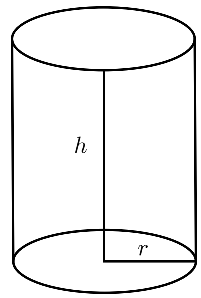
مقدار بیشینه‌ی A باید در این عدد بحرانی و یا در یک نقطه‌ی انتهائی این درونه رخ دهد. چون $A(0) = 0$ و $A(600) = 720000$ و $A(1200) = 0$ با توجه به مراحلی که گفته شد نتیجه می‌دهد که مقدار بیشینه $A(600) = 7200$ می‌باشد.

(به طور معادل با مشاهده‌ی اینکه $A''(x) = -4 < 0$ برای هر x می‌توانستیم ببینیم که A همیشه به پائین مقعر بوده و بیشینه‌ی موضعی در $x = 600$ باید یک بیشینه‌ی مطلق باشد).

بنابراین مزرعه مستطیلی باید دارای عرض ۶۰۰ متر و طول ۱۲۰۰ متر باشد.

مثال ۲.۶.۸. *یک قوطی باید طوری ساخته شود که ۱ لیتر روغن در آن جای گیرد. ابعادی را که مخارج فلز بکار رفته در ساخت این قوطی را کمینه کند بیابید.*

حل. نموداری مانند شکل زیر در نظر می‌گیریم که در آن r شعاع و h ارتفاع را (بر حسب سانتیمتر) نشان دهد. به منظور کمینه کردن مخارج فلز و مساحت کل رویه‌ی استوانه‌ای (سر و ته و اطراف) را که عبارت است از : $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ کمینه می‌کنیم.



شکل ۱۲.۸: مربوط به مثال ۲.۶.۸.

برای حذف h از این که حجم آن ۱ لیتر که ما آن را ۱۰۰۰ سانتیمتر مکعب می‌گیریم استفاده می‌کنیم. پس $\pi r^2 h = 1000$ که می‌دهد $h = 1000(\pi r^2)$. جایگذاری این عبارت در A می‌دهد

$$A = 2\pi r^2 + \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

بنابراین تابعی که می‌خواهیم کمینه کنیم $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ و $r > 0$ است. برای یافتن اعداد بحرانی مشتق‌گیری می‌کنیم $A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 4\frac{\pi r^3 - 500}{r^2}$. پس $A'(r) = 0$ وقتی که $\pi r^3 = 500$ در نتیجه تنها عدد بحرانی $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ است. چون قلمرو A، $(0, \infty)$ است نمی‌توانیم بحث مثال ۱.۶.۸ در ارتباط با قرینه‌ها در نقاط انتهائی را مورد استفاده قرار دهیم. لیکن می‌توانیم مشاهده کنیم که $A'(r) < 0$ برای $r < \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ و $A'(r) > 0$ برای $r > \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$. در نتیجه A برای تمام rهای طرف چپ عدد بحرانی نزولی و برای تمام rهای طرف راست عدد بحرانی صعودی است.

بنابراین $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ باید به یک کمینه‌ی مطلق منجر شود.

(یا این که بحث کنیم که $A(r) \longrightarrow \infty$ وقتی $r \longrightarrow 0^+$ و $A(r) \longrightarrow \infty$ وقتی $r \longrightarrow \infty$ پس یک مقدار کمینه برای $A(r)$ باید وجود داشته باشدکه ضرورتا باید در این عدد بحرانی رخ دهد.)

مقدار h متناظر با $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ برابر است با $h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(\frac{500}{\pi})^{(\frac{2}{3})}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$. بنابراین برای کمینه کردن مخارج ساخت قوطی شعاع باید $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ سانتیمتر و ارتفاع باید دو برابر شعاع یعنی برابر با قطر باشد.

توجه ۳.۶.۸. *بحث استفاده شده در مثال ۲.۶.۸ برای توجیه کمینه مطلق شکل تغییر یافته‌ای از آزمون مشتق اول است (که تنها در مورد اکسترمم‌های موضعی کاربرد دارد) و جهت ارجاع بعدی در اینجا بیان می‌شود.*

مثال ۴.۶.۸. *نقطه‌ای بر سهمی $y^۲ = ۲x$ بیابید که به نقطه‌ی $(۱,۴)$ نزدیک‌ترین باشد.*

حل. فاصله‌ی بین نقطه‌ی $(۱,۴)$ و نقطه‌ی (x,y) برابر است با $d = \sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۴)^۴}$. لیکن اگر (x,y) بر سهمی قرار داشته باشد آنگاه $x = \frac{y^۲}{۲}$. در نتیجه عبارت d می‌شود

$$d = \sqrt{(\frac{y^۲}{۲} - ۱)^۲ + (y-۴)^۴}$$

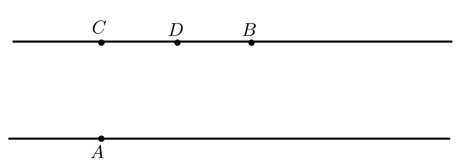
(به طور متناوب می‌توانستیم با جایگذاری $y = \sqrt{۲x}$ برای بدست آوردن d بر حسب x تنها استفاده کنیم.)

به جای کمینه کردن d مربع آن را کمینه می‌کنیم $d^۲ = f(y) = (\frac{y^۲}{۲} - ۱)^۲ + (y-۴)^۲$. (توجه نمایید که کمینه‌ی d و $d^۲$ یکسانند، لیکن کار کردن با $d^۲$ آسان‌تر است) با مشتق‌گیری بدست می‌آوریم.

$$f^{'}(y) = ۲(\frac{y^۲}{۲}) = ۲(y-۴) = y^۳ - ۸$$

پس $f^{'}(y) = ۰$ وقتی که $y = ۲$. مشاهده می‌کنیم که $f^{'}(y) < ۰$ وقتی که $y < ۲$ و $f^{'}(y) > ۰$ وقتی که $y > ۲$ در نتیجه کمینه‌ی مطلق وقتی رخ می‌دهد که $y = ۲$. مقدار متناظر x برابر است با $x = \frac{y^۲}{۲} = ۲$ است. بنابراین نقطه‌ی $(۲,۲)$ نزدیک‌ترین نقطه به $(۱,۴)$ بر $y^۲ = ۲x$ می‌باشد.

مثال ۵.۶.۸. *مردی در نقطه‌ی A برکنار رودخانه‌ای مستقیم به عرض ۳ کیلومتر قرار دارد و می‌خواهد هر چه سریع‌تر به نقطه‌ی B، ۸ کیلومتر پائین رود در ساحل مقابل برسد (شکل ۱۳.۸ را ببینید) می‌تواند قایقش را مستقیما از عرض رودخانه به نقطه‌ی C پارو زده سپس تا B بدود یا می‌تواند مستقیما با قایق به B برود یا او می‌تواند با قایق به نقطه‌ای چون D بین C و B رفته سپس تا B بدود. اگر او بتواند با سرعت قایقرانی کند و با سرعت ۸ کیلو متر بدود کجا باید پیاده شود تا هر چه زودتر به B برسد؟*



شکل ۱۳.۸: شکل مربوط به مثال ۵.۶.۸.

حل. فرض کنید x فاصله‌ی بین C تا D باشد. در این صورت فاصله‌ی دویدن $|DB| = ۸ - x$ است

و قضیه‌ی فیثاغورث فاصله‌ی قایقرانی را به صورت $|AD|=\sqrt{x^۲+۹}$ می‌دهد. فرض می‌کنیم تندی آب ۰ کیلومتر بر ساعت است و معادله‌ی زمان $=\frac{\text{فاصله}}{\text{نرخ}}$ بکار می‌گیریم. پس زمان قایقرانی $\sqrt{x^۲+\frac{۹}{۸}}$ و زمان دویدن $\frac{(x-۸)}{۸}$ است. در نتیجه کل زمان T به عنوان تابعی از x عبارت است از $T(x)=\frac{\sqrt{x^۲+۹}}{۶}+\frac{۸-x}{۸}$ قلمرو تابع T برابر $[۰,۸]$ است. توجه کنید که اگر $x=۰$، او تا C قایقرانی می‌کرد و اگر $x=۸$ او مستقیما با قایق به B میرود. مشتق T برابراست با

$$T'(x)=\frac{x}{۶\sqrt{x^۲+۹}}-\frac{۱}{۸}$$

پس با استفاده از این حقیقت که $x\geq ۰$ داریم

$$\begin{aligned}T'(x)=۰ \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{۶\sqrt{x^۲+۹}}-\frac{۱}{۸}\Leftrightarrow ۴x=۳\sqrt{x^۲+۹}\\ &\Leftrightarrow \quad ۱۶x^۲=۹(x^۲+۹)\Leftrightarrow ۷x^۲=۸۱\Leftrightarrow x=\frac{۹}{\sqrt{۷}}\end{aligned}$$

تنها عدد بحرانی $x=\frac{۹}{\sqrt{۷}}$ است. برای فهمیدن اینکه آیا کمینه در این عدد بحرانی و یا در یک نقطه‌ی انتهایی قلمرو

$[۰,۸]$ اتفاق می‌افتد T رادر هر سه نقطه محاسبه می‌کنیم

$$T(۰)=۱/۵ \qquad T(\frac{۹}{\sqrt{۷}})=۱+\frac{\sqrt{۷}}{۸} \qquad T(۸)=\frac{\sqrt{۷۳}}{۶}.$$

چون کوچک‌ترین این مقادیر T در $x=\frac{۹}{\sqrt{۷}}$ رخ می‌دهد مقدار کمینه‌ی مطلق T باید در این جا اتفاق افتد. بنابراین این مرد باید قایق را در نقطه‌ای به فاصله‌ی $\frac{۹}{\sqrt{۷}}$ کیلومتر ($\approx ۳/۴$ کیلومتر) از نقطه‌ی شروع در پائین رودخانه متوقف نماید.

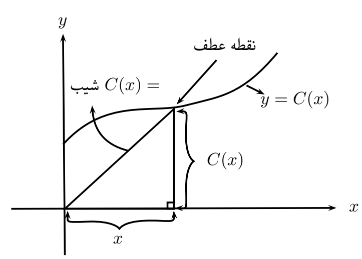
مثال ۶.۶.۸. *مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی را که می‌توان در یک نیمدایره به شعاع r محاط کرد بیابید.*

حل. اجازه دهید نیمدایره مذکور نیمه‌ی بالایی $x^۲+y^۲=r^۲$ با مرکز مختصات باشد. در این صورت لغت محاط شده بطوری که در شکل زیر نشان داده شده بدین معنی است که دو راس مستطیل بر نیمدایره و دو راس آن روی محور x باشد.
فرض کنید که (x,y) راسی باشد که در ربع اول قرار دارد. در این صورت دو ضلع مستطیل دارای طول‌های $۲x$ و y می‌باشند. در نتیجه مساحت آن برابراست با $A=۲xy$ می‌باشد. برای حذف y این حقیقت را که (x,y) بر دایره‌ی $x^۲+y^۲=r^۲$ قرار دارد استفاده می‌کنیم و در نتیجه $y=\sqrt{r^۲-x^۲}$. بنابراین $A=۲x\sqrt{r^۲-x^۲}$، قلمرو $۰\leq x\leq r$ است. مشتق آن عبارت است

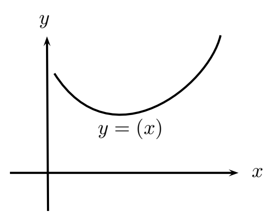
از:
$$A' = ۲\sqrt{r^۲ - x^۲} - \frac{۲x^۲}{\sqrt{r^۲ - x^۲}} = \frac{۲(r^۲ - ۲x^۲)}{\sqrt{r^۲ - x^۲}}$$
که وقتی $r^۲ = ۲x^۲$ یعنی $x = \frac{r}{\sqrt{۲}}$ صفر است (چون $x \geq ۰$) چون $A(۰) = ۰$ و $A(r) = ۰$ این مقدار x یک مقدار بیشینه‌ی A است. بنابراین مساحت بزرگ‌ترین مستطیل محاطی برابر است با
$$A(\frac{r}{\sqrt{۲}}) = ۲\frac{r}{\sqrt{۲}}\sqrt{r^۲ - \frac{r^۲}{۲}} = r^۲$$

۷.۸ کاربردهای اقتصادی

اگر $C(x)$ تابع هزینه و مخارج تولید x واحد از کالای معینی باشد آنگاه هزینه‌ی نهائی عبارت است از نرخ تغییر C نسبت به x. به عبارت دیگر تابع هزینه‌ی نهائی مشتق تابع نهائی $C'(x)$ است.
نمودار یک تابع در شکل زیر (آ) نشان داده شده است. هزینه‌ی نهائی $C'(x)$ شیب مماس بر خم هزینه در $(x, C(x))$ است. توجه کنید که بدلیل اقتصاد مقیاس (استفاده‌ی کارآمدتر هزینه‌ی ثابت تولید) خم هزینه ابتدا به پائین مقعر است. لیکن سرانجام نقطه‌ی عطفی وجود دارد و خم هزینه به بالا مقعر می‌شود (هزینه‌ی نهائی صعودی است) شاید به دلیل هزینه‌ی اضافی یا عدم کفایت در یک فعالیت بزرگ مقیاس.



(آ) تابع هزینه



(ب) تابع هزینه متوسط

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} \qquad \textbf{تابع هزینه متوسط} \qquad (۷.۸)$$

$\frac{C(x)}{x}$ نشان‌دهنده‌ی هزینه‌ی هر واحد کالاست وقتی x واحد از آن تولید شده باشد. با توجه به این که شیب خط واصل بین مبدا و نقطه $(x, C(x))$ در شکل بالا (آ) است نمودار یک تابع هزینه‌ی متوسط نمونه را در در شکل بالا (ب) رسم می‌کنیم. به نظر می‌رسد که یک کمینه‌ی مطلق وجود خواهد داشت. برای یافتن آن نقطه‌ی بحرانی c را با استفاده از قاعده‌ی خارج قسمت برای مشتق‌گیری معادله‌ی ۷.۸ جستجو می‌کنیم
$$c'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^۲}.$$

حال $c'(x) = 0$ وقتی که $xC'(x) - C(x) = 0$ و این نتیجه می‌دهد

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x} = c(x).$$

بنابراین اگر هزینه‌ی متوسط کمینه باشد آنگاه

$$\text{هزینه‌ی متوسط} = \text{هزینه‌ی نهائی}.$$

مثال ۱.۷.۸. *شرکتی برآورد می‌کند که هزینه‌ی (به تومان) تولید x واحد کالا عبارت است از*

$$C(x) = 2600 + 2x + 0/001x^2.$$

(الف) *هزینه و هزینه‌ی متوسط و هزینه‌ی نهائی تولید ۱۰۰۰ کالا و ۲۰۰۰ کالا و ۳۰۰۰ کالا را بیابید.*

(ب) *در چه سطحی از تولید کمترین هزینه‌ی متوسط حاصل می‌شود و این هزینه‌ی متوسط کمینه چقدر است؟*

حل.

(الف) تابع هزینه‌ی متوسط برابر است با $c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2600}{x} + 2 + 0/001x$. تابع هزینه‌ی نهائی برابر است با $C'(x) = 2 + 0/002x$ از این عبارات برای پر کردن جدول زیر که هزینه و هزینه‌ی متوسط و هزینه‌ی نهائی (به تومان و یا تومان هر قلم به نزدیک‌ترین ریال گرد شده) می‌دهند استفاده کنیم.

$C'(x)$	$c(x)$	$C(x)$	x
۴	۵/۶۰	۵۶۰۰	۱۰۰۰
۶	۵/۳۰	۱۰۶۰۰	۲۰۰۰
۸	۵/۸۷	۱۷۶۰۰	۳۰۰۰

(ب) برای کمینه کردن هزینه‌ی متوسط باید داشته باشیم (هزینه‌ی متوسط = هزینه‌ی نهائی) یعنی $C'(x) = c(x)$.

$$2 + 0/002x = \frac{2600}{x} + 2 + 0/001x$$

این معادله به $0/001x = \frac{2600}{x}$ ساده می‌شود. پس

$$x^2 = \frac{2600}{0/001} = 2600000 \qquad x = \sqrt{2600000} = 1612$$

برای دیدن اینکه این سطح تولید در واقع یک کمینه را بدست می‌دهد توجه می‌کنیم که $C''(x) = \frac{5200}{x^3}$. در نتیجه C در تمام قلمروش به بالا مقعر است. هزینه متوسط کمینه برابر است با

$$c(1612) = \frac{2600}{1612} + 2 + 0/001(1612)) = 5/22.$$

حال اجازه دهید بازاریابی را در نظر بگیریم. فرض کنید $p(x)$ قیمت هر واحد کالا باشد که این شرکت در صورت فروش x واحد کالا می‌تواند دریافت نماید. آنگاه p را تابع تقاضا (یا تابع قیمت) می‌نامیم و انتظار داریم که تابع نزولی بر حسب x باشد. اگر x واحد کالای فروخته شده و قیمت هر واحد $p(x)$ باشد آنگاه درآمد کل $R(x) = xp(x)$ است و R تابع درآمد (یا تابع فروش) نامیده می‌شود. مشتق تابع درآمد R' تابع درآمد نهائی نامیده می‌شود و آن را نرخ تغییر درآمد نسبت به تعداد واحدهای فروخته شده می‌نامند.

اگر x واحد فروخته باشد آنگاه سود کل برابر $P(x) = R(x) - C(x)$ است و P تابع سود نامیده می‌شود. تابع سود نهائی P' مشتق تابع سود می‌باشد. به منظور بیشینه کردن سود اعداد بحرانی P را یعنی اعدادی که در آن‌ها سود نهائی صفر است جستجو می‌کنیم. لیکن اگر $P'(x) = R'(x) - C'(x) = ۰$ باشد آنگاه $R'(x) = C'(x)$ بنابراین اگر سود ماکزیمم باشد

درآمد نهائی $=$ هزینه‌ی نهائی .

برای اطمینان از اینکه این شرط بیشینه را بدست آوریم می‌توانستیم آزمون مشتق دوم را بکار بریم. توجه کنید که وقتی $R''(x) < C''(x)$ و $P''(x) = R''(x) - C''(x) < ۰$ و این شرط بیان می‌دارد که نرخ افزایش درآمد نهائی کمتر از نرخ افزایش هزینه‌ی نهائی است. بنابراین سود وقتی بیشینه خواهد شد که

$$R''(x) < C''(x), \quad R'(x) = C'(x).$$

مثال ۲.۷.۸. *چه سطح تولیدی سود شرکتی با تابع هزینه و تقاضای* $C(x) = ۳۸۰۰ + ۵x - \frac{x^۲}{۱۰۰۰}$ *و* $P(x) = ۵۰ - \frac{x}{۱۰۰}$ *را بیشینه کند؟*

حل. تابع درآمد عبارت است از $R(x) = xP(x) = ۵۰x - \frac{x^۲}{۱۰۰}$ پس تابع درآمد نهائی $R'(x) = ۵۰ - \frac{x}{۵۰}$ و تابع درآمد نهائی $C'(x) = ۵ - \frac{x}{۵۰۰}$ می‌باشند. بنابراین درآمد نهائی وقتی برابر هزینه‌ی نهائی است

$$۵۰ - \frac{x}{۵۰} = ۵ - \frac{x}{۵۰۰}$$

که با حل آن بدست می‌آوریم $x = ۲۵۰۰$. برای کنترل کردن این که این یک بیشینه را می‌دهد مشتقات دوم را محاسبه می‌کنیم

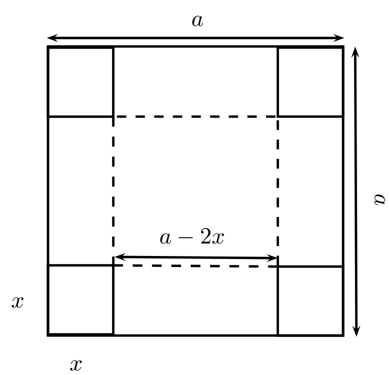
$$R''(x) = -\frac{۱}{۵۰}, \quad C''(x) = -\frac{۱}{۵۰۰}.$$

در این صورت $R''(x) < C''(x)$ برای تمام مقادیر x. بنابراین یک سطح تولید ۲۵۰۰ واحدی سود را بیشینه می‌کند.

۸.۸ مسایل نمونه حل شده

مساله ۱.۸.۸. *می‌خواهیم چهارگوشه از صفحه حلبی مربع شکلی به طول ضلع a، چهار مربع در آوریم و سپس اطراف آن را بالا ببریم تا یک جعبه مکعب مستطیل شکل بدون درب بسازیم.طول ضلع مربع های کوچک را چقدر در نظر بگیریم تا حجم جعبه حاصل ماکزیمم شود.*

حل.



با توجه به شکل بالا داریم که اگر x طول ضلع مربع های کوچک یعنی ارتفاع جعبه باشد آنگاه طول ضلع مربع قاعده جعبه برابر$a - ۲x$و در نتیجه حجم جعبه عبارت است$V_(x) = (a - ۲x)^۲$و این تابعی است که باید ماکزیمم شود.بنابراین باید مشتق آن را بدست آورده و نقاط بحرانی را به کمک آن محاسبه نماییم. در این صورت داریم

$$V'(x) = (a - ۲x)^۲ - ۴x(a - ۲x) = a^۲ - ۸ax + ۱۲x^۲$$

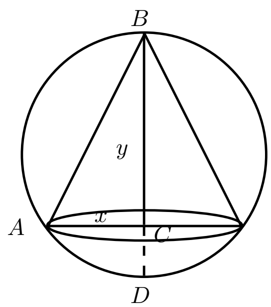
حال برای بدست آوردن نقاط بحرانی لازم است ریشه های معادله $V'(x) = $محاسبه شوند بنابراین ازه $a^۲ - ۸ax + ۱۲x^۲ =$ داریم$x = \frac{a}{۲}$و$x = \frac{a}{۶}$.واضح است که $x = \frac{a}{۲}$ مینیمم مقدارV را می‌دهد چون در این حالات تمامی صفحه حلبی به عنوان چهار مربع گوشه برداشته می‌شود و چیزی برای ساختن جعبه نمی‌ماند.بنابراین جواب می‌تواند $x = \frac{a}{۶}$ باشد اما برای اطمینان از این که مسئله جواب دارد و این جواب $x = \frac{a}{۶}$ است می‌توان از مشتق دوم استفاده کرد.پس با محاسبه و قرار دادن$x = \frac{a}{۶}$در آن داریم

$$V''(x) = -۸a + ۲۴x, V''\frac{a}{۶} = -۸a + ۲۴\frac{a}{۶} = -۸a < ۰$$

پس $\frac{a}{۶}$ جواب مطلوب است که در این صورت حجم جعبه برابر$\frac{۲a^۳}{۲۷}$است.

مساله ۲.۸.۸. *ارتفاع مخروط قائم دواری را پیدا کنید که درکره‌ای به شعاع r محاط است و بیشترین حجم ممکن را دارد؟*

حل.



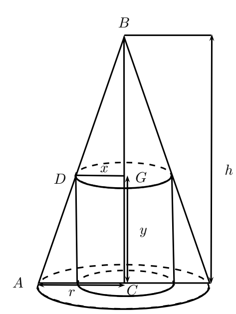
با توجه به شکل بالا حجم مخروط برابر $\frac{\pi}{۳}x^{۲}y$ است که تابعی دو متغیره بر حسب x و y است که با توجه به شکل رابطه بین x و y عبارت است از $x^{۲} = y(۲r - y)$(چون با توجه به مثلث قائم الزاویهBADو این کهACارتفاع وارد بر وتر است داریم $x^{۲} = \overline{AC}^{۲} = \overline{BC} \times CD$)؛بنابراین حجم مخروط به عنوان تابع یک متغیره y عبارت است

$$V(y) = \frac{\pi}{۳}y^{۲}(۲r - y)$$

که بسادگی می‌توان دید که برای ارتفاع مخروط برابر $\frac{۴r}{۳}$ ماکزیمم شود.

مساله ۳.۸.۸. *ارتفاع استوانه‌ای را پیدا کنید که در مخروط دواری محاط است و بیشترین حجم ممکن را دارد؟*

حل.

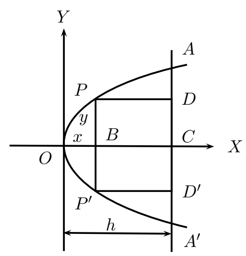


با توجه به شکل اگر AC را r ، BC را hوشعاع قاعده استوانه را x و ارتفاع استوانه راyبنامیم در این صورت حجم استوانه $x^{۲}y$ می‌شود.اما از آنجا که دو مثلث ABC و DBG متشابه‌اند؛داریم

$\frac{h}{h-y}=\frac{r}{x}$ ویا $x=\frac{r(h-y)}{h}$ است. و بنابراین حجم استوانه عبارت است از $V(y)=\frac{r^۲}{h^۲}y(h-y)^۲$
که بسادگی می‌توان دید جواب مطلوب برای ارتفاع استوانه عبارت است $\frac{h}{۳}$.

مساله ۴.۸.۸. *عرض مستطیلی‌که در قطعه سهمی AOA' مطابق شکل محاط است را محاسبه نمائید در حالی‌که مساحتش ماکزیمم شود.*

حل.



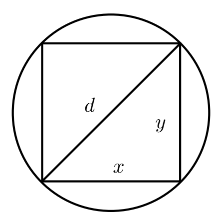
اگر $OC=h$، $BC=h-x$ و $PP'=۲y$، مساحت مستطیل $PDD'P'$برابر $۲(h-x)y$ است.اما چون P روی سهمی $y^۲=۲px$قرار دارد، مساحت مستطیل به عنوان تابعی یک متغیری از x به صورت زیر در می‌آید

$$S(x)=۲(h-x)\sqrt{۲px}$$

که بسادگی می‌توان دید که عرض مطلوب برابر $\frac{۲h}{۳}$ است.

مساله ۵.۸.۸. *اگر مقاومت الواری که مقطعش مستطیل است،وقتی‌که افقی قرار می‌گیرد به نسبت مستقیم عرض آن و مجذور ارتفاع مقطع تغییر کند،ابعاد الوار را که از یک تیر استوانه‌ای شکل به قطر d بدست می‌آید چه بگیریم تا مقاومت آن ماکزیمم باشد.*

حل.



با توجه به شکل بالا اگر x عرض و y ارتفاع مقطع الوار باشد،مقاومت آن وقتی ماکزیمم است که تابع دو متغیری $xy^۲$ ماکزیمم باشد.با توجه به شکل داریم $y^۲=d^۲-x^۲$ پس باید تابع

$f(x)=x(d^{۲}-x^{۲})$ را ماکزیمم نمود که بسادگی می‌توان دید که اگر تیر به طریقی بریده شود که ارتفاع مقطع $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ قطر تیر و عرض مقطع الوار $\sqrt{\frac{۱}{۳}}$ قطر تیر باشد،مقاومت الوار ماکزیمم است.

مساله ۶.۸.۸. *قطعه سیمی به به طول ۲۰ سانتیمتر را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم.با یک قسمت یک دایره و با قسمت دیگر یک مثلث متساوی الاضلاع می‌سازیم.سیم چگونه باید بریده شود تا مجموع مساحت دو شکل الف)ماکزیمم ب)مینیمم گردد.*

حل. فرض کنید x طول آن قسمت از سیم باشد که برای ساختن مثلث متساوی الاضلاع بکار رفته است بنابراین طول هر ضلع مثلث برابر $\frac{x}{۳}$ است و در نتیجه محیط دایره برابر است با$x-۲۰$. حال با بکار بردن قضیه فیثاغورث ارتفاع مثلث برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۶}x$ است.بنابراین داریم

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}(\frac{x}{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۶}x)=\frac{\sqrt{۳}}{۳۶}x^{۲}$$

$$\text{محیط دایره}=۲\pi r=۲۰-x$$

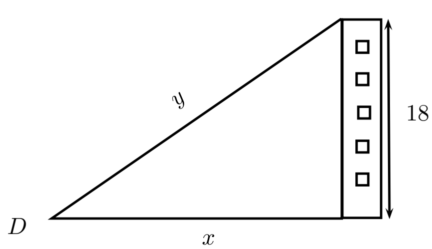
در نتیجه شعاع دایره $r=\frac{۲۰-x}{۲\pi}$ و بنابراین مساحت دایره برابر است با $\pi(\frac{۲۰-x}{۲\pi})^{۲}$.با توجه به این مطالب،مجموع مساحت دو شکل به عنوان تابع یک متغیره از x عبارت است

$$A(x)=\frac{\sqrt{۳}}{۳۶}x^{۲}+\frac{(۲۰-x)^{۲}}{۴\pi},\quad ۰\leqslant x\leqslant ۲۰$$

که بسادگی می‌توان دید که مینیمم مقدار برای $x\simeq ۱۲/۴۶$ و برای حالت ماکزیمم مقدار اصلا نباید سیم بریده شود و لازم است با تمامی سیم فقط یک دایره بسازیم.

مساله ۷.۸.۸. *شخصی با سرعت ۴۵۰۰ متر در ساعت به سمت پای برجی به ارتفاع ۱۸ متر پیش می‌رود.وقتی این شخص در فاصله ۲۴ متری از پای برج در حرکت است با چه سرعتی به رأس برج نزدیک می‌شود؟*

حل.



با توجه به شکل بالا فرض کنید x نمایانگر فاصله بین شخص تا پای برج و y نمایانگر فاصله بین شخص تا رأس برج باشد. چون مثلث قائم الزاویه است داریم $y^۲ = x^۲ + ۳۲۴$ حال از طرفین نسبت به (t) مشتق می‌گیریم در این صورت داریم

$$۲y\frac{dy}{dt} = ۲x\frac{dx}{dt} \quad \text{ویا} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

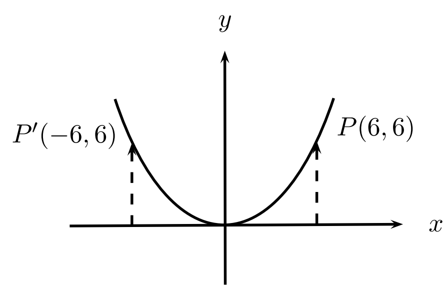
معنی رابطه اخیر این است که در هر لحظه

$$\text{نرخ تغییر y} = (\frac{x}{y})\text{نرخ تغییر x}$$

با توجه به مفروضات مسئله داریم $x = ۲۴$ و $\frac{dx}{dt} = -۴/۵$ و $y = \sqrt{x^۲ + ۳۲۴} = \sqrt{۲۴^۲ + ۱۸^۲} = ۳۰$ در نتیجه $\frac{dy}{dt} = -\frac{۲۴}{۳۰} \times ۴/۵ = -۳/۶$.

مساله ۸.۸.۸. *نقطه متحرکی روی سهمی $۶y = x^۲$ چنان تغییر مکان می‌دهد که وقتی $x = ۶$، طول نقطه با سرعت ۶۰ سانتیمتر در ثانیه افزایش می‌یابد.سرعت افزایش عرض نقطه در این لحظه چقدر است؟*

حل.



از این که $۶y = x^۲$ داریم

$$۶\frac{dy}{dt} = ۲x\frac{dx}{dt} \quad \text{و یا} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{۳}\frac{dx}{dt}$$

معنی رابطه اخیر این است که در هر نقطه سهمی داریم

$$\text{نرخ تغییر عرض نقطه} = (\frac{x}{۳}) \times \text{نرخ تغییر طول نقطه}$$

حال با توجه به مفروضات مسئله داریم $x = ۶$ ، $\frac{dx}{dt} = ۰/۶$ و $y = \frac{x^۲}{۶} = ۶$ بنابراین $\frac{dy}{dt} = \frac{۶}{۳} \times ۰/۶ = ۱/۲$ بنابراین می‌توان گفت که در نقطه $P(۶,۶)$ نرخ افزایش عرض نقطه متحرک ۱/۲ برابر نرخ افزایش طول آن است. اگر به جای نقطه $P(۶,۶)$ نقطه $P(-۶,۶)$ را در نظر بگیریم جواب به صورت $\frac{dy}{dt} = -\frac{۱}{۲}$ است. علامت $-$ نشان می‌دهد که وقتی طول زیاد می‌شود، عرض کاهش

می‌یابد.

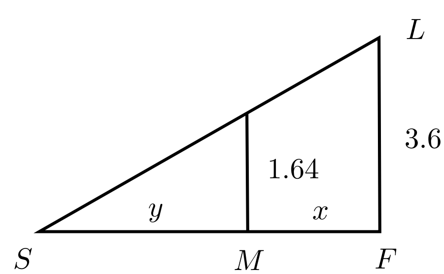
مساله ۹.۸.۸. *صفحه فلزی دایره‌ای شکلی براثر حرارت منبسط می‌شود و به شعاع آن در هر ثانیه ۰/۰۲۵ سانتیمتر افزوده می‌گردد.وقتی شعاع آن ۵ سانتیمتر است، سرعت افزایش مساحت آن چقدر است؟*

حل. اگر x نمایانگر شعاع و y نمایانگر مساحت صفحه فلزی باشد، با توجه به این که صفحه به شکل دایره است لذا مساحت آن عبارت است از $y = \pi x^۲$ و در نتیجه داریم $\frac{dy}{dt} = ۲\pi x \frac{dx}{dt}$. یعنی در هر لحظه سرعت افزایش مساحت صفحه فلزی بر حسب سانتیمتر مربع برابر است با حاصلضرب $۲\pi x$ در سرعت افزایش شعاع صفحه بر حسب سانتیمتر.با توجه به مفروضات مسئله داریم $x = ۵$ ، $\frac{dx}{dt} = ۰/۰۲۵$.در نتیجه

$$\frac{dy}{dt} = ۲\pi \times ۵ \times ۰/۰۲۵ = ۰/۲۵\pi \quad \text{سانتیمتر مربع در ثانیه}$$

مساله ۱۰.۸.۸. *بالای جاده‌ای که مستقیم و افقی است چراغ برقی به ارتفاع ۳/۶ متری آویزان است. جوانی که قدش ۱/۶۴ متر است و با سرعت ۴۹ متر در دقیقه راه می‌رود، از زیر چراغ می‌گذرد.می‌خواهیم سایه جوان با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟*

حل.



اگر F تصویر چراغ قائم L، x فاصله جوان تا نقطه F و y طول سایه جوان باشد(شکل بالا را ببینید) با توجه به شکل داریم

$$\frac{y}{y+x} = \frac{۱/۶۴}{۳/۶} \quad \text{و یا} \quad y = \frac{۴۱}{۴۹}x$$

اگر از دو طرف این رابطه نسبت به t مشتق بگیریم داریم $\frac{dy}{dt} = \frac{۴۱}{۴۹}\frac{dx}{dt}$.رابطه اخیر مبین این است که طول سایه جوان با سرعتی برابر $\frac{۴۱}{۴۹}$ سرعت جوان یعنی ۴۱ متر در دقیقه زیاد می‌شود.

۹.۸ مسایل

۵۱. دو عدد چنان بیابید که

الف) مجموعشان ۱۰۰ باشد و حاصلضرب آن ها ماکزیمم باشد.

ب) تفاضلشان ۱۰۰ باشد و حاصلضرب آن ها مینیمم باشد.

۵۲. *زارعی می‌خواهد ناحیه‌ای به مساحت ۱/۵ هکتار مربع در یک مزرعه مستطیل شکلی را حصار کشی کرده و سپس آن را با کشیدن حصاری موازی با یکی از اضلاع مستطیل به دو نیم تقسیم نماید.چگونه این کار را انجام دهد تا مخارج حصارکشی مینیمم گردد.*

۵۳. *جعبه‌ای با قاعده مربعی و سقف باز باید دارای حجم ۶۴۰۰۰ سانتیمتر مکعب باشد.ابعاد جعبه را که میزان ماده مصرفی‌اش مینیمم باشد بیابید.*

۵۴. *یک ظرف آب به شکل مکعب مستطیل بدون درب دارای حجم ۱۰ سانتیمتر مکعب است. اگر طول قاعده این ظرف دو برابر عرض آن باشد و ماده‌ای که در مساحت قاعده آن به کار می‌رود هر سانتی‌متر مربع ده هزار تومان هزینه داشته باشد در صورتی‌که هزینه ماده مصرفی در سطح جانبی آن هر سانتی‌متر مربع شش هزار تومان است. هزینه مواد مصرفی ارزان ترین این ظرف ها را بیابید. در صورتی که این ظرف دارای دربی باشد که از همان مواد مصرفی سطوح جانبی است، هزینه مواد مصرفی ارزان ترین این ظرف ها چقدر خواهد بود؟*

۵۵. *نقطه‌ای بر خط* $y = ۲x - ۳$ *بیابید که نزدیکترین نقطه به مبدأ باشد.*

۵۶. *نقطه‌ای بر هذلولی* $y^۲ - x^۲ = ۴$ *بیابید که نزدیکترین نقاط به نقطه* $(۲, ۰)$ *باشند.*

۵۷. *نقطه‌ای بر هذلولی* $xy = ۸$ *بیابید که به نقطه* $(۳, ۰)$ *نزدیکترین باشد.*

۵۸. *نشان دهید کوتاهترین فاصله نقطه* $(x_۱, y_۱)$ *تا خط مستقیم* $ax + by + c = ۰$ *برابر است با* $\frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$.

۵۹. *حجم بزرگترین مقطع مخروط دواری را که می‌توان در کره‌ای به شعاع* r *محاط کرد را بیابید.*

۶۰. *طول اضلاع و مساحت بزرگترین مستطیل محاط در بیضی* $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ *را بیابید.*

۶۱. *مستطیلی با مساحت ماکزیمم را پیدا کنید که در بین دو سهمی* $۳y = ۱۲ - x^۲$ *و* $۶y = x^۲ - ۱۲$ *محاط شده و اضلاعش به موازات محورهای مختصات باشد.*

۶۲. *ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را که قاعده‌اش بر محور* x*ها و دو رأس دیگرش بالای محور* x*ها و بر سهمی* $y + x^۲ = ۸$ *قرار داشته باشد بیابید.*

۶۳. مساحت بزرگترین مستطیلی را که بتواند در یک مثلث قائم الزاویه با ساق هایی به طول ۶ و ۸ سانتیمتر و دو ضلع مستطیل بر این ساق ها قرار داشته باشد بیابید.

۶۴. کوچکترین مساحت ممکن یک مثلث متساوی الساقین را که حول دایره‌ای به شعاع r محیط می‌شود را بیابید.

۶۵. در مثلث ABC نقطه D بر ضلع AB قرار دارد و $CD \perp AB$، $\mid AB \mid = \mid BD \mid = ۴$ و $\mid CD \mid = ۵$ سانتیمتر است. نقطه P بر CD کجا باید انتخاب گردد تا مجموع $\mid PA \mid + \mid PB \mid + \mid PC \mid$ مینیمم شود.

۶۶. استوانه مدور قائمی در مخروطی با ارتفاع h و شعاع قاعده r محاط شده است. بیشترین حجم ممکن چنین استوانه‌ای را بیابید.

۶۷. حاشیه‌های بالائی و پائینی یک آگهی هر یک ۱۲ سانتیمتر و حاشیه‌های کناری آن هر یک ۸ سانتیمتر هستند. اگر مساحت قسمت نوشته شده آگهی ثابت و برابر ۱۴۳۶ سانتیمتر مربع باشد، ابعاد این آگهی که کمترین مساحت را داشته باشد را بیابید.

۶۸. آگهی باید ۳۶۰ سانتیمتر مربع مساحت داشته و دارای ۱/۵ سانتیمتر حاشیه کناری و پائینی و ۳ سانتیمتر حاشیه بالائی باشد. چه ابعادی بیشترین مساحت چاپ را خواهد داشت؟

۶۹. قطعه سیمی به طول ۲۰ متر به دو قسمت بریده شده است. یک قسمت به صورت مربع و دیگری به صورت مثلثی متساوی الاضلاع شکل داده شده‌اند. این سیم چگونه باید بریده شود تا مساحت کل بدست آمده

الف) ماکزیمم،

ب) مینیمم گردد.

تمرین را در حالتی که یک قسمت به صورت مربع و قسمت دیگر به صورت دایره شکل داده شود، حل نمائید.

۷۰. شیئی با وزن w در یک صفحه افقی توسط نیروئی که از طریق طنابی متصل به شی اعمال می‌شود کشیده می‌شود. اگر طناب زاویه‌ای برابر θ با صفحه بسازد آنگاه نیرو برابر $F = \frac{\mu w}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$ است که در آن μ ضریب اصطکاک می‌باشد. نشان دهید که وقتی $\tan\theta = \mu$، F کمینه می‌گردد.

۷۱. قایقی لنگرگاهش را در ساعت ۱۴ ترک کرده و با تندی ۲۰ کیلومتر بر ساعت به سمت جنوب می‌رود. قایق دیگری با تندی ۱۵ کیلومتر بر ساعت به سمت شرق در حرکت است و در ساعت ۱۵ به همان لنگرگاه می‌رسد. زمانی را تعئین نمائید که دو قایق کمترین فاصله را با هم داشته‌اند.

۷۲. اگر مجموع مساحت‌های یک کره و یک مکعب ثابت باشد، نسبت طول ضلع مکعب به قطر کره چقدر است در صورتی که

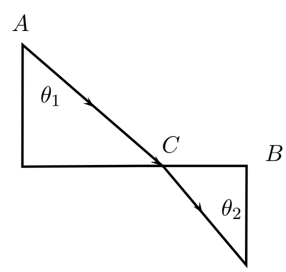
الف) مجموع حجم‌ها مینیمم باشد،

ب) مجموع حجم‌ها ماکزیمم باشد.

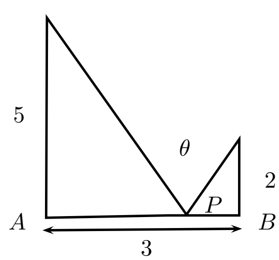
۷۳. معادله خط مار بر نقطه $(۳, ۵)$ را که کمترین مساحت را از ربع اول جدا کند بیابید.

۷۴. نشان دهید که از میان تمام مثلث‌های متساوی الساقین با طول محیط معین، مثلث متساوی الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

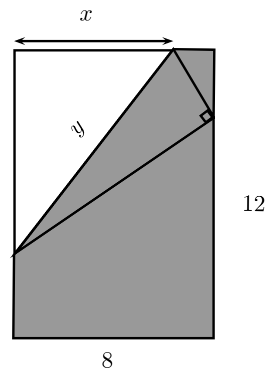
۷۵. فرض کنید که $\nu_۱$ سرعت نور در هوا و $\nu_۲$ سرعت نور در آب باشند. بنابر اصل فرما یک اشعه نور از نقطه A در هوا به نقطه B در آب توسط مسیر ACB که زمان طی شده را مینیمم می‌کند خواهد رفت. نشان دهید $\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲} = \frac{\nu_۱}{\nu_۲}$ که در آن $\theta_۱$ (زاویه وقوع) و $\theta_۲$ (زاویه شکست) در شکل مقابل نشان داده شده‌اند. (این معادله به قانون اسنل معروف است)

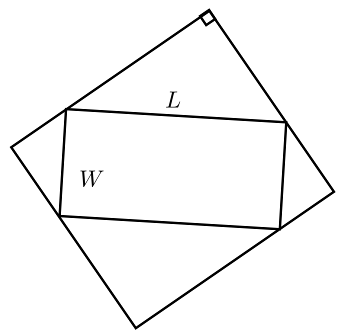


۷۶. نقطه P بر قطعه خط AB کجا باید انتخاب شود تا زاویه θ ماکزیمم گردد.



۷۷. گوشه سمت چپ بالائی قطعه‌ای کاغذ به عرض ۸ و طول ۱۲ سانتیمتر مانند شکل زیر تا لبه سمت راست تا شده است. برای مینیمم کردن طول تاخوردگی چگونه آن را تا می‌کنید؟ به عبارت دیگر، x را چه مقدار انتخاب می‌کنید تا y مینیمم شود.





۷۸. *مساحت بیشینه مستطیلی را که می‌تواند حول مستطیل داده شده‌ای به طول l و به عرض w محیط گردد، بیابید.*

۷۹. *یک تیم والیبال در ورزشگاهی با ظرفیت ۲۷۵۰۰ بازی می‌کند. با ده هزار تومان قیمت هر بلیط متوسط تماشاگران ۱۳۵۰۰ نفر بوده است. وقتی قیمت بلیط به هشت هزار تومان کاهش یافت متوسط تماشاگران به ۱۶۰۰۰ نفر افزایش یافت. الف) با فرض خطی بودن، تابع تقاضا را بیابید، ب) قیمت بلیط چقدر باشد تا درآمد ماکزیمم گردد؟*

۸۰. *استقامت یک تیر به شکل مکعب مستطیل، متناسب است با حاصلضرب عرض آن در مربع ضخامتش. ابعاد قوی‌ترین تیری را که می‌توان از یک تنه درخت استوانه‌ای شکل که شعاع دایره مقطع آن r است بدست آورید.*

۸۱. *دو کشتی A و B روی دو خط OA و OB که زاویه بین آن‌ها ۱۲۰ درجه است از نقطه O دور می‌شوند. در یک لحظه معین $OA = ۸$ و $OB = ۶$ کیلومتر و سرعت کشتی A، ۲۰ کیلومتر بر ساعت و سرعت کشتی B، ۳۰ کیلومتر بر ساعت می‌باشد.فاصله دو کشتی با چه سرعتی زیاد می‌شود؟*

۸۲. *صاحب یک کارخانه تلویزیون سازی به این نتیجه رسیده است که می‌تواند هفته‌ای x دستگاه تلویزیون به قیمت هر دستگاه p هزار تومان با شرط $۵x = ۳۷۵ - ۳p$ بفروشد. بهای تولید*

$\frac{x^۲}{۵} + ۱۵x + ۵۰۰$ هزار تومان است. نشان دهید که حداکثر سود وقتی حاصل می‌شود که تولید هفتگی در حدود ۳۰ دستگاه باشد. نشان دهید در صورتی‌که رابطه x و p به صورت $x = ۱۰۰ - ۲۰\sqrt{\frac{p}{۵}}$ باشد صاحب کارخانه برای بدست آوردن حداکثر سود تنها باید هفته‌ای حدود ۲۵ دستگاه بسازد.

۸۳. در صورتی‌که هزینه تولید x دستگاه از یک کالا در هفته به صورت $ax^۲ + bx + c$ هزار تومان و بهای فروش هر دستگاه از این کالا p هزار تومان و رابطه موجود بین x و p به صورت $p = \beta - \alpha x^۲$ باشد، نشان دهید که حداکثر سود وقتی حاصل می‌شود که رابطه زیر برقرار باشد

$$x = \frac{۱}{۳\alpha}(\sqrt{\alpha^۲ + ۳\alpha(\beta - b)} - \alpha)$$

۸۴. در صورتی‌که در تمرین ۳۲ به هر دستگاه t هزار تومان مالیات تعلق بگیرد و سازنده این مبلغ را به بهای تولید بیفزاید بهای فروش و تعداد دستگاه‌های تولیدی هفتگی را دوباره محاسبه نمائید.

۸۵. فرض کنید ظرفیت تولید روزانه یک کارخانه ریخته‌گری x تن فولاد عادی و y تن فولاد عالی با رابطه $y = \frac{۴۰ - ۵x}{۱۰ - x}$ است. بهای تجاری فولاد عادی نصف بهای تجاری فولاد عالی است. نشان دهید اگر کارخانه بخواهد حداکثر درآمد را داشته باشد باید به طور متوسط روزانه در حدود ۵/۵ تن فولاد عادی تولید کند.

۸۶. مقاومت الواری که مقطع آن مستطیل است به نسبت حاصلضرب عرض در مربع ضخامت مقطع آن تغییر می‌کند. ابعاد مقاومترین الواری را پیدا کنید که پس از بریدن اطراف تیری که مقطع قائم آن بیضی به نیم قطرهای a و b است، بدست آورید.

۸۷. معادله مسیر گلوله‌ای $y = mx - \frac{(m+۱)x^۲}{۸۰۰}$ است. نقطه پرتاب مبدأ مختصات و تانژانت زاویه پرتاب m است.

الف) برای چه مقادیری از m برد گلوله در صفحه افقی مار بر مبدأ مختصات ماکزیمم است؟

ب) برای چه مقادیری از m ارتفاع نقطه برخورد گلوله با دیواری عمودی که در ۱۰۰ متری نقطه پرتاب قرار دارد، ماکزیمم است؟

۸۸. برای به ساحل کشیدن یک کرجی عرشه آن ۳۶۰ سانتیمتر پائین تر از سطح سکوی ساحل قرار دارد، از طنابی استفاده می‌شود که یک سر آن به حلقه‌ای که در ساحل متصل نصب است و سر دیگر آن به چرخی که به عرشه کرجی وصل است نصب می‌باشد. وقتی چرخ می‌چرخد، در هر دقیقه ۲۴ سانتیمتر از طناب به دور آن می‌پیچد. می‌خواهیم بدانیم که وقتی کرجی به فاصله ۴۸ متری قرار دارد با چه سرعتی به ساحل نزدیک می‌شود؟

۸۹. طول هریک از اضلاع مثلث متساوی الاضلاعی a سانتیمتر است به هریک از آن‌ها در هر ساعت k سانتیمتر افزوده می‌شود. مساحت این مثلث با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟

۹۰. ابعاد مستطیلی در لحظه معینی a و b می‌باشند و به ترتیب با سرعت‌های m و n زیاد می‌شوند. نشان دهید مساحت این مستطیل با سرعت $an + bm$ افزایش می‌یابد.

۹۱. به دو سر استوانه‌ای که شعاع آن ۱۰ و ارتفاع آن ۲۰ سانتیمتر است دو نیمکره افزوده شده است. حجم این جسم ثابت می‌ماند در حالی که شعاع آن در هر دقیقه ۰/۵ سانتیمتر افزایش می‌یابد. سرعت تغییر ارتفاع در نخستین لحظه چقدر است؟

۹۲. اگر $y = ۴x - x^۳$ و x به طور یکنواخت با سرعت $\frac{۱}{۴}$ واحد در ثانیه زیاد شود، شیب منحنی نمایش تابع y برای $x = ۲$ با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

۹۳. یک میله ۳۰ سانتیمتری در صفحه xy طوری حرکت می‌کند که همواره A و B یعنی دو انتهای آن، به ترتیب روی محورهای متعامد ox و oy قرار دارند. اگر A به فاصله ۲۴ سانتیمتر از مبدأ مختصات باشد و با سرعت ۶ سانتیمتر در ثانیه از آن دور شود،

الف) انتهای B با چه سرعتی به مبدأ مختصات نزدیک می‌شود؟

ب) مساحت مثلث مربوط به محورهای مختصات و پاره‌خط AB، با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

پ) اگر P وسط AB باشد، سرعت تغییر oP چیست؟

۹۴. راه آهنی جاده شوسه‌ای را به زاویه ۶۰ درجه قطع می‌کند. لوکوموتیوی در فاصله ۱۵۰ متری محل تقاطع راه آهن و جاده شوسه قرار دارد و با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت از آن دور می‌شود. اتومبیلی در فاصله ۱۵۰ متری محل تقاطع قرار دارد و با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت به آن نزدیک می‌شود. فاصله مستقیم بین لوکوموتیو و اتومبیل با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

۹۵. مقطع قائم یک آبشخور افقی که طول آن ۳ متر است به شکل مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است. اگر در هر دقیقه ۴ متر مکعب آب وارد آن شود، وقتی عمق آن ۶۰ سانتیمتر است سطح آب با چه سرعتی بالا می‌آید؟

۹۶. در تمرین قبل اگر عمق آب موجود در آبشخور یک متر باشد، آب با چه سرعتی وارد آن شود تا سطح آب در هر دقیقه ۵ سانتیمتر بالا بیاید؟

۹۷. A و B به ترتیب نقاط تقاطع خط مماس به شاخه مثبت هذلولی $xy = ۴$ با محورهای ox و oy است. اگر طول نقطه A در هر ثانیه ۳ واحد زیاد شود و مبدأ حرکت نقطه o باشد سرعت نقطه B در پایان ثانیه پنجم چقدر است؟

۹۸. هزینه ساختن ساختمانی برای طبقه اول ۵۰۰۰۰۰۰۰ تومان، برای طبقه دوم ۵۲۵۰۰۰۰۰ تومان، برای طبقه سوم ۵۵۰۰۰۰۰۰ تومان و به همین ترتیب برای هر طبقه بالاتر ۲۵۰۰۰۰۰ تومان بیشتر از طبقه زیر آن است. هزینه‌های دیگر ساختمان مانند زمین، نقشه و غیره جمعا ۳۵۰۰۰۰۰۰۰ تومان و درآمد خالص سالانه هر طبقه ۵۰۰۰۰۰ تومان است. ساختمان چند طبقه بنا شود تا نرخ بهره حداکثر شود.

۹۹. *شعاع قاعده ظرفی که به شکل استوانه قائم است ۲۵ سانتیمتر است. در کف این ظرف سوراخی به قطر ۵ سانتیمتر موجود است. سرعت خروجی آب با فرمول $V^۲ = ۲gh$ است که در آن h ارتفاع آب در ظرف و g شتاب جاذبه می‌باشند. سرعت خروجی آب با چه سرعتی تغییر می‌کند؟*

۱۰۰. *در وسط کوچه‌ای چراغی در ارتفاع ۳ متری آویزان است فاصله چراغ از دیواری که عمود بر امتداد کوچه است ۶ متر است. شخصی با طول قد ۱۷۰ سانتیمتر، درست در وسط کوچه با سرعت ۶۰ سانتیمتر در ثانیه به دیوار مقابل نزدیک می‌شود. وقتی آن شخص در فاصله ۱۲۰ سانتیمتری دیوار است، سرعت سایه سرش روی دیوار چقدر است؟*

۱۰۱. *در یک بالن کروی، یک گاز کامل با سرعت ۱۰ متر مکعب بر دقیقه دمیده می‌شود. با فرض ثابت ماندن فشار گاز، سرعت افزایش شعاع بالن را در لحظه‌ای که شعاع آن ۳ متر است را پیدا کنید.*

فصل ۹

دنباله

دنباله‌ها دسته خاصی از توابع هستند که حوزه تعریف آنها اعداد طبیعی است. بنابراین یك دنباله در یك مجموعه غیر خالی مانند X، یعنی برچسب زدن یا شماره گذاری اعضاء X توسط اعداد طبیعی می‌باشد. چون در ریاضیات عمومی معمولاً با اعداد حقیقی سروکار داریم پس دنباله‌ها توابع حقیقی مقداری هستند که حوزه تعریف آنها اعداد طبیعی باشند بنابراین یك دنباله کاملاً مشخص خواهد بود وقتی که ضابطه تعریف آن معین باشد. دنباله‌ها به علت نقشی که در تعیین خواص توابع مانند پیوستگی، انتگرال پذیری و در تعریف سلسله‌ها و همچنین تعین باز و بسته بودن مجموعه‌ها دارند امروزه از اهمیت زیادی برخوردار هستند.

۱.۹ دنباله و خواص جبری آن

تعریف ۱.۱.۹. *همچنانکه در بالا اشاره شد یك دنباله عبارت است از تابعی که حوزه تعریف آن اعداد طبیعی باشد. اگر X یك مجموعه غیر خالی باشد یك دنباله در X یعنی دنباله‌ای که حوزه مقادیرش در X باشد. در ریاضیات عمومی معمولاً با دنباله‌هایی سروکار داریم که در $\mathbb{R}$ باشند. یا به عبارت دیگر با دنباله‌های حقیقی سروکار داریم. بنابراین یك دنباله مشخص خواهد بود هرگاه ضابطه تعریف آن مشخص باشد. اگر f یك دنباله باشد مقدار آنرا در n یعنی $f(n)$ را با x_n یا y_n یا a_n و... نمایش می‌دهیم. که هر یك از آنها نمایانگر جمله $n-$ ام دنباله می‌باشد. بنابراین اگر x یك دنباله باشد یعنی $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ آنگاه هر یك از عبارات $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ یا $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یا $(x_۱, x_۲, ..., x_n, ...)$، و یا به طور ساده x_n نمایانگر این دنباله می‌باشند.*

به عنوان مثال $x_n = ۱$ دنباله ثابت «۱» است، همچنین $b_n = \frac{۱}{n}$، $a_n = (-۱)^n$ و $c_n = \sqrt{n}$ همگی دنباله هستند. قابل ذکر است که مواردی نیز وجود دارند که حوزه تعریف یك دنباله زیر مجموعه‌ای

از اعداد طبیعی و یا زیر مجموعه‌ای اعداد صحیح است که همگی آنها از عدد صحیح مفروض m ناکمتر هستند در این صورت چنین دنباله‌هایی را با نماد $\{n_n\}_{n=m}^{\infty}$ و یا $\{x_n\}_{n\geq m}$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۹. *دنباله x_n را به b همگرا (متقارب) گوئیم و آنرا با نمادهای $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ یا $x_n \overset{n}{\to} b$ و یا $x_n \to b$ نمایش می‌دهیم هرگاه برای هر $\epsilon > ۰$ عدد طبیعی n موجود باشد که برای هر عدد طبیعی n اگر $n > N$ آنگاه $|x_n - b| < \epsilon$ به عبارت دیگر $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ هرگاه برای هر $\epsilon > ۰$ تمام اعضاء دنباله غیر از احتمالاً تعداد متناهی همگی در همسایگی $(b-\epsilon, b+\epsilon)$ از b باشند و یا می‌توان گفت که برای هر نوار به قطر ۲ϵ در اطراف b تمام اعضاء دنباله غیر از تعداد متناهی در این نوار قرار می‌گیرند.*

توجه نمائید که می‌توان این طور تصور کرد که هرگاه حوزه تعریف تابعی حقیقی را به $\mathbb{N}$ تحدید نمائیم چون در اعداد طبیعی نزدیك شدن (میل کردن) به یك نقطه بی معنی است پس در این حالت فقط حد در $+\infty$ با معنی است که همواره طول همسایگی آن نامتناهی است و در واقع مجموعه $\{n \in \mathbb{N}, n > N\}$ $(N \in \mathbb{N})$ یك همسایگی از $+\infty$ در اعداد طبیعی است. بنابراین می‌توان گفت که همگرا بودن یك دنباله مانند x_n به عدد b بدین‌معنی است که حد تابع $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ برابر b است هرگاه متغیر یعنی n در اعداد طبیعی به $+\infty$ میل کرده باشد. بنابراین می‌توان گفت که تمام خواص حد برای دنباله‌های همگرا برقرار است که از جمله می‌توان موارد زیر را نام برد.

قضیه ۳.۱.۹.

الف) حد هر دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است.

ب) اگر دنباله‌ای همگرا باشد آنگاه آن دنباله در همسایگی از $+\infty$ کراندار خواهد بود که نشان خواهیم داد که در این صورت چنین دنباله‌ای کراندار است.

ج) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ۰$ و دنباله y_n کراندار باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ۰$.

د) اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b \neq ۰$ آنگاه اعضاء دنباله از مرتبه‌ای به بعد با b هم علامت خواهند بود.

ه) اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ آنگاه.

(۱) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha b + \beta a$ *(β و α اعداد حقیقی دلخواه هستند).*

(۲) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = a.b$.

(۳) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{b}{a}$ *به شرط آنکه* $a \neq ۰$.

(۴) $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = |b|$.

(۵) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = ۰$ *اگر و فقط اگر* $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = ۰$.

(ر) اگر از مرتبه‌ای به بعد $x_n \leq y_n$ *و* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ *و* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ *موجود باشند آنگاه*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \leq \lim_{n\to+\infty} y_n$$

یعنی دنباله‌های همگرا ترتیب جزئی را حفظ می‌کنند.

(ز) اگر از مرتبه‌ای به بعد داشته باشیم $x_n \leq a_n \leq y_n$ *و* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$ *آنگاه* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = b$ *(قضیه فشار).*

(ژ) اگر از مرتبه‌ای به بعد $x_n \leq y_n$ *باشد و* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ *آنگاه* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

اثبات. اثبات تمام این قضایا کاملاً مانند موارد مشابه در حد بوده و در نتیجه از اثبات مجدد آنها صرفنظر نموده و اثبات آنها را به خوانندگان توصیه می‌نمائیم. □

مثال ۴.۱.۹. *نشان دهید که* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{۱}{n} = ۰$

حل. فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد در این صورت بنابه اصل ارشمیدسی اعداد حقیقی، عدد طبیعی N موجود است که $\frac{۱}{n} < \epsilon$ حال اگر عدد طبیعی دلخواه $n > N$ آنگاه داریم $\epsilon > \frac{۱}{N} > \frac{۱}{n} > ۰$ در نتیجه $|\frac{۱}{n} - ۰| = \frac{۱}{n} < \epsilon$ و بدین‌ترتیب حل مثال کامل شده است.

اکنون ذکر این نکته ضروری است که اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = b$.

مثال ۵.۱.۹. *نشان دهید که دنباله* $x_n = \sqrt{n+۱} - \sqrt{n}$ *همگرا است.*

حل. داریم

$$\begin{aligned} ۰ \leq x_n &= \sqrt{n+۱} - \sqrt{n} \\ &= \frac{[\sqrt{n+۱} - \sqrt{n}][\sqrt{n+۱} + \sqrt{n}]}{\sqrt{n+۱} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{n+۱} + \sqrt{n}} \\ &< \frac{۱}{۲\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

اگر نشان دهیم $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{۲\sqrt{n}} = ۰$ بنابه قضیه فشار۳.۱.۹ (ز) حل مثال کامل شده است. برای این منظور فرض کنید که $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد در این صورت بنابه اصل ارشمیدسی اعداد حقیقی عدد طبیعی

مانند N موجود است که $\frac{۱}{N} < ۴\epsilon^۲$ و حال برای هر عدد طبیعی $n > N$ داریم $\frac{۱}{n} < ۴\epsilon^۲$ و چون تابع $\sqrt{x}$ اکیدا صعودی است پس $\sqrt{\frac{۱}{n}} < ۲\epsilon$ $\frac{۱}{\sqrt{n}} =$ > ۰ و یا $\epsilon > \frac{۱}{۲\sqrt{n}} > ۰$ و بدین ترتیب حل مثال کامل می‌شود.

مثال ۶.۱.۹. *فرض کنید که عدد حقیقی r چنان باشد که $|r| < ۱$ در این صورت* $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = ۰$.

حل. فرض کنید $|r| < ۱$ در این صورت $\frac{۱}{|r|} > ۱$ بنابراین عدد مثبتی مانند h موجود است که $\frac{۱}{r} = ۱ + h$ در نتیجه $\frac{۱}{|r|^n} = (۱ + h)^n$ که با توجه به اینکه $h > ۰$ و با استفاده از دو جمله‌ای بینم - خیام داریم $(۱ + h)^n > ۱ + nh$ بنابراین

$$۰ < |r|^n = \frac{۱}{(۱ + h)^n} < \frac{۱}{۱ + nh}$$

اکنون چون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{۱+nh} = ۰$ پس بنابه قضیه فشار یعنی قضیه ۳.۱.۹ (ز) داریم $\lim\limits_{n\to\infty} |r^n| = ۰$ در نتیجه بنابه قضیه ۳.۱.۹(۵) $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = ۰$ و بدین ترتیب حل مثال کامل شده است.

مثال ۷.۱.۹. *نشان دهید که برای هر عدد طبیعی* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$،

حل. فرض کنید n عدد طبیعی دلخواهی باشد در این صورت داریم $\sqrt[n]{n} > ۱$ در نظر می‌گیریم $x_n = n^{\frac{۱}{n}} - ۱ > ۰$ کافی است نشان دهیم که $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = ۰$ برای‌این منظور از اینکه $x_n = n^{\frac{۱}{n}} - ۱$ داریم

$$n^{\frac{۱}{n}} = ۱ + x_n \Longleftrightarrow n = (۱ + x_n)^n$$

حال با توجه به اینکه $x_n > ۰$ و با توجه دو جمله‌ای بینم - خیام داریم $(۱ + x_n)^n > \frac{n(n-۱)}{۲} x_n^۲$ پس

$$n > \frac{n(n-۱)}{۲} x_n^۲ \Longleftrightarrow \frac{۲}{n-۱} > x_n^۲ > ۰ \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{n-۱}} > x_n > ۰$$

و چون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{n-۱}} = ۰$ (حل مثال ۴.۱.۹ را ببینید) پس بنابه قضیه فشار ۳.۱.۹(ز) داریم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ۰$ و بدین‌ترتیب حل مثال کامل شده است. به طریق کاملاً مشابه می‌توان نشان داد که برای هر عدد حقیقی $a > ۰$ ، $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = ۱$.

تذکر ۸.۱.۹. *اکنون ذکر این نکته ضروری است که اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = b$ آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = b$ ولی عکس آن برقرار نیست چراکه مثلاً برای تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه*

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{N} \\ x & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

یا $f(x)=\sin\pi x$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (وقتی‌که $x\to+\infty$ در اعداد حقیقی میل کند) وجود ندارد درحالی‌که اگر حوزه تعریف f به اعداد طبیعی تحدید شود در این صورت تابع دنباله ثابت ۰ تبدیل می‌شود که به صفر همگرا است.

باید توجه نمود که چون حوزه تعریف دنباله‌ها اعداد طبیعی هستند و اعداد طبیعی نیز زیر مجموعه خاصی از اعداد حقیقی است بدین جهت در دنباله‌ها خواصی قابل تعریف هستند که در حالت کلی برای هر تابع حقیقی دلخواهی قابل تعریف نیستند و یا بعضی از قضایا در مورد دنباله‌ها به صورت قوی تری برقرارند که از جمله قضیه زیر می‌باشد که قبلاً نیز به آن اشاره گردید.

قضیه ۹.۱.۹. *هر دنباله همگرا کراندار است ولی عکس آن برقرار نیست.*

اثبات. فرض کنید که $\lim_{n\to+\infty} x_n=b$ در این صورت برای $\epsilon=1$ بنابه تعریف، عدد طبیعی N موجوداست که برای هر عدد طبیعی دلخواه $n>N$ داریم $|x_n-b|<1$ در نتیجه با استفاده از نامساوی مثلث داریم $|x_n|-|b|\leq|x_n-b|<1$ و یا $|x_n|<1+|b|$ هرگاه $n>N$. حال در نظرمی‌گیریم $M=\max\{x_1,x_2,...,x_n,1+|b|\}$ در این صورت برای هر عدد طبیعی n $|x_n|\leq M$. اکنون دنباله متناوب $x_n=(-1)^n$ را در نظر می‌گیریم که دنباله‌ای کراندار است زیرا که برد آنها مجموعه دو عضوی $\{-1,1\}$ است فرض کنید $\lim_{n\to+\infty} x_n=b$ (فرض خلف) در این صورت برای $\epsilon=\frac{1}{4}$ بنابه تعریف، عدد طبیعی N موجود است که برای هر عدد طبیعی $n>N$ داریم

$$|x_n-b|<\frac{1}{4}.$$

فرض کنید n_2 ، n_1 به ترتیب اعداد طبیعی فرد و زوجی باشند که از N بزرگترند در این صورت با توجه به تعریف دنباله x_n داریم $x_{n_1}=-1$ و $x_{n_2}=1$ پس داریم

$$|1-b|<\frac{1}{4},\quad |-1-b|=|1+b|<\frac{1}{4}.$$

و با جمع کردن دو نامساوی و استفاده از نامساوی مثلث داریم

$$2\leq|1-b|+|1+b|<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

که یك تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است یعنی دنباله مورد بحث همگرا نیست. $\square$

۲.۹ دنباله‌های یکنوا و همگرائی آنها

تعریف ۱.۲.۹. *دنباله x_n را صعودی گوئیم هرگاه برای هر عدد طبیعی n $x_n\leq x_{n+1}$ و آنرا نزولی گوئیم هرگاه $x_n\geq x_{n+1}$ برای تمام اعداد طبیعی n باشد. دنباله x_n را اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی گوئیم هرگاه به ترتیب نامساوی‌ها در بالا تبدیل به نامساوی اکید گردند.*

دنباله x_n را یکنوا گوئیم هرگاه صعودی یا نزولی باشد و آنرا اکیدا یکنوا گوئیم هرگاه اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد. توجه نمائید که دنباله‌های ثابت یکنوا هستند اگر چه اکیدا یکنوا نمی‌باشند. و همچنین توجه نمائید که اگر دنباله‌ای صعودی باشد آنگاه برای هر دو عدد طبیعی $n < m$ داریم$x_n \leq x_m$ یعنی تعاریف صعودی و نزولی بودن دنباله‌ها بر تعاریف صعودی و نزولی بودن توابع منطبق است. اکنون به بیان و اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که در توابع معمولی معادلی ندارد و خاص دنباله‌ها است

قضیه ۲.۲.۹. *هر دنباله یکنوا و کراندار همگرا است.*

اثبات. فرض کنید دنباله x_n صعودی و از بالا کراندار باشد در این صورت $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ زیر مجموعه‌ای غیر خالی و از بالا کراندار از اعداد حقیقی است پس بنابه اصل تمامیت، سوپرمم آن موجود است فرض کنید $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ نشان می‌دهیم $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \beta$. برای این منظور فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد. در نتیجه بنابه خاصیت مشخصه سوپرمم عدد طبیعی N موجود است که $\beta - \epsilon < x_N$ ، حال چون دنباله صعودی است پس برای هر عدد طبیعی $n > N$ داریم $x_N < x_n$ در نتیجه $\beta - \epsilon < x_n < \beta + \epsilon$ و یا $|x_n - \beta| < \epsilon$ ، یعنی $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \beta$ به همین ترتیب می‌توان نشان داد که اگر دنباله x_n نزولی و از پایین کراندار باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

که بدین‌ترتیب اثبات قضیه کامل شده است. □

توجه نمائید که در قضیه فوق در واقع ما نشان داده‌ایم که اگر دنباله x_n صعودی و از بالا کراندار باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ و اگر دنباله x_n نزولی و از پایین کراندار باشد آنگاه

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

مثال ۳.۲.۹. *نشان دهید که دنباله* $x_n = \left[۱ + \frac{۱}{n}\right]^{n+۱}$ *همگرا است.*

حل. بنابه قضیه فوق چون دنباله مورد بحث از پایین کراندار است پس کافی است نشان دهیم که دنباله‌ای نزولی است یعنی برای هر عدد طبیعی n ، $x_n \geq x_{n+۱}$ و یا بطور معادل $\frac{x_n}{x_{n+۱}} \geq ۱$ (چون x_n مثبت است) برای این منظور داریم

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n+۱}} &= \frac{\left[۱ + \frac{۱}{n}\right]^{n+۱}}{\left[۱ + \frac{۱}{n+۱}\right]^{n+۲}} \\
&= \frac{\left[۱ + \frac{۱}{n}\right]^{n+۱}}{\left[۱ + \frac{۱}{n+۱}\right]^{n+۱}} . \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{n+۱}} \\
&= \left[\frac{۱ + \frac{۱}{n}}{۱ + \frac{۱}{n+۱}}\right]^{n+۱} . \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{n+۱}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\frac{n+۱}{n}}{\frac{n+۲}{n+۱}}\right]^{n+۱} . \frac{۱}{۱+\frac{۱}{n+۱}} \\ &= \left[\frac{(n+۱)^۲}{n^۲+۲n}\right]^{n+۱} . \frac{۱}{۱+\frac{۱}{n+۱}} \\ &= \left[۱+\frac{۱}{n^۲+۲n}\right]^{n+۱} . \frac{۱}{۱+\frac{۱}{n+۱}} . \end{aligned}$$

حال با استفاده از دستور دو جمله‌ای بینم - خیام و با توجه به این‌که $\frac{۱}{n^۲+۲n}$ مثبت است داریم

$$\left[۱+\frac{۱}{n^۲+۲n}\right]^{n+۱} > ۱+\frac{n+۱}{n^۲+۲n} > ۱+\frac{n+۱}{(n+۱)^۲} = ۱+\frac{۱}{n+۱}.$$

بنابراین $۱ < \left[۱+\frac{۱}{n^۲+۲n}\right]^{n+۱} . \frac{۱}{۱+\frac{۱}{n+۱}}$ و در نتیجه $۱ < \frac{x_n}{x_{n+۱}}$ پس بنابه قضیه قبل ۲.۲.۹ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left[۱+\frac{۱}{n}\right]^{n+۱} = \inf\left\{\left[۱+\frac{۱}{n}\right]^{n+۱} : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

که چون برای هر عدد طبیعی $۲ < \left[۱+\frac{۱}{n}\right]^{n+۱}$ پس

$$\lim_{n\to\infty}\left[۱+\frac{۱}{n}\right]^{n+۱} \geq ۲.$$

مثال ۴.۲.۹. *نشان دهید که* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[۱+\frac{۱}{n}\right]^n$ *موجود است.*

حل. نشان می‌دهیم $\lim\limits_{n\to\infty}\left[۱+\frac{۱}{n}\right]^{n+۱} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[۱+\frac{۱}{n}\right]^n$ برای این منظور چون $\lim\limits_{n\to\infty}\left[۱+\frac{۱}{n}\right] = ۱$ و $\left[۱+\frac{۱}{n}\right]^n = \frac{\left[۱+\frac{۱}{n}\right]^{n+۱}}{۱+\frac{۱}{n}}$ پس با توجه به قضیه ۳.۱.۹ (۳) داریم

$$\lim_{n\to+\infty}\left[۱+\frac{۱}{n}\right]^n = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[۱+\frac{۱}{n}\right]^{n+۱}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[۱+\frac{۱}{n}\right]} = \lim_{n\to+\infty}\left[۱+\frac{۱}{n}\right]^{n+۱}.$$

توجه نمائید که مستقیما نیز می‌توان نشان داد که دنباله $\left[۱+\frac{۱}{n}\right]^n$ دنباله‌ای صعودی و از بالا کراندار است در نتیجه همگرا خواهد بود و نیز می‌توان نشان داد که حد این دنباله عددی گنگ است که بین ۲ و ۳ قرار دارد که به عدد نپر معروف است و آنرا با نماد e نمایش می‌دهند بنابراین تعریف می‌کنیم

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}.$$

۳.۹ دنباله‌های کشی

از مفاهیم دیگری که برای دنباله معنی پیدا می‌کند و برای سایر توابع به طور عام معنی ندارد مفهوم کشی بودن یك دنباله است.

تعریف ۱.۳.۹. *دنباله x_n را کشی می‌گوئیم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ ، عدد طبیعی N موجود باشد که برای هر دو عددی طبیعی دلخواه n و m اگر $m, n \geq N$ آنگاه $|x_n - x_m| < \epsilon$، به عبارت دیگر یك دنباله کشی است هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، از مرتبه‌ای به بعد اعضاء دنباله به اندازه حداقل ϵ به هم نزدیك شده باشند و یا به طور معادل $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}|x_n - x_m| = 0$ به سادگی می‌توان دید که کشی بودن دنباله x_n معادل است با اینکه برای هر $\epsilon > 0$ عدد طبیعی N موجود باشد که برای هر دو عدد طبیعی n و k که $n > N$ داشته باشیم $|x_{n+k} - x_n| < \epsilon$.*

قضیه ۲.۳.۹. *هر دنباله کشی کراندار است ولی عکس آن برقرار نیست.*

اثبات. فرض کنید دنباله x_n کشی باشد در این صورت برای $\epsilon = 1$ عدد طبیعی N موجود است که برای هر $n \geq N$ داریم $|x_n - x_N| < 1$ و یا با توجه به نامساوی مثلث $|x_n| < 1 + |x_N|$ حال در نظرمی‌گیریم

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\}.$$

در این صورت برای هر عدد طبیعی n، داریم $|x_n| \leq M$، اکنون دنباله متناوب $x_n = (-1)^n$ را در نظر می‌گیریم در این صورت برای $\epsilon = \frac{1}{2}$ و برای هر عدد طبیعی N می‌توان اعداد طبیعی n_1 و n_2 بزرگتر از N را که به ترتیب فرد و زوج باشند در نظر گرفت. دراین صورت بایستی داشته باشیم $|x_{n_1} - x_{n_2}| < \frac{1}{2}$ یا $2 = |-1 - 1| < \frac{1}{2}$ که تناقض است پس عکس قضیه فوق برقرار نیست. □

قضیه ۳.۳.۹. *هر دنباله همگرا کشی است.*

اثبات. فرض کنید $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$ را در این صورت برای $\epsilon > 0$ بنابه تعریف، عدد طبیعی N موجود است که برای هر عدد طبیعی دلخواه $n > N$ داریم $|x_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ فرض کنید که اعداد طبیعی $n, m > N$ دلخواه باشند در این صورت داریم $|x_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ و $|x_m - b| < \frac{\epsilon}{2}$ با جمع کردن این دو نامساوی و استفاده از نامساوی مثلث داریم

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - b| + |x_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

و بدین‌ترتیب برهان کامل شده است. □

مثال ۴.۳.۹. *نشان دهید که دنباله $x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ کشی نیست و در نتیجه بنا به ۳.۳.۹ همگرا نخواهد بود.*

حل. بنابه تعریف برای اینکه نشان دهیم دنباله‌ای کشی نیست بایستی نشان دهیم که $\epsilon > ۰$ موجود است که برای هر عدد طبیعی N، اعداد طبیعی $n > N$ و $m > N$ موجودند که $|x_n - x_m| \geq \epsilon$.
در نظر می‌گیریم $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ و برای هر عدد طبیعی دلخواه N، در نظر می‌گیریم $n = N + ۱$ و $m = ۲(N + ۱)$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= x_m - x_n \\
&= ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{N} + \frac{۱}{N+۱} + \frac{۱}{N+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲N+۲} \\
&\qquad - \left(۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{N+۱}\right) \\
&= \frac{۱}{N+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲(N+۱)} \\
&> (N+۱)\frac{۱}{۲(N+۱)} = \frac{۱}{۲}
\end{aligned}$$

پس دنباله مورد بحث کشی نیست.

توجه نمائید که عکس قضیه فوق قضیه ۳.۳.۹ نیز برای اعداد حقیقی برقرار است. یعنی در اعداد حقیقی مفاهیم کشی بودن و همگرا بودن برای دنباله‌ها معادل است ولی باید توجه داشت که بررسی کشی بودن ساده‌تر از بررسی همگرا بودن است ولی برای اثبات اینکه هر دنباله کشی، همگرا است احتیاج به مقدمات بیشتری است که برای پرهیز از طولانی شدن کلام آن را به عنوان یك قضیه بدون اثبات می‌آوریم و خوانندگان علاقمند می‌توانند اثبات آنرا در هر کتاب آنالیز ببینند.

قضیه ۵.۳.۹. *هر دنباله کشی در اعداد حقیقی همگرا است.*

مثال ۶.۳.۹. *نشان دهید که دنباله* $x_n = ۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{(-۱)^{n-۱}}{(n-۱)!}$ *همگرا است.*

حل. بنابه قضیه فوق، کافی است نشان دهیم که این دنباله کشی است. برای این منظور فرض کنید که اعداد طبیعی $m > n$ دلخواه باشند در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
&|x_m - x_n| \\
&= \left|۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{(-۱)^{n-۱}}{(n-۱)!} + \frac{(-۱)^{n}}{n!} + \cdots + \frac{(-۱)^{m-۱}}{(m-۱)!}\right. \\
&\qquad \left. - \left(۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{(-۱)^{n-۱}}{(n-۱)!}\right)\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\right| \\
&= \frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\cdots+\frac{1}{(m-1)!} \\
&= \frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(m-1)}\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-n-1}}\right) \\
&< \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{n\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

حال اگر $\epsilon > 0$ دلخواه باشد بنابه اصل ارشمیدسی اعداد حقیقی، عدد طبیعی N موجود است که $\frac{2}{N} < \epsilon$ در این صورت برای هر دو عدد طبیعی دلخواه $m \geq n \geq N$ بنابه آنچه که در بالا دیدیم داریم

$$|x_m - x_n| < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < \epsilon$$

و بدین‌ترتیب حل مثال کامل شده است.

مثال ۷.۳.۹. *فرض کنید $p \geq 2$ عددی طبیعی باشد. نشان دهید که دنباله $x_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p}$ دنباله‌ای همگرا است.*

حل. بنابه قضیه ۵.۳.۹ کافی است نشان دهیم که این دنباله کشی است. برای این منظور فرض کنید $m \geq n$ اعداد طبیعی دلخواهی باشند در این صورت

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= 1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \ldots + \frac{1}{m^p} - \left(1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)^p} + \ldots + \frac{1}{m^p} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^p}.
\end{aligned}$$

چون $p \geq 2$ پس

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^p} &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k-1)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right]=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$$

حال اگر $\epsilon > 0$ دلخواه باشد آنگاه بنابه اصل ارشمیدسی اعداد حقیقی عدد طبیعی N موجود است که $\frac{1}{N} < \epsilon$ در این صورت برای هر دو عدد طبیعی دلخواه $m \geq n > N$ داریم

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

۴.۹ دنباله و پیوستگی توابع

اکنون به بیان این خاصیت می‌پردازیم که به کمک دنباله‌ها نیز می‌توان پیوستگی توابع را تعیین نمود.

قضیه ۱.۴.۹. *فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آنکه f در نقطه $x_0 \in D_f$ پیوسته باشد آن است که برای هر دنباله x_n که $x_n \to x_0$ داشته باشیم دنباله* $f(x_n) \to f(x_0)$.

اثبات. نخست فرض کنید که f در نقطه x_0 پیوسته باشد و $x_n \to x_0$ بایستی نشان دهیم که $f(x_n) \to f(x_0)$. برای این منظور فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد از اینکه f در نقطه x_0 پیوسته است پس $\delta > 0$ موجود است که برای هر $x \in D_f$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \qquad (۱.۹)$$

حال از اینکه $x_n \to x_0$ برای $\epsilon' = \delta > 0$ عدد طبیعی N موجود است که

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_0| < \delta \qquad (۲.۹)$$

حال با توجه به ۲.۹ و ۱.۹ داریم اگر $n > N$ آنگاه $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ یعنی $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.
بالعکس: فرض کنید که برای هر دنباله x_n اگر $x_n \longrightarrow x_0$ آنگاه $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ ، امّا f در نقطه x_0 پیوسته نباشد (فرض خلف) در نتیجه بنابه تعریف، عدد $\epsilon > 0$ موجود است که برای هر $\delta > 0$ عدد $x_\delta \in D_f$ موجود است که $|x_\delta - x_0| < \delta$ اما $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon$. حال برای هر $n \in \mathbb{N}$، در نظر می‌گیریم $\delta = \frac{1}{n}$ پس $x_n \in D_f$ موجود است که $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ امّا $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon$ حال اگر $n \longrightarrow \infty$ آنگاه $x_n \longrightarrow x_0$ امّا $f(x_n) \not\longrightarrow f(x_0)$ که متناقض با فرض است. پس فرض خلف باطل است یعنی حکم اثبات شده است. □

توجه نمائید که شبیه قضیه فوق را بر حد چپ، حد راست و حد می‌توان بیان و اثبات کرد یعنی شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = b$ آنست که برای هر دنباله x_n که برای هر عدد طبیعی n، $x_n > x_0$ و $x_n \longrightarrow x_0$ داشته باشیم $f(x_n) \longrightarrow b$ و به همین ترتیب برای حد چپ و حد در نقطه x_0 و روش اثبات مشابه به اثبات قضیه فوق است که اثبات آنها را به خوانندگان توصیه می‌نمائیم. اکنون

به اثبات قضیه دیگری می‌پردازیم که بیانگر این حقیقت است که برای هر عدد x دنباله‌هایی از اعداد گویا و گنگ هستند که به x همگرا هستند و این معادل چگال بودن اعداد گویا و اعداد گنگ در اعداد حقیقی است که در فصل اول بیان گردید.

قضیه ۲.۴.۹. *برای هر عدد حقیقی x دنباله x_n از اعداد گویا و دنباله ξ_n از اعداد گنگ موجودند که $x_n \longrightarrow x$ و $\xi_n \longrightarrow x$.*

اثبات. به علت تشابه در اثبات، در این جا فقط وجود دنباله ξ_n از اعداد گنگ را اثبات و وجود دنباله x_n را به خواننده واگذار می‌کنیم. فرض کنید x عدد حقیقی دلخواهی باشد بنابه چگال بودن اعداد گنگ در اعداد حقیقی برای هر عدد طبیعی n عدد گنگی مانند ξ_n موجود است که $x - \frac{۱}{n} < \xi_n < x$ در نتیجه $x - \dfrac{۱}{n} < \xi_n < x + \dfrac{۱}{n}$ یا $|\xi_n - x| < \dfrac{۱}{n}$ حال فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد پس بنابه اصل ارشمیدسی اعداد حقیقی، عدد طبیعی N موجود است که $\dfrac{۱}{N} < \epsilon$ در این صورت برای هر عدد طبیعی $n > N$ چون $\dfrac{۱}{n} < \dfrac{۱}{N} < \epsilon$ پس از ۱.۹ داریم $|\xi_n - x| < \epsilon$ یعنی $\xi_n \longrightarrow x$ و بدین‌ترتیب اثبات قضیه کامل شده است. □

همانطور که اثبات قضیه نشان می‌دهد دنباله‌ها را می‌توان طوری ساخت که همه مقادیر آنها از x بیشتر، یا همه مقادیر آنها کمتر از x و یا مثلاً برای اندیسهای فرد مقادیر دنباله بیشتر از x و برای اندیسهای زوج مقدار دنباله کمتر از x و... باشد. به کمک دو قضیه فوق می‌توان پیوستگی و ناپیوستگی بسیاری از توابع، بخصوص توابعی که روی اعداد گویا و اعداد گنگ دارای ضابطه‌های متفاوتی هستند را به راحتی تعیین کرد. اکنون به حل چند مثال از این نوع می‌پردازیم که بعضی از آنها را قبلاً بطور مستقیم به کمک تعریف حل کرده‌ایم و در نتیجه می‌توان روش‌های حل را مقایسه نمود.

مثال ۳.۴.۹. *نشان دهید که تابع دیریکله یعنی* $f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *تابع در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.*

حل. فرض کنید که $x_۰$ یك نقطه پیوستگی تابع f باشد (فرض خلف) بنابراین بنابه قضیه ۲.۴.۹ دنباله‌های x_n و ξ_n به ترتیب از اعداد گویا و اعداد گنگ موجودند که $x_n \longrightarrow x_۰$ و $\xi_n \longrightarrow x_۰$ و چون $x_۰$ یك نقطه پیوستگی تابع f است پس بنابه قضیه ۱.۴.۹ داریم $f(x_n) \longrightarrow f(x_۰)$ و $f(\xi_n) \longrightarrow f(x_۰)$ امّا با توجه به ضابطه تعریف تابع f داریم $f(x_n) = ۱$ و $f(\xi_n) = -۱$ بنابراین داریم $f(x_۰) = ۱$ و $f(x_۰) = -۱$. در نتیجه $-۱ = ۱$ که یك تناقض است پس فرض خلف باطل است در نتیجه تابع f در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.

مثال ۴.۴.۹. *فرض کنید یك عددگویای مثبت باشد در این صورت نشان دهید که تابع*

$$f(x) = \begin{cases} x^r & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

فقط در نقطه صفر پیوسته است.

حل. کافی است نشان دهیم که مجموعه نقاط پیوستگی f فقط مجموعه تك عضوی صفر است برای این منظور کافی است نشان دهیم که اگر x_0 یك نقطه پیوستگی دلخواه f باشد آنگاه $x_0 = 0$، پس فرض کنید که x_0 یك نقطه دلخواه پیوستگی تابع f باشد و فرض کنید که x_n و ξ_n به‌ترتیب دنباله‌هایی از اعداد گویا و اعداد گنگ باشند که $x_n \longrightarrow x_0$ و $\xi_n \longrightarrow x_0$ قضیه ۱.۴.۹ در نتیجه بنابه قضیه ۲.۴.۹ داریم $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ و $f(\xi_n) \longrightarrow f(x_0)$. امّا با توجه به ضابطه تعریف تابع f داریم $f(x_n) = (x_n)^r$ و $f(\xi_n) = 0$ در نتیجه داریم $f(x_0)$ برابر صفر است. بنابراین $(x_n)^r \to 0$. از طرفی چون تابع x^r یك تابع پیوسته است (فصل پیوستگی را ببینید) و $x_n \longrightarrow x_0$ پس دوباره بنا به قضیه ۱.۴.۹ داریم $x_n^r \to x_0^r$، در نتیجه $x_0^r = 0$ و یا $x_0 = 0$ و بدین‌ترتیب حل مثال کامل شده است.

مثال ۵.۴.۹. *نشان دهید که تابع* $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *فقط در نقطه* $x = \frac{1}{2}$ *پیوسته است. (مسائل حل شده فصل پیوستگی را ببینید).*

حل. فرض کنید که x_0 یك نقطه پیوستگی دلخواه تابع f باشد و فرض کنید که x_n و ξ_n به ترتیب دنباله‌های گویا و گنگی باشند که $x_n \longrightarrow x_0$ و چون $\xi_n \longrightarrow x_0$ و چون f در نقطه x_0 پیوسته فرض شده است پس $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ و $f(\xi_n) \longrightarrow f(x_0)$. امّا با توجه به ضابطه تعریف تابع $f(x_n) = x_n$ و $f(\xi_n) = 1 - \xi_n$، بنابراین $x_n \longrightarrow f(x_0)$ و $1 - \xi_n \longrightarrow f(x_0)$. از طرفی بنابه فرض $x_n \longrightarrow x_0$ و حد یك دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است پس $f(x_0) = x_0$ بنابراین $1 - x_n \to 1 - x_0$ همچنین چون بنا به فرض $\xi_n \longrightarrow x_0$ و تابع $1 - x$ تابعی پیوسته است پس $1 - \xi_n \longrightarrow 1 - x_0$ و دوباره بنا به منحصر به فردی حد داریم $x_0 = 1 - x_0$ و یا $x_0 = \dfrac{1}{2}$ در اینجا حل مثال کامل شده است.

قضیه ۶.۴.۹. *فرض کنید* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *تابعی پیوسته باشد که برای هر عددگویای* x *،* $f(x) = 0$ *در این صورت* f *تابع ثابت صفر است.*

اثبات. کافی است نشان دهیم که برای هر عدد حقیقی x ، $f(x) = 0$ برای این منظور فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد و فرض کنید که x_n دنباله‌ای در اعداد گویا باشد که $x_n \longrightarrow x$ و در این

صورت چون f پیوسته است پس $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. امّا بنابه فرض $f(x_n) = ۰$ (چون x_n گویا است) پس $f(x) = ۰$.

به طریق مشابه می‌توان نشان داد که هر تابع حقیقی پیوسته که روی یك مجموعه چگال $\mathbb{R}$ صفر باشد متحد با صفر است. □

نتیجه ۷.۴.۹. *اگر f و g دو تابع حقیقی پیوسته باشند که برای هر عدد گویای x، $f(x) = g(x)$ آنگاه* $f = g$.

اثبات. کافی است قضیه ۶.۴.۹ را برای تابع پیوسته $f - g$ بکار ببریم. □

شایان ذکر است که مانند پیوستگی، پیوستگی یکنواخت نیز توسط دنباله قابل تشخیص هستند که اینك قضیه‌ای در این مورد بیان و اثبات می‌نمائیم.

قضیه ۸.۴.۹. *شرط لازم و کافی برای آنکه تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد آن است که برای هر دو دنباله دلخواه x_n و y_n در $\mathbb{R}$ داشته باشیم اگر $|x_n - y_n| \to ۰$ آنگاه*

$$|f(x_n) - f(y_n)| \to ۰$$

اثبات. (لزوم شرط) فرض کنید که f پیوسته یکنواخت باشد و همچنین دنباله‌های x_n و y_n در $\mathbb{R}$ چنان باشند که $|x_n - y_n| \to ۰$، می‌خواهیم نشان دهیم که $|f(x_n) - f(y_n)| \to ۰$. برای این منظور فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد. چون تابع f بطور یکنواخت پیوسته است پس $\delta > ۰$ موجود است که برای هر دو عدد حقیقی دلخواه x و y که $|x - y| < \delta$ (۱.۹) داریم $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ پیوستگی یکنواخت در فصل پیوستگی را ببینید) حال از اینکه $|x_n - y_n| \to ۰$ برای $\epsilon' = \delta > ۰$ عدد طبیعی N موجود است که برای هر عدد طبیعی $n > N$ داریم $|x_n - y_n| < \delta$ ۲.۹ اکنون فرض کنید $n > N$ دلخواه باشد در این صورت با توجه به ۱.۹ و ۲.۹ داریم

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \delta.$$

که بدین‌ترتیب اثبات لزوم قضیه پایان می‌پذیرد.

بالعکس: فرض کنید که برای هر دو دنباله دلخواه x_n و y_n از اعداد حقیقی که $|x_n - y_n| \to ۰$ داشته باشیم $|f(x_n) - f(y_n)| \to ۰$ امّا f پیوسته یکنواخت نباشد (فرض خلف) بنابراین بنابه تعریف $\epsilon > ۰$ موجود است که برای هر $\delta > ۰$ اعداد حقیقی x_δ و y_δ موجودند که $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ ولی $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \epsilon$. که برای هر عدد طبیعی دلخواه n، در نظر می‌گیریم $\delta = \frac{۱}{n}$، پس اعداد حقیقی x_n و y_n موجودند که $|x_n - y_n| < \frac{۱}{n}$ و $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. حال چون n دلخواه است داریم $|x_n - y_n| \to ۰$ امّا $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to ۰$ که متناقض با فرض است پس فرض خلف باطل است یعنی کفایت شرط نیز اثبات شده است. □

جالب خواهد بود اگر روش اثبات قضیه فوق را با روش اثبات قضیه ۱.۴.۹ و روش اثبات قضیه پیوستگی ترکیب دو تابع پیوسته (در فصل پیوستگی) مقایسه گردند. توجه نمائید که در واقع

قضیه فوق به عبارت دیگر بیان می‌دارد که شرط لازم و کافی برای آنکه تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت نباشد آن است که دنباله‌های x_n و y_n از اعداد حقیقی موجود باشند که $|x_n-y_n|\to ۰$ امّا $|f(x_n)-f(y_n)|\not\to ۰$ هم‌اکنون نشان می‌دهیم توابع $\sin x^۲$ و $\cos x^۲$ پیوسته یکنواخت نیستند اگرچه توابع $\sin$ و $\cos$ پیوسته یکنواخت می‌باشند.

مثال ۹.۴.۹. *نشان دهید که تابع $f(x)=\sin x^۲$ پیوسته یکنواخت نیست.*

حل. در نظر می‌گیریم $x_n=\sqrt{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}$ و $y_n=\sqrt{۲n\pi-\frac{\pi}{۲}}$. در این صورت

$$|x_n-y_n|=\left|\sqrt{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}-\sqrt{۲n\pi-\frac{\pi}{۲}}\right|=\frac{\pi}{\sqrt{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}-\sqrt{۲n\pi-\frac{\pi}{۲}}}\to ۰$$

امّا $f(x_n)=\sin\left[۲n\pi+\frac{\pi}{۲}\right]=۱$ و $f(y_n)=\sin\left[۲n\pi-\frac{\pi}{۲}\right]=-۱$ پس

$$|f(x_n)-f(y_n)|=|۱-(-۱)|=۲\to ۰$$

که تناقض است و بدین ترتیب حل مثال کامل شده است. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که تابع $f(x)=\cos x^۲$ نیز بطور یکنواخت پیوسته نیست.

۵.۹ زیر دنباله

اکنون به بیان مفهوم دیگری در دنباله‌ها می‌پردازیم که برای توابع بطور عام معنی ندارد و خاص دنباله‌ها است و آن مفهوم زیر دنباله است.

تعریف ۱.۵.۹. *فرض کنید x_n یك دنباله در اعداد حقیقی باشد دنباله x_{r_n} در اعداد حقیقی را یك زیر دنباله x_n نامیم هرگاه $\{x_{r_n}:n\in\mathbb{N}\}\subseteq\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ و $r_n:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ دنباله‌ای اکیدا صعودی باشد به عبارت دیگر یك زیر دنباله از یك دنباله، دنباله‌ای است که اعضاء آن از اعضاء دنباله x_n بوده که اندیس آن اکیدا صعودی باشد (یعنی هر عضو زیر دنباله چنان از اعضاء دنباله انتخاب می‌شود که اندیس آن نسبت به عضو قبلی اکیدا بزرگتر باشد). به عنوان مثال دنباله‌های $x_{n+۱}$، $x_{n-۱}$، $x_{۲n}$ و $x_{۲n-۱}$ همگی زیر دنباله‌هایی از دنباله x_n هستند بخصوص $x_{۲n}$ و $x_{۲n-۱}$ را به ترتیب زیر دنباله‌های زوج و فرد x_n نامند. توجه نمائید اگر x_{r_n} یك زیر دنباله x_n باشد آنگاه به کمك استقراء می‌توان دید که همواره $r_n\geq n$.*

اکنون به رابطه همگرائی بین یك دنباله و زیر دنباله‌های آن می‌پردازیم.

قضیه ۲.۵.۹. *اگر دنباله حقیقی x_n همگرا به x باشد تمام زیر دنباله‌های آن نیز همگرا به x است.*

اثبات. فرض کنید $x_n\longrightarrow x$ و x_{r_n} یك زیر دنباله x_n و $\epsilon>۰$ دلخواه باشد می‌خواهیم نشان دهیم که $x_{r_n}\xrightarrow{n} x$. چون بنابه فرض $x_n\longrightarrow x$ پس عدد طبیعی N موجود است که برای هر عدد طبیعی n

اگر $n > N$ آنگاه $|x_n - x| < \epsilon$. اما با توجه به آنچه که در بالا ذکر گردید همواره $r_n \geq n$، پس اگر $n > N$ آنگاه $r_n > N$ و در نتیجه $|x_{r_n} - x| < \epsilon$ و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل شده است. $\square$

عکس قضیه فوق نیز برقرار است. که اثبات آنرا به خوانندگان محترم توصیه می‌کنیم.

قضیه ۳.۵.۹. *شرط لازم و کافی برای آنکه* $x_n \longrightarrow x$ *آن است که* $x_{2n} \longrightarrow x$ *و* $x_{2n-1} \longrightarrow x$.

اثبات. لزوم شرط بنا به قضیه ۲.۵.۹ برقرار است. برای کفایت شرط فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد در این صورت از اینکه $x_{2n} \longrightarrow x$ و $x_{2n-1} \longrightarrow x$ اعداد طبیعی N_1 و N_2 موجودند که برای هر عدد طبیعی n اگر $n > N_1$ آنگاه

$$|x_{2n} - x| < \epsilon.$$

اگر $n > N_2$ آنگاه

$$|x_{2n-1} - x| < \epsilon.$$

اکنون در نظر می‌گیریم $N = \max\{2N_1, 2N_2 - 1\}$ در این صورت اگر $n > N$ زوج باشد پس $n = 2n_1$ و چون $N \geq 2N_1$ پس $n_1 > N_1$ و بنابراین

$$|x_n - x| = |x_{2n_1} - x| < \epsilon$$

و اگر $n > N$ فرد باشد پس $n = 2n_2 - 1$ و چون $N \geq 2N_2 - 1$ پس $n_2 > N_2$ و بنابراین

$$|x_n - x| = |x_{2n_2-1} - x| < \epsilon$$

و بدین‌ترتیب اثبات قضیه کامل شده است. $\square$

مثال ۴.۵.۹. *مطلوب است* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n + 1}{3^n}$.

حل. چون $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ و دنباله $\dfrac{3^n+1}{3^n}$ یك زیر دنباله $\dfrac{n+1}{n}$ است پس بنابه قضیه ۳.۵.۹

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+1}{3^n} = 1.$$

مثال ۵.۵.۹. *فرض کنید* $x_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n+2} & \text{اگر } 2 \nmid n \\ \dfrac{n^2+2n+3}{n^2+n} & \text{اگر } 2 \mid n \end{cases}$ *مطلوب است* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

حل. در واقع بنابه تعریف دنباله $x_{2n} = \dfrac{n^2+2n+3}{n^2+n}$ و $x_{2n-1} = \dfrac{n-1}{n+2}$ و چون

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 1.$$

پس بنا به قضیه ۳.۵.۹ داریم $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. توجه نمائید که در قضیه ۳.۵.۹ وجود و برابری حد زیر دنباله‌های زوج و فرد مطرح است.

مثال ۶.۵.۹. *نشان دهید که دنباله متناوب* $x_n = (-1)^{n-1}$ *همگرا نیست (اثبات قضیه ۹.۱.۹ را ببینید).*

حل. داریم $x_{2n} = -1$ و $x_{2n-1} = 1$ بنابراین $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = -1$ و $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = -1$ بنابراین $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} \neq \lim_{n\to\infty} x_{2n}$ بنابراین بنابه قضیه ۳.۵.۹ دنباله متناوب همگرا نیست.

۶.۹ دنباله‌های بازگشتی

تاکنون دنباله‌هایی را بررسی کردیم که ضابطه‌ای معین و مشخص داشتند و هر یك از آنها مستقیما برحسب n بیان می‌شدند. اکنون می‌خواهیم به بررسی دنباله‌هایی بپردازیم که دارای ضابطه معینی برحسب n نبوده بلکه به کمك رابطه بین جملات آن تعریف می‌شوند برای روشن شدن‌موضوع‌دنباله تصاعدهندسی $x_n = aq^{n-1}$ را درنظرمی‌گیریم‌که‌دراین صورت $x_{n+1} = aq^n$ و بنابراین

$$x_{n+1} = q.aq^{n-1} = qx_n$$

در نتیجه $x_{n+2} = qx_{n+1}$ که بدین‌ترتیب q را نیز می‌توان حذف نمود چون

$$x_{n+2}.x_n = qx_{n+1}.x_n = x_{n+1}.(qx_n) = x_{n+1}^2$$

پس دنباله تصاعد هندسی x_n را به صورت زیر می‌توان تعریف کرد که دنباله x_n، دنباله‌ای است که در دو شرط

(الف) $x_1 = a$ و $x_2 = aq$.

(ب) برای هر عدد طبیعی n، $x_{n+2}.x_n = x_{n+1}^2$.

صدق کند. همانطور که ملاحظه می‌شود شرط (الف) جمله اول و دوم و شرط (ب) سایر جملات را با توجه به دو جمله قبلی آن معین می‌نماید. که در نتیجه با توجه به استقراء با دو مقدمه دنباله x_n به صورت منحصر به فردی مشخص می‌شود. اکنون مثال دیگری را در نظر می‌گیریم. دنباله $x_n = n^2$ را در نظر می‌گیریم در این صورت داریم

$$x_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = x_n + 2n + 1. \tag{۳.۹}$$

در نتیجه

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2(n+1) + 1 = x_{n+1} + 2n + 3 \tag{۴.۹}$$

و از کم کردن طرفین ۳.۹ و ۴.۹ داریم

$$x_{n+۲} - x_{n+۱} = x_{n+۱} - x_{n+۲}$$

و یا

$$x_{n+۲} = ۲x_{n+۱} - x_{n+۲}. \qquad (۵.۹)$$

این رابطه نشان می‌دهد که چگونه می‌توان هر جمله دنباله را با توجه به دو جمله قبلی آن به دست آورد. دنباله فوق را به صورت زیر می‌توان تعریف کرد

(الف) $a_۲ = ۲^۲$ و $a_۱ = ۱$.

(ب) برای هر عدد طبیعی n، $x_{n+۲} = ۲x_{n+۱} - x_n + ۲$.

در هر دو مثال فوق عبارتی را که در رابطه (ب) نوشته شده است را یك رابطه بازگشتی می‌نامند. بنابراین هر یك از رابطه‌های ۳.۹، ۴.۹ و ۵.۹ یك رابطه بازگشتی هستند. بدیهی است که با اطلاعاتی که با توجه به رابطه‌های (الف) و (ب) بدست می‌آیند می‌توان مقدار دنباله را برای هر عدد طبیعی به تدریج به دست آورد. چنین دنباله‌هایی را که با تعریفی بازگشتی بیان می‌شوند دنباله‌های بازگشتی یا دنباله‌های استقرائی نامند.

تعریف ۱.۶.۹. *دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را یك دنباله بازگشتی از مرتبه k نامیم هرگاه اولاً k جمله متوالی دنباله داده شده باشد. ثانیاً دنباله در یك رابطه بازگشتی صدق کند یعنی مقدار x_n را بر حسب $x_{n-۱}$، $x_{n-۲}$ و $\cdots$ و x_{n-k}، احیانا n و یا عددی ثابت داده شده باشد.*

دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را یك دنباله بازگشتی خطی از مرتبه k نامیم در صورتیکه در رابطه بازگشتی

$$x_{n+k} = c_۱x_{n+k-۲} + c_۲x_{n+k-۲} + \cdots + c_kx_n$$

صدق کند.

اینك به بیان قضیه‌ای درباب دنباله‌های بازگشتی خطی می‌پردازیم که مبین این حقیقت است که چنین دنباله‌هایی را صریحا می‌توان برحسب n محاسبه کرد.

قضیه ۲.۶.۹. *قانون هر دنباله بازگشتی خطی برحسب n را می‌توان محاسبه کرد.*

اثبات. فرض کنید که x_n یك دنباله بازگشتی خطی از مرتبه k باشد قانون دنباله x_n را بر حسب n محاسبه نمائید.

ما قضیه را برای دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ بازگشتی خطی مرتبه دو اثبات می‌نمائیم و اثبات حالت کلی به روش مشابه است که به خوانندگان واگذار می‌شود. فرض کنید دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یك دنباله بازگشتی خطی باشد بطوریکه

(الف) $x_۱ = \alpha$ و $x_۲ = \beta$.

ب) برای هر عدد طبیعی n، $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$..

معادله درجه دوم زیر معروف به معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم.

$$x^2 - ax - b = 0 \tag{6.9}$$

اگر معادله فوق دارای دو ریشه متمایزx_1 و x_2 باشد دنباله جدید y_n با ضابطه $y_n = Ax_1^n + Bx_2^n$ راتعریف می‌کنیم که A و B دو عدد ثابت هستند که در دستگاه زیر صدق می‌کنند

$$\begin{cases} Ax_1 + Bx_2 = \alpha \\ Ax_1^2 + BX_2^2 = \beta \end{cases} \tag{7.9}$$

حال به استقراء نشان می‌دهیم که دو دنباله x_n و y_n برابرند. با توجه به دستگاه ۷.۹ داریم

$$y_1 = Ax_1 + Bx_2 = \alpha = x_1, \quad y_2 = Ax_1^2 + Bx_2^2 = \beta = x_2$$

فرض کنیم برای عدد طبیعی دلخواه n، $y_n = x_n$ باشد حکم را برای $n + 1$ اثبات می‌کنیم. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + bx_{n-1} = ay_n + by_{n-1} \\ &= a(Ax_1^n + Bx_2^n) + b(Ax_1^{n-1} + Bx_2^{n-1}) \\ &= Ax_1^{n-1}(ax_1 + b) + Bx_2^{n-1}(ax_2 + b) \end{aligned}$$

چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - ax - b = 0$ هستند پس $x_1^2 = ax_1 + b$و $x_2^2 = ax_2 + b$ بنابراین از ۸.۹ داریم

$$x_{n+1} = Ax_1^{n-1}.x_1^2 + Bx_2^{n-1}.x_2^2 = Ax_1^{n+1} + Bx_2^{n+1} = y_{n+1}.$$

در نتیجه در این حالت برای عدد طبیعی n، $x_n = y_n$.

اگر معادله ۶.۹ دارای ریشه مضاعف x باشد دنباله z_n با ضابطه $z_n = Ax^n + Bnx^n$ را در نظرمی‌گیریم که در آن A و B در دستگاه زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} Ax + Bx = \alpha \\ Ax^2 + 2Bx^2 = \beta \end{cases}$$

در این صورت مشابه برهان فوق ثابت می‌شود که $z_n = x_n$. □

برای مثالی از قضیه فوق جمله عمومی دنباله اعداد فیبوناتچی را برحسب n محاسبه می‌کنیم.

مثال ۳.۶.۹. *فرض کنید یك دنباله بازگشتی خطی مرتبه دو باشد که*

الف) $x_1 = x_2 = 1$،

ب) برای هر عدد طبیعی $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$،
مطلوب است ضابطه این دنباله برحسب n.

حل. معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم که عبارت است از $x^2 - x - 1 = 0$ این معادله دارای دو ریشه متمایز $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ است پس ضابطه دنباله عبارت است از $y_n = Ax_1^n + Bx_2^n$ که در آن A و B از دستگاه زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} Ax_1 + Bx_2 = 1 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 = 1 \end{cases}$$

که پس از محاسبه $A = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ و $B = \dfrac{-\sqrt{5}}{5}$ بدست می‌آید. بنابراین جمله عمومی دنباله عبارت است از

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

قابل ذکر است که روش کلی برای نمایش صریح تمام دنباله‌های بازگشتی در دست نیست در ذیل به ذکر مثال‌هایی که خطی نیستند می‌پردازیم.

مثال ۴.۶.۹. *فرض کنید دنباله* x_n *که در آن* $x_0 = 0$ *و* $x_{n+1} = \frac{3x_n+3}{x_n+5}$ *داده شده باشد رفتار این دنباله را تعیین نمائید.*

حل. ابتدا فرض می‌کنیم $x_n \longrightarrow x$ چون x_{n+1} یك زیر دنباله x_n است پس بنابه قضیه ۲.۵.۹ داریم $x_{n+1} \longrightarrow x$ و در نتیجه با استفاده از قضیه ۳.۱.۹ داریم

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3x_n + 3}{x_n + 5} = \frac{3\lim\limits_{n\to\infty} x_n + 3}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + 5} = \frac{3x+3}{x+5}$$

و یا

$$x_2 + 5x = 3x + 3 \Longleftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

و در نتیجه $x = 1$ یا $x = -3$ و چون حد یك دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است (قضیه ۳.۱.۹) پس حداکثر یکی از جواب‌های فوق قابل قبول است. که چون $x_n \geq 0$ (تحقیق کنید) پس بنا به قضیه ۳.۱.۹ (ر) $x \geq 0$ بنابراین $x = -3$ غیرقابل قبول خواهد بود. اکنون نشان می‌دهیم که «۱» جواب است. برای این منظور داریم

$$|x_n - 1| = \left|\frac{3x_{n-1}+3}{x_{n-1}+5} - 1\right| = \left|\frac{2x_{n-1}-2}{x_{n-1}+5}\right| = 2\frac{|x_{n-1}-1|}{x_{n-1}+5}$$

بنابراین

$$\left|\frac{x_n - ۱}{x_{n-۱} - ۱}\right| = \frac{۲}{x_{n-۱} + ۵} \leq \frac{۲}{۵}$$

در نتیجه

$$\prod_{k=۱}^{n} \frac{|x_k - ۱|}{|x_{k-۱} - ۱|} \leq \prod_{k=۱}^{n} \frac{۲}{۵} = \left(\frac{۲}{۵}\right)^n$$

امّا $\prod_{k=۱}^{n} \frac{|x_k-۱|}{|x_{k-۱}-۱|} = \frac{|x_n-۱|}{|x_۰-۱|} = |x_n - ۱|$ بنابراین

$$۰ \leq |x_n - ۱| < \left(\frac{۲}{۵}\right)^n$$

و چون $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{۲}{۵}\right)^n$ (مثال ۶.۱.۹)بنابراین طبق قضیه فشار ۳.۱.۹(ز) داریم. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - ۱| = ۰$ و در نتیجه بنا به ۳.۱.۹(۵) داریم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ۱$. توجه نمائید که در اغلب موارد دنباله‌های بازگشتی یکنوا هستند که با توجه به این موضوع و با استفاده از قضیه ۲.۲.۹ می‌توان مسائل را حل کرد. برای روشن شدن موضوع به مثال زیر توجه نمائید.

مثال ۵.۶.۹. *فرض کنید a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند و فرض کنید دنباله بازگشتی x_n به صورت*

(الف) $x_۱ = b$،

(ب) $x_{n+۱} = \sqrt{x_n + a}$ تعریف شده باشد،

نشان دهید این دنباله همگراست.

حل. نخست فرض کنید که این دنباله مثلاً به x همگرا باشد. در نتیجه چون تابع $\sqrt{x}$ تابعی پیوسته و $x_{n+۱}$ یك زیردنباله x_n است پس داریم

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+۱} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n + a} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n + a} = \sqrt{x + a}$$

پس $x = \sqrt{x+a}$ و یا $x^۲ - x - a = ۰$ چون $a > ۰$ پس این معادله دارای دو ریشه مختلف‌العلامه است که چون $x \geq ۰$ پس فقط ریشه مثبت آن قابل قبول است فرض کنید α ریشه مثبت معادله و βریشه منفی این معادله باشد در این صورت داریم

$$x_{n+۱}^۲ - x_n^۲ = x_n + a - x_n^۲ = -(x_n^۲ - x_n - a) = -(x_n - \alpha)(x_n - \beta).$$

در نتیجه داریم

$$(x_{n+۱} - x_n)(x_{n+۱} + x_n) = -(x_n - \alpha)(x_n - \beta). \qquad (۸.۹)$$

چون $x_n - \beta \geq ۰$ و $x_{n+۱} + x_n \geq ۰$ پس اگر $x_n - \alpha > ۰$، در این صورت طرف دوم ۸.۹ منفی بوده در نتیجه $x_{n+۱} - x_n < ۰$ و یا $x_{n+۱} < x_n$ یعنی دنباله نزولی خواهد بود و برای اینکه شرط

$x_n - \alpha > 0$ و یا $x_n > \alpha$ برقرار باشد ملاحظه نمائید که

$$x_{n+1}^2 - \alpha^2 = x_n + a - (\alpha + a) = x_n - \alpha > 0.$$

یعنی اگر $x_n > \alpha$ آنگاه $x_{n+1} > \alpha$، پس کافی است $x_1 = b > \alpha$ بطور خلاصه اگر $b > \alpha$ آنگاه دنباله x_n نزولی و از پایین به α کراندار است در نتیجه بنا به قضیه ۲.۲.۹ همگرا می‌باشد و چون غیر از α حد دیگری نمی‌تواند داشته باشد پس $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

اگر $x_1 = b < \alpha$ بطریق مشابه می‌توان نشان داد که دنباله x_n صعودی و از بالا کراندار است پس حد آن α است. اگر $x_1 = b = \alpha$ آنگاه دنباله x_n دنباله ثابت α است که همگرا می‌باشد. بدین‌ترتیب نشان دادیم که همواره دنباله بازگشتی x_n با رابطه بازگشتی غیرخطی $x_{n+1} = \sqrt{x_n + a}\,(a > 0)$ و $x_1 = b$ همگرا به α است که در آن α ریشه مثبت معادله مفسر $x^2 - x - a = 0$ است.

۷.۹ مسایل نمونه حل شده

مساله ۱.۷.۹. *فرض کنید $0 < a \leq b$ در این صورت نشان دهید*
$\sqrt[n]{a^n + b^n} \to b$

حل. داریم

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} = b\sqrt[n]{(\frac{a}{b})^n + 1} \leq 2^{\frac{1}{n}} b$$

از طرفی بنا به نامساوی برنولی داریم

$$\sqrt[n]{1 + (\frac{a}{b})^n} \geq 1 + \frac{1}{n}(\frac{a}{b})^n$$

بنابراین

$$b(1 + \frac{1}{n}(\frac{a}{b})^n) \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq b\sqrt[n]{2} \leq b\sqrt[n]{n}$$

اما با توجه به مثالهای ۶.۱.۹ و ۷.۱.۹ داریم

$$\lim_{n\to\infty} b(1 + \frac{1}{n}(\frac{a}{b})^n) = b$$

$$\lim_{n\to\infty} b\sqrt[n]{n} = b$$

پس بنا به قضیه فشردگی ۳.۱.۹ (ز) داریم

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$$

تبصره ۲.۷.۹. *بطور کلی اگر $a_1, a_2, \cdots, a_k$ اعداد حقیقی مثبتی باشند آنگاه به کمک استقراء در*

مساله فوق می‌توان نشان داد که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}.$$

مساله ۳.۷.۹. *فرض کنید $a > 0$، نشان دهید که* $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

حل. ابتدا فرض کنید $a > 1$. در این صورت $a^{\frac{1}{n}} > 1$ بنابراین $a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$. فرض کنید $x_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$ پس $x_n \geq 0$ و بایستی نشان دهیم $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
برای این منظور داریم

$$x_n + 1 = a^{\frac{1}{n}}.$$

در نتیجه $a = (x_n + 1)^n$ و با توجه به بسط دوجمله‌ای بینم ـ خیام داریم $(x_n + 1)^n \geq 1 + nx_n$. پس $a \geq 1 + nx_n$ و یا $\frac{a-1}{n} \geq x_n \geq 0$. اکنون چون $\lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$ پس با توجه به قضیه فشار برای دنباله‌ها ۳.۱.۹ (ز) داریم $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. حال فرض کنید $0 < a < 1$ در این صورت داریم $\frac{1}{a} > 1$، پس بنا به حالت قبل $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}} = 1$ در نتیجه $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

مساله ۴.۷.۹. *فرض کنید که $x_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$، $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$. نشان دهید که* $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

حل. به سادگی با استقراء می‌توان دید که دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی است. نشان می‌دهیم $x_n \leq 2$. برای $x = 1$، $x_1 = 1 \leq 2$، فرض کنید برای عدد طبیعی دلخواه x، $x_n \leq 2$ در نتیجه $2x_n \leq 4$ و یا $\sqrt{2x_n} \leq 2$. بنابراین $x_{n+1} \leq 2$ و در نتیجه بنا به قضیه ۲.۲.۹ دنباله مورد بحث همگراست. فرض کنید که $x_n \to x$ در این صورت بنا به قضیه ۲.۵.۹ داریم $x_{n+1} \to x$ و یا با توجه به تعریف دنباله فوق $\sqrt{2x_n} \to x$. از طرفی بنا به قضیه ۱.۴.۹ داریم $\sqrt{2x_n} \to \sqrt{2x}$ و چون حد یك دنباله در صورت وجود منحصر بفرد است داریم $\sqrt{2x} = x$ و یا $x^2 = 2x$. پس $x = 0$ و یا $x = 2$. اما چون دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی و $x_1 = 1$ پس $x = 2$.

مساله ۵.۷.۹. *فرض کنید که $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنباله در اعداد حقیقی باشد $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ در این صورت اگر عدد طبیعی N چنان باشد که برای هر $n \geq N$، $\alpha \leq n \leq \beta$ آنگاه $\alpha \leq x \leq \beta$.*

حل. فرض کنید که برای هر $n \geq n$، $\alpha \leq x_n \leq \beta$ اما $x > \beta$ یا $x < \alpha$. مثلاً $x > \beta$ در این صورت عدد طبیعی N موجود است که برای هر $n \geq N_1$ داریم $|x_n - x| < x - \beta$. فرض کنید $x_\circ \geq \max\{x_1, x_2\}$. در این صورت برای هر عدد طبیعی $n \geq N_2$ داریم

$$x - x_n \leq |x - x_n| < x - \beta, \quad \alpha \leq x_n \leq \beta.$$

در نتیجه برای $n \geq N_۲$ داریم $x_n > \beta$ و $x_n \leq \beta$ که یك تناقض است.

مساله ۶.۷.۹. *فرض کنید $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای در اعداد حقیقی باشد و $r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+۱}|}{|x_n|}$ در این صورت*

الف) اگر $r < ۱$ آنگاه $x_n \to ۰$.

ب) اگر $r > ۱$ آنگاه $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ کراندار نبوده در نتیجه همگرا نخواهد بود.

حل.

الف) فرض کنید $r < ۱$ عدد α را چنان در نظر می‌گیریم $r < \alpha < ۱$ در این صورت با توجه مساله قبل (مساله ۶.۷.۹) عدد طبیعی N موجود است که برای هر $n \geq N$، $\dfrac{|x_{n+۱}|}{|x_n|} < \alpha$ و یا $|x_{n+۱}| < \alpha|x_n|$، در نتیجه برای هر عدد طبیعی $n \geq N$، $|x_n| < \alpha^n \frac{|x_N|}{\alpha^N}$. اما $۰ < \alpha < ۱$ پس بنا به مثال ۶.۱.۹ قضیه ۳.۱.۹ (۵) داریم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ۰$.

ب) اما اگر $r > ۱$، فرض کنید $r > \alpha > ۱$ در این صورت با توجه به مساله قبل (مساله ۶.۷.۹) عدد طبیعی N چنان موجود است که برای هر عدد طبیعی $n \geq N$ داریم $|x_n| > \alpha \frac{|x_N|}{\alpha^N}$. اما چون $\alpha > ۱$ پس $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_N|}{\alpha^N}\alpha^n = +\infty$. در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = +\infty$. یعنی دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در این حالت کراندار نمی‌باشد پس همگرا نیز نخواهد بود.

مساله ۷.۷.۹. *فرض کنید $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای در اعداد حقیقی باشد که $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$ در این صورت*

الف) اگر $r < ۱$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ۰$.

ب) اگر $r > ۱$ آنگاه $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ کراندار نبوده و در نتیجه همگرا نخواهد بود.

حل.

الف) فرض کنید $r < \alpha < ۱$. در این صورت با توجه به مساله ۴، عدد طبیعی N موجود است که برای هر عدد طبیعی $n \geq N$ داریم $\sqrt[n]{|x_n|} < \alpha$ و یا $|x_n| < \alpha^n$. اما چون $۰ < \alpha < ۱$ پس بنا به مثال ۶.۱.۹ و قضیه ۳.۱.۹ داریم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ۰$.

ب) اما اگر $r > 1$، فرض کنید $r > \alpha > 1$. در این صورت با توجه به مساله قبل، عدد طبیعی N چنان موجود است که برای هر عدد طبیعی $n \geq N$ داریم $|x_n| > \alpha^n$. اما چون $\alpha > 1$ پس $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = +\infty$. در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

مساله ۸.۷.۹. *مطلوب است* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$

حل. داریم

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

اما داریم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$. پس بنا به قضیه فشار برای دنباله‌ها ۳.۱.۹ (ز) داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$$

مساله ۹.۷.۹. *فرض کنید* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *دنباله‌ای در اعداد حقیقی باشد که* $a_n \to a$. *در این صورت* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a$.

حل. فرض کنید که $a_n \to a$ و فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. در این صورت عدد طبیعی N_1 موجود است که برای هر $n \geq N_1$ داریم $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. از طرفی چون دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است پس کراندار نیز می‌باشد بنابراین عدد حقیقی مثبت M موجود است که برای هر عدد طبیعی n، داریم $|a_n - a| \leq M$. پس برای هر عدد طبیعی n که $n \geq N_1$ داریم

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - a\right| \\
&\quad = \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - a\right| \\
&\quad = \frac{1}{n}\left|(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)\right| \\
&\quad \leq \quad \frac{1}{n}(|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|) \\
&\quad \leq \frac{N_1 M}{n} + \frac{n-N_1}{n}\frac{\epsilon}{2} < \frac{N_1 M}{n} + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

اکنون بنا به اصل ارشمیدسی اعداد حقیقی، عدد طبیعی N_2 موجود است که $\frac{N_1 M}{N_2} < \frac{\epsilon}{2}$. فرض

کنید که عدد طبیعی N چنان باشد که $N \geq \max\{N_۱, N_۲\}$. در این صورت برای هر عدد طبیعی $n \geq N$ داریم

$$\left|\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} a_i - a\right| < \frac{\epsilon}{۲} + \frac{\epsilon}{۲} = \epsilon.$$

۸.۹ مسایل

۱. *فرض کنید* $a_n = \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲n}$ *نشان دهید که* $\{a_n\}$ *صعودی و از بالا کراندار است.*

۲. *فرض کنید* $a_n = \frac{۱.۳.۵.\cdots.(۲n-۱)}{۲.۴.۶.\cdots.۲n}$ *ثابت کنید این دنباله نزولی و از پایین کراندار است.*

۳. *فرض کنید* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *و* $a > ۰$ *نشان دهید* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

۴. *نشان دهید که دنباله* $a_n = ۱ + \frac{۱}{۲^p} = \cdots + \frac{۱}{n^p}$ *به ازای* $p \leq ۱$ *واگرا و به ازای* $p > ۱$ *همگراست.*

۵. *دنباله* $\{a_n\}$ *را انقباضی می‌نامیم در صورتی که عددی مانند* α *موجود باشد به طوری که به ازای* $۰ < \alpha < ۱$ *و به ازای هر* n، $|a_n + ۲a_{n+۱}| < \alpha|a_{n+۱} - a_n|$.
ثابت کنید هر دنباله انقباضی در شرط کوشی صدق می‌کند و لذا همگراست در حالتی که $\alpha = ۱$ *چه اتفاقی می‌افتد؟*

۶. *فرض کنید* $a_n = \frac{۳a_{n-۱} + ۱۱}{۹}$ *و* $a_۰ = ۱$ *ثابت کنید* $\{a_n\}$ *همگرا به* $\frac{۱۱}{۶}$ *است.*

۷. *فرض کنید* $a_۰ = ۱$ *و* $b_۰ = ۱$ *و* $a_n + b_n\sqrt{۳} = (a_{n-۱} + b_{n-۱}\sqrt{۳})^n$ *ثابت کنید همواره*

الف) $a_n^۲ - ۳b_n^۲ = ۱$.

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *و* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۳b_n}{a_n}$ *موجود و مساوی* $\sqrt{۳}$ *است.*

۸. *فرض کنید* A *یک عدد حقیقی مثبت باشد. دنباله* $\{a_n\}$ *را چنین تعریف می‌کنیم*

$$a_۱ > \sqrt{A}, \quad a_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(a_n + \frac{A}{a_n})$$

الف) ثابت کنید که $\{a_n\}$ *همگرا به* $\sqrt{A}$ *است.*

ب) اگر $\xi_n = a_n\sqrt{A}$ نشان دهید که

$$\xi_{n+1} = \frac{\xi_n^2}{2a_n} < \frac{\xi_n^2}{2\sqrt{A}}.$$

با فرض $c = 2\sqrt{A}$ نشان دهید که

$$\xi_{n+1} = \frac{\xi_n^2}{2a_n} < \frac{\xi_n^2}{2\sqrt{A}}.$$

۹. فرض کنید $0 < a < b$ و دنباله‌های $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad (n \geq 1)$$

$$b_1 = b, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad (n \geq 1)$$

ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ صعودی و دنباله $\{b_n\}$ نزولی است و هر دو به یک عدد همگرایند.

۱۰. اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ و $(\alpha \in \mathbb{R})$ و دنباله $\{b_n\}$ با ضابطه زیر تعریف شده باشد،

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

۱۱. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد و همگرا به سمت عددی مثبت، ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

۱۲. فرض کنید $\alpha \notin \mathbb{Q}$ و دنباله $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ از اعداد گویا به α همگرا باشد در مورد $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ چه می‌توان گفت؟

۱۳. فرض کنید $0 < x_1 < 1$ و $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ مطلوبست محاسبه $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

۱۴. فرض کنید $x_1 > 1$ و $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x^n}$ ثابت کنید دنباله فوق همگراست. حد آن را پیدا کنید.

۱۵. ثابت کنید به ازاء هر عدد طبیعی n

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\cdots\sqrt{1 + n\sqrt{n+2}}}}}} = 3.$$

۱۶. نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$.

۱۷. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به ترتیب به b, a همگرا باشند ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

۱۸. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱^p + ۲^p + \cdots + n^p}{n^{p+۱}} = \frac{۱}{p+۱}.$$

فصل ۱۰

انتگرال

در فصل‌های هفت و هشت با یکی از دو مفهوم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (حسابان) یعنی مشتق و کاربردهای آن آشنا شدیم در این فصل توجه خود را به مفهوم اساسی دیگری یعنی انتگرال معطوف می‌کنیم در حساب دیفرانسیل مسأله تعیین خط مماس بر منحنی یا تعبیر هندسی مشتق منجر به تعریف مشتق، براساس مفهوم حد گردید، همچنان که دیدیم می‌توان از آن برای محاسبه سرعت و دیگر آهنگ تغییرات و نیز در بسیاری از مسائل کاربردی استفاده نمود.
در حساب انتگرال نیز مسئله تعیین مساحت منجر به فرموله نمودن انتگرال براساس مفهوم حد شده که می‌توان از آن برای محاسبه حجم، طول قوس منحنی، کار، نیرو و نیز حل بسیاری از مسائل علوم و مهندسی استفاده نمود. حتی تعریف بعضی از توابع مانند (لگاریتم) توابع نمائی، توابع توانی و توابع هذلولی نیز براساس انتگرال است قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال یا قضیه حسابان ارتباط بین مشتق و انتگرال را به نحو بسیار زیبائی برقرار می‌سازد که بطور بسیار وسیعی حل بسیاری از مسائل را آسان می‌سازد. انتگرال را می‌توان به دو دسته عمده انتگرال نا معین یا تابع اولیه و انتگرال معین تقسیم نمود.

۱.۱۰ انتگرال نامعین (تابع اولیه)

تعریف ۱.۱.۱۰. *عمل انتگرال‌گیری نامعین را می‌توان، عمل عکس مشتق‌گیری تصورکرد به عبارت دیگر اگر داشته باشیم*

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{۱.۱۰}$$

باید تابعی مانند y چنان بیابیم که از مشتق‌گیری y نسبت به x تابع f بدست آید. اگر چنین تابعی موجود باشد آنرا یك انتگرال نامعین یا یك تابع اولیه تابع f نامیم و با نماد $\int f(x)dx$ نمایش می‌دهیم

با توجه به اینکه مشتق تابع ثابت c برابر صفر است اگر F تابع اولیه f باشد آنگاه $F+c$ نیز یك تابع اولیه دیگری از f است. پس با توجه به اینکه تابع اولیه بطور یکتائی مشخص نیست $\int f(x)dx$ را یك انتگرال نامعین تابع f نامند و تمام توابع اولیه تابع f فقط در مقادیر ثابت c باهم تفاوت دارند یعنی.

قضیه ۲.۱.۱۰. *اگر f یك تابع باشد که $F'(x) = f(x)$ آنگاه عدد ثابت c موجود است که*

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

توجه نمائید که یك تابع اولیه یك تابع بر حسب x است و یك عدد نمی‌باشد. قضیه زیر براساس تعریف انتگرال نامعین به سادگی قابل اثبات است.

قضیه ۳.۱.۱۰. *اگر f و g دو تابع حقیقی باشند آنگاه برای هر دو عدد ثابت α و β داریم*

$$\int (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

اثبات. بر عهده خواننده است. $\square$

بنابراین با توجه به فرمولهای مشتق‌گیری داریم

$$\int u'(x)u^r(x)dx = \frac{u^{r+1}(x)}{r+1} + c \quad -1 \neq r \in \mathbb{Q}$$

$$\int u'(x)\sin(u(x))dx = -\cos(u(x)) + c$$

$$\int u'(x)\cos(u(x))dx = \sin(u(x)) + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}dx = \tan^{-1}(u(x)) + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}dx = \sin^{-1}(u(x)) + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{|u(x)|\sqrt{u^2(x)-1}}dx = \sec^{-1}(u(x)) + c$$

که در آن u عبارتی برحسب x است.

۲.۱۰ مفهوم سیکما

تعریف ۱.۲.۱۰. *فرض کنید اعداد $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$ که در آن n و m اعدادی طبیعی و $m \leq n$، اعداد حقیقی دلخواهی باشند در این صورت بنابه خاصیت شرکت پذیری عمل جمع عبارت*

$$a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$$

بیانگر یک عدد حقیقی معینی است که مستقل از امر پرانتزگذاری است عبارت فوق را معمولاً با $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i$ نمایش داده و می‌خوانیم سیکمای a اندیس i، i از m تا n. در $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i$، a_i را عبارت تحت سیکما، i را اندیس سیکما، m را کران پایین سیکما و n را کران بالای سیکما نامند. در قضیه زیر خواص سیکما را که به سادگی از تعریف قابل اثبات هستند بیان می‌نمائیم.

قضیه ۲.۲.۱۰.

(الف) مقدار سیکما مستقل از اندیس آن است یعنی

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j$$

(ب) اگر k یک صحیح ثابت باشد آنگاه

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k} = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}$$

(ج) اگر α و β اعداد حقیقی ثابت دلخواهی باشند آنگاه

$$\sum_{i=m}^{n} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \sum_{i=m}^{n} a_i + \beta \sum_{i=m}^{n} b_i$$

(د) قاعده تلسکوپی (ادغام)

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i - a_{i-۱}) = a_n - a_{m-۱}$$

(هـ)

$$\sum_{i=m}^{n} c = (n - m + ۱)c$$

اثبات. برهان ساده قضیه فوق به خواننده واگذار می‌شود. □

مثال ۳.۲.۱۰. *فرض کنید n عدد طبیعی دلخواهی باشد مطلوب است $\sum\limits_{i=۱}^{n} i$.*

حل. **(روش اول)** بنابه تعریف داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} i = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (n-۱) + n$$
$$= n + (n-۱) + \cdots + ۲ + ۱$$

و با جمع کردن دو تساوی فوق بصورت جمله به جمله داریم

$$۲\sum_{i=۱}^{n} i = \underbrace{(n+۱) + (n+۱) + \cdots + (n+۱)}_{n \text{ مرتبه}} = n(n+۱)$$

در نتیجه

$$\sum_{i=۱}^{n} i = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

(روش دوم به کمک قاعده ادغام) نخست توجه نمائید که

$$i = \frac{i(i+۱)}{۲} - \frac{i(i-۱)}{۲}$$

بنابراین داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} i = \sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{i(i+۱)}{۲} - \frac{i(i-۱)}{۲}\right) = \frac{n(n+۱)}{۲} - \frac{۱(۱-۱)}{۲} = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

مثال ۴.۲.۱۰. *نشان دهید که* $\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$.

حل. نخست توجه نمائید که بنابه قاعده ادغام داریم

$$\sum_{i=۱}^{n}(i^۳ - (i-۱)^۳) = n^۳$$

از طرف دیگر بنابه قضیه ۲.۲.۱۰ داریم

$$\sum_{i+۱}^{n}(i^۳ - (i-۱)^۳) = \sum_{i+۱}^{n}(i^۳ - (i^۳ - ۳i^۲ + ۳i - ۱)$$
$$= \sum_{i=۱}^{n}(۳i^۲ - ۳i + ۱) = ۳\sum_{i=۱}^{n} i^۲ - ۳\sum_{i=۱}^{n} i + \sum_{i=۱}^{n} ۱$$

در نتیجه

$$۳\sum_{i=۱}^{n} i^{۲} - ۳\sum_{i=۱}^{n} i + \sum_{i=۱}^{n} ۱ = n^{۳}$$

و یا

$$۳\sum_{i=۱}^{n} i^{۲} = ۳\sum_{i=۱}^{n} i - \sum_{i=۱}^{n} ۱ + n^{۳}$$

در نتیجه با توجه به مثال ۳.۲.۱۰ و قضیه ۲.۲.۱۰ (ه) داریم

$$\begin{aligned} ۳\sum_{i=۱}^{n} i^{۲} &= ۳\frac{n(n+۱)}{۲} - n + n^{۳} = \frac{۳n(n+۱) + ۲n(n-۱)(n+۱)}{۲} \\ &= \frac{n(n+۱)(۳+۲n-۲)}{۲} = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۲} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{i=۱}^{n} i^{۲} = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

توجه نمائید که به طریق مشابه می‌توان نشان داد که

$$\sum_{i=۱}^{n} i^{۳} = \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^{۲} = \left(\sum_{i=۱}^{n} i\right)^{۲}$$

و

$$\sum_{i=۱}^{n} i^{۴} = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)(۳n^{۲}+۳n-۱)}{۳۰}$$

مثال ۵.۲.۱۰. *مطلوب است محاسبه* $\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۴k^{۲}-۱}$ *برحسب* n.

حل. نخست توجه نمائید که با قرار دادن $\frac{۱}{۴k^{۲}-۱} = \frac{A}{۲k-۱} + \frac{B}{۲k+۱}$ بدست می‌آوریم $A = \frac{۱}{۲}$ و $B = \frac{-۱}{۲}$. پس

$$\sum_{i=۱}^{n} \left(\frac{\frac{۱}{۲}}{۲k-۱} - \frac{\frac{۱}{۲}}{۲k+۱}\right) = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۲k-۱} - \frac{۱}{۲k+۱}\right)$$

که با توجه به قاعده ادغام داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۴k^{۲}-۱} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲(۱)-۱} - \frac{۱}{۲n+۱}\right) = \frac{n}{۲n+۱}$$

مثال ۶.۲.۱۰. *مطلوب است محاسبه* $\sum\limits_{k=1}^{n}(k!\,k)$ *برحسب* n.

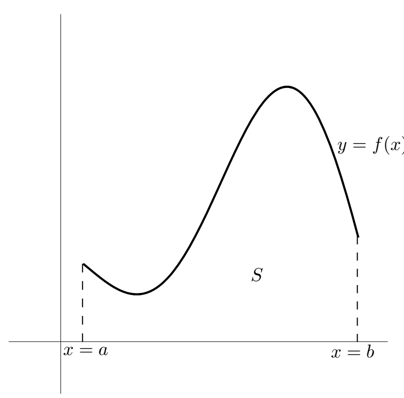
حل. داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k!\,)k &= \sum_{k=1}^{n} k!\,((k+1)-k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}((k+1)!-k!\,)\\ &= (n+1)!-1! = (n+1)!-1\end{aligned}$$

قابل ذکر است که شبیه به نماد $\sum$ ، نماد $\prod$ (خوانده می‌شود پی) نیز برای ضرب موجود است که خواصی مشابه قضیه ۲.۲.۱۰ بر آن مترتب است که بیان و اثبات آنرا به خوانندگان عزیز واگذار می‌کنیم.

۳.۱۰ انتگرال معین

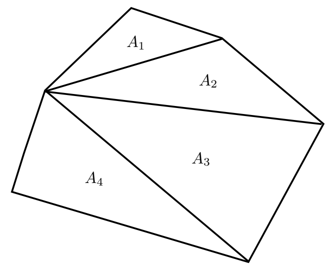
بحث را با طرح و حل مسئله مساحت شروع می‌کنیم فرض کنید که می‌خواهیم مساحت ناحیه S که محدود به منحنی $y=f(x)\geq 0$ و خطوط $x=a$ و $y=b$ و محور xها است (شکل ۱.۱۰ را ببینید) را محاسبه نمائیم. اولین مشکلی که بر سر راه وجود دارد این است که مساحت به چه معنی است.



شکل ۱.۱۰: هدف محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی S است.

برای نواحی محدود به خطوط مستقیم معنی مساحت را می‌دانیم مثلاً برای یك مستطیل عبارت است از طول ضرب در عرض و برای یك مثلث عبارت است از نصف قاعده ضربدر ارتفاع و برای یك چند ضلعی

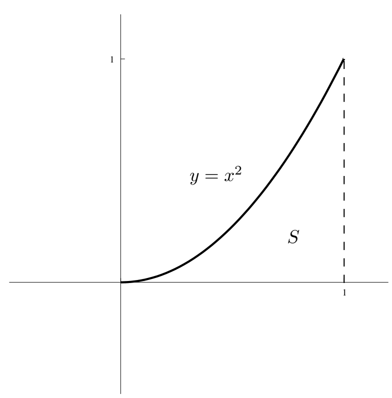
کافی است آن را به مثلث‌هایی تقسیم نموده و مساحت آنها را با هم جمع نمائیم شکل ۲.۱۰ را ببینید.



شکل ۲.۱۰: برای محاسبه‌ی مساحت یك چندضلعی کافیست آن را مثلث‌بندی کنیم.

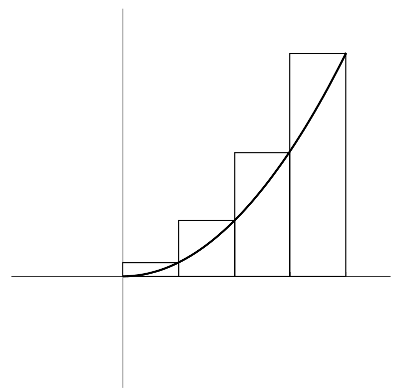
$$A = A_۱ + A_۲ + A_۳ + A_۴, \quad \text{مساحت} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}, \quad \text{مساحت} = \text{طول} \times \text{عرض}$$

امّا بدست آوردن مساحت ناحیه‌ای که جوانب آن منحنی باشند به این سادگی نیست. امّا ایده تقسیم ناحیه به اجزاء کوچکتری که مساحت آنها به سادگی قابل محاسبه باشد ایده خوبی است بدین‌ترتیب ابتدا با تقسیم ناحیه مورد نظر به مستطیل‌ها و با جمع کردن مساحت این مستطیلها تقریبی برای مساحت ناحیه مورد نظر بدست می‌آوریم و سپس با گرفتن حد از مساحت مستطیلها وقتی مساحت آنها به صفر میل کند مساحت ناحیه را بدست می‌آوریم. برای روشن شدن چگونگی عمل به مثال زیر توجه نمائید. فرض کنید که سعی در بدست آوردن مساحت ناحیه محدود شده توسط سهمی $y = x^۲$ و خطوط $x = ۰$ و $x = ۱$ و محور x ها داریم شکل زیر را ببینید.

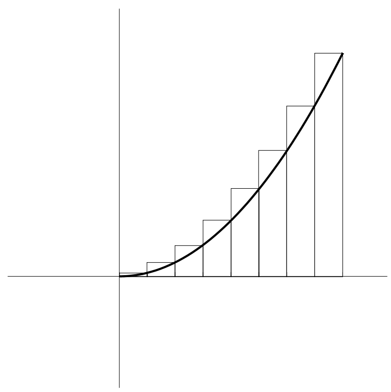


برای این منظور ابتدا بازه $[۰, ۱]$ به بازه‌های جزئی با طول مساوی تقسیم نموده و سپس مستطیلهایی را در نظر می‌گیریم که عرض آنها این بازه‌های جزئی و طول آنها مقدار تابع در نقطه انتهایی در هر یك از

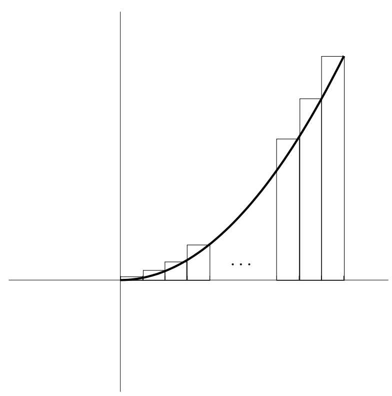
این بازه‌های جزئی باشند. شکل زیر وقتی که ناحیه به چهار، هشت و n مستطیل تقسیم شده است را نشان می‌دهد. فرض کنید که S_n مجموع مساحتهای n مستطیل در شکل(ج)باشد. هر مستطیل دارای



(آ) تقسیم ناحیه به چهار مستطیل



(ب) تقسیم ناحیه به هشت مستطیل



(ج) تقسیم ناحیه به n مستطیل

عرض $\frac{۱}{n}$ و طولی است که همان مقدار تابع $y = x^{۲}$ در نقاط $\frac{۱}{n}$، $\frac{۲}{n}$، $\frac{۳}{n}$، $\cdots$، $\frac{n}{n}$ می‌باشد به عبارت دیگر طول مستطیلها به ترتیب عبارتند از $\left(\frac{۱}{n}\right)^{۲}$، $\left(\frac{۲}{n}\right)^{۲}$، $\left(\frac{۲}{n}\right)^{۲}$، $\cdots$ و $\left(\frac{۲}{n}\right)^{۳}$ بنابراین

$$S_n = \frac{۱}{n}\left(\frac{۱}{n}\right)^{۲} + \frac{۱}{n}\left(\frac{۲}{n}\right)^{۲} + \cdots + \frac{۳}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^{۲} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{۲} = \frac{۱}{n^{۳}}\sum_{i=۱}^{n} i^{۲}.$$

که با توجه به مثال ۴.۲.۱۰ داریم $\sum_{i=۱}^{n} i^{۲} = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ در نتیجه

$$S_n = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^{۳}} = \frac{(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^{۲}}$$

به عنوان مثال مجموع مساحتهای چهار مستطیل در شکل (آ) برابر است با

$$S_{۴} = \frac{۵(۹)}{۶(۱۶)} = ۰/۴۶۷۵$$

و برای شکل (ب) یعنی وقتی هشت مستطیل داشته باشیم

$$S_{۸} = \frac{۹(۱۷)}{۶(۶۴)} = ۰/۳۹۸۴۳۷۵.$$

به طریق مشابه داریم $S_{۱۰۰} = ۰/۳۳۳۸۳۵$ و $S_{۱۰۰۰} = ۰/۳۳۳۸۳$ به نظر می‌رسد که S_n به سمت $\frac{۱}{۳}$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود همچنان که n افزایش می‌یابد. درحقیقت

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

از شکل (ج) روشن می‌شود که هر چه n افزایش می‌یابد S_n تقریب بهتری از مساحت ناحیه محدود شده توسط سهمی $y = x^{۲}$ در بازه $[۰, ۱]$ با محور xها بدست می‌دهد. بنابراین مساحت این ناحیه را بصورت حد S_n وقتی که n به بینهایت میل کند تعریف می‌کنیم. برای بکارگیری ایده این مثال برای نواحی کلی‌تر لازم نیست که مستطیلها با عرض‌های مساوی باشند برای این منظور افراز را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱۰. *یك افراز بطول n از $[a, b]$ را که با نماد P_n نمایش می‌دهیم عبارت است از*

$$P_n = \{a = x_{۰}, x_{۱}, x_{۲}, \cdots, x_{i-۱}, x_i, \cdots, x_n = b\}$$

که در آن برای هر $۱ \leq i \leq n$ ، $x_{i-۱} < x_{۱}$ همچنانکه ملاحظه می‌شود هر افراز بطول n، یك مجموعه $n+۱$ نقطه‌ای مرتب است که نقطه شروع آن همواره نقطه شروع بازه یعنی a و نقطه انتهایی آن نقطه انتهایی، بازه یعنی b می‌باشد بدین‌ترتیب بازه $[a, b]$ به n زیر بازه جزء $[x_{i-۱}, x_i]$ برای $۱ \leq i \leq n$ تقسیم می‌شود. طول این بازه را با نماد Δx_i نشان می‌دهیم یعنی $\Delta x_i = x_i - x_{i-۱}$ و با توجه به اینکه همواره $x_{i-۱} < x_i$ پس $\Delta x_i > ۰$ افراز P_n از $[a, b]$ را منظم گوئیم هرگاه طول تمام بازه‌های جزء با هم برابر و برابر مقدار $\frac{b-a}{n}$ باشد به عبارت دیگر $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ برای $۰ \leq i \leq n$ که در این صورت

$$P_n = \left\{a, a+\frac{b-a}{n}, \cdots, a+(i-۱)\frac{b-a}{n}, a+\frac{i(b-a)}{n}, \cdots, a+n\frac{(b-a)}{n} = b\right\}$$

یعنی بازه جزء iام برای افراز منظم P_n از $[a, b]$ عبارت است از $\left[a+\frac{(i-۱)(b-a)}{n}, a+\frac{i(b-a)}{n}\right]$.

اگر P و Q دو افراز از $[a, b]$ باشند آنگاه افراز Q تظریفی از افراز P یا Q را ظریفتر از P نامیم هرگاه $P \subset Q$. توجه نمائید که اگر $P_{۱}$ و $P_{۲}$ دو افراز از $[a, b]$ باشند آنگاه اگر مجموعه $P_{۱} \cup P_{۲}$ را بصورت یك مجموعه مرتب بنویسیم از آن افرازی حاصل می‌شود که هم از $P_{۱}$ و هم از $P_{۲}$ ظریفتر باشد که آنرا

تظریف مشترک P_1 و P_2 نامیم. حال فرض کنید که تابع f بر بازه $[a,b]$ کراندار باشد تعریف می‌کنیم

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

برای $1 \leq i \leq n$.
توجه نمائید که چون تابع f بر $[a,b]$ کراندار فرض شده است پس بر هر زیربازه جزء آن مانند $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leq i \leq n)$ نیز کراندار بوده، در نتیجه m_i و M_i موجودند.

تعریف ۲.۳.۱۰. *فرض کنید که تابع f بر $[a,b]$ کراندار باشد و فرض کنید*
$$P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n = b\}$$

افرازی بطول n از بازه $[a,b]$ باشد در این صورت حاصل جمع پایینی و بالایی متناظر با این افراز را که به ترتیب با نمادهای $L(f,P)$ و $U(f,P)$ نمایش می‌دهیم عبارتند از

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$
$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

که در آن m_i و M_i و Δx_i در بالا تعریف شده‌اند.

توجه نمائید که اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد در این صورت بنا به قضیه ۱.۲.۵ در فصل پیوستگی f بر $[a,b]$ کراندار خواهد بود که اگر f بر $[a,b]$ نامنفی نیز باشد در این صورت برای هر افراز P از $[a,b]$، $L(f,P)$ کمتر از مساحت محصور شده توسط تابع f و خطوط $x = a$ و $x = b$ و محور xها است در صورتیکه $U(f,P)$ همواره بیشتر از مساحت این ناحیه می‌باشد در حالتیکه f بر $[a,b]$ کراندار باشد یعنی عدد مثبتی مانند M موجود باشد که برای هر x در $[a,b]$، $-M < f(x) < M$ آنگاه برای هر افراز P از $[a,b]$ چون همواره $-M < m_i < M_i < M$ و $\Delta x_i > 0$ پس داریم
$$-M\Delta x_i \leq m_i \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \leq M \Delta x_i$$

و با جمع بستن روی i، داریم
$$\sum_{i=1}^{n} (-M)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M \Delta x_i$$

و یا

$$(-M)\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$$

که با توجه خاصیت ادغام ۲.۲.۱۰ (د) داریم

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

بنابراین داریم

$$-M(b-a) < L(f,P) < U(f,P) < M(b-a).$$

پس خانواده $\{L(f,P) : [a,b]$ افراز $P\}$ و $\{U(f,P) : [a,b]$ افراز $P\}$ مجموعه‌هایی کراندار هستند و چون غیرخالی نیز می‌باشند پس بنا به اصل تمامیت به ترتیب سوپرمم و اینفیمم آنها موجود است که آنها را انتگرال پایینی و بالائی تابع f روی $[a,b]$ نامیم.

تعریف ۳.۳.۱۰. *فرض کنید که f بر $[a,b]$ تابعی کراندار باشد. با توجه مطالب فوق انتگرال بالائی و انتگرال پایینی تابع f روی $[a,b]$ راکه به ترتیب با نمادهای f $\overline{\int_a^b}$ و $\underline{\int_a^b}$ نمایش می‌دهیم عبارت است از*

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,P) : \text{است } [a,b] \text{ افراز} P\}$$
$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{U(f,P) : \text{است } [a,b] \text{ افراز} P\}$$

تابع f را انتگرال‌پذیر ریمان یا بطور خلاصه انتگرال‌پذیر گوئیم هرگاه

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

و این مقدار مشترک را با نماد $\int_a^b$ یا با نماد $\int_a^b f(x)dx$ نمایش داده و آنرا انتگرال معین تابع f بر $[a,b]$ نامیم.

مثال ۴.۳.۱۰. *نشان دهید که تابع ثابت $f(x) = c$ روی بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.*

حل. فرض کنید $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n = b\}$، افراز دلخواهی از $[a,b]$

باشد در این صورت برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم.

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= \inf\{c\} = c \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_1]\} \\ &= \sup\{c\} = c \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b-a) \\ U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b-a) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) : [a,b] \text{ افراز } P\} = \sup\{c(b-a)\} = c(b-a)$$

و

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{L(f,P) : [a,b] \text{ افراز } P\} = \inf\{c(b-a)\} = c(b-a)$$

در نتیجه، بنابه تعریف، تابع ثابت C روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

توجه نمائید که با توجه به تعریف انتگرال پایینی و انتگرال بالای برای هر افراز P از $[a,b]$، داریم

$$L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f, \quad \overline{\int_a^b} f \leq U(f,P).$$

توجه نمائید که کراندار بودن فقط یك شرط لازم برای انتگرال‌پذیری است در مثال زیر تابعی ارائه می‌دهیم که کراندار باشد امّا انتگرال‌پذیر نباشد.

مثال ۵.۳.۱۰. *نشان دهید که تابع*

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x\in\mathbb{Q}\cap[۰,۱] \quad \text{اگر} \\ ۰ & x\in\mathbb{Q}'\cap[۰,۱] \quad \text{اگر}\end{cases}$$

روی $[۰,۱]$ *انتگرال‌پذیر نیست (توجه نمائید که* $f=\chi_{\mathbb{Q}}|_{[۰,۱]}$*).*

حل. یادآوری می‌کنیم اعداد گویا و اعداد گنگ در اعداد حقیقی چگال هستند یعنی بین هر دو عدد حقیقی هم اعداد گویا و هم اعداد گنگ وجود دارند. فرض کنید که

$$P=\{۰=x_۰,x_۱,\cdots,x_{i-۱},x_i,\cdots,x_n=۱\}$$

افراز دلخواهی از $[۰,۱]$ باشد در این صورت

$$m_i=\inf\{f(x):x\in[x_{i-۱},x_i]\}=\inf\{۰,۱\}=۰$$
$$M_i=\sup\{f(x):x\in[x_{i-۱},x_i]\}=\sup\{۰,۱\}=۱$$

بنابراین

$$U(f,P)=\sum_{i=۱}^{n}M_i\Delta x_i=\sum_{i=۱}^{n}(x_i-x_{i-۱})=۱-۰=۱$$

و

$$L(f,P)=\sum_{i=۱}^{n}m_i\Delta x_i=۰$$

در نتیجه

$$\underline{\int_۰^۱}=\sup\{L(f,P):\text{است}[۰,۱]\text{افراز }P\}=\sup\{۰\}=۰$$

$$\underline{\int_۰^۱}=\inf\{U(f,P):\text{است}[۰,۱]\text{افراز }P\}=\inf\{۱\}=۱$$

پس $\underline{\int_۰^۱} f\neq\overline{\int_۰^۱} f$ و در نتیجه بنابه تعریف، تابع f انتگرال‌پذیر نیست.

تبصره ۶.۳.۱۰. *اگر تابع* f *بر* $[a,b]$ *کراندار باشد در این صورت با توجه به خاصیت مشخصه سوپرمم*

برای هر $\epsilon > 0$ افرازی مانند P_1 از $[a,b]$ موجود است که

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon < L(f,P_1) \leq \underline{\int_a^b} f$$

و بنابه خاصیت مشخصه اینفیمم افراز P_2 از $[a,b]$ موجود است که

$$\overline{\int_a^b} f \leq U(f,P_2) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$$

اینک نشان می‌دهیم که هر چه افرازها ظریفتر گردند حاصل جمع‌های بالائی یعنی $U(f,P)$ کوچکتر و حاصل جمع‌های پایینی یعنی $L(f,P)$ بزرگتر می‌گردند.

قضیه ۷.۳.۱۰. *فرض کنید P و Q دو فراز $[a,b]$ که $P \subset Q$ در این صورت*
$L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P)$

اثبات. با توجه به استقراء کافی است قضیه را در حالتی اثبات نمائیم که افراز $P \subset Q$ و افراز Q فقط یك نقطه بیشتر داشته باشد یعنی فرض کنید که

$$P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n = b\}$$
$$Q = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_{i-1}, u, x_i, \cdots, x_n = b\}$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \qquad (2.10) \\ &= \sum_{j=1}^{j-1} m_j(x_j - x_{j-1}) + m_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=i+1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

فرض کنید، $m'_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, u]\}$ و $m''_i = \inf\{f(x) : x \in [u, x_i]\}$. چون بازه‌های ، $[x_{i-1}u]$ و $[u, x_i]$ هردو زیر بازه‌های، $[x_{i-1}, x_i]$ هستند پس $m_i \leq m'_i$ و $m_i \leq m''_i$. بنابراین

$$\begin{aligned} m_i(x_i - x_{i-1}) &= m_i(x_i - u + u - x_{i-1}) = m_i(x_i - u) + m_i(u - x_{i-1}) \\ &\leq m''_i(x_i - u) + m'_i(u - x_{i-1}) \end{aligned}$$

در نتیجه با توجه به ۲.۱۰ داریم

$$\begin{aligned} &L(f,P) &(۳.۱۰)\\ &\leq \sum_{j=۱}^{i-۱} m_j(x_j-x_{j-۱}) + m'_i(u-x_{i-۱}) + m''_i(x_i-u) + \sum_{j=i+۱}^{n} m_j(x_j-x_{j-۱})\\ &= L(f,Q). \end{aligned}$$

به طریق مشابه با توجه به اینکه $M'_i \leq M_i$ و $M''_i \leq M_i$ که در آنها

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\}$$
$$M'_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-۱}, u]\}$$
$$M''_i = \sup\{f(x) : x \in [u, x_i]\}$$

می‌توان دید که $U(f,Q) \leq U(f,p)$ و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل شده است. □

نتیجه ۸.۳.۱۰. *فرض کنید که P و Q دو افراز دلخواه از $[a,b]$ باشند در این صورت*
$$L(f,P) \leq U(f,Q)$$

اثبات. در نظر می‌گیریم P' تظریف مشترک P و Q باشد (یعنی $P' = P \cup Q$). در این صورت با توجه به قضیه ۷.۳.۱۰ داریم
$$L(f,P) \leq L(f,P') \leq U(f,P') \leq U(f,Q)$$

و بدین ترتیب نتیجه حاصل شده است. □

توجه نمائید که با توجه به نتیجه فوق داریم که برای هر افراز Q از $[a,b]$، $U(f,Q)$ یک کران بالای مجموعه $\{L(f,P) : \text{است} [a,b] \text{ افراز } P\}$ است $L(f,Q)$ یک کران پایین مجموعه $\{U(f,P) : \text{است} [a,b] \text{ افراز } P\}$ بنابراین داریم

$$\sup\{L(f,P) : \text{است} [a,b] \text{ افراز } P\} \leq U(f,Q)$$

$$\inf\{U(f,P) : \text{است} [a,b] \text{ افراز } P\} \geq L(f,Q)$$

و به عبارت دیگر برای هر دو افراز دلخواه P و Q از $[a,b]$
$$L(f,Q) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U(f,P)$$

اکنون معیاری برای انتگرال‌پذیری تابع کراندار f روی $[a,b]$ بیان می‌کنیم که معروف به محک ریمان است.

قضیه ۹.۳.۱۰ (محک ریمان). *فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ کراندار باشد در این صورت شرط لازم و کافی برای آنکه f انتگرال‌پذیر باشد آن است که برای هر $\epsilon > 0$ افرازی مانند P از $[a,b]$ موجود باشد که*

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

اثبات. ابتدا فرض کنید که f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. در این صورت بنابه تبصره ۶.۳.۱۰ افرازهای P_1 و P_2 از $[a,b]$ موجودند که

$$U(f,P_2) - \overline{\int_a^b} f < \frac{\epsilon}{2}, \quad \underline{\int_a^b} f - L(f,P_1) < \frac{\epsilon}{2}$$

فرض کنید P تظریف مشترک P_1و P_2 باشد در این صورت بنابه قضیه ۷.۳.۱۰ داریم

$$U(f,P \leq U(f,P_2), \quad L(f,P_1) \leq L(f,P)$$

پس داریم

$$U(f,P) - \overline{\int_a^b} f < \frac{\epsilon}{2}, \quad \underline{\int_a^b} f - L(f,P) < \frac{\epsilon}{2}$$

و با جمع کردن این دو نامساوی داریم

$$U(f,P) - \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} f - L(f,P) < \epsilon$$

امّا بنا به فرض چون f انتگرال‌پذیر است پس $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ در نتیجه داریم

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$

که بدین‌ترتیب اثبات قسمت لزوم شرط کامل شده است.

بالعکس: برای اثبات انتگرال‌پذیری بایستی نشان دهیم که $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ و برای این منظور چون $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \geq 0$، کافی است نشان دهیم که برای هر $\epsilon > 0$، $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \epsilon$ پس فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد، در این صورت بنا به فرض افراز P از $[a,b]$ موجود است که

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$

از طرفی بنابه نتیجه ۸.۳.۱۰ داریم

$$L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} \leq U(f,P)$$

بنابراین داریم

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

در نتیجه $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \epsilon$ و بدین‌ترتیب اثبات قضیه کامل شده است. □

مثال ۱۰.۳.۱۰. *نشان دهید که* $\int_0^1 x = \frac{1}{2}$.

حل. فرض کنید n عدد طبیعی دلخواهی باشد افراز منظم $P = \{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}, \cdots, 1\}$ از $[0, 1]$ را در نظر می‌گیریم چون تابع $f(x) = x$ صعودی است پس

$$m_i = f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{i-1}{n}, \quad M_i = f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i}{n}.$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}.\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} i \\ &= \frac{(n-1)(n)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

و

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

بنابراین

$$U(f,P) - L(f,P) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

حال برای $\epsilon > 0$، بنابه اصل ارشمیدسی، عدد طبیعی n موجود است که $\frac{1}{n} < \epsilon$ پس بنا به قضیه ۹.۳.۱۰ تابع $f(x) = x$ در $[0, 1]$ انتگرال‌پذیر است. حال نشان می‌دهیم $\int_0^1 x = \frac{1}{2}$ که بنابه تعریف انتگرال‌پذیری داریم

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = L(f,P) \leq \underline{\int_0^1} x = \int_0^1 x = \overline{\int_0^1} x \leq U(f,P) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

بنابراین

$$-\frac{1}{n} \leq \int_0^1 x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n}$$

و یا

$$\left|\int_0^1 x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{n}.$$

اکنون برای $0 < \epsilon$، بنابه اصل ارشمیدسی عدد طبیعی n موجود است که $\frac{1}{n} < \epsilon$ پس $\left|\int_0^1 x - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$ و یا $\int_0^1 x = \frac{1}{2}$. حال نشان می‌دهیم دسته وسیعی از توابع انتگرال‌پذیر هستند که از جمله توابع پیوسته و توابع یکنوا (توابع صعودی یا نزولی) انتگرال‌پذیر هستند برای این منظور ابتدا یك مفهوم را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۳.۱۰. *اگر دنباله‌ای از افرازها مانند P_n از $[a,b]$ موجود باشد که $\lim_{n\longrightarrow\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} L(f,P_n) = A$ آنگاه f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و داریم*

$$\int_a^b f = A$$

اثبات. فرض کنید که برای دنباله P_n از افرازهای $[a,b]$،

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = A.$$

در این صورت داریم $\lim_{n\to\infty}(U(f,P_n) - L(f,P_n)) = 0$ ، پس بنابه تعریف حد، برای هر $\epsilon > 0$ عددی طبیعی مانند N موجود است که $U(f,P_N) - L(f,P_N) < \epsilon$ پس بنابه محك ریمان تابع f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. حال چون برای هر n

$$L(f,P_n) \leq \int_a^b f \leq U(f,P_n)$$

و داریم

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = A$$

پس بنابه قضیه فشردگی برای دنباله‌ها داریم $\int_a^b f = A$ و بدین‌ترتیب اثبات قضیه کامل شده است. □

مثال ۱۲.۳.۱۰. *فرض کنید $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ با ضابطه*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \quad \text{اگر} \\ 1 & x = 1 \quad \text{اگر} \\ 0 & 1 < x \leq 2 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

نشان دهید که f در بازه $[0,2]$ انتگرال‌پذیر است مقدار $\int_0^2 f$ را بدست آورید.

حل. برای عدد طبیعی دلخواه n افراز P_n $\{0, 1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, 2\}$ از $[0,2]$ را در نظر می‌گیریم در

این صورت چون حداقل مقدار f در بازه‌های $\left[\circ, ۱ - \frac{۱}{n}\right]$ و $\left[۱ + \frac{۱}{n}, ۲\right]$ و $\left[۱ - \frac{۱}{n}, ۱ + \frac{۱}{n}\right]$ برابر صفر و حداکثر مقدار f در زیر بازه‌های فوق به ترتیب برابره و ۱ و ۰ است پس

$$L(f, P_n) = \circ, \quad U(f, P_n) = \frac{۲}{n}.$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \circ$ بنابراین طبق قضیه ۱۱.۳.۱۰ تابع انتگرال‌پذیر بوده و داریم $\int_\circ^۲ f = \circ$.

مثال ۱۳.۳.۱۰. *نشان دهید که تابع $f : [\circ, ۱] \to \mathbb{R}$ با ضابطه*

$$f(x) = \begin{cases} x & \circ \le x < ۱ \quad \text{اگر} \\ ۲ & x = ۱ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

انتگرال‌پذیر است.

حل. برای هر عدد طبیعی n افراز منظم $P_n = \left\{\circ, \frac{۱}{n}, \cdots, \frac{i-۱}{n}, \frac{i}{n}, \cdots, ۱\right\}$ از $[\circ, ۲]$ را در نظر می‌گیریم چون تابع f صعودی است پس در بازه جزء iام، $\left[\frac{i-۱}{n}, \frac{i}{n}\right]$

$$m_i = f\left(\frac{i-۱}{n}\right) = \frac{i-۱}{n}, \quad M_i = f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i}{n}.$$

در نتیجه

$$L(f, P_n) = \sum_{i=۱}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=۱}^{n} \frac{(i-۱)}{n}\frac{۱}{n} = \frac{۱}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n-۱} i = \frac{(n-۱)(n)}{۲n^۲} = \frac{n-۱}{۲n}$$

$$U(f, P_n) = \sum_{i=۱}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=۱}^{n} \frac{i}{n}\frac{۱}{n} = \frac{۱}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n} i = \frac{(n+۱)(n)}{۲n^۲} = \frac{n+۱}{۲n}$$

و چون $\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \frac{۱}{۲}$ پس بنا به قضیه ۱۱.۳.۱۰ داریم $\int_\circ^۱ f = \frac{۱}{۲}$.

تعریف ۱۴.۳.۱۰. *برای افراز دلخواه $P = \{x_\circ = a, x_۱, \cdots, x_{i-۱}, x_i, \cdots, x_n = b\}$ نرم یا (تور) P را که با نماد $\|P\|$ یا $\mu(p)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از*

$$\|P\| = \max\{\Delta x_i : ۱ \le i \le n\}.$$

قضیه ۱۵.۳.۱۰. *اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه f انتگرال‌پذیر است و بعلاوه برای هر $\epsilon > \circ$ عدد $\delta > \circ$ موجود است که برای هر افراز $P = \{x_\circ = a, x_۱, \cdots, x_{i-۱}, x_i, \cdots, x_n = b\}$ که*

$\|P\| < \delta$ و هر نقطه t_i در $[x_{i-۱}, x_i]$ داریم

$$\left|\sum_{i=۱}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f\right| \leq \epsilon$$

اثبات. فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد بنابه ۹.۳.۱۰ (محک ریمان) کافی است افراز P چنان موجود باشد که $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. در نظر می‌گیریم $۰ < \epsilon_۰ < \dfrac{\epsilon}{b-a}$ در این صورت چون f بر$[a,b]$، پیوسته است پس f بر $[a,b]$ بطور یکنواخت پیوسته است یعنی $\delta > ۰$ موجود است که برای هر x و y در $[a,b]$، اگر $|x-y| < \delta$ آنگاه

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon_۰ \tag{۴.۱۰}$$

(تعریف ۱.۳.۵ و توضیحات بعد ار آن را ببینید.)
حال افراز $P = \{x_۰ = a, x_۱, \cdots, x_{i-۱}, x_i, \cdots, x_n = b\}$ را چنان در نظر می‌گیریم که $\|P\| < \delta$. چون f بر $[a,b]$ بطور یکنواخت پیوسته است پس f بر تمام بازه‌های جزء $[x_i, x_{i-۱}], (۱ \leq i \leq n)$ نیز بطور یکنواخت پیوسته است پس بنابه قضیه ۲.۲.۵ در فصل پیوستگی f هم ماکزیمم و هم می‌نیمم مقدار خود را روی بازه $[x_i, x_{i-۱}]$ می‌گیرد یعنی نقاط t_i و t'_i در $[x_i, x_{i-۱}]$ موجودند که

$$f(t_i) = M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\} = \max\{f(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\}$$

$$f(t'_i) = m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\} = \min\{f(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\}$$

در نتیجه چون $\|P\| < \delta$ پس $|t_i - t'_i| < \delta$ و بنابراین ۴.۱۰ نتیجه می‌دهد که $M_i - m_i < \epsilon_۰$ برای $۱ \leq i \leq n$. بنابراین

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=۱}^{n} M_i\Delta x_i - \sum_{i=۱}^{n} m_i\Delta x_i = \sum_{i=۱}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i$$

$$< \epsilon_۰ \sum_{i=۱}^{n} \Delta x_i = \epsilon_۰ \sum_{i=۱}^{n}(x_i - x_{i-۱}) = \epsilon_۰(b-a) < \epsilon.$$

در نتیجه تا کنون نشان داده‌ایم که توابع پیوسته بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر هستند. از طرفی دیگر چون برای هر $t_i \in [x_{i-۱}, x_i]$ داریم $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$ و $\Delta x_i > ۰$ پس داریم

$$L(f,P) = \sum_{i=۱}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=۱}^{n} f(t_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=۱}^{n} M_i\Delta x_i = U(f,p) \tag{۵.۱۰}$$

از طرفی بنا به نتیجه ۸.۳.۱۰ داریم
$$L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P). \qquad (۶.۱۰)$$
پس از ۵.۱۰ و ۶.۱۰ داریم
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f\right| \leq U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$
و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل شده است. $\square$

اکنون به تعریف حاصل جمع ریمان و ارتباط آن با انتگرال می‌پردازیم.

تعریف ۱۶.۳.۱۰. *فرض کنید f بر $[a,b]$ تابعی کراندار و*
$$P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n = b\}$$
افرازی از $[a,b]$ باشد در این صورت $\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ که در آن $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ برای $1 \leq i \leq n$ دلخواه باشند را یك حاصل جمع ریمان تابع f متناظر با افراز P نامند و آنرا با نماد $S(f,P)$ نمایش می‌دهیم.

توجه نمائید که متناظر هر افراز تعدادی نامتناهی حاصل جمع ریمان وجود دارد و همواره داریم
$$L(f,P) \leq S(f,P) \leq U(f,P). \qquad (۷.۱۰)$$
حال اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد در این صورت بنابه محك ریمان برای هر $\epsilon > 0$ افرازی مانند P از $[a,b]$ وجود دارد که $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$ از طرفی همواره
$$L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P). \qquad (۸.۱۰)$$
پس از ۷.۱۰ و ۸.۱۰ داریم
$$\left|S(f,P) - \int_a^b f\right| \leq U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$
حال اگر P_n دنباله‌ای از افرازهای $[a,b]$ باشد که
$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = A$$
آنگاه بنابه قضیه ۱۱.۳.۱۰ داریم $\int_a^b f = A$ امّا از طرفی برای هر حاصل جمع ریمان $S(f,P_n)$ متناظر با افراز P_n نیز داریم
$$L(f,P_n) \leq S(f,P_n) \leq U(f,P_n)$$

در نتیجه بنابه قضیه فشردگی در دنباله‌ها داریم

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = A = \int_a^b f$$

بخصوص اگر f انتگرال‌پذیر و برای هر n، P_nافراز منظم

$$P_n = \left\{x_0 = a, a+\frac{b-a}{n}, \cdots, a+\frac{i(b-a)}{n}, \cdots, b\right\}$$

باشد آنگاه هر حاصل جمع ریمان متناظر با P_n به شکل

$$S(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)$$

است و بنابراین داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i) = \int_a^b f \qquad (۹.۱۰)$$

که $t_i \in \left[a+\frac{(i-1)(b-a)}{n}, a+\frac{i(b-a)}{n}\right]$ برای $1 \leq i \leq n$ دلخواه هستند و بنابه قضیه ۱۵.۳.۱۰ برای توابع پیوسته همواره ۹.۱۰ برقرار است.

مثال ۱۷.۳.۱۰. *فرض کنید f یك تابع پیوسته باشد در این صورت عبارت $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$ را به شکل یك انتگرال معین بنویسید.*

حل. با توجه به مطالب فوق عبارت $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$ را بصورت یك حاصل جمع ریمان تابع f می‌توان در نظر گرفت که نقطه t_i در بازه جزءiام را $\frac{i}{n}$ گرفته باشیم. بنابراین با مقایسه با ۹.۱۰ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f.$$

مثال ۱۸.۳.۱۰. حد $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$ *را بصورت یك انتگرال معین بیان کنید.*

حل. داریم

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$$

که با توجه به مثال ۱۷.۳.۱۰ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_{۰}^{۱}\sqrt{x}.$$

اکنون نشان می‌دهیم که هر تابع یکنوا بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است

قضیه ۱۹.۳.۱۰. *فرض کنید که تابع f بر $[a,b]$ یکنوا (یعنی صعودی یا نزولی) باشد در این صورت f انتگرال‌پذیراست.*

اثبات. قضیه را برای حالتی که f بر $[a,b]$ نزولی است اثبات و در حالت صعودی که اثبات مشابه است به خوانندگان واگذار می‌کنیم. فرض کنید n عدد طبیعی دلخواهی باشد. افراز منظم $P_n=\left\{a,a+\frac{b-a}{n},\cdots,a+\frac{i(b-a)}{n},\cdots,b\right\}$ را در نظر می‌گیریم در این صورت بازه جزؤ i–ام عبارت است از $\left[a+(i-۱)\frac{b-a}{n},+i\frac{b-a}{n}\right]$ و چون بنا به فرض f نزولی است پس داریم

$$M_i=f\left(a+(i-۱)\frac{(b-a)}{n}\right)\quad,\quad m_i=f\left(a+i\frac{(b-a)}{n}\right)\quad i=۱,۲,\cdots,n$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}U(f,P_n)-L(f,P_n)&=\sum_{i=۱}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\\&=\sum_{i=۱}^{n}f\left(a+\frac{(i-۱)(b-a)}{n}\right)-f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)\\&=\frac{b-a}{n}.(f(a)-f(b)).\end{aligned}$$

حال فرض کنید $\epsilon>۰$ دلخواه باشد در این صورت بنابه اصل ارشمیدسی اعداد حقیقی عدد طبیعی n موجود است که $\epsilon>\frac{(b-a)(f(a)-f(b))}{n}$ که بدین‌ترتیب با توجه به محک ریمان (قضیه ۹.۳.۱۰) اثبات کامل است. □

مثال ۲۰.۳.۱۰. *مطلوب است* $\int_{۰}^{۳}۴x^{۲}$.

حل. چون تابع $f(x)=۴x^{۲}$ در $[۰,۳]$ صعودی است پس انتگرال‌پذیر است و داریم

$$\int_{۰}^{۳}۴x^{۲}=\overline{\int_{۰}^{۳}}۴x^{۲}=\underline{\int_{۰}^{۳}}۴x^{۲}.$$

برای عدد طبیعی دلخواه n، افراز منظم بطول n از $[۰, ۳]$ یعنی

$$P = \left\{ ۰, \frac{۳}{n}, ۲ \times \frac{۳}{n}, \cdots, (i-۱)\frac{۳}{n}, i\frac{۳}{n}, \cdots, ۳ \right\}$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت چون تابع $f(x) = ۴x^۲$ روی $[۰, ۳]$ صعودی است پس داریم

$$m_i = f\left((i-۱)\frac{۳}{n}\right) = ۴\left((i-۱)\frac{۳}{n}\right)^۲ = \frac{۳۶}{n^۲}(i-۱)^۲$$
$$M_i = f\left(i\frac{۳}{n}\right) = ۴\left(i\frac{۳}{n}\right)^۲ = \frac{۳۶}{n^۲}i^۲$$

در نتیجه

$$L(f, P) = \sum_{i=۱}^{n-۱} m_i \Delta x_i = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۳۶}{n^۲}(i-۱)^۲ \frac{۳}{n} = \frac{۱۰۸}{n^۳}\sum_{i=۱}^{n}(i-۱)^۲$$
$$= \frac{۱۰۸}{n^۳}\sum_{i=۱}^{n-۱} i^۲ = \frac{۱۰۸}{n^۳}.\frac{(n-۱)n(۲n-۱)}{۶} = \frac{۱۸(n-۱)(۲n-۱)}{n^۲}$$

$$U(f, P) = \sum_{i=۱}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۳۶}{n^۲} i^۲.\frac{۳}{n} = \frac{۱۰۸}{n^۳}\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = \frac{۱۰۸}{n^۳}\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$
$$= \frac{۱۸(n+۱)(۲n+۱)}{n^۲}$$

اکنون داریم

$$\frac{۱۸(n-۱)(۲n-۱)}{n^۲} = L(f, P) \leq \int_۰^۳ ۴x^۲ \leq U(f, P) = \frac{۱۸(n+۱)(۲n+۱)}{n^۲}$$

امّا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱۸(n-۱)(۲n-۱)}{n^۲} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱۸(n+۱)(۲n+۱)}{n^۲} = ۳۶$$

پس بنابه قضیه فشردگی در دنباله‌ها داریم

$$\int_۰^۳ ۴x^۲ = ۳۶$$

حال پایایی انتگرال پذیری را تحت اعمال جبری جمع و تفریق و اینکه توابع انتگرال‌پذیر نامساوی‌ها را حفظ می‌کنند نشان می‌دهیم. همچنین نشان می‌دهیم که اگر تابعی بر یک بازه انتگرال‌پذیر باشد بر هر زیر بازه آن نیز انتگرال‌پذیر است.

قضیه ۲۱.۳.۱۰ (خواص جبری انتگرال پذیری). *(الف) اگر f_1 و f_2 روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند آنگاه f_1+f_2 نیز روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و داریم*

$$\int_a^b f_1+f_2=\int_a^b f_1+\int_a^b f_2$$

(ب) اگر f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه برای هر عدد ثابت α، αf نیز روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و داریم

$$\int_a^b \alpha f=\alpha\int_a^b f$$

(ج) اگر f_1 و f_2 روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و برای هر x در $[a,b]$ داشته باشیم $f(x_1)\leq f(x_2)$ آنگاه

$$\int_a^b f_1\leq\int_a^b f_2$$

(د) اگر f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و $a<c<b$ آنگاه f بر $[a,c]$ و بر $[c,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و داریم

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

(هـ) اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و برای هر x در $[a,b]$، $|f(x)|\leq M$ آنگاه

$$\left|\int_a^b f\right|\leq M(b-a).$$

اثبات. (الف) فرض کنید $f=f_1+f_2$ و فرض کنید

$$P_n=\{x_0=a,x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_n=b\}$$

افراز دلخواهی از $[a,b]$ باشد و

$$M_i=\sup\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\},\qquad m_i=\inf\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\},$$

$$M_i'=\sup\{f_1(x):x\in[x_{i-1},x_i]\},\qquad m_i'=\inf\{f_1(x):x\in[x_{i-1},x_i]\},$$

$$M_i''=\sup\{f_2(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}.\qquad m_i''=\inf\{f_2(x):x\in[x_{i-1},x_i]\},$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} m'_i + m''_i &= m'_i + \inf\{f_۲(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\} \\ &= \inf\{m'_i + f_۲(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\} \\ &\leq \inf\{f_۱(x) + f_۲(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\} \\ &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\} \\ &= m_i \\ &\leq M_i \\ &= \sup\{f_۱(x) + f_۲(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\} \\ &\leq \sup\{M'_i + f_۲(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\} \\ &= M'_i + \sup\{f_۲(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\} \\ &= M'_i + M''_i \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$m'_i + m''_i \leq m_i \leq M_i \leq M'_i + M''_i$ برای $۱ \leq i \leq n$

در نتیجه

$$\begin{aligned} L(f_۱, P) + L(f_۲, p) &= \sum_{i=۱}^{n} m'_i \Delta x_i + \sum_{i=۱}^{n} m''_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=۱}^{n} (m'_i + m''_i) \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=۱}^{n} m_i \Delta x_i \\ &= L(f, P) \leq U(f, P) \\ &= \sum_{i=۱}^{n} M_i \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=۱}^{n} (M'_i + M''_i) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=۱}^{n} M'_i \Delta x_i + \sum_{i=۱}^{n} M''_i \Delta x_i \\ &= U(f_۱, P) + U(f_۲, P) \end{aligned}$$

یا به عبارت دیگر برای هر افراز P از $[a,b]$ داریم

$$L(f_1,P)+L(f_2,P)\leq L(f,P)\leq U(f,P)\leq U(f_1,P)+U(f_2,P). \quad (10.10)$$

فرض کنید $\epsilon>0$ دلخواه باشد در این صورت چون f_1 و f_2 بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر هستند پس بنابه محک ریمان، افرازهای P_1و P_2 از $[a,b]$ موجودند که

$$U(P_1,f_1)-L(P_1,f_1)<\frac{\epsilon}{2},\quad U(P_2,f_2)-L(P_2,f_2)<\frac{\epsilon}{2}$$

حال اگر P تظریف مشترک P_1 و P_2 باشد آنگاه

$$U(P,f_1)-L(P,f_1)\leq U(P_1,f_1)-L(P_1,f_1)<\frac{\epsilon}{2}.$$

بنابراین با توجه به ۱۰.۱۰ داریم

$$U(P,f)-L(P,f)\leq U(P,f_1)-L(P,f_2)-L(P,f_1)-L(P,f_2)<\epsilon$$

در نتیجه با توجه به محک ریمان تابع $f=f_1+f_2$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. بنابراین داریم

$$L(f,P)\leq\int_a^b f\leq U(f,P).$$

از طرفی چون f_2 و f_1 انتگرال پذیرند پس

$$\begin{aligned}L(f_1,P)&\leq\int_a^b f_1\leq U(f_1,P),\\ L(f_2,P)&\leq\int_a^b f_2\leq U(f_2,P).\end{aligned}$$

در نتیجه

$$L(f_1,P)+L(f_2,P)\leq\int_a^b f_1+\int_a^b f_2\leq U(f_1,P)+U(f_2,P)$$

امّا با توجه به ۱۰.۱۰ داریم

$$\left|\int_a^b f_1+\int_a^b f_2-\int_a^b f\right|\leq U(f_1,P)+U(f_2,P)-L(f_1,P)-L(f_2,P)<\epsilon$$

در نتیجه داریم

$$\int_a^b f_1+f_2=\int_a^b f_1+\int_a^b f_2$$

(ب) فرض کنید f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و α عدد ثابت دلخواهی باشد دراین صورت برای هر

افراز $P=\{x_۰=a,x_۱,\cdots,x_{i-۱},x_i,\cdots,x_n=b\}$، اگر $\alpha>۰$ آنگاه چون

$$\begin{aligned}
\sup\{\alpha f(x) : x\in[x_{i-۱},x_i]\} &= \sup\alpha\{f(x) : x\in[x_{i-۱},x_i]\}\\
\inf\{\alpha f(x) : x\in[x_{i-۱},x_i]\} &= \inf\alpha\{f(x) : x\in[x_{i-۱},x_i]\}
\end{aligned}$$

پس داریم

$$U(\alpha f,P)=\alpha U(f,P),\quad L(\alpha f,P)=\alpha L(f,P).$$

در نتیجه اگر $\alpha>۰$،

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b}\alpha f &= \inf\{U(\alpha f,P) : P\text{ افراز }[a,b]\text{ است}\}\\
&= \inf\{\alpha U(f,P) : P\text{ افراز }[a,b]\text{ است}\}\\
&= \alpha\inf\{U(f,P) : P\text{ افراز }[a,b]\text{ است}\}\\
&= \alpha\overline{\int_a^b} f\\
&= \alpha\underline{\int_a^b} f\\
&= \alpha\sup\{L(f,P) : P\text{ افراز }[a,b]\text{ است}\}\\
&= \sup\{\alpha L(f,P) : P\text{ افراز }[a,b]\text{ است}\}\\
&= \sup\{L(\alpha f,P) : P\text{ افراز }[a,b]\text{ است}\}\\
&= \underline{\int_a^b}\alpha f
\end{aligned}$$

و اگر $\alpha<۰$،

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b}\alpha f &= \inf\{U(\alpha f,P) : P\text{ افراز }[a,b]\text{ است}\}\\
&= \inf\{\alpha L(f,P) : P\text{ افراز }[a,b]\text{ است}\}\\
&= \alpha\sup\{L(f,P) : P\text{ افراز }[a,b]\text{ است}\}\\
&= \alpha\underline{\int_a^b} f\\
&= \alpha\overline{\int_a^b} f\\
&= \alpha\inf\{U(f,P) : P\text{ افراز }[a,b]\text{ است}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sup\{\alpha U(f,P) : \text{است}[a,b] \text{ افراز } P\} \\ &= \sup\{L(\alpha f,P) : \text{است}[a,b] \text{ افراز } P\} \\ &= \underline{\int_a^b} \alpha f \end{aligned}$$

بنابراین داریم αf انتگرال‌پذیر بوده و $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

(ج) فرض کنید $P = \{x_۰ = a, x_۱, \cdots, x_{i-۱}, x_i, \cdots, x_n = b\}$ افراز دلخواهی از $[a,b]$ باشد و فرض کنید

$$\begin{aligned} M_i' &= \sup\{f_۱(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\}, \\ M_i'' &= \sup\{f_۲(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\}. \end{aligned}$$

حال چون بنابه فرض برای هر $x \in [a,b]$، $f_۱(x) \leq f_۲(x)$ پس داریم $M_i' \leq M_i''$ در نتیجه

$$U(f_۱,P) = \sum_{i=۱}^{n} M_i' \Delta x_i \leq \sum_{i=۱}^{n} M_i'' \Delta x_i = U(f_۲,P)$$

و در نتیجه

$$\int_a^b f_۱ \leq \int_a^b f_۲.$$

(د) فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد. چون f انتگرال‌پذیر است پس بنابه محک ریمان افرازی مانند Q از $[a,b]$ موجود است که $U(f,Q) - L(f,Q) < \epsilon$ حال اگر نقطه c در Q نباشد و آنرا به افراز اضافه می‌کنیم و بدین ترتیب تظریفی از Q مانند P بدست می‌آید که شامل نقطه c نیز می‌باشد. پس داریم

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon \qquad (۱۱.۱۰)$$

فرض کنید $c = x_{i_۰}$ و $P = \{x_۰ = a, x_۱, \cdots, x_{i-۱}, x_i, \cdots, x_n = b\}$ در این صورت در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} P_۱ &= \{x_۰ = a, x_۱, \cdots, x_{i-۱}, x_i, \cdots, x_{i_۰} = c\}, \\ P_۲ &= \{x_{i_۰} = c, x_{i_۰+۱}, \cdots, x_{i-۱}, x_i, \cdots, x_n = b\}. \end{aligned}$$

که به ترتیب افرازهایی از بازه‌های $[a,c]$ و $[c,b]$ می‌باشند. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} U(f,P_۱) &= U(f,P_۱)+U(f,P_۲), \\ L(f,P_۱) &= L(f,P_۱)+L(f,P_۲). \end{aligned} \tag{۱۲.۱۰}$$

در نتیجه با توجه به ۱۱.۱۰ داریم

$$\begin{aligned} U(f,P_۱)-L(f,P_۱) &\leq U(f,P)-L(f,P)<\epsilon, \\ U(f,P_۲)-L(f,P_۲) &\leq U(f,P)-L(f,P)<\epsilon. \end{aligned}$$

بنابراین بنابه محک ریمان بر $[a,c]$ و بر $[c,b]$ انتگرال‌پذیر است. در نتیجه

$$L(f,P_۱)\leq \int_a^c f\leq U(f,P_۱), \quad L(f,P)\leq \int_c^b f\leq U(f,P)$$

و با جمع کردن این دو نامساوی و با توجه به ۱۲.۱۰ داریم

$$L(f,P)=L(f,P_۱)+L(f,P_۲)\leq \int_a^c f+\int_c^b f\leq U(f,P_۱)+U(f,P_۲)=U(f,P)$$

از طرفی

$$L(f,P)\leq \int_a^b f\leq U(f,P)$$

پس با توجه به ۱۱.۱۰

$$\left|\int_a^c f+\int_c^b f-\int_a^b f\right|\leq U(f,P)-L(f,P)<\epsilon$$

یعنی $\int_a^c f+\int_c^b f=\int_a^b f$.

□

در مقایسه با پیوستگی و مشتق‌گیری که همواره حاصلضرب و ترکیب دو تابع پیوسته و مشتق‌پذیر، پیوسته و مشتق پذیرند این سؤال مطرح می‌شود که آیا این خواص برای توابع انتگرال‌پذیر نیز برقرار است. در مورد ترکیب در حالت کلی جواب منفی است یعنی ممکن است که ترکیب دو تابع انتگرال‌پذیر، انتگرال‌پذیر نباشد حتی اگر f تابعی پیوسته و g انتگرال‌پذیر باشد ممکن است $g\circ f$ انتگرال‌پذیر نباشد امّا می‌توان نشان داد که $f\circ g$ انتگرال‌پذیر است که به علت طولانی بودن اثبات، فقط آنرا بیان می‌نمائیم.

قضیه ۲۲.۳.۱۰. *اگر $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و برد g در بازه $[m,M]$ قرار داشته باشد که $f:[m.M]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه تابع $f\circ g$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.*

اثبات. برای اثبات به کتابهای آنالیز مراجعه شود. □

قضیه ۲۳.۳.۱۰. *اگر f و g روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه،*

(الف) $f.g$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است،

(ب) $|f|$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و داریم $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$،

(ج) $\max\{f,g\}$ و $\min\{f,g\}$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات.

(الف) چون تابع $h(t)=t^{۲}$ پیوسته است پس بنابه قضیه ۲۲.۳.۱۰ داریم که اگر f انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه $f^{۲}$ انتگرال‌پذیر است امّا داریم

$$f.g = \frac{۱}{۴}\left((f+g)^{۲} - (f-g)^{۲}\right).$$

در نتیجه با توجه به قضیه ۲۱.۳.۱۰ داریم $f.g$ انتگرال‌پذیر است.

(ب) چون تابع قدرمطلق تابعی پیوسته است پس اگر f انتگرال‌پذیر باشد بنابه قضیه ۲۲.۳.۱۰، $|f|$ نیز انتگرال‌پذیر است و چون $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ پس بنا به ۲۲.۳.۱۰ داریم

$$-\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

یا به عبارت دیگر

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

(ج) با توجه به اینکه

$$\begin{aligned}\max\{f,g\}(x) &= \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{۲},\\ \min\{f,g\}(x) &= \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{۲}.\end{aligned}$$

و با توجه به قضیه ۲۱.۳.۱۰ و ۲۳.۳.۱۰، اثبات (ج) واضح است.

□

توجه نمائید که قضایای ۲۱.۳.۱۰ و ۲۳.۳.۱۰ را به کمك استقراء می‌توان برای هر تعداد متناهی تعمیم داد. اکنون به بیان اثبات یکی از قضایای اساسی حسابان یعنی قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌پردازیم این قضیه دو مفهوم انتگرال نامعین و انتگرال معین را بهم مربوط می‌سازد و محاسبه انتگرال معین را بسیار ساده می‌سازد بدین ترتیب که اگر ما یك تابع اولیه یك تابع را داشته باشیم در این

صورت محاسبه انتگرال معین بسیار ساده خواهد بود. از اینجا به بعد بجای نماد $\int_a^b$ از نماد $\int_a^b f(t)dt$ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲۴.۳.۱۰. *اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه تابع $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ با ضابطه تعریف $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ روی $[a,b]$ پیوسته است و اگر f در نقطه‌ای مانند $x_\circ$ در $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه F در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و داریم $F'(x_\circ)=f(x_\circ)$.*

اثبات. چون f روی $[a,b]$ کراندار است پس عدد مثبت M موجود است که برای هر $t\in[a,b]$ و $|f(t)|\leq M$ فرض کنید $\epsilon>\circ$ دلخواه باشد. در نظر می‌گیریم $\circ<\delta\leq\frac{\epsilon}{M}$ در این صورت برای هر $x\leq y$ در $[a,b]$ اگر $|x-y|<\delta$ آنگاه

$$\begin{aligned}|F(y)-F(x)| &= \left|\int_a^y f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right|\\ &= \left|\int_x^y f(t)dt\right|\\ &\leq \int_x^y |f(t)|dt\\ &\leq M|y-x|.\end{aligned}$$

بنابراین F بطور یکنواخت پیوسته است. حال فرض کنید f در نقطه $x_\circ$ پیوسته باشد در این صورت برای هر $\epsilon>\circ$ عدد δ موجود است که اگر $x\in[a,b]$ و $|x-x_\circ<\delta|$ آنگاه $|f(x)-f(x_\circ)|<\epsilon$.
اکنون فرض کنید که $|h|<\delta$ در این‌صورت

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_\circ+h)-F(x_\circ)}{h}-f(x_\circ)\right| &= \frac{۱}{|h|}|F(x_\circ+h)-F(x_\circ)-hf(x_\circ)|\\ &= \frac{۱}{|h|}\left|\int_{x_\circ}^{x_\circ+h} f(t)dt-\int_{x_\circ}^{x_\circ+h} f(x_\circ)dt\right|\\ &= \frac{۱}{|h|}\left|\int_{x_\circ}^{x_\circ+h}(f(t)-f(x_\circ))dt\right|\\ &< \frac{\epsilon|h|}{|h|}=\epsilon.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$F'(x_\circ)=f(x_\circ).$$

□

نتیجه ۲۵.۳.۱۰ (نتیجه قضیه اول حساب دیفرانسیل و انتگرال). *اگر* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *پیوسته باشد آنگاه تابع* $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ *با ضابطه* $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ *مشتق‌پذیر است و داریم* $F'(x)=f(x)$.

اثبات. چون بنابه قضیه ۱۵.۳.۱۰ هر تابع پیوسته انتگرال‌پذیر است. پس با توجه به قضیه ۲۴.۳.۱۰ نتیجه واضح است. □

نتیجه ۲۶.۳.۱۰. *اگر f تابعی پیوسته و u تابعی مشتق‌پذیر باشد آنگاه*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{u(x)} f(t)dt\right)=f(u(x)).u'(x).$$

بعلاوه اگر v نیز تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x باشد آنگاه

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt\right)=f(u(x)).u'(x)-f(v(x)).v'(x).$$

اثبات. با توجه به نتیجه قبل و قاعده زنجیری، برهان واضح است. □

مثال ۲۷.۳.۱۰. *مطلوب است*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\sin\sqrt{x^۲+۱}}^{\cos^{-۱}\sqrt{x}}\sqrt{t^۳+۳t^۲+۵}dt\right)$$

حل. با توجه به نتیجه فوق داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\int_{\sin\sqrt{x^۲+۱}}^{\cos^{-۱}\sqrt{x}}\sqrt{t^۳+۳t^۲+۵}dt\right)\\
&=\left(\sqrt{(\cos^{-۱}\sqrt{x})^۳+۳\left(\cos^{-۱}\sqrt{x}\right)^۲+۵}\right)\frac{d\cos^{-۱}\sqrt{x}}{dx}\\
&\quad-\left(\sqrt{\left(\sin^{-۱}\sqrt{x^۲+۱}\right)^۳+۳\left(\sin^{-۱}\sqrt{x^۲+۱}\right)^۲+۵}\right)\left(\cos\sqrt{x^۲+۱}\right)\frac{d\sqrt{x^۲+۱}}{dx}\\
&=-\sqrt{\left(\cos^{-۱}\sqrt{x}\right)^۳+۳\left(\cos^{-۱}\sqrt{x}\right)^۲+۵}\,\frac{۱}{۲\sqrt{x}\sqrt{۱-x}}\\
&\quad-\sqrt{\left(\sin^{-۱}\sqrt{x^۲+۱}\right)^۳+۳\left(\sin^{-۱}\sqrt{x^۲+۱}\right)^۲+۵}\left(\cos\sqrt{x^۲+۱}\right)\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}
\end{aligned}$$

قضیه زیر به قضیه دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال (یا قضیه حسابان)معروف است.

قضیه ۲۸.۳.۱۰ (قضیه دوم حسابان). *اگر* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *پیوسته و* $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ *تابعی مشتق‌پذیر باشد که برای هر* $x\in[a,b]$، $F'(x)=f(x)$ *آنگاه* $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ *معمولاً* $F(b)-F(a)$ *را بصورت* $F(x)|_a^b$ *می‌نویسیم.*

اثبات. با توجه به نتیجه ۲۵.۳.۱۰ داریم که تابع $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ با ضابطه تعریف $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ مشتق‌پذیر بوده و داریم $G'(x)=f(x)$. بنابراین برای هر $x\in[a,b]$، $F'(x)=G'(x)$ بنابراین بنابه قضیه ۲.۱.۱۰ عدد ثابتی مانند c موجود است که برای هر $x\in[a,b]$ داریم

$$G(x)=F(x)+c$$

در نتیجه $G(a)=F(a)+c$ و چون $G(a)=0$ پس $c=-F(a)$ بنابراین داریم

$$G(x)=F(x)-f(a)$$

حال برای $x=b$ داریم $G(b)=F(b)-F(a)$ امّا با توجه به تعریف G داریم

$$G(b)=\int_a^b f(t)dt$$

پس $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$ و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل شده است. □

اکنون به اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که به قضیه تغییر متغیر در انتگرالهای معین معروف و نتیجه مستقیم قضیه ۲۴.۳.۱۰ است.

قضیه ۲۹.۳.۱۰. *فرض کنید* h *تابعی مشتق‌پذیر باشد به قسمی که* h' *بر* $[c,d]$ *انتگرال‌پذیر باشد و فرض کنید* f *تابعی پیوسته بر دامنه تابع* h *باشد در این صورت*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(h(x))h'(x)dx$$

که در آن $a=h(c)$ *و* $b=h(d)$.

اثبات. فرض کنید $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ در این صورت بنابه نتیجه ۲۵.۳.۱۰ داریم که F مشتق‌پذیر بوده و داریم $F'(x)=f(x)$ برای هر $x\in[a,b]$ تابع $G=F\circ h$ را در نظر می‌گیریم که چون F و h هر دو مشتق‌پذیر هستند پس G نیز مشتق‌پذیر است و بنابه قاعده زنجیری داریم $G'=(F'\circ h).h'$ و چون $F'=f$ پس داریم $G'=(f\circ h).h'$

حال چون بنابه فرض f و h هر دو پیوسته هستند پس $f\circ h$ نیز بر $[c,d]$ پیوسته است در نتیجه بنابه قضیه ۲۲.۳.۱۰ بر $[c,d]$ انتگرال‌پذیر است. پس بنابه قضیه ۲۳.۳.۱۰ تابع G' بر $[c,d]$، انتگرال‌پذیر است پس بنابه قضیه دوم حسابان (قضیه ۲۸.۳.۱۰) داریم

$$\int_c^d G'(x)dx=G(d)-G(c)=F(h(d))-F(h(c))=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود. □

اکنون به اثبات قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها می‌پردازیم.

قضیه ۳۰.۳.۱۰ (اولین قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها). *فرض کنید* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *تابع پیوسته باشد در این صورت عدد* $x_\circ$ *در* $[a,b]$ *موجود است که*

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_\circ)(b-a).$$

اثبات. چون f بر $[a,b]$ پیوسته است پس بنابه قضیه ۲.۲.۵ در فصل پیوستگی f هم ماکزیمم و هم می‌نیمم مقدار خود را بر $[a,b]$ می‌گیرد. فرض کنید

$$\begin{aligned} M &= \max\{f(x):x\in[a,b]\},\\ M &= \min\{f(x):x\in[a,b]\}. \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $x\in[a,b]$ داریم $m\le f(x)\le M$ پس بنابه قضیه (ج) ۲۱.۳.۱۰ داریم

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

و یا

$$m\le\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le M$$

و چون $[m,M]$ برد تابع f است پس بنابه قضیه مقدار میانی در فصل پیوستگی $x_\circ$ی در $[a,b]$ موجود است که

$$f(x_\circ)=\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

□

قضیه ۳۱.۳.۱۰ (دومین قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها). *فرض کنید* f *و* g *بر* $[a,b]$ *انتگرال‌پذیر باشند و بعلاوه* f *بر* $[a,b]$ *یکنوا و* g *با آن هم علامت باشد در این صورت عدد* c *در* (a,b) *موجود است که*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx.$$

اثبات. فرض کنید f بر $[a,b]$ صعودی باشد (برهان حالت نزولی مشابه است و به خواننده واگذار می‌شود) در این صورت

$$f(a)=\inf\{f(x):x\in[a,b]\},\quad f(b)=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}.$$

در نتیجه برای هر x در $[a,b]$

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

و چون بنابه فرض g با f هم علامت است پس $f(x)g(x)$ بین $f(a)g(x)$ و $f(b)g(x)$ قرار دارد. در نتیجه $\int_a^b f(x)g(x)dx$ بین $f(a)\int_a^b g(x)dx$ و $f(b)\int_a^b g(x)dx$ قرار می‌گیرد. حال تابع

$$h(x) = f(a)\int_a^x g(t)dt + f(b)\int_x^b g(t)dt$$

را در نظر می‌گیریم در این صورت بنابه قضیه ۲۴.۳.۱۰ h بر $[a,b]$ پیوسته است و

$$h(a) = f(b)\int_a^x g(t)dt, \quad h(b) = f(a)\int_a^b g(t)dt.$$

به عبارت دیگر $\int_a^b f(x)g(x)dx$ بین $h(a)$ و $h(b)$ قرار دارد. بنابراین، بنابه قضیه مقدار میانی در فصل پیوستگی عددی مانند c در(a,b) موجود است که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = h(c) = f(a)\int_a^c g(t)dt + f(b)\int_c^b g(t)dt.$$

□

۴.۱۰ انتگرال‌های ناسره (توسعی)

هنگام تعریف و مطالعه انتگرال ریمان یك تابع، خود را بر توابع کراندار تعریف شده بر بازه‌های بسته و کراندار محدود نمودیم با مطالبی که تاکنون عرضه شده‌اند می‌توانیم این قیدها را از میان برداشته و انتگرال توابع را بر بازه‌های بیکران، یا بازه‌های باز و یا انتگرال توابع بیکران را تعریف کنیم. چنین انتگرالهایی را ناسره نوع اول و نوع دوم نامند. قبل از تعریف این نوع انتگرالها یادآوری می‌کنیم که بازه‌های بسته بیکران به یکی از سه صورت $[a,\infty)$ و $(-\infty,b]$ یا $(-\infty,\infty)$ که در آن b و a اعداد حقیقی دلخواه هستند می‌باشند.

تعریف ۱.۴.۱۰ (انتگرالهای ناسره نوع اول). *فرض کنید a عددی حقیقی و تابع f بر$[a,\infty)$ تعریف شده باشد و برای هر $t \geq a$، تابع f بر $[a,t]$ انتگرال‌پذیر باشد در این صورت تعریف می‌کنیم*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (۱۳.۱۰)$$

مشروط بر اینکه این حد موجود و عددی حقیقی باشد.

به همین ترتیب اگر تابع f بر بازه $(-\infty,b]$ تعریف شده و برای هر $t \leq b$، بر $[t,b]$ انتگرال‌پذیر باشد

آنگاه تعریف می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)dx. \qquad (۱۴.۱۰)$$

هرگاه حد عددی حقیقی باشد در این صورت

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

را همگرا نیز می‌نامند و اگر حدود فوق موجود نباشند آنها را واگرا می‌نامند.

اگر تابع f بر $(-\infty,\infty)$ تعریف شده و

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

همگرا باشند آنگاه تعریف می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

توجه نمائید که با توجه به تعاریف

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ مستقل از a است.

مثال ۲.۴.۱۰. *فرض کنید $a > ۰$ و $p \neq ۱$ اعداد حقیقی دلخواهی باشند. در این صورت نشان دهید $\int_a^\infty \frac{۱}{x^p}dx$ همگرا است هرگاه $p > ۱$ و واگرا است هرگاه $p < ۱$.*

حل. چون برای هر $x \geq ۱$ تابع $\frac{۱}{x^p}$ پس $[a,x]$ پیوسته است پس بر این بازه انتگرال‌پذیر است همچنین‌داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_a^t \frac{dx}{x^p} &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{۱}{(p-۱)}\left(\frac{-۱}{t^{p-۱}}+\frac{۱}{a^{p-۱}}\right)\right)\\
&= \frac{۱}{p-۱}\left(\lim_{t\to\infty} -\frac{۱}{t^{p-۱}}+\frac{۱}{a^{p-۱}}\right)\\
&= \begin{cases} \dfrac{۱}{(p-۱)a^{p-۱}} & \text{اگر } p>۱ \\ +\infty & \text{اگر } p<۱ \end{cases}
\end{aligned}$$

و بدین ترتیب با توجه به تعریف، حل مثال کامل شده است.

مثال ۳.۴.۱۰. *مطلوب است محاسبه* $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}$.

حل. چون

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}x|_0^t=\lim_{t\to\infty}(\tan^{-1}t-\tan^{-1}0)=\frac{\pi}{2},\\ \lim_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}x|_t^0=\lim_{t\to-\infty}(\tan^{-1}0-\tan^{-1}t)=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

پس بنابه تعریف

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

قضیه ۴.۴.۱۰ (آزمون مقایسه برای انتگرالها). *فرض کنید توابع f و g بر بازه $[a,x)$ تعریف شده و برای هر $x\geq a$ بر $[a,x]$ انتگرال‌پذیر باشند و فرض کنید که برای هر $x\geq a$، $0\leq f(x)\leq g(x)$ آنگاه*

(الف) اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز همگرا است،

(ب) اگر $\int_a^\infty f(x)dx$ واگرا باشد، آنگاه $\int_a^\infty g(x)dx$ نیز واگرا است.

اثبات. اثبات این قضیه مستقیما از نامساوی‌های $0\leq\int_a^t f(x)dx\leq\int_a^t g(x)dx$ که به ازای هر $t\geq a$ برقرارند نتیجه می‌شود که جزئیات برهان را به خواننده واگذار می‌نمائیم. □

توجه نمائید که آزمون بالا را می‌توان برای انتگرالهایی که بر $(-\infty,a]$ یا بر $(-\infty,\infty)$ تعریف شده‌اند بکار برد.

قضیه ۵.۴.۱۰. *فرض کنید که توابع f و g بر بازه $[a,\infty)$ تعریف شده باشند در این صورت اگر $\int_a^\infty f(x)dx$ و $\int_a^\infty g(x)dx$ هر دو همگرا باشند آنگاه $\int_a^\infty(\alpha f+\beta g)(x)dx$ نیز همگرا بوده و داریم $\int_a^\infty(\alpha f+\beta g)(x)dx=\alpha\int_a^\infty f(x)dx+\beta\int_a^\infty g(x)dx$ که در آن α و β اعداد حقیقی دلخواهی هستند.*

اثبات. اثبات این قضیه با توجه به تعریف و با توجه به قسمتهای (الف) و (ب) از قضیه ۲۲.۳.۱۰ واضح است. □

توجه نمائید که قضیه فوق را می‌توان برای انتگرالهایی که بر $(-\infty, b]$ یا بر $(-\infty, \infty)$ تعریف شده‌اند نیز بکار برد.

تعریف ۶.۴.۱۰. *اگر تابع f بر $[a, \infty)$ تعریف شده باشد و برای هر $x \geq a$ بر $[a, x]$ انتگرال‌پذیر باشد و بعلاوه اگر $\int_a^\infty |f(x)|dx$ نیز همگرا باشد $\int_a^\infty f(x)dx$ را همگرای مطلق نامیم.*

قضیه ۷.۴.۱۰. *اگر $\int_a^\infty f(x)dx$ همگرای مطلق باشد و تابع g بر $[a, \infty)$ تعریف شده و برای هر $x \geq a$، بر $[a, x]$ انتگرال‌پذیر باشد و برای هر $x \geq a$، $|g(x)| \leq |f(x)|$ آنگاه $\int_a^\infty g(x)dx$ نیز همگرای مطلق است.*

اثبات. با توجه به آزمون مقایسه برای انتگرالها اثبات واضح است. $\square$

نتیجه ۸.۴.۱۰. *اگر $\int_a^\infty f(x)dx$ همگرای مطلق باشد آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ همگرا است.*

اثبات. چون برای هر $x \geq a$،

$$۰ \leq f(x) + |f(x)| \leq ۲|f(x)|$$

و چون بنابه فرض $\int_a^\infty ۲|f(x)|dx$ همگرا است پس بنابه آزمون مقایسه برای انتگرالها $\int_a^\infty (f(x) + |f(x)|)dx$ همگرا است ولی چون $\int_a^\infty |f(x)|dx$ همگرا است پس (با تفریق کردن) $\int_a^\infty f(x)dx$ همگرا است که نتیجه اثبات شده است. $\square$

اکنون به معرفی انتگرالهای ناسره نوع دوم می‌پردازیم.

تعریف ۹.۴.۱۰ (انتگرالهای ناسره نوع دوم). *فرض کنید که تابع f بر $[a, b)$ پیوسته و در b ناپیوسته باشد در این صورت تعریف می‌کنیم $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$ به شرط آنکه حد مزبور یك عدد حقیقی باشد. به همین ترتیب اگر تابع f بر بازه $(a, b]$ پیوسته و در a ناپیوسته باشد در این صورت تعریف می‌کنیم $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$ مشروط بر آنکه این حد یك عدد حقیقی باشد. در این حالات $\int_a^b f(x)dx$ را همگرا و اگر حدود فوق موجود نباشند $\int_a^b f(x)dx$ را واگرا نامیم.*

اگر تابع f در c، $a < c < b$ ناپیوسته و $\int_a^c f(x)dx, \int_c^b f(x)dx$ همگرا باشند آنگاه تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx.$$

مثال ۱۰.۴.۱۰. *مقدار* $\int_{۲}^{۵} \frac{۱}{\sqrt{x-۲}}dx$ *را بیابید.*

حل. با توجه به اینکه تابع $\int_{۲}^{۵} \frac{۱}{\sqrt{x-۲}}dx$ در نقطه $x = ۲$ پیوسته نیست پس انتگرال از نوع انتگرال ناسره نوع دوم است، بنابراین بنا به تعریف

$$\begin{aligned}
\int_{۲}^{۵} \frac{dx}{\sqrt{x-۲}} &= \lim_{t\to ۲^+} \int_{t}^{۵} (x-۲)^{-\frac{۱}{۲}} dx \\
&= \lim_{t\to ۲^+} ۲(\sqrt{x-۲}|_{t}^{۵}) \\
&= ۲(\sqrt{۳} - \lim_{t\to ۲^+} \sqrt{t-۲}) = ۲\sqrt{۳}
\end{aligned}$$

توجه نمائید که یك تابع اولیه $\frac{۱}{\sqrt{x-۲}}$ تابع $۲\sqrt{x-۲}$ است پس قضیه اساسی حساب و دیفرانسیل انتگرال را بکار برده‌ایم.

مثال ۱۱.۴.۱۰. *نشان دهید که انتگرال ناسره* $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ *همگرا است.*

حل. نخست توجه نمائید که چون تابع $\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ در نقطه ۱ ناپیوسته (بی کران) است. پس انتگرال مورد بحث ناسره است. ابتدا نشان می‌دهیم که $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x}}$ همگرا است، که چون $۰ \geq \sqrt{۱-x}$ پس همگرایی و همگرایی مطلق یکسان هستند. امّا داریم

$$\begin{aligned}
\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x}} &= \lim_{t\to ۱^-} \int_{۰}^{t} (۱-x)^{-\frac{۱}{۲}} dx = \lim_{t\to ۱^-} (-۲\sqrt{۱-x})|_{۰}^{t} \\
&= ۲ - \lim_{t\to ۱^-} ۲\sqrt{۱-t} = ۲
\end{aligned}$$

در نتیجه $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x}}$ همگرای مطلق است ولی برای $۰ \leq x \leq ۱$

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{x+۱}} . \frac{۱}{\sqrt{۱-x}} \leq \frac{۱}{\sqrt{۱-x}}.$$

بنابراین بنابه آزمون مقایسه $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ همگرای مطلق است و نتیجه مطلوب بدست آمده است.

گزاره ۱۲.۴.۱۰. *انتگرال* $\int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{x^{۲}+\sqrt{x}}$ *در هیچیك از دو نوع انتگرال ناسره نمی‌گنجد زیرا این*

انتگرال هم در بازه $(\circ, \infty)$ است و هم تابع $\frac{1}{x^2+\sqrt{x}}$ در صفر کراندار نیست. ولی با این وجود $\int_\circ^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$ را یك انتگرال ناسره می‌نامیم زیرا می‌توان آنرا به دو انتگرال $j_1 = \int_\circ^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$ و $j_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$ تفکیك کرد. اکنون j_1 یك انتگرال ناسره نوع دوم است زیرا برای هر $\circ \leq x \leq 1$ داریم

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

و

$$\int_\circ^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to\circ^+} \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{t\to\circ^+} 2\sqrt{x}|_t^1 = 2 - \lim_{t\to\circ^+} 2\sqrt{t} = 2$$

و j_2 نیز یك انتگرال ناسره نوع اول همگرا است زیرا برای هر $x \geq 1$،

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} \leq \lim_{t\to+\infty} \int_1^\infty x^{-2} dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{-1}{x}|_1^t = 1 - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 1$$

بطورکلی، اگر انتگرال j را بتوان با این روش به دو یا چند انتگرال ناسره نوع اول یا نوع دوم مانند $j_1, \cdots, j_k$ تفکیك کرد، و اگر تمام این انتگرالها همگرا باشند می‌گوئیم j یك انتگرال ناسره همگرا است. امّا، اگر یکی یا چند تا از آنها واگرا باشند، j را یك انتگرال ناسره واگرا می‌نامیم.

مثال ۱۳.۴.۱۰. *نشان دهید که $\int_\circ^\infty \frac{dx}{x^2}$ یك انتگرال ناسره واگرا است.*

حل. چون $\int_\circ^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_\circ^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ که $\int_\circ^1 \frac{dx}{x^2}$ انتگرال ناسره نوع دوم و $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ یك انتگرال ناسره نوع اول است و انتگرال $\int_\circ^1 \frac{dx}{x^2}$ واگرا است زیرا

$$\int_\circ^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to\circ^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to\circ^+} \frac{-1}{x}|_t^1 = \lim_{t\to\circ^+} \frac{1}{t} - 1 = +\infty.$$

پس با توجه به تبصره فوق $\int_\circ^\infty \frac{dx}{x^2}$ واگرا است.

مثال ۱۴.۴.۱۰. *نشان دهید که $\int_{-\infty}^\infty \frac{1+x}{1+x^2}$ یك انتگرال ناسره واگرا است.*

حل. انتگرال فوق را به دو انتگرال ناسره نوع اول $\int_{-\infty}^1 \frac{1+x}{1+x^2}$ و $\int_1^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}$ تفکیك

می‌کنیم که چون برای هر $x \geq 1$ داریم $\frac{1+x}{1+x^2} \leq \frac{1}{x}$ و

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} \\
&\geq \lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \infty \quad \text{(برای تساوی آخر فصل دنباله‌ها را ببینید)}
\end{aligned}$$

پس $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ واگراست و بنابراین $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}$ واگرا خواهد بود.

تبصره ۱۵.۴.۱۰. *توجه نمائید که در $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ حق نداریم همگرائی و واگرائی با موجود بودن یا موجود نبودن $\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{+t} f(x)dx$ تعیین نمائیم چون مثلاً در انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ داریم*

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} xdx = 0$$

و حال آنکه $\int_{-\infty}^{0} xdx$ و $\int_{0}^{\infty} xdx$ واگرا هستند.

در حالت کلی اگر $\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx$ موجود باشد آن را مقدار اصلی کشی $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ نامند، می‌توان نشان داد که اگر $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ به عدد A همگرا باشد آنگاه مقدار اصلی کشی آن نیز برابر A است ولی همانطور که درباره $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ دیدیم عکس آن برقرار نیست. یعنی ممکن است مقدار اصلی کشی وجود داشته باشد و حال آنکه انتگرال واگرا باشد.

۵.۱۰ مسایل نمونه حل شده

مساله ۱.۵.۱۰. *فرض کنید $b > a > ۱$ در این صورت برای تابع $\frac{۱}{x^۲}$ به کمک تعریف مقدار $\int_a^b f(x)dx$ را بیابید.*

حل. چون تابع f در $[a,b]$ پیوسته است پس انتگرال‌پذیر است فرض کنید
$$P = \{x_۰ = a, x_۱, \cdots, x_{i-۱}, x_i, \cdots, x_n = b\}$$

افراز دلخواهی از $[a,b]$ باشد در این صورت داریم

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\} = \frac{۱}{x_i^۲},$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\} = \frac{۱}{x_{i-۱}^۲}.$$

اما چون همواره $\frac{۱}{x_{i-۱}^۲} > \frac{۱}{x_i x_{i-۱}} > \frac{۱}{x_i^۲}$ پس داریم
$$\frac{x_i - x_{i-۱}}{x_i^۲} < \frac{x_i - x_{i-۱}}{x_i x_{i-۱}} < \frac{x_i - x_{i-۱}}{x_{i-۲}^۲}.$$

بنابراین
$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i - x_{i-۱}}{x_i^۲} < \sum_{i=۱}^{n} \left(\frac{۱}{x_{i-۱}} - \frac{۱}{x_i}\right) < \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i - x_{i-۱}}{x_{i-۲}^۲}$$

در نتیجه داریم
$$L(f,P) < \frac{۱}{a} - \frac{۱}{b} < U(f,P)$$

از طرفی داریم
$$L(f,P) < \int_a^b \frac{۱}{x^۲} dx < U(f,P)$$

پس برای هر افراز P از $[a,b]$
$$\left| \int_a^b \frac{۱}{x^۲} dx - \left(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}\right) \right| < U(f,P) - L(f,P)$$

بنابراین
$$\int_a^b \frac{۱}{x^۲} dx = \frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}$$

مساله ۲.۵.۱۰. *فرض کنید* $b > a > 0$ *به کمک تعریف نشان دهید* $\int_a^b \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$

حل. چون تابع $\frac{1}{x^3}$ در $[a,b]$ نزولی و پیوسته است پس انتگرال‌پذیر می‌باشد فرض کنید $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n = b\}$ افرازی از $[a,b]$ باشد در این صورت داریم

$$m_i = \frac{1}{x^3}, \quad M_i = \frac{1}{x_{i-1}^3}.$$

اما چون همواره

$$\frac{1}{x_i^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{x_{i-1}^2 x_i^2}\right) < \frac{1}{x_{i-1}^3}$$

پس

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i^3} < \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1})}{x_{i-1}^2 x_i^2}\right) < \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}^3}$$

یا

$$L(f,P) < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}^2} - \frac{1}{x_i^2}\right) < U(f,P)$$

در نتیجه برای هر افراز P از $[a,b]$

$$L(f,P) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) < U(f,P)$$

از طرفی داریم

$$L(f,P) < \int_a^b \frac{1}{x^3}dx < U(f,P)$$

پس برای هر افراز P از $[a,,b]$،

$$\left|\int_a^b \frac{dx}{x^3} - \frac{1}{2}(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2})\right| < U(f,P) - L(f,P)$$

بنابراین

$$\int_a^b \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}).$$

مساله ۳.۵.۱۰. *به کمک تعریف انتگرال نشان دهید که* $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$.

حل. چون تابع $f(x) = x^3$ در، $[0,b]$ پیوسته است پس انتگرال‌پذیر است. افراز منظم

$\left\{۰, \frac{b}{n}, \cdots, (i-۱)\frac{b}{n}, i\frac{b}{n}, \cdots, b\right\}$ در $[۰, b]$ را در نظر می‌گیریم در این صورت داریم

$$M_i = \sup\left\{f(x) : x \in \left[(i-۱)\frac{b}{n}, i\frac{b}{n}\right]\right\} = \left(i\frac{b}{n}\right)^۳.$$

پس

$$U(f,P) = \sum_{i=۱}^{n}\left(i\frac{b}{n}\right)^۳ \frac{b}{n} = \left(\frac{b}{n}\right)^۴ \sum_{i=۱}^{n} i^۳ = \left(\frac{b}{n}\right)^۴ \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲.$$

اما اگر $n \to a$ آنگاه $\Delta x_i \to ۰$ پس

$$\int_۰^b x^۴ dx = \lim_{n\to a} \frac{b^۴}{۴}\frac{n^۲(n+۱)^۲}{n^۴} = \frac{b^۴}{۴}.$$

مساله ۴.۵.۱۰. *نشان دهید* $\int_۰^n [x]dx = \frac{n(n-۱)}{۲}$.

حل. چون تابع $f(x) = [x]$ تابعی صعودی است پس انتگرال‌پذیر است با توجه به قضیه ۲۱.۳.۱۰ (د) داریم

$$\int_۰^n [x]dx = \sum_{k=۱}^{m}\int_{k-۱}^{k}[x]dx$$

$$\sum_{i=۱}^{n}\int_{k-۱}^{k}(k-۱)dx = \sum_{i=۱}^{n}(k-۱) = \sum_{k=۰}^{n-۱}k = \sum_{k=۱}^{n-۱}k = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

مساله ۵.۵.۱۰. *نشان دهید که تابع*

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x \text{ به شکل } a+b\sqrt{۲} \text{ باشد که } b, a \text{ اعداد گویا هستند} \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

در فاصله $[۰, ۱]$ انتگرال‌پذیر نیست.

حل. توجه نمائید که اعداد به شکل $a+b\sqrt{۲}$ (a, bاعداد گویا) در اعداد حقیقی چگال هستند چون مجموعه این اعداد شامل اعداد گویا هستند. فرض کنید

$$P = \{x_۰ = a, x_۱, x_۲, \cdots, x_{i-۱}, x_i, \cdots, x_n = ۱\}$$

افراز دلخواهی از $[۰, ۱]$ باشد در این صورت داریم

$$m_i = ۰, \quad M_i = ۱.$$

پس

$$L(f,P)=0, \quad U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} = 1.$$

پس $U(f,P)-L(f,P)=1$ در نتیجه با توجه به محک ریمان این تابع انتگرال‌پذیر نیست.

مساله ۶.۵.۱۰. *به کمک تعریف* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ *را بیابید.*

حل. چون تابع کسینوس پیوسته است پس انتگرال موجود است فرض کنید

$$P=\left\{0,\frac{\pi}{2n},\cdots,(i-1)\frac{\pi}{2n},i\frac{\pi}{2n},\cdots,\frac{\pi}{2}\right\}.$$

در این صورت با در نظر گرفتن $t_i=i\frac{\pi}{2n}$ داریم

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(t_i)=\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\cos i\frac{\pi}{2n}.$$

اما با توجه به اتحاد $\sum_{i=1}^{n}\cos ix=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$ داریم

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i=\frac{\pi}{2n}\frac{\sin\frac{n\pi}{2(2n)}\cos\frac{n+1}{2}.\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}=\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\cos(\frac{n+1}{n}\frac{\pi}{4})}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim\frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{2n}}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

۶.۱۰ مسایل

۱. *نشان دهید که اگر تابع* f *روی* $[a,b]$ *انتگرال‌پذیر و مثبت باشد آنگاه* $\int_a^b f(x)dx>0$.

۲. *اگر* f ، g *روی* $[a,b]$ *انتگرال‌پذیر باشند و برای هر* x *در* $[a,b]$ ، $f(x)\le g(x)$ *آنگاه*

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$$

۳. *نشان دهید که*

$$\int_{ac}^{bc} f(x)dx=c\int_a^b f(x)dx.$$

۴. نشان دهید

الف)

$$\int_{۱}^{a} \frac{۱}{x}dx = \int_{b}^{ab} \frac{۱}{x}dx,$$

ب)

$$\int_{۱}^{a} \frac{۱}{x}dx + \int_{۱}^{b} \frac{۱}{x}dx = \int_{۱}^{ab} \frac{۱}{x}dx.$$

۵. فرض کنید که f تابعی صعودی باشد نشان دهید که

$$\int_{a}^{b} f^{-۱}(x)dx = bf^{-۱}(b) - af^{-۱}(a) - \int_{f^{-۱}(a)}^{f^{-۱}(b)} f(x)dx.$$

۶. تابع S روی $[a, b]$ را یك تابع پله‌ای نامیم هرگاه افرازی مانند

$$P = \{x_{\circ} = a, x_{۱}, \cdots, x_{i-۱}, x_i, \cdots, x_n = b\}$$

از $[a, b]$ موجود باشد بطوریکه s روی هر یك از $(x_{i-۱}, x_i)$ ثابت باشد.

الف) نشان دهید که اگر f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه برای هر $\epsilon > \circ$ توابع پله‌ای $S_{۱}$ و $S_{۲}$ موجودند که $S_{۱} \leq f \leq S_{۲}$ و $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b S_{۱}(x)dx < \epsilon$ و $\int_a^b S_{۲}(x)dx - \int_a^b f(x)dx > \epsilon$.

ب) فرض کنید برای هر $\epsilon > \circ$ توابع پله‌ای $S_{۱}$ و $S_{۲}$ موجود باشند $S_{۱} \leq f \leq S_{۲}$ و $\int_a^b S_{۲}dx - \int_a^b S_{۱}dx < \epsilon$ در این صورت f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است.

۷. فرض کنید f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد در این صورت برای هر $\epsilon > \circ$ تابع پیوسته $g \leq f$ موجود است که $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx < \epsilon$.

۸. تابعی مانند $f(x) \geq \circ$ مثال بزنید که برای بعضی از نقاط $x \in [a, b]$، $f(x) > \circ$ اما $\int_a^b f(x)dx = \circ$.

۹. نشان دهید که اگر برای هر x در $[a, b]$، $f(x) \geq \circ$ و در نقطه $x_{\circ}$ در $[a, b]$ پیوسته و $f(x_{\circ}) > \circ$ آنگاه $\int_a^b f(x)dx > \circ$.

۱۰. نشان دهید که اگر f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و برای هر x در $[a,b]$، $f(x) > \circ$ آنگاه $\int_a^b f(x)dx > \circ$.

۱۱. نشان دهید که f روی $[a,b]$ پیوسته و برای هر تابع پیوسته g روی $[a,b]$، $\int_a^b f(x)g(x)dx = \circ$ آنگاه $f = \circ$.

۱۲. تابع f روی $[\circ, ۱]$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم،

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{q} & \text{اگر } x = \frac{p}{q} \text{ و } (p,q) = ۱ \\ \circ & \text{اگر } x \text{ اصم باشد} \end{cases}$$

در این صورت نشان دهید که $\int_\circ^۱ f(x)dx = \circ$.

۱۳. دو تابع انتگرال‌پذیر مثال بزنید که ترکیب آنها انتگرال‌پذیر نباشد.

۱۴. دو تابع مثال بزنید که مجموع آنها انتگرال‌پذیر باشد اما خودشان انتگرال‌پذیر نباشند.

۱۵. نشان دهید که اگر f و g روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند آنگاه

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^۲ \leq \left(\int_a^b f^۲(x)dx\right)\left(\int_a^b g^۲(x)dx\right).$$

۱۶. حدود زیر را به انتگرالهای معین تبدیل نمائید.

الف)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n} + \frac{۱}{n+۱} + \cdots + \frac{۱}{n+n}\right)$$

ب)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^۲+۱} + \frac{n}{n^۲+۲^۲} + \cdots + \frac{n}{n^۲+۴n^۲}\right)$$

ج)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(\sqrt{\frac{۱}{n}} + \sqrt{\frac{۲}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

د)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+۱)^۲} + \frac{n}{(n+۲)^۲} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^۲}\right)$$

۱۷. ثابت کنید

الف)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n^۲}+\frac{۲}{n^۲}+\cdots+\frac{n-۱}{n^۲}\right)=\frac{۱}{۲}$$

ب)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^۲+۱}+\frac{n}{n^۲+۲^۲}+\cdots+\frac{n}{n^۲+n^۲}\right)=\frac{\pi}{۴}$$

۱۸. اولاً با استقرا نشان دهید که $\sum_{m=۱}^{۲n}\frac{(-۱)^{m+۱}}{m}=\sum_{k=n+۱}^{۲n}\frac{۱}{k}$ ، ثانیا با استفاده از قسمت قبل مساله $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=۱}^{۲n}\frac{(-۱)^{m+۱}}{m}$ را به صورت یک انتگرال معین بنویسید.

۱۹. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{kn^۲}{(n^۲+k^۲)^۲}$ را بیابید.

۲۰. مشتق توابع زیر را بیابید.

(الف)

$$F(x)=\int_a^{\left(\int_۱^x \sin^۳ t dt\right)}\frac{۱}{۱+\sin^۶ t+t^۲}dt$$

ب) $F(x)=\int_۰^x f(t)dt$ که در آن

$$f(x)=\begin{cases}۱ & \text{اگر } x=\frac{۱}{n} \text{ (برای } n\in\mathbb{N})\\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}$$

ج) $F(x)=\int_۰^x f(t)dt$ که در آن

$$f(x)=\begin{cases}۰ & \text{اگر } x\leq ۰\\ \frac{۱}{\left[\frac{۱}{x}\right]} & \text{اگر } x\geq ۰\end{cases}.$$

۲۱. با فرض $F(x)=\int_۱^x \frac{۱}{t}dt$ ، $\left(F^{-۱}\right)'(x)$ را بیابید.

۲۲. با فرض $F(x) = \int_{۱}^{x} \frac{۱}{\sqrt{۱-t^{۲}}}dt$، $\left(F^{-۱}\right)'(x)$ را بیابید.

۲۳. مطلوب است $\left(f^{-۱}\right)'(۰)$ وقتی‌که $f(x) = \int_{۰}^{x} (۱+\sin(\sin t))dt$.

۲۴. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{\sqrt{x}} & ۰ \leq x \leq ۱ \\ \frac{۱}{x^{۲}} & x \geq ۱ \end{cases}$ مطلوب است $\int_{۰}^{\infty} f(x)dx$.

۲۵. نشان دهید $\int_{۰}^{\infty} x^{r}\,dx$ برای هر عدد حقیقی r واگراست.

فصل ۱۱

لگاریتم و توابع وابسته به آن

یکی از موارد استفاده قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، تعریف تابع لگاریتم، تابع نمائی، توابع توانی و توابع هذلولی است. تابع لگاریتم طبیعی و لگاریتم در مبنای a $(a > ۰)$

تعریف ۱.۱.۱۱. *تابع لگاریتم طبیعی را که با نماد $\ln$ نمایش می‌دهیم عبارت است از $\ln : (۰, \infty) \to \mathbb{R}$ با ضابطه تعریف $\ln(x) = \int_{۱}^{x} \frac{dt}{t}$. توجه نمائید که چون تابع $\frac{۱}{t}$ در بازه‌ی $(۰, \infty)$ پیوسته است بنا به قضیه اساسی، $\ln x$ برای هر $x > ۰$ موجود و تابعی مشتق‌پذیر است. سایر خواص آن‌را در زیر لیست می‌نمائیم.*

قضیه ۲.۱.۱۱ (خواص تابع لگاریتم طبیعی).

(الف) $\ln ۱ = ۰$

(ب) $(\ln x)' = \frac{۱}{x}$ و $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ *که در آن u تابعی مشتق‌پذیر حسب x می‌باشد*

(ج) برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y

$$\ln(x.y) = \ln x + \ln y$$

(د) برای هر عدد حقیقی مثبت x

$$\ln \frac{۱}{x} = -\ln x$$

(ه) برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

(ر) برای هر عدد گویای r

$$\ln(x^r) = r\ln x$$

اثبات. برهان خواص (الف) و (ب) با توجه به خواص انتگرال و قضیه اساسی و قاعده زنجیری واضح است

(ج) فرض y عددی حقیقی مثبت دلخواه و ثابت باشد در این صورت چون

$$\frac{d\ln(yx)}{dx} = \frac{y}{yx} = \frac{۱}{x} = \frac{d\ln x}{dx}$$

بنابراین عدد ثابت c موجود است که $\ln(yx) = \ln x + c$ حال اگر بجای x عدد ۱ بگذاریم داریم

$$\ln y = \ln ۱ + c = c$$

در نتیجه $\ln(yx) = \ln x + \ln y$

(د) با توجه به (الف) و (ج) برای هر $x > ۰$ داریم

$$۰ = \ln ۱ = \ln(x.\frac{۱}{x}) = \ln x + \ln\frac{۱}{x}$$

در نتیجه $\ln\frac{۱}{x} = -\ln x$

(ه) با توجه به (ج) و (د) واضح است.

(ر) فرض کنید r یك عدد گویای دلخواه باشد در این صورت برای هر $x > ۰$ داریم

$$\frac{d(r\ln x)}{dx} = \frac{rd\ln x}{dx} = \frac{r}{x} = \frac{rx^{r-۱}}{x^r} = \frac{d(\ln x^r)}{dx}$$

بنابراین عدد ثابت c موجود است که

$$r\ln x = \ln x^r + c$$

حال اگر بجای x عدد ۱ قرار دهیم داریم

$$r\ln ۱ = \ln ۱ + c$$

و یا $۰ + c = ۰$ یعنی $c = ۰$ بنابراین

$$\ln x^r = r\ln x$$

□

اکنون نشان می‌دهیم که بُرد تابع لگاریتم تمام اعداد حقیقی است و پایه لگاریتم طبیعی عدد نپر است.

قضیه ۳.۱.۱۱.

(الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

(ب) $\lim\limits_{x\to\circ^+}\ln x=-\infty$

اثبات. (الف) با توجه (ب)۲.۱.۱۱ چون $(\ln x)'=\frac{۱}{x}>\circ$ پس تابع لگاریتم تابعی اکیدا صعودی است و چون بر $[۱,\infty)$ تابعی پیوسته است اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\neq+\infty$ پس $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=a$ (فرض خلف) دراین صورت برای $\epsilon=۱$ بنا به تعریف حد، عدد مثبت M موجود است که برای هر عدد حقیقی x اگر $x>M$ آنگاه
$$|\ln x-a|<۱$$

پس با توجه به نامساوی مثلث $|\ln x|-|a|<۱$ و یا $|\ln x|<۱+|a|$ حال برای $N=[M]+۱$ اگر عدد طبیعی $n>N$، آنگاه $۲^n>M$ بنابراین $|\ln ۲^n|<۱+|a|$ و در نتیجه $n\ln ۲<۱+|a|$ و چون $\ln ۱=\circ$ و تابع لگاریتم اکیدا صعودی است پس $\ln ۲>\circ$، بنابراین برای هر عدد طبیعی $n>N$ داریم $n<\frac{۱+|a|}{\ln ۲}$ این بدین‌معنی است که اعداد طبیعی از بالا کراندار هستند که یك تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است یعنی اثبات قسمت (الف) کامل شده است.

(ب) با توجه به قسمت (الف)، قضیه ۱۲.۴.۴ در فصل حد و قضیه (د) ۲.۱.۱۱ داریم
$$\lim_{x\to\circ^+}\ln x=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{۱}{x}=-\lim_{x\to+\infty}\ln x=-\infty$$

□

اکنون با توجه به قضیه فوق و با توجه به اینکه تابع لگاریتم تابعی اکیدا صعودی و پیوسته است بنا به قضیه مقدار میانی در فصل پیوستگی عدد منحصر به فرد $E>۱$ موجود است که $\ln E=۱$ در قضیه بعد نشان می‌دهیم $E=e$ یادآوری می‌کنیم
$$e=\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$$

قضیه ۴.۱.۱۱. *پایه لگاریتم طبیعی عدد نپر e است.*

اثبات. چون بنا به قضیه (ب)۲.۱.۱۱، برای هر $\frac{d\ln x}{dx}=\frac{۱}{x}$
$$\frac{۱}{x}=\lim_{h\to\circ}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

در نتیجه برای $x = ۱$ داریم

$$
\begin{aligned}
۱ = \lim_{h\to ۰} \frac{\ln(۱+h) - \ln ۱}{h} &= \lim_{h\to\infty} \frac{\ln(۱+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to ۰^+} + \frac{\ln(۱+\frac{۱}{h})}{\frac{۱}{h}}
\end{aligned}
$$

اکنون با توجه به قضیه در فصل حد داریم

$$۱ = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln ۱ + \frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}}$$

و در نتیجه با توجه به تذکر ۸.۱.۹ در فصل دنباله داریم

$$۱ = \lim_{n\to\infty} \left(n \ln \left(۱ + \frac{۱}{n} \right) \right) = \lim_{n\to\infty} \ln \left(۱ + \frac{۱}{n} \right)^n$$

و در نتیجه با توجه به قضیه ۲.۱.۱۱ (ر) و پیوستگی تابع لگاریتم داریم

$$۱ = \ln e$$

از طرفی داشتیم که $۱ = \ln E$، پس $\ln e = \ln E$ و چون تابع لگاریتم یك به یك است پس $e = E$ بنابراین $\ln e = ۱$ □

۲.۱۱ نمودار تابع لگاریتم

با توجه به قضیه ۳.۱.۱۱ و قضیه ۲.۱.۱۱ داریم که تابع لگاریتم تابعی پیوسته، اکیدا صعودی و بُرد آن تمام اعداد حقیقی است. همچنین چون $\frac{d^۲ \ln x}{dx^۲} = -\frac{۱}{x^۲} < ۰$ پس این تابع همواره مقعر به سمت پایین است. همچنین قضیه ۳.۱.۱۱ (ب) نشان می‌دهد که محور y ها یك مجانب قائم آن می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱۱. *فرض کنید $a > ۰$ و $a \neq ۱$ در اینصورت لگاریتم در مبنای a را که با نماد $\log_a$ نمایش می‌دهیم عبارت است از $\log_a : (۰,\infty) \to \mathbb{R}$ با ضابطه تعریف $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ در این صورت همچنانکه از تعریف روشن است تابع لگاریتم در مبنای a تابعی پیوسته با حوزه تعریف ، $(۰,\infty)$ و بُرد $\mathbb{R}$ است که $\log_a a = ۱$ و اکیدا صعودی اگر $a > ۱$، اکیدا نزولی اگر $۰ < a < ۱$ سایر خواص آن را در زیر لیست می‌کنیم.*

قضیه ۲.۲.۱۱. ***خواص لگاریتم در مبنای*** $۱ \neq a > ۰$

(الف) $\log_a^۱ = ۰$

(ب) $(\log_a x)' = \frac{۱}{(\ln a)x}$ و $(\log_a(u(x)))' = \frac{u'(x)}{(\ln a)u(x)}$ که در آن $u(x)$ تابعی مشتق‌پذیر است.

(ج) برای هر جفت اعداد مثبت x و y

$$\log_a(xy) = \log_a x + log_a y$$

(د) برای هر عدد مثبت x

$$\log_a \frac{۱}{x} = -\log_a x$$

(ذ) برای هر دو عدد مثبت x و y

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

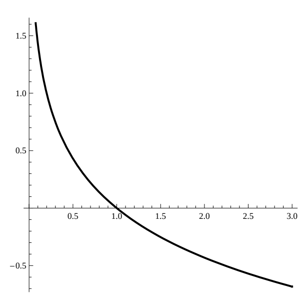
(ر) برای هر عدد گویای r

$$\log_a x^r = r log_a x$$

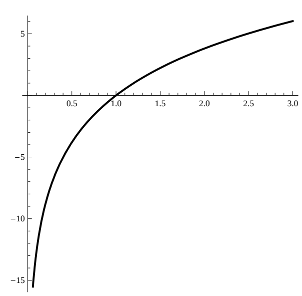
(ز) اگر $b > ۰$ آنگاه برای هر

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

اثبات قضیه فوق با توجه به قضایای قبلی و تعریف لگاریتم در مبنای a واضح است. توجه نمائید که $(\log_a x)'' = \frac{-۱}{(\ln a)x^۲} < ۰$، پس در حالتی که $۰ < a < ۱$ آنگاه تابع لگاریتم در مبنای a تابعی اکیدا نزولی و مقعر به سمت بالا است و در حالتی که $a > ۱$ تابعی اکیدا صعودی و مقعر به سمت پایین است که در حالت $a > ۱$ نمودار آنرا در زیر برای a های مختلف رسم می‌کنیم



(د) نمودار تابع $\log_{۰/۲} x$.



(ه) نمودار تابع $\log_{۱/۲} x$.

شکل ۱.۱۱: نمودار تابع $\log_a x$ براي مقادير مختلف a.

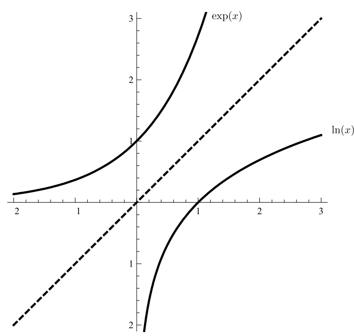
۳.۱۱ تابع نمائی

با توجه به اینکه تابع لگاریتم طبیعی از ، $(۰, \infty)$ به $\mathbb{R}$ تابعی یك به یك و پوشا است پس تابع معکوس آن قابل تعریف است که آنرا تابع نمائی نامند.

تعریف ۱.۳.۱۱. *تابع نمائی را که فعلاً با نماد* $\exp$ *نمایش می‌دهیم عبارت از تابع معکوس تابع لگاریتم طبیعی است.بنابراین داریم*

$$\exp : \mathbb{R} \to (۰, +\infty)$$

و تابع نمائی تابعی یك به یك، پوشا، پیوسته و اکیدا صعودی است که برای $x > ۰$ *،* $\exp \ln x = x$ *و* $\ln \exp x = x$ *برای هر عدد حقیقی* x*. همچنین نمودار تابع نمائی با توجه به خاصیت انعکاسی نسبت به نیمساز ربع اول و سوم عبارت است از*



شکل ۲.۱۱: نمودار تابع $\exp(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $\ln(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

سایر خواص تابع نمائی در قضیه زیر لیست شده‌اند.

قضیه ۲.۳.۱۱.

(الف) برای هر عدد x

$$\exp(۰) = ۱, \exp x > ۰$$

(ب) برای هر دو عدد حقیقی x *و* y

$$\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$$

(ج) برای هر دو عدد حقیقی x *و* y

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

(د) $\exp x = (\exp x)'$ و $(\exp(u(x)))' = u'(x)\exp(u(x))$ *که در آن* u *تابعی مشتق‌پذیر است.*

(ذ) برای هر عدد گویای r

$$\exp(r) = e^r$$

اثبات. با توجه قضیه ۶.۱.۶ و اینکه تابع نمائی عکس تابع لگاریتم طبیعی است اثبات قضیه فوق واضح است و مورد (ذ) نیز با توجه به مشتق تابع معکوس قضیه ۴.۲.۶ به سادگی بدست می‌آید. □

قرارداد ۳.۳.۱۱. *با توجه به مورد (ذ) که برای اعداد گویا مقدار تابع نمائی در نقطه* r *برابر* e^r *است و با توجه به این نکته که هر تابع پیوسته روی اعداد گویا دارای توسیع منحصر به فردی روی تمام اعداد حقیقی است (مسئله حل شده ۱۳.۶.۵ در فصل پیوستگی را ببینید) از هم اکنون، بجای نمای* $\exp(x)$ *از نماد* e^x *استفاده می‌کنیم که با نمادگذاری جدید موارد قضیه را به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد.*

(الف) برای هر x *،* $e^x > \circ$ *و* $e^\circ = ۱$

$$e^{(x+y)} = e^x.e^y$$

(ب) برای هر دو عدد حقیقی x *و*y

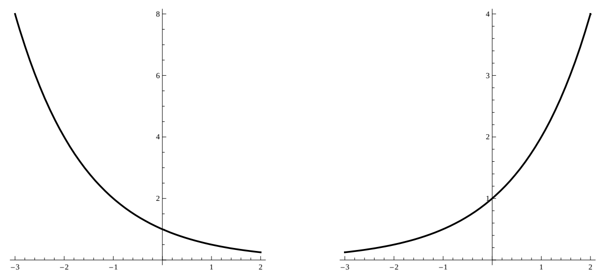
$$e^{(x-y)} = \frac{e^x}{e^y}$$

(ج) برای هر دو عدد حقیقی x *و* y

(د) $(e^x)' = e^x$ *و* $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$ *که* u *تابعی مشتق‌پذیر بر حسب* x *است. اکنون به تعریف تابع توانی می‌پردازیم.*

تعریف ۴.۳.۱۱. *فرض کنید* $\circ < a \neq ۱$ *در این صورت تابع توانی به پایه* a *را که با نماد* a^x *نمایش می‌دهیم عبارت است از معکوس تابع لگاریتم در مبنای* a*. بنابراین تابع توانی به پایه* a *همواره تابعی مثبت، یك به یك است که حوزه تعریف آن تمام اعداد حقیقی است که برای* $a > ۱$ *تابعی اکیدا صعودی و برای* $\circ < a < ۱$ *تابعی اکیدا نزولی و برای* $a = ۱$ *تابع ثابت ۱ است.*

شکل زیر نمودار این تابع را برای حالات مختلف a نشان می‌دهد.



(آ) نمودار تابع 2^x. (ب) نمودار تابع $(0/5)^x$.

شکل ۳.۱۱: نمودار تابع a^x برای مقادیر مختلف a.

سایر خواص تابع توانی به پایه a در قضیه زیر لیست شده‌اند.

قضیه ۵.۳.۱۱.

(الف) برای عدد حقیقی x

$$a^x = e^{x \ln a}$$

(ب) برای هر عدد حقیقی دلخواه x

$$a^0 = 1, \quad a^x > 0$$

(ج) برای هر دو عدد حقیقی دلخواه x *و* y

$$a^{x+y} = a^x . a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

(د) اگر a *و* b *دو عدد حقیقی مثبت باشند آنگاه*

$$(ab)^x = a^x . b^x$$

(ذ) $(a^x)' = \ln a (a^x)$ *و* $\left(a^{u(x)}\right) = u'(x) \ln a a^{u(x)}$ *که در آن* u *تابعی مشتق‌پذیر است.*

(ر) اگر x *عددی گویا باشد آنگاه تعریف اخیر* a^x *با تعریف قبلی* a *به توان یك عدد گویا مطابقت دارد*

اثبات. برهان این قضیه با توجه به قضیه ۶.۱.۶ و خواص تابع معکوس ساده است و به خواننده واگذار می‌شود. □

توجه نمائید که مورد (ر) در قضیه فوق بیانگر این واقعیت است که تابع توانی به پایه a، توسیعی از به توان رساندن معمولی اعداد است که قبلاً برای تمام اعداد گویا تعریف شده بود.

تبصره ۶.۳.۱۱. *بنا به نتیجه ۷.۴.۹ در فصل دنباله‌ها می‌دانیم که هر تابع پیوسته روی هر زیرمجموعه چگال اعداد حقیقی دارای توسیع منحصر به فردی به تمام اعداد حقیقی است پس روش دیگر تعریف تابع توانی به پایه a استفاده از این واقعیت است که چون اعداد گویا در اعداد حقیقی چگال هستند و برای هر عدد حقیقی دنباله‌ای از اعداد گویا وجود دارند که به سمت آن همگرا باشد (نتیجه ۷.۴.۹ در فصل دنباله‌ها را ببینید) که بدین ترتیب می‌توان تابع لگاریتم در مبنای a($a > ۰$) را به عنوان تابع معکوس آن تعریف نمود. قابل توجه است که در این صورت تابع نمائی حالت خاصی است که $a = e$ و تابع لگاریتم طبیعی تابع معکوس آن خواهد بود. تعریف تابع توانی به پایه a، تابع نمائی، تابع لگاریتم در مبنای a و تابع لگاریتم طبیعی و استخراج خواص آنها به این روش را به خواننده توصیه می‌نمائیم.*

مثال ۷.۳.۱۱. *مطلوب است مشتق* $f(x) = x^x$.

حل. با توجه به قضیه ۵.۳.۱۱(الف) داریم $f(x) = e^{x \ln x}$ در نتیجه با توجه به ۵.۳.۱۱(د) داریم:
$$f'(x) = (x \ln x)' e^{x \ln x} = (۱ + \ln x) x^x$$

مثال ۸.۳.۱۱. *مطلوب است مشتق تابع* $f(x) = x^{x^x}$.

حل. با توجه به ۵.۳.۱۱(الف) داریم بنابراین بنا به ۵.۳.۱۱(ذ) داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^x \ln x)' f(x) = e^{x^x \ln x} = \left((x^x)' \ln x + \frac{x^x}{x} \right) x^{x^x} \\ &= \left((۱ + \ln x) x^x \ln x + x^{x-۱} \right) x^{x^x} \end{aligned}$$

(در تساوی آخر از مثال قبل استفاده نموده‌ایم)

مثال ۹.۳.۱۱. *مطلوب است* $\lim\limits_{x \to ۰^+} x^{\sin x}$.

حل. با توجه به ۵.۳.۱۱(الف) و اینکه تابع نمائی پیوسته است پس داریم
$$\lim_{x \to ۰^+} = x^{\sin x} = \lim_{x \to ۰^+} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x \to ۰^+} \sin x \ln x}$$

امّا چون $\lim\limits_{x \to ۰^=} \sin x = ۰$ و $\lim\limits_{x \to ۰^+} \ln x = -\infty$، پس حالت ابهام وجود دارد بنابراین برای استفاده از قاعده هوپیتال ابتدا $\sin x \ln x$ را به صورت $\frac{\ln x}{\frac{۱}{\sin x}}$ یعنی به صورت $\dfrac{\ln x}{\csc x}$ می‌نویسیم در این صورت

بنا به قاعده هوپیتال داریم

$$\begin{aligned}\sin x \ln x &= \lim_{x\to ۰^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\frac{۱}{x}}{-cscxcotx} \\ &= -\lim_{x\to ۰^+} \frac{\sin x}{x}.\tan x = -\lim_{x\to ۰^+} \frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to ۰} \tan x = (-۱)(۰) = ۰\end{aligned}$$

پس

$$\lim_{x\to ۰^+} x^{\sin x} = e^{\circ} = ۱.$$

قضیه ۱۰.۳.۱۱.

$$\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} = e.$$

اثبات. با توجه به (الف) ۵.۳.۱۱ و اینکه تابع نمائی تابعی پیوسته است داریم

$$\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to ۰} e^{\frac{\ln(۱+x)}{x}} = e^{\lim_{x\to ۰}\frac{\ln(۱+x)}{x}}$$

و چون $\lim_{x\to ۰}\ln(۱+x) = \lim_{x\to ۰} x = ۰$ پس با توجه به قاعده هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\ln(۱+x)}{x} = \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۱+x}}{۱} = \lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۱+x} = ۱$$

در نتیجه $\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} = e$. □

نتیجه ۱۱.۳.۱۱.

$$\lim_{x\to +\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x = e.$$

اثبات. با توجه به قضیه ۱۲.۴.۴ در فصل حد و قضیه قبل داریم

$$\lim_{x\to +\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x = \lim_{x\to ۰^+}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} = e.$$

□

۴.۱۱ توابع هذلولی

اغلب در ریاضیات و کاربردهای آن با ترکیبات معینی از توابع e^x و e^{-x} سر و کار داریم که شایسته است به آنها اسامی خاصی اتلاق گردد. به صور مختلف، آنها همانند توابع مثلثاتی هستند و رابطه آنها با هذلولی همان رابطه‌ای است که توابع مثلثاتی با دایره دارند. بدین جهت است که آنها را توابع هذلولی نامند که مشابه توابع مثلثاتی، تابع سینوس هذلولی، کسینوس هذلولی و.. قابل تعریف هستند که در زیر به تعریف آنها می‌پردازیم

تعریف ۱.۴.۱۱.

(الف) تابع سینوس هذلولی عبارت است از

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲}$$

(ب) تابع کسینوس هذلولی عبارت است از

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}$$

(ج) تانژانت هذلولی عبارت است از

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

(د) کتانژانت هذلولی عبارت است از

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

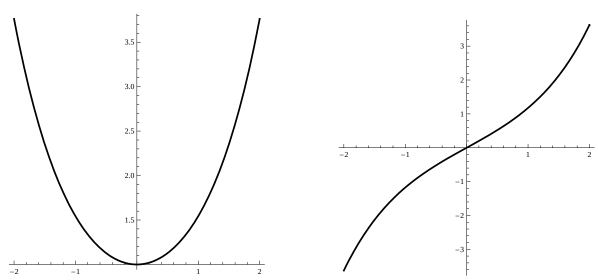
(ذ) سکانت هذلولی عبارت است از

$$cschx = \frac{۱}{\cosh x}$$

(ر) کُسکانت هذلولی عبارت است از

$$cschx = \frac{۱}{\sinh x}$$

در زیر نمودار سینوس هذلولی و کسینوس هذلولی رسم شده است.



(آ) نمودار تابع $\sinh(x)$.

(ب) نمودار تابع $\cosh(x)$.

شکل ۴.۱۱: نمودار توابع $\sinh(x)$ و $\cosh(x)$.

توابع هذلولی در روابطی شبیه به توابع مثلثاتی صدق می‌کنند که در زیر اهم آنها را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۴.۱۱.

۱.
$$\cosh(۰) = ۱, \sinh(۰) = ۰$$

۲.
$$\cosh(-x) = \cosh x, \sinh(-x) = -\sinh x$$

۳.
$$sech^{۲} x = ۱ - \tanh^{۲} x, \cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = ۱$$

۴.
$$(\tan hx)' = sech^{۲} x, (\cosh x)' = \sinh x, (\sinh x)' = \cosh x$$

۵.
$$(csch x)' = -sech x \tanh x$$

۶.
$$\sinh ۲x = ۲ \sinh x \cosh x, \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$$

۷.
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

۸.
$$\sinh^{۲} x = \frac{\cosh ۲x - ۱}{۲}, \cosh^{۲} x = \frac{۱ + \cosh ۲x}{۲}$$

۹.
$$\sinh x - \sinh y = ۲ \cosh \frac{x+y}{۲} \sinh \frac{x-y}{۲}$$

۱۰.
$$\cosh x - \cosh y = ۲ \sinh \frac{x+y}{۲} \sinh \frac{x-y}{۲}$$

۱۱.
$$(n \epsilon N)(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh(nx) + \cosh(nx), \quad \sinh x + \cosh x = e^x$$

۱۲. *تابع* $\sinh$ *بر* $\mathbb{R}$ *اکیدا صعودی است در حالیکه تابع* $\cosh$ *بر* $(۰,\infty)$ *اکیدا صعودی است*

۱۳. *برای هر عدد حقیقی* x, $\cosh x \geq ۱$

۱۴.

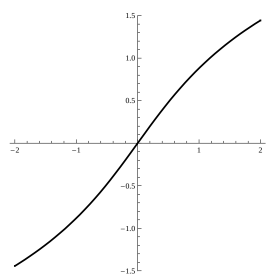
$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sinh x}{x} = ۱$$

اثبات. خواص فوق به آسانی با مراجعه به خواص تابع نمائی قابل بررسی هستند که آن‌را به خوانندگان واگذار می‌کنیم. اکنون به بررسی توابع معکوس هذلولی می‌پردازیم. □

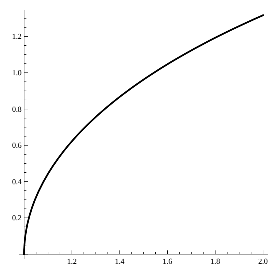
تعریف ۳.۴.۱۱. *توابع معکوس سینوس هذلولی، کسینوس هذلولی و تانژانت هذلولی به صورت زیر تعریف می‌شوند.*

$$\sinh^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cosh^{-۱} : (۱,\infty) \to (۰,\infty), \quad \tanh^{-۱} : (-۱,۱) \to \mathbb{R}$$

که نمودار آنها به صورت زیر می‌باشد.



(آ) نمودار تابع $\sinh^{-۱}(x)$.



(ب) نمودار تابع $\cosh^{-۱}(x)$.

شکل ۵.۱۱: نمودار توابع $\sinh^{-۱}(x)$ و $\cosh^{-۱}(x)$.

چون توابع هذلولی بر حسب تابع نمائی تعریف شده‌اند پس تعجبی ندارد اگر توابع معکوس آنها به صورت تابع لگاریتمی قابل بیان باشند.

قضیه ۴.۴.۱۱.

(الف) نشان دهید که برای هر عدد حقیقی x،

$$\sinh^{-۱} x = \ln(x + \sqrt{x^۲ + ۱})$$

(ب) برای هر عدد حقیقی $x \geq ۱$،

$$\cosh^{-۱} x = \ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱})$$

(ج) برای هر عدد حقیقی $-۱ < x < ۱$،

$$\tanh^{-۱} x = \frac{۱}{۲} \ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)$$

اثبات. به علت مشابه بودن اثبات، ما فقط (الف) را اثبات و اثبات (ب) و (ج) را به خواننده واگذار می‌کنیم. برای این منظور فرض کنید $y = \sinh^{-۱} x$ در این صورت

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{۲} \Rightarrow e^{۲y} - ۲xe^y - ۱ = ۰$$

بنابراین $e^y = \frac{۲x \pm \sqrt{۴x^۲ + ۴}}{۲}$، که چون $e^y > ۰$ پس $e^y = x + \sqrt{x^۲ + ۱}$ و یا

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^۲ + ۱}\right)$$

□

حال مشتق توابع معکوس هذلولی را بررسی می‌کنیم. قابل توجه است که چون توابع هذلولی مشتق‌پذیر هستند پس بنا به قضیه مشتق تابع معکوس در فصل مشتق، توابع معکوس آنها نیز مشتق‌پذیر خواهند بود.

قضیه ۵.۴.۱۱. *نشان دهید که*

۱.

$$(\sinh^{-۱} x)' = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}}$$

۲.

$$(\cosh^{-۱} x)' = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ - ۱}}$$

۳.

$$(\tanh^{-۱} x)' = \frac{۱}{۱ - x^۲}$$

۴.

$$(\cosh^{-۱} x)' = \frac{-۱}{|x|\sqrt{x^۲ + ۱}}$$

۵.

$$(sech^{-۱} x)' = \frac{-۱}{x\sqrt{۱ - x^۲}}$$

۶.

$$(\coth^{-۱} x)' = \frac{۱}{۱ - x^۲}$$

اثبات. تمام موارد فوق هم به کمک فرمول مشتق تابع معکوس و هم به کمک فرمولهای صریح توابع معکوس هذلولی قضیه ۴.۴.۱۱ قابل اثبات هستند که ما فقط مورد (۱) را اثبات و سایر موارد بر عهده خواننده می‌گذاریم. برای این منظور فرض کنید $y = \sinh^{-1} x$ در این صورت $x = \sinh y$، که اگر از طرفین نسبت به x مشتق بگیریم داریم $\cosh y . y' = 1$ و یا $y' = \dfrac{1}{\cosh(\sin h^{-1} x)}$، که با توجه به تساوی $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (قضیه ۲.۴.۱۱ (۳)) داریم

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

□

مثال ۶.۴.۱۱. *مطلوب است* $\dfrac{d}{dx}(\tanh^{-1}(\sin x))$

حل. با توجه به قضیه ۵.۴.۱۱ و قاعده زنجیری داریم

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}(\sin x)) = \frac{1}{1 - \sin^2 x} . \frac{d}{dx} \sin x = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

مثال ۷.۴.۱۱. *انتگرال* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$ *را محاسبه نمائید.*

حل. چون با توجه به قضیه ۵.۴.۱۱(۱) $(sinh^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$، پس بنا به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و قضیه ۴.۴.۱۱ (الف) داریم

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \sinh^{-1} x|_0^1 = \sinh^{-1} 1 - \sinh^{-1} 0 = \ln(1 + \sqrt{2})$$

۵.۱۱ مسائل نمونه حل شده

مساله ۱.۵.۱۱. *نشان دهید که معادله* $\ln x = 3 - x$ *دارای یک ریشه منحصر بفرد در فاصله* $[2, e]$ *است.*

حل. در نظر می‌گیریم $f(x) = x + \ln x - 3$ در این صورت f تابعی پیوسته است که

$$f(2) = 2 + \ln 2 - 3 = -1 + \ln 2 < 0$$
$$f(e) = e + 1 - 3 = e - 2 > 0$$

بنابراین بنا به قضیه مقدار میانی وجود دارد $e > c > ۲$ بقسمی که $f(c) = ۰$ یا $\ln c = ۳ - c$، حال نشان می‌دهیم که این c منحصربه‌فرد است برای این منظور کافی است نشان دهیم که f تابعی اکیدا صعودی است اما $f'(x) = ۱ + \frac{۱}{x}$ که برای x در بازه $(۲, e)$، $۱ + \frac{۱}{x} > ۰$ پس f تابعی یك به یك در این فاصله است

مساله ۲.۵.۱۱. *نشان دهید که*

$$\int_{۰}^{۱} e^x \cos x dx \leq e - ۱$$

حل. چون در فاصله $[۰, ۱]$ داریم $e^x \cos x \leq e^x$ پس با توجه به خواص انتگرال داریم

$$\int_{۰}^{۱} e^x \cos x \, dx \leq \int_{۰}^{۱} e^x dx = e - ۱$$

مساله ۳.۵.۱۱. *مطلوب است* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^۲} + \ldots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$

حل. داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^۲} + \ldots + \sqrt[n]{e^n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} e^{\frac{i}{n}} = \int_{۰}^{۱} e^x dx = e - ۱$$

مساله ۴.۵.۱۱. *مطلوب است* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e + \sqrt[۳]{e} + \ldots + \sqrt[n]{e}}{n}$

حل. با فرض $x_n = \sqrt[n]{e}$ حد مورد نظر میانگین حسابی دنباله است که بنا به مشاهدات در فصل دنباله‌ها (مساله حل شده ۹.۷.۹ را ببینید) داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e + \sqrt[۳]{e^۲} + \ldots + \sqrt[n]{e}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e = ۱}$$

مساله ۵.۵.۱۱. *نشان دهید که* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{۱}{e}$.

حل. فرض کنید $f(x) = \ln x$ در $(۱, \infty)$ در این صورت f تابعی صعودی است برای $n \in \mathbb{N}$ افراز $\{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$ را از بازه $[۱, n]$ در نظر می‌گیریم در این صورت $\ln ۱ + \ln ۲ + \cdots + \ln(n - ۱)$ یك حاصل جمع پایینی و $\ln ۲ + \ln ۳ + \cdots + \ln n$ یك حاصل جمع بالایی تابع f روی بازه $[۱, n]$ است پس داریم

$$\ln ۱ + \ln ۲ + \cdots + \ln(n - ۱) < \int_{۱}^{n} \ln x dx < \ln ۲ + \ln ۳ + \cdots + \ln n$$

پس داریم

$$\ln(n-1)! < n\ln n - n + 1 < \ln(n!)$$

بنابراین برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$

$$(n-1)! < \frac{e^{n\ln n}}{e^{n-1}} < n!$$

یا $n! < \frac{n^n}{e^{n-1}} < (n-1)!$ در نتیجه داریم $\frac{n^{n+1}}{e^{e-1}} < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < n! < \frac{n^n}{e^{n-1}}$ بنابراین $\frac{\sqrt[n]{n}}{e^{\frac{n-1}{n}}} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e^{\frac{n-1}{n}}}$ حال چون $\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e^{\frac{n-1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{n-1}{n}}}$ پس داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

مساله ۶.۵.۱۱. *اگر f مشتق‌پذیر باشد و برای هر x، $f'(x) = f(x)$ آنگاه عددی مانند c موجود است که، $f(x) = ce^x$.*

حل. فرض کنید $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ در این صورت داریم

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{e^{2x}}$$

بنابراین با توجه به فرض $g'(x) = 0$پس عددی مانند c موجود است که $g'(x) = c$ یا $f(x) = ce^x$.

مساله ۷.۵.۱۱. *نشان دهیدکه برای هر عدد صحیحn، $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$*

حل. با توجه به قضیه ۳.۱.۱۱ برای اعداد صحیح نامثبت n مساله حل شده است. همچنین توجه نمائیدکه همواره $x < e^x$ حال با توجه به قاعده هوپیتال داریم

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.$$

مساله ۸.۵.۱۱. *فرض کنید $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \text{ اگر } \\ 0 & x = 0 \text{ اگر } \end{cases}$ در اینصورت نشان دهید $f'(0) = 0$ و $f''(0) = 0$.*

حل. داریم

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}}$$

با توجه به مثال قبل داریم $\lim\limits_{n\to\circ}\dfrac{e^{x^{۲}}}{x}=\infty$ بنابراین $\lim\limits_{x\to\circ}\frac{x}{e^{x^{۲}}}=\circ$ همچنین

$$\begin{aligned} f''(\circ) &= \lim_{x\to\circ}\frac{f'(x)-f'(\circ)}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{۲e^{-\frac{۱}{x^{۲}}}}{x^{۴}} \\ &= \lim_{x\to\circ^{+}}\frac{۲x^{۴}}{e^{x^{۲}}} \\ &= \lim_{n\to\circ}\frac{۲x^{۴}}{e^{x^{۲}}}=\circ \end{aligned}$$

در واقع به کمک استقراء می‌توان نشان داد که $f^{(k)}(\circ)=\circ$.

مساله ۹.۵.۱۱. *مطلوب است* $\lim\limits_{x\to\circ^{+}}(۱+\sin ۴x)^{\cot x}$.

حل. چون $\lim\limits_{x\to\circ^{+}}(۱+\sin ۴x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to\circ^{+}}\cot x=\infty$ پس حد فوق مبهم است برای بدست آوردن آن با استفاده از قاعده هوپیتال داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\circ^{+}}(۱+\sin ۴x)^{\cot x} &= \lim_{x\to\circ^{+}} e^{\cot x\ln(۱+\sin ۴x)} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to\circ^{+}}\frac{\ln(۱+\sin ۴x)}{\tan x}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to\circ^{+}}\frac{\frac{۴\cos ۴x}{۱+\sin ۴x}}{۱+\tan^{۲}x}}=e^{۴} \end{aligned}$$

مساله ۱۰.۵.۱۱. *با استفاده از قاعده هوپیتال نشان دهید که اگر f تابعی پیوسته باشد آنگاه*

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x+h-f(x-h)}{۲h}=f'(x)$$

حل. چون f' پیوسته است پس f نیز پیوسته است پس $\lim\limits_{h\to\circ}(f(x+h)-f(x-h))=\circ$ بنابراین حد مورد بحث از صور مبهم است بنابراین بنا به قاعده هوپیتال داریم

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{۲h}=\lim_{h\to\circ}\frac{f'(x+h)+f'(x-h)}{۲}=\frac{۲f'(x)}{۲}=f'(x)$$

مساله ۱۱.۵.۱۱. *اگر f'' پیوسته باشد نشان دهید که*

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x+h)-۲f(x)+f(x-h)}{h^{۲}}=f''(x)$$

حل. چون با توجه به فرض مساله $\lim\limits_{h\to 0}(f(x+h)-2f(x)+f(x-h))=0$، پس حد مورد بحث از صور مبهم است بنابراین بنا به قاعده هوپیتال و مساله قبل داریم

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=f''(x)$$

۶.۱۱ مسایل

۱. *نشان دهید که معادله $x+Lnx=0$ دارای یك جواب منحصر به فرد است.*

۲. *ثابت کنید که برای هر $x\geq 0$، $\frac{x}{1+x}\leq \ln(1+x)\leq x$*

۳. *نشان دهید.*

الف) که برای هر $x>1$ و $\ln x\geq 2(\sqrt{x}-1)$.

ب) به کمك (الف) حدود زیر را پیدا کنید.

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$،

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$.

۴. *مشتق nاُم تابع $y=\ln x$ را به دست آورید.*

۵. *با استفاده از قضیه مقدار میانگین نشان دهید $e^x\geq 1-xe^x\geq 1+x$.*

۶. *به کمك قضیه مقدار میانگین نشان دهید که اگر $0<a<b<\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه*

$$(a-b)\tan b<\ln\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right)<(a-b)\tan a.$$

۷. *جواب معادله $\sinh x=e$ رابه دست آورید.*

۸. *نشان دهید $\lim\limits_{x\to\infty}(\cosh^{-1}x-\ln x)=\ln 2$*

۹. *مطلوب است محاسبه محدود زیر:*

۱. $$\lim_{x\to ۰} \frac{e^x - (۱+x)}{x^۲}$$

۲. $$\lim_{x\to ۰} (۱+\sqrt{x})^{\frac{\sin\sqrt{x}}{x}}$$

۳. $$\lim_{x\to\infty} (x+e^x)^{۲/x}$$

۴. $$\lim_{x\to\infty} (۱+\frac{۲}{x})^x$$

۵. $$\lim_{x\to ۰^+} (x+\sin x)^{tgx}$$

۶. $$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} (\sin x)^{tgx}$$

۷. $$\lim_{x\to ۰^+} x^{\frac{۱}{\ln(e^x - ۱)}}$$

۸. $$\lim_{x\to ۰} \left(\frac{۱}{x}\right)^{\sin x}$$

۹. $$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} (\tan x)^{\cot x}$$

۱۰. $$\lim_{x\to ۰^+} x^{\tan^{-۱} x}$$

۱۱. $$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{۱+x}{۲+x}\right)^{\frac{۱-\sqrt{x}}{۱-x}}$$

۱۲. $$\lim_{x\to ۰} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-۱/x^۲}$$

۱۳. $$\lim_{x\to ۰} (۱+۲\sin x)^{\cot x}$$

۱۰. *مشتق هر یک از توابع زیر را به دست آورید.*

۱. $$y = ۲^{\sec x}$$

۲. $$y = \ln(tanx + \sec x)$$

۳. $$y = \ln\frac{x}{۲+۳x}$$

۴. $$y = x(\sin\ln x + \cos\ln x)$$

۵. $$y = e^{\sin^{-۱} x}$$

۶. $$y = \sec^{-۱}\left(e^{۲x}\right)$$

۷. $$y = \ln(x^۲+۴) - x\arctan\frac{x}{۲}$$

۸. $$y = \sec^{-۱} x - \ln(x+\sqrt{x^۲-۱})$$

۹.
$$y = \cos x^{\sin x}$$

۱۰.
$$y = x^{\ln x}$$

۱۱.
$$y = x^{۳\tan x} \quad (x > ۰)$$

۱۲.
$$y = x^{۱۰^{x^۲}}$$

۱۳.
$$y = x^{x^x}$$

۱۴.
$$y = \cosh^{-۱}(۱+\cosh(۱+\cosh\sqrt{x}))$$

۱۵.
$$y = \cosh^{-۱}(۱+\cosh(۱+\cosh x^x))$$

فصل ۱۲

روش‌های انتگرال‌گیری

همانگونه که در فصل دهم بیان شد منظور از انتگرال نامعین $\int f(x)d(x)$ یافتن تابعی مانند $F(x)$ (که به آن تابع اولیه می‌گوئیم) است بطوریکه

$$F'(x) = f(x) \tag{۱.۱۲}$$

جهت محاسبه $\int f(x)d(x)$ ممکن است در آغاز چنین به نظر برسد که روش آزمون و خطا را انتخاب کنیم یعنی آزمودن تمام توابع به عنوان F در رابطه ۱.۱۲ به این امید که تابعی بدست آوریم که ثمر بخش باشد. با توجه به تنوع زیاد توابع این روش امری ناممکن است لذا این امر ایجاب می‌کند که به دنبال ارائه روشهای مناسب برای محاسبه انتگرالها باشیم با توجه به این مسئله که انتگرالگیری و مشتق‌گیری دو عمل معکوس هم هستند لذا می‌توان به کمک فرمولهای مشتق‌گیری، فرمولهای متناظری برای انتگرال‌گیری بدست آورد این نخستین و ساده‌ترین روش برای محاسبه انتگرال‌ها است تسلط به فرمول‌های مشتق‌گیری می‌تواند نقش بسزائی در فرمول‌های انتگرال‌گیری داشته باشد لذا یادآوری فرمولهای مشتق‌گیری را در اینجا توصیه می‌نمائیم. به کمک جداول مشتق‌گیری می‌توان جداولی برای انتگرال‌گیری بدست آورد که در زیر به برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

۱.۱۲ استفاده از فرمول‌های مشتق‌گیری

با استفاده از فرمولهای مشتق‌گیری که تاکنون مورد مطالعه قرار داده‌ایم در اینجا می‌توان جداول زیر را استخراج نمود.

تذکر ۱.۱.۱۲. *گاهی می‌توان با یك تغییر متغیر مانند u انتگرال را بر حسب x بصورت توابع زیر تبدیل کرد در این حالت نیز می‌توان از جداول زیر استفاده کرد به عبارت دیگر داریم:*

$$\int f(g(x))g'(x)d(x) = \int f(u)du$$

$f(x)$	$\int f(x)d(x)$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$
$1 + \cot^2 x$	$-\cot x + c$
$\sec x . \tan x$	$\sec x + c$
$\csc x . \cot x$	$-\csc x + c$
$\sinh x$	$\cosh x + c$
$\cosh x$	$\sinh x + c$
$1 - \tanh^2 x$	$\tanh x + c$
$1 - \coth^2 x$	$\coth x + c$

جدول ۱.۱۲: توابع مثلثاتی و هذلولی

$f(x)$	$\int f(x)d(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \sin^{-1} x + c \\ -\cos^{-1} x + c \end{cases}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \tan^{-1} x + c \\ -\cot^{-1} x + c \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} \tan^{-1} x + c \\ -\cot^{-1} x + c \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cosh^{-1} x + c$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} \tanh^{1-} x + c \\ \coth y^{-1} x + c \end{cases}$

جدول ۲.۱۲: توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی

$f(x)$	$\int f(x)d(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$

جدول ۳.۱۲: توابع چند جمله‌ای، نمائی و لگاریتمی

مثال ۲.۱.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$\int \tan x d(x)$$

حل. فرض کنیم $u = \cos x$ در این صورت $du = -\sin x dx$ بنابراین داریم

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c$$
$$= -\ln|(\cos x)| + c.$$

مثال ۳.۱.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$\int e^x \sqrt{۱ + e^x} dx$$

حل. فرض کنیم $u = ۱ + e^x$ در این صورت $du = e^x dx$ بنابراین

$$\int e^x \sqrt{۱ + e^x} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{۲}{۳} u^{\frac{۳}{۲}} + c = \frac{۲}{۳} (۱ + e^x)^{\frac{۳}{۲}} + c.$$

۲.۱۲ روش جزء به جزء

فرض کنیم u و v دو تابع دیفرانسیل‌پذیر از x باشند در این صورت داریم

$$d(uv) = udv + vdu.$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه فوق نتیجه می‌شود

$$uv = \int udv + \int vdu$$

و یا

$$\int udv = uv - \int vdu$$

این رابطه اخیر را فرمول جزء به جزء می‌نامند. بنابراین برای محاسبه انتگرال به روش جزء به جزء باید یك قسمت از عبارت داخل انتگرال را u و قسمت باقیمانده را dv گرفت و با محاسبه du به کمك دیفرانسیل‌گیری و محاسبه v به کمك انتگرال‌گیری و قرار دادن در رابطه فوق محاسبه انتگرال $\int udv$ به انتگرال ساده‌تر $\int vdu$ منجر می‌شود و با محاسبه این انتگرال جواب انتگرال اصلی محاسبه می گردد. نکات زیر در استفاده از دو روش جزءبه جزء دارای اهمیت می‌باشند.

الف) انتخاب مناسب u و dv بسیار حائز اهمیت است زیرا ممکن است انتخاب نامناسب آنها به انتگرال چه بسا مشکل‌تری نسبت به انتگرال اصلی منجر شود و این مغایر با هدف ما در استفاده از روش جزء به جزء می‌باشد.

ب) باید توجه داشته باشیم که استفاده از روش جزء به جزء در همه جا مناسب و مقرون به صرفه نیست معمولاً در مواقعی بیشتر از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم که دو تابع متفاوت (از جهت نوع) در داخل انتگرال حضور داشته باشند بطور مثال توابعی بصورت زیر

$$\begin{array}{lllll} e^x \cos x, & x\tan^{-1} x, & x^2 \cos x, & x\sin x, & x\tan x, \\ e^x \ln x, & xe^x, & x\ln x, & e^x \sin x, & \cdots. \end{array}$$

حال به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱.۲.۱۲. *حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید.*

۱. $\int xe^x dx$

۲. $\int x\cos x dx$

۳. $\int x^2 e^x dx$

۴. $\int e^x \sin x dx$

۵. $\int \ln x dx$

۶. $\int x\tan^{-1} x dx$

حل.

۱. با انتخاب $u = x$ و $dv = e^x dx$ داریم $du = dx$ و $v = e^x$ بنابراین طبق فرمول جزء به جزء داریم

$$\int xe^x dx = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

۲. با انتخاب $u = x$ و $dv = \cos x dx$ نتیجه می‌شود $du = dx$ و $v = \sin x$ بنابراین

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c.$$

۳. در محاسبه این انتگرال مجبور به استفاده دوبار از جزء به جزء صحیح هستیم در ابتدا با انتخاب $u = x^2$ و $dv = e^x dx$ داریم $v = e^x$ و $du = 2x dx$ لذا

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx.$$

۴. فرض کنیم $u=\sin x$ و $dv=e^x dx$ و $I=\int e^x\sin x dx$ در این صورت
$$I=\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx.$$
با استفاده از جزء به جزء بار دیگر برای انتگرال اخیر با انتخاب $u=\cos x$ و $dv=e^x dx$ داریم
$$\int e^x\cos x dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x dx=e^x\cos x+I.$$
بنابراین
$$I=e^x\sin x-e^x\cos x-I.$$
پس $۲I=e^x(\sin x-\cos x)$ و یا $I=\frac{۱}{۲}e^x(\sin x-\cos x)+c$.

۵. فرض کنیم $u=\ln x$ و $dv=dx$ در این صورت $du=\frac{dx}{x}$ و $v=x$ بنابراین
$$\int \ln x dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+c.$$

۶. با فرض $u=\tan^{-۱}x$ و $dv=xdx$ داریم $du=\frac{dx}{۱+x^۲}$ و $v=\frac{x^۲}{۲}$ بنابراین
$$\begin{aligned}\int x\tan^{-۱}x dx&=\frac{۱}{۲}x^۲\tan^{-۱}x-\frac{۱}{۲}\int\frac{x^۲}{۱+x^۲}dx\\&=\frac{۱}{۲}x^۲\tan^{-۱}x-\frac{۱}{۲}\int\frac{۱+x^۲-۱}{۱+x^۲}dx\\&=\frac{۱}{۲}x^۲\tan^{-۱}x-\frac{۱}{۲}\left[\int dx-\int\frac{dx}{۱+x^۲}\right]\\&=\frac{۱}{۲}x^۲\tan^{-۱}x-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}x+c\\&=\frac{۱}{۲}\left[x^۲\tan^{-۱}x-x+\tan^{-۱}x\right]+c.\end{aligned}$$

۳.۱۲ روش استفاده از تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولی

گاهی ممکن است به انتگرالهائی بصورت
$$\int\frac{du}{a^۲+u^۲},\quad\int\frac{du}{\sqrt{a^۲+u^۲}},\quad\int\sqrt{a^۲+u^۲}du$$
و یا
$$\int\frac{du}{a^۲-u^۲},\quad\int\frac{du}{\sqrt{a^۲-u^۲}},\quad\int\sqrt{a^۲-u^۲}du$$

و نیز

$$\int \frac{du}{u^۲ - a^۲}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^۲ - a^۲}}, \quad \int \sqrt{u^۲ - a^۲}du$$

برخورد نمائیم که در آن u عبارتی بر حسب x و یا در حالت خاص $u = x$ می‌باشد در این حالت می‌توان از تغییر متغیر مناسب مثلثاتی یا هذلولی استفاده نمود که با قرار دادن این متغیر جدید انتگرال بصورت ساده‌تری تبدیل می‌شود و حاصل آن بدست می‌آید. انتگرالهای بصورت فوق را می توان در قالب سه گروه زیر دسته بندی نمود.

الف) انتگرالهائی که دارای عامل $a^۲ + u^۲$ هستند.

ب) انتگرالهائی که دارای عامل $a^۲ - u^۲$ هستند.

ج) انتگرالهائی که دارای عامل $u^۲ - a^۲$ هستند.

حال به معرفی تغییر متغیر مناسب در هر یك از سه گروه فوق می‌پردازیم.

الف) در حالیکه $a^۲ + u^۲$ عامل در انتگرال وجود دارد می‌توان از تغییر متغیرهای زیر استفاده کرد.

(I) تغییر متغیر $u = a\tan t$ با این تغییر متغیر داریم،

$$a^۲ + u^۲ = a^۲ + a^۲\tan^۲ t = a^۲(۱ + \tan^۲ t) = a^۲\sec^۲ t$$
$$du = a(۱ + \tan^۲ t)dt = a\sec^۲ tdt$$

با قرار دادن این مقادیر انتگرال بصورت ساده‌تر برحسب متغیر t حاصل خواهد شد که با حل این انتگرال و جایگذاری $t = \tan^{-۱}(\frac{u}{a})$ جواب انتگرال اصلی بدست می‌آید

(II) تغییر متغیر $u = a\sinh t$ در این حالت داریم

$$a^۲ + u^۲ = a^۲ + a^۲\sinh^۲ t = a^۲(۱ + \sinh^۲ t) = a^۲\cosh^۲ t$$
$$du = a\cosh tdt.$$

با جایگذاری مقادیر فوق انتگرال برحسب توابع هذلولی بصورت ساده‌تری بدست می‌آید. با حل این انتگرال و قرار دادن $t = \sinh^{-۱}(\frac{u}{a})$ جواب انتگرال اصلی حاصل می‌شود.

مثال ۱.۳.۱۲. *حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید.*

(I) $\int \sec x dx$ (II) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲ + ۲x + ۵}}$ (III) $\int \sqrt{x^۲ - x + ۳}dx$

حل.

(I) داریم

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx$$

با فرض $u = \sec x + \tan x$ داریم

$$du = [(\sec x \tan x + (۱ + \tan^۲ x)]dx = (\sec x \tan x + \sec^۲ x)dx$$
$$= \sec x(\sec x + \tan x)dx.$$

بنابراین

$$\int \sec x dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c.$$

(II) داریم

$$x^۲ + ۲x + ۵ = (x + ۱)^۲ - ۱ + ۵ = (x + ۱)^۲ + ۴.$$

با فرض $u = x + ۱$ و $a = ۲$ و تغییر متغیر $u = a \tan t$ نتیجه می‌شود

$$x^۲ + ۲x + ۵ = u^۲ + ۴ = ۴ \tan^۲ t + ۴ = ۴ \sec^۲ t$$
$$dx = du = ۲ \sec^۲ t dt.$$

بنابراین

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲ + ۲x + ۵}} = \int \frac{۲ \sec^۲ t}{۲ \sec t}dt = \int \sec t dt$$
$$= \ln|\sec t + \tan t| + c.$$

از طرف دیگر داریم $\frac{u}{a} = \tan t$ و لذا $۱ + \frac{u^۲}{a^۲} = \sec^۲ t$ پس $\sqrt{۱ + \frac{u^۲}{a^۲}} = \sec t$.

بنابراین حاصل انتگرال فوق عبارت است از

$$\begin{aligned}\ln|\sqrt{۱+\frac{u^۲}{a^۲}}+\frac{u}{a}|+c &= \ln|\sqrt{\frac{a^۲+u^۲}{a^۲}}+\frac{u}{a}|+c\\ &= \ln|\frac{\sqrt{a^۲+u^۲}+u}{a}|+c\\ &= \ln|\frac{\sqrt{x^۲+۲x+۵}+x+۱}{۲}|+c.\end{aligned}$$

(III) داریم

$$x^۲-x+۳=(x-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}+۳=(x-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۱۱}{۴}.$$

با فرض $u=x-\frac{۱}{۲}$ و $a=\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$ تغییر متغیر $u=\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}\sinh t$ داریم

$$x^۲-x+۳=u^۲+\frac{۱۱}{۴}=\frac{۱۱}{۴}\sinh^۲ t+\frac{۱۱}{۴}=\frac{۱۱}{۴}\cosh^۲ t$$

$$dx=du=\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}\cosh t dt.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^۲-x+۳}dx &= \int(\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}\cosh t)(\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}\cosh t)dt\\ &= \frac{۱۱}{۴}\int\cosh^۲ t dt=\frac{۱۱}{۴}\int ۱+\frac{\cosh ۲t}{۲}dt\\ &= \frac{۱۱}{۸}(\frac{۱}{۲}\sinh ۲t+t)+c.\end{aligned}$$

چون $u=x-\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}\sinh t$ پس $\sinh t=\frac{۲x-۱}{\sqrt{۱۱}}$ لذا

$$\sinh ۲t=۲\sinh t\cosh t=۲\left(\frac{۲x-۱}{\sqrt{۱۱}}\right)\sqrt{\left(\frac{۲x-۱}{\sqrt{۱۱}}\right)^۲+۱}.$$

بنابراین حاصل انتگرال پس از جایگذار ی مقادیر فوق بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{۱۱}{۸}\left[\frac{۲x-۱}{\sqrt{۱۱}}\sqrt{\frac{(۲x-۱)^۲}{۱۱}+۱}+\sinh^{-۱}\left(\frac{۲x-۱}{\sqrt{۱۱}}\right)\right]+c$$

ب) انتگرال‌هائی که عامل $a^۲-u^۲$ دارند را می‌توان با هر یك از تغییر متغیرهای زیر حل کرد.

(I) $u = a\sin t$ (II) $u = a\cos t$

برای هر کدام از متغیرهای فوق حاصل انتگرال را برحسب متغیر t بدست آورد و پس از جایگذاری جواب انتگرال اصلی حاصل می‌شود. جزئیات بیشتر را می‌توانید در مثال زیر دنبال کنید.

مثال ۲.۳.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$$

حل. داریم

$$1-x-x^2 = 1-(x^2+x) = 1-[(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}] = \frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2 = a^2-u^2$$

با تغییر $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\sin t$ نتیجه می‌شود $dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos t dt$ بنابراین

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} &= \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t dt}{\sqrt{\frac{5}{4}\cos^2 t}} \\ &= \int dt \\ &= \sin^{-1}(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}) + c.\end{aligned}$$

(ج)

انتگرالهائی که دارای عامل $u^2 - a^2$ هستند را می‌توان بوسیله تغییر متغیرهای زیر حل کرد.

(I) $u = a\sec t$ (II) $u = a\cosh t$

در هر کدام از تغییر متغیرهای فوق می‌توان $u^2 - a^2$ و du را بر حسب t بدست آورد و انتگرال را بر حسب این متغیر حل کرد و سپس با جایگزین کردن مقدار t جواب انتگرال اصلی بدست می‌آید.

مثال ۳.۳.۱۲. *حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید.*

$(I)\ \int \sqrt{x^۲ - ۴}dx$ ، $(II)\ \int \frac{dx}{x^۲ - x}$.

حل.

(I) فرض کنیم $x = ۲\cosh t$ در این صورت $dx = ۲\sinh t dt$ و لذا داریم

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^۲ - ۴}dx &= \int (\sqrt{۴\sinh^۲ t})۲\sinh t dt = ۴\int \sinh^۲ t dt\\ &= ۴\int \frac{\cosh ۲t - ۱}{۲}dt = ۲[\frac{۱}{۲}\sinh ۲t - t] + c\\ &= ۲[\sinh t\cosh t - t] + c = ۲[\frac{x}{۲}\sqrt{\frac{x^۲}{۴} - ۱} - \cosh^{-۱}(\frac{x}{۲})] + c\\ &= \frac{x\sqrt{x^۲ - ۴}}{۲} - ۲\cosh^{-۱}(\frac{x}{۲}) + c.\end{aligned}$$

(II) چون $x^۲ - x = \left(x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ - \frac{۱}{۴}$ لذا با فرض $x - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}\sec t$ داریم

$$dx = \frac{۱}{۲}\sec t.\tan t dt$$
$$(x - \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴}\sec^۲ t - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴}(\sec^۲ t - ۱) = \frac{۱}{۴}\tan^۲ t.$$

بنابراین با قرار دادن متغیر فوق در انتگرال نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^۲ - x} &= \int \frac{\frac{۱}{۲}\sec t.\tan t dt}{\frac{۱}{۴}\tan^۲ t} = ۲\int \frac{\sec t}{\tan t}dt = ۲\int \csc t dt\\ &= -۲\ln|\csc t + \cot t| + c\end{aligned}$$

چون $\sec t = \frac{x - \frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}$ پس $\cos t = \frac{۱}{۲x - ۱}$ و

$$\sin t = \sqrt{۱ - (\frac{۱}{۲x - ۱})^۲} = \sqrt{\frac{(۲x - ۱)^۲ - ۱}{(۲x - ۱)^۲}} = \frac{\sqrt{(۲x - ۱)^۲ - ۱}}{۲x - ۱}.$$

بنابراین $\cot t\tan t = \frac{۱}{\sqrt{(۲x - ۱)^۲ - ۱}}$ و $\csc t = \frac{۲x - ۱}{\sqrt{(۲x - ۱)^۲ - ۱}}$ و لذا

حاصل انتگرال بصورت زیر بدست می‌آید.

$$-۲\ln\left(\frac{۲x-۱}{\sqrt{(۲x-۱)^{۲}-۱}}+\frac{۱}{\sqrt{(۲x-۱)^{۲}-۱}}\right)+c$$

نتیجه ۴.۳.۱۲. *انتگرال‌هائی بصورت* $\int\frac{dx}{ax^{۲}+bx+c}$ *و* $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^{۲}+bx+c}}$ *و* $\int\sqrt{ax^{۲}-bx+c}dx$ *را می‌توان با مربع سازی به یکی از حالت‌های* $a^{۲}+u^{۲}$*،* $a^{۲}-u^{۲}$ *یا* $u^{۲}-a^{۲}$ *تبدیل کرد و با تغییر متغیر مناسب حاصل آنها را بدست آورد.*

۴.۱۲ روش تجزیه کسرهای گویا

در این قسمت انتگرال توابع گویا بصورت $\frac{p(x)}{q(x)}$ را مطالعه خواهیم نمود که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چند جمله‌ای‌هائی با ضریب حقیقی هستند. برای بررسی انتگرال توابع گویای فوق می‌توان حالتی را در نظر گرفت که درجه صورت از درجه مخرج کمتر است زیرا در غیر این صورت با تقسیم $p(x)$ بر $q(x)$ نتیجه می‌شود

$$\frac{p(x)}{q(x)}=r(x)+\frac{s(x)}{q(x)}$$

که درجه $s(x)$ از درجه $q(x)$ کمتر است. چون $r(x)$ یك چند جمله‌ای و انتگرال آن به سادگی قابل محاسبه است لذا برای محاسبه انتگرال تابع گویای کافی است انتگرال تابع گویای $\frac{s(x)}{q(x)}$ را بررسی نمود. بنابراین می‌توان روش تجزیه کسرهای گویا را برای توابع گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ که $\deg p(x)<\deg q(x)$ بیان کرد. فرض کنیم $\frac{p(x)}{q(x)}$ یك تابع گویا باشد با شرط $degp(x)<degq(x)$ باشد در این صورت می‌توان مخرج کسر یعنی $q(x)$ را بصورت زیر تجزیه نمود.

$$\begin{aligned}q(x) &= k(x-a_{۱})^{m_{۱}}(x-a_{۲})^{m_{۲}}\cdots(x-a_{۱})^{m_r}\\ &\qquad (x^{۲}+b_{۱}x+c_{۱})^{n_{۱}}(x^{۲}+b_{۲}x+c_{۲})^{n_{۲}}\cdots(x^{۲}+b_lx+c_l)^{n_l}\end{aligned}$$

درجه $q(x)$ برابر است با

$$m_{۱}+m_{۲}+\cdots+m_r+۲n_{۱}+۲n_{۲}+\cdots+۲n_l$$

در روش تجزیه کسرهای گویا هدف تجزیه کسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ به صورت کسرهای جزئی است که محاسبه انتگرال آنها برای ما آشناست و لذا انتگرال تابع گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ برابر با جمع انتگرال کسرهای جزئی بدست آمده

می‌باشد. برای تجزیه تابع گویای $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ می‌توان آن را به صورت مجموع کسرهای جزئی زیر نوشت.

الف) به ازای هر جمله $(x-a)^m$ در تجزیه چند جمله‌ای $q(x)$ می‌توان مجموع کسرهای جزئی زیر را قرار داد.

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-a)^m}$$

ب) به ازای هر جمله $(x^2+bx+c)^n$ در تجزیه چند جمله‌ای $q(x)$ می‌توان مجموع کسرهای جزئی را قرار داد.

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

با جایگزین کردن مجموع کسرهای جزئی قسمتهای (الف) و (ب) متناظر با جملات واقع در تجزیه $q(x)$ و پس از مخرج مشترک‌گیری، تابع گویای $\frac{T(x)}{q(x)}$ بدست می‌آید که شامل ضرایب مجهول $A_1, A_2, \ldots, A_n$ و $B_1, B_2, \ldots, B_n$ و $C_1, C_2, \ldots, C_n$ و غیره می‌باشد که پس از مرتب کردن چند جمله‌ای $T(x)$ برحسب توانهای نزولی یا صعودی x و سپس متحد قرار دادن ضرایب آن با ضرایب چند جمله‌ای $p(x)$ می‌توان ضرایب مجهول را بدست آورد.

قبل از بیان برخی نکات راجع به محاسبه انتگرال کسرهای جزئی ذکر یك مثال روش تجزیه فوق را آشکارتر می‌سازد.

مثال ۱.۴.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$\int \frac{3}{x^3-1}dx$$

حل. ابتدا مخرج کسر گویای $\dfrac{3}{x^3-1}$ را تجزیه می‌کنیم

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

لذا به ازای جمله $x-1$ کسر جزئی $\dfrac{A}{x-1}$ و به ازای جمله x^2+x+1 کسر جزئی $\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$ را قرار می‌دهیم. بنابراین داریم

$$\frac{3}{x^3-1}=\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1+x}.$$

با مخرج مشترک در سمت راست و مرتب نمودن صورت کسر حاصل برحسب توانهای نزولی x نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}&=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\\&=\frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+x+1)}\\&=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)}\end{aligned}$$

حال با متحد قرار دادن ضرایب چند جمله‌ای‌های در سمت راست و $(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)$ در سمت چپ دستگاه زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{cases}A+B=0\\A-B+C=0\\A-C=3\end{cases}$$

با حل این دستگاه ضرایب مجهول A,B,C بصورت زیر حاصل می‌شوند

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=-2.$$

بنابراین داریم

$$\frac{3}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

پس

$$\int\frac{3}{x^3-1}dx=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx.$$

حال انتگرال‌های سمت راست به راحتی قابل محاسبه می‌باشند

$$\int\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|.$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx&=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1+3}{x^2+x+1}dx\\&=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

اولین انتگرال سمت چپ با فرض $u = x^۲ + x + ۱$ داریم $du = (۲x + ۱)dx$ و حاصل آن بصورت $\ln(x^۲ + x + ۱)$ حاصل می‌شود و دومین انتگرال سمت راست مربوط به روش بیان شده در ۳.۱۲ حالت الف می‌باشد که با تغییر متغیر $x + \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\tan t$ حاصل آن بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\int \frac{dx}{\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۳}{۴}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}\left(\frac{x+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\right) + c$$

بنابراین جواب نهائی انتگرال بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{۳}{x^۳ - ۱}dx\\
&= \ln|x-۱| - \frac{۱}{۲}\ln(x^۲ + x + ۱) - \frac{۳}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}\left(\frac{x+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\right) + c\\
&= \ln\left|\frac{x-۱}{\sqrt{x^۲ + x + ۱}}\right| - \sqrt{۳}\tan^{-۱}\left(\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}}\right) + c
\end{aligned}$$

تذکر ۲.۴.۱۲. *پس از تجزیه تابع گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ معمولاً انتگرال‌هائی بصورت زیر حاصل می‌شود.*

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \int \frac{Bx + C}{(x^۲ + ax + b)^n}, \quad n \geq ۱$$

که به بررسی هر یك می‌پردازیم.

(الف) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx$

(I) اگر $n = ۱$ آنگاه داریم

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + c.$$

(II) اگر $n > ۱$ آنگاه داریم

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}dx = \frac{A}{-n+۱}(x-a)^{-n+۱} + c.$$

ب) $\int \frac{Bx + C}{(x^۲ + ax + b)^n}dx$.

(III) اگر $\Delta = a^۲ - ۴b = ۰$ آنگاه به حالت الف منجر می‌شود.

(IV) اگر $\Delta > ۰$ آنگاه عبارت $x^۲ + ax + b$ به دو چند جمله‌ای درجه یك تجزیه می‌شود كه مجدداً به حالت الف منجر می‌شود.

(V) اگر $\Delta < ۰$ و $n = ۱$ آنگاه داریم

$$x^۲ + ax + b = (x + \frac{a}{۲})^۲ + (b - \frac{a^۲}{۴}).$$

بنابراین

$$\int \frac{Bx + C}{x^۲ + ax + b}dx = \frac{B}{۲}\int \frac{۲x + \frac{۲C}{B}}{x^۲ + ax + b}dx$$
$$= \frac{B}{۲}\int \frac{۲x + a + \frac{۲C}{B} - a}{x^۲ + ax + b}dx$$
$$= \frac{B}{۲}\int \frac{۲x + a}{x^۲ + ax + b}dx + (C - \frac{Ba}{۲})\int \frac{dx}{x^۲ + ax + b}$$
$$= \frac{B}{۲}\ln(x^۲ + ax + b) + (\frac{C - Ba}{۲})\int \frac{dx}{(x + \frac{a}{۲})^۲ + (b - \frac{a^۲}{۴})}$$

انتگرال اخیر با توجه به اینكه $b - \frac{a^۲}{۴} > ۰$ یا $b - \frac{a^۲}{۴} < ۰$ به حالتهای (الف) یا (ج) در روش تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولی تبدیل می‌شود كه با تغییر متغیر مناسب حاصل انتگرال محاسبه می‌شود.

(VI) حالت $\Delta < ۰$ و $n > ۱$ به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۳.۴.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$\int \frac{x + ۱}{(x - ۱)^۲(x^۲ + x + ۱)}dx$$

حل. داریم

$$\frac{x + ۱}{(x - ۱)^۲(x^۲ + x + ۱)} = \frac{A}{x - ۱} + \frac{B}{(x - ۱)^۲} + \frac{Cx + D}{x^۲ + x + ۱}.$$

پس از مخرج مشترک و متحد قرار دادن صورت کسرهای سمت چپ و راست مقادیر مجهول D و C و B و A بصورت زیر حاصل می‌شوند $D = ۰$ و $C = \frac{۱}{۳}$ و $B = \frac{۳}{۲}$ و $A = -\frac{۱}{۳}$ بنابراین

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x+۱}{(x-۱)^۲(x^۲+x+۱)}dx \\
&\quad = -\frac{۱}{۳}\int \frac{dx}{x-۱} + \frac{۲}{۳}\int \frac{dx}{(x-۱)^۲} + \frac{۱}{۳}\int \frac{xdx}{x^۲+x+۱} \\
&\quad = -\frac{۱}{۳}\ln|x-۱| - \frac{۲}{۳(x-۱)} + \frac{۱}{۶}\ln(x^۲+x+۱) \\
&\qquad - \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}\tan^{-۱}(\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{۳}}) + c.
\end{aligned}$$

۵.۱۲ روش کوچک‌ترین مضرب مشترک

اگر در تابع $f(x)$ توانهای گویائی از x بصورت زیر وجود داشته باشد
$f(x) = g(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$

آنگاه می‌توان با تغییر متغیر $x = t^k$ که k کوچکترین عدد صحیحی است که با ضرب در کسرهای $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ آنها را به عدد صحیح تبدیل می‌کند به تابع گویائی برحسب متغیر t رسید که در این صورت به کمك روش تجزیه کسرهای گویا می‌توان حاصل انتگرال را بدست آورد. توجه داریم که کوچکترین عدد صحیحی که کسرهای $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ را به یك عدد صحیح تبدیل می‌کند عبارت است از کوچکترین مضرب مشترك مخرج کسرهای فوق یعنی $k =$ ک.م.م$(n, \ldots, s)$.

مثال ۱.۵.۱۲. *حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید.*

$\int \frac{x+\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۶]{x}}{x(۱+\sqrt[۳]{x})}dx$ (I)، $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۴]{x^۵}-\sqrt[۶]{x^۷}}dx$ (II).

حل.

(I) توانهای گویای x عبارتند از $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۱}{۳}$ بنابراین کوچکترین مضرب مشترك اعداد ۳ و ۶ عبارت است از ۶ پس با تغییر متغیر $x = t^۶$ داریم $dx = ۶t^۵dt$ و با جایگذاری در انتگرال

نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\int \frac{x+\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۶]{x}}{x(۱+\sqrt[۳]{x})}dx &= \int \frac{(t^{۶}+t^{۴}+t)(۶t^{۵})}{t^{۶}(۱+t^{۲})}dt\\ &= ۶\int \frac{t^{۵}+t^{۳}+۱}{۱+t^{۲}}dt\\ &= ۶\int t^{۳}dt+۶\int \frac{dt}{t^{۲}+۱}\\ &= \frac{۳}{۲}t^{۴}+۶\tan^{-۱} t+c=\\ &= \frac{۳}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}+۶\tan^{-۱}\sqrt[۶]{x}+c.\end{aligned}$$

(II) توان‌های گویای x عبارتند از $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۵}{۴}$ و $\frac{۷}{۶}$ بنابراین کوچکترین مضرب مشترک اعداد ۶ و ۴ و ۳ و ۲ عبارت است از ۱۲ پس فرض کنیم $x=t^{۱۲}$ در این صورت $dx=۱۲t^{۱۱}dt$ و داریم

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۴]{x^{۵}}-\sqrt[۶]{x^{۷}}}dx &= \int \frac{(t^{۶}+t^{۴})(۱۲t^{۱۱})}{t^{۱۵}-t^{۱۴}}dt\\ &= ۱۲\int \frac{t^{۳}+t}{t^{۲}-۱}dt\\ &= ۱۲\int tdt+۱۲\int \frac{۲t}{t^{۲}-۱}dt\\ &= ۶t^{۲}+۱۲\ln|t^{۲}-۱|+c\\ &= ۶\sqrt[۶]{x}+۱۲\ln|\sqrt[۶]{x}-۱|+c.\end{aligned}$$

۶.۱۲ تغییر متغیر $z=\tan\frac{x}{۲}$

در انتگرال‌هائی که تابع آن یك عبارت برحسب توابع $\sin x$ و $\cos x$ باشند می‌توانیم از تغیر متغیر $z=\tan\frac{x}{۲}$ استفاده نمائیم. با توجه به اتحادهای مثلثاتی

$$\sin x=\frac{۲\tan(\frac{x}{۲})}{۱+\tan^{۲}(\frac{x}{۲})},\quad \cos x=\frac{۱-\tan^{۲}(\frac{x}{۲})}{۱+\tan^{۲}(\frac{x}{۲})}$$

و $dz = \frac{۱}{۲}(۱ + \tan^{۲} \frac{x}{۲})dx$ داریم

$$\sin x = \frac{۲z}{۱ + z^{۲}}, \quad \cos x = \frac{۱ - z^{۲}}{۱ + z^{۲}}, \quad dx = \frac{۲dz}{۱ + z^{۲}}.$$

با قرار دادن این مقادیر یك انتگرال بصورت تابع گویا برحسب متغیر z حاصل می‌شود که طبق روش تجزیه کسرهای گویا می‌توان آنرا محاسبه نمود.

مثال ۱.۶.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$\int \sec x dx$$

حل. داریم

$$\begin{aligned}
\int \sec x dx &= \int \frac{dx}{\cos x} \\
&= \int \frac{\frac{۲}{۱+z^{۲}}}{\frac{۱-z^{۲}}{۱+z^{۲}}} dz \\
&= \int \frac{۲dz}{۱ - z^{۲}} \\
&= \int \left(\frac{۱}{۱ + z} + \frac{۱}{۱ - z}\right) dz \\
&= \ln|۱ + z| - \ln|۱ - z| + c \\
&= \ln\left|\frac{۱ + z}{۱ - z}\right| + c \\
&= \ln\left|\frac{۱ + \tan \frac{x}{۲}}{۱ - \tan \frac{x}{۲}}\right| + c.
\end{aligned}$$

مثال ۲.۶.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$\int \frac{dx}{\sin x(۲ + \cos x - ۲ \sin x)}$$

حل. داریم

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x(۲ + \cos x - ۲ \sin x)} &= \int \frac{\frac{۲dz}{۱+z^{۲}}}{\frac{۲z}{۱+z^{۲}}(۲ + \frac{۱-z^{۲}}{۱+z^{۲}} - \frac{۴z}{۱+z^{۲}})} \\
&= \int \frac{(۱ + z^{۲})dz}{z(z^{۲} - ۴z + ۳)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{(۱+z^۲)}{z(z-۳)(z-۱)} \\
&= \int (\frac{\frac{۱}{۳}}{z} + \frac{\frac{۵}{۳}}{z-۳} - \frac{۱}{z-۱})dz \\
&= \frac{۱}{۳}\ln|z| + \frac{۵}{۳}\ln|z-۳| - \ln|z-۱| + c \\
&= \frac{۱}{۳}\ln|\tan\frac{x}{۲}| + \frac{۵}{۳}\ln|\tan\frac{x}{۲} - ۳| - \ln|\tan\frac{x}{۲} - ۱| + c.
\end{aligned}
$$

تذکر ۳.۶.۱۲. *مشابه این تغییر متغیر در حالتی‌که توابع هذلولی $\sinh x$ و $\cosh x$ در انتگرال وجود داشته باشند می‌توان تغییر متغیر $z = \tanh \frac{x}{۲}$ را اختیار کرد و طبق روش قبل حاصل انتگرال را محاسبه نمود توجه داریم‌که در این حالت با توجه به اتحادهای توابع هذلولی مقادیر dx و $\sinh x$ و $\cosh x$ بصورت زیر می‌باشند.*

$$
\sinh x = \frac{۲z}{۱-z^۲}, \quad \cosh x = \frac{۱+z^۲}{۱-z^۲}, \quad dx = \frac{۲dz}{۱-z^۲}
$$

مثال ۴.۶.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$
\int \frac{dx}{\sinh x + ۲\cosh x}
$$

حل. داریم

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sinh x + ۲\cosh x} &= \int \frac{\frac{۲dz}{۱-z^۲}}{\frac{۲z}{۱-z^۲} + \frac{۲(۱+z^۲)}{۱-z^۲}} \\
&= \int \frac{۲dz}{۲z + ۲ + ۲z^۲} \\
&= \int \frac{dz}{z^۲ + z + ۱} \\
&= \int \frac{dz}{\left(z + \frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۳}{۴}} \\
&= \frac{۲}{\sqrt{۳}} \tan^{-۱}\left(\frac{z + \frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\right) + c.
\end{aligned}
$$

که در آن $z = \tanh \frac{x}{۲}$.

۷.۱۲ انتگرال‌های مثلثاتی

در بسیاری از انتگرال‌های مثلثاتی حاصلضربی از توابع $\cos x$ و $\sin x$ وجود دارند که آن‌ها را می‌توان به صورت‌های زیر در نظر گرفت.

(الف) انتگرال‌های بصورت

$$\int \sin ax \sin bx dx.$$

(ب) انتگرال‌های بصورت

$$\int \sin ax \cos bx dx.$$

(ج) انتگرال‌های بصورت

$$\int \cos ax \cos bx dx.$$

(د) انتگرال‌های بصورت

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

(هـ) انتگرال‌های بصورت

$$\int \sin^p x \cos^q x dx, \quad (p, q \in \mathbb{Q}).$$

حال به روش حل هر یك می‌پردازیم. در انتگرال‌های حالتهای (الف) و (ب) و (ج) می‌توان از اتحادهای مثلثاتی زیر استفاده کرد.

$$\sin ax \sin bx = \frac{۱}{۲}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$
$$\cos ax \cos bx = \frac{۱}{۲}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$$
$$\sin ax \cos bx = \frac{۱}{۲}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$$

د) در این حالت براساس اینکه اعداد m, n زوج یا فرد باشند می‌توان تغییر متغیرهای مناسبی بصورت زیر در نظر گرفت.

(I) چنانچه m عدد فرد و مثبت باشد در این صورت می‌توان از تغییر متغیر $u = \cos x$ استفاده نمود.

(II) اگر n عددی فرد و مثبت باشد آنگاه می‌توان تغییر متغیر $u = -\sin x$ را استفاده نمود.

(III) اگر n و m اعداد زوج و مثبت باشند می‌توان از اتحادهای زیر استفاده کرد.

$$\sin^۲ x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲}, \quad \cos^۲ x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲}$$

(IV) اگر $m+n$ عددی زوج ولی منفی باشد می‌توان تغییر متغیر $u=\tan x$ را استفاده نمود.

هـ) در این حالت با فرض $u=\sin x$ نتیجه می‌شود

$$\int \sin^p x \cos^q x dx = \int u^p (۱-u^۲)^{q-۱} du.$$

ادامه حل این انتگرال به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۱.۷.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$\int \sin^۴ x \cos^۶ x dx$$

حل. چون m,n اعداد زوج و مثبت هستند لذا بنابه قسمت (III) از حالت (د) داریم

$$\begin{aligned}
\int \sin^۴ x \cos^۶ x dx &= \int (\sin^۲ x)^۲ (\cos^۲ x)^۳ dx \\
&= \int (\frac{۱-\cos ۲x}{۲})^۲ (\frac{۱+\cos ۲x}{۲})^۳ dx \\
&= \frac{۱}{۳۲} \int \sin^۴ ۲x (۱+\cos ۲x) dx \\
&= \frac{۱}{۳۲} \int \sin^۴ ۲x dx + \frac{۱}{۳۲} \int \sin^۴ ۲x \cos ۲x dx.
\end{aligned}$$

انتگرال‌های سمت راست هرکدام بصورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned}
\frac{۱}{۳۲} \int \sin^۴ ۲x dx &= \frac{۱}{۱۲۸} \int (۱-\cos ۴x)^۲ dx \\
&= \frac{۱}{۱۲۸} (x - \frac{۱}{۲} \sin ۴x) + \frac{۱}{۲۵۶} \int (۱+\cos ۸x) dx \\
&= \frac{۳}{۲۵۶} x - \frac{۱}{۲۵۶} \sin ۴x + \frac{۱}{۲۰۴۸} \sin ۸x + c.
\end{aligned}$$

همچنین باتغییر $u = \sin ۲x$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۳۲}\int \sin^{۴} ۲x \cos ۲x dx &= \frac{۱}{۶۴}\int u^{۴} du\\ &= \frac{۱}{۳۲۰}u^{۵} + c\\ &= \frac{۱}{۳۲۰}\sin^{۵} ۲x + c.\end{aligned}$$

بنابراین حاصل انتگرال عبارت است از

$$\frac{۳}{۲۵۶}x - \frac{۱}{۲۵۶}\sin ۴x + \frac{۱}{۲۰۴۸}\sin ۸x + \frac{۱}{۳۲۰}\sin^{۵} ۲x + c.$$

مثال ۲.۷.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$\int \frac{\sin^{۳} x}{\sqrt[۳]{\cos^{۲} x}} dx$$

حل. داریم

$$\int \frac{\sin^{۳} x}{\sqrt[۳]{\cos^{۲} x}} dx = \int \sin^{۳} x \cos^{-\frac{۲}{۳}} x dx.$$

با تغییر متغیر $u = \cos x$ داریم $du = -\sin x dx$ بنابراین

$$\begin{aligned}\int \sin^{۳} x \cos^{-\frac{۲}{۳}} x dx &= -\int (۱ - u^{۲}) u^{-\frac{۲}{۳}} du\\ &= -۳u^{\frac{۱}{۳}} + \frac{۳}{۷}u^{\frac{۷}{۳}} + c\\ &= ۳\sqrt[۳]{\cos x}(\frac{۱}{۷}\cos^{۲} x - ۱) + c\end{aligned}$$

مثال ۳.۷.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$\int \frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۶} x} dx$$

حل. با توجه به قسمت (IV) از حالت (د) داریم $u = \tan x$ لذا $du = (۱ + \tan^{۲} x) dx$ و یا

$du = \frac{dx}{\cos^2 x}$ همچنین $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + u^2$ بنابراین

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int u^2(1+u^2) du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c$$
$$= \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + c.$$

۸.۱۲ انتگرال تابع معکوس

فرض کنیم تابع $f(x)$ یك تابع معکوس‌پذیر باشد و $f^{-1}(x)$ تابع معکوس آن باشد اگر $\int f(x)dx$ مفروض باشد آنگاه $\int f^{-1}(x)dx$ را می‌توان به کمك انتگرال تابع $f(x)$ بصورت زیر بدست آورد. فرض کنیم $G(x) = \int f(x)dx$ در این صورت با بکار بردن روش جزء به جزء برای $\int f^{-1}(x)dx$ با فرض $u = f^{-1}(x)$ و $dv = dx$ نتیجه می‌شود.

$$du = \frac{dx}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{dx}{G(f^{-1}(x))}, \quad v = x.$$

بنابراین داریم

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - \int x\frac{dx}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$= xf^{-1}(x) - \int f(f^{-1}(x))d(f^{-1}(x))$$
$$= xf^{-1}(x) - G(f^{-1}(x)) + c.$$

بنابراین

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - G(f^{-1}(x)) + c.$$

مثال ۱.۸.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$\int \tan^{-1} x dx$$

حل. فرض کنیم $f(x) = \tan x$ در این صورت $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ و نیز

بنابراین $G(x) = \int f(x)dx = \int \tan x dx = -\ln|\cos x|$

$$\int \tan^{-1} x dx = x\tan^{-1} x - G(\tan^{-1} x) + c$$
$$= x\tan^{-1} x + \ln|\cos(\tan^{-1} x)| + c.$$

مثال ۲.۸.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*

$$\int \sinh^{-1} x dx$$

حل. فرض کنیم $f(x) = \sinh x$ در این صورت

$$G(x) = \int \sinh x dx = \cosh x.$$

بنابراین

$$\int \sinh^{-1} x dx = x\sinh^{-1} x - \cosh(\sinh^{-1} x) + c.$$

۹.۱۲ روش فرمول کاهشی

گاهی اوقات برای محاسبه انتگرالهائی که دارای توانهای صحیح و مثبت هستند می‌توان به کمک فرمول کاهشی توان را کاهش و پس یك تعداد متناهی استفاده از فرمول کاهشی حاصل انتگرال را بدست آورد. در زیر به تعدادی از این فرمولهای کاهشی اشاره می‌کنیم.

(I)

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx.$$

(II)

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx.$$

(III)

$$\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x\tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x dx.$$

(IV)

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx.$$

(V)

$$\int x^m(\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}dx.$$

(VI)

$$\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - \int \tan^{n-2} x dx.$$

(VII)

$$\int \cot^n x dx = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1}x - \int \cot^{n-2} x dx.$$

(VIII)

$$\int csc^n x dx = \frac{-1}{n-1}\cot x csc^{n-2} x + (\frac{n-2}{n-1})\int csc^{n-2} x dx.$$

برای اثبات هر یک از فرمولهای کاهشی فوق می‌توان از روش جزء به جزء استفاده کرد بطور مثال فرمولهای کاهشی قسمتهای (I) و (IV) را ثابت می‌کنیم و بقیه قسمت‌ها را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

(I) داریم

$$\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx, \quad u = \sin^{n-1} x, \quad dv = \sin x dx.$$

پس $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, v = -\cos x$ بنابراین

$$\begin{aligned}\int \sin^n x dx &= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx \\ &= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx.\end{aligned}$$

بنابراین

$$n\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx.$$

پس

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx.$$

(IV) با فرض $dv = e^x dx, u = x^n$ داریم

$$du = nx^{n-1}dx, \quad v = e^x.$$

و بنابراین بنابه روش جزء به جزء داریم
$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx.$$

مثال ۱.۹.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.*
$$\int x^2 (\ln x)^2 dx$$

حل. با استفاده از فرمول کاهشی (V) داریم

$$\begin{aligned}\int x^2 (\ln x)^2 dx &= \frac{x^3(\ln x)^2}{3} - \frac{2}{3}\int x^2 \ln x dx\\ &\frac{x^3(\ln x)^2}{3} - \frac{2}{3}[\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx]\\ &= \frac{x^3(\ln x)^2}{3} - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{27}x^3 + c.\end{aligned}$$

۱۰.۱۲ مسایل نمونه حل شده

مساله ۱.۱۰.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را به دست آورید.*
$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx$$

حل. تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم.
$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1$$

در این صورت داریم $1+x+x^2 = x^2t^2+2xt+1$ در نتیجه خواهیم داشت $x = \frac{2t-1}{1-t^2}$ و لذا $dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}$ بنابراین داریم
$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}.$$

و یا $\frac{-۲t^۲+t}{۱-t^۲} = \sqrt{۱+x+x^۲} - ۱$. حال با جایگذاری در انتگرال فوق خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{(۱-\sqrt{۱+x+x^۲})^۲}{x^۲\sqrt{۱+x+x^۲}}dx \\
&\quad = \int \frac{(-۲t^۲+t)^۲(۱-t^۲)(۱-t^۲)(۲t^۲-۲t+۲)}{(۱-t^۲)^۲(۲t-۱)^۲(t^۲-t+۱)(۱-t^۲)^۲}dt \\
&\quad = ۲\int \frac{t^۲}{۱-t^۲} = ۲\int \frac{۱+t^۲-۱}{۱-t^۲}dt \\
&\quad = ۲\left(\int -dt + \int \frac{dt}{۱-t^۲}\right) \\
&\quad = -۲t + \ln\left|\frac{۱+t}{۱-t}\right| + c \\
&\quad = -\frac{۲\sqrt{۱+x+x^۲}-۱}{x} + \ln\left|\frac{x+\sqrt{۱+x+x^۲}-۱}{x-\sqrt{۱+x+x^۲}+۱}\right| + c \\
&\quad = -\frac{۲(\sqrt{۱+x+x^۲}-۱}{x} + \ln\left|۲x+۲\sqrt{۱+x+x^۲}+۱\right| + c
\end{aligned}$$

مساله ۲.۱۰.۱۲. *با تغییر متغیر غیر مثلثاتی انتگرال زیر را حل کنید.*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲+۳x-۴}}$$

حل. می‌دانیم $x^۲+۳x-۴ = (x+۴)(x-۱)$ حال فرض کنیم

$$\sqrt{(x+۴)(x-۱)} = (x+۴)t.$$

در این صورت داریم

$$(x+۴)(x-۱) = (x+۴)^۲t^۲.$$

و یا $(x-۱) = (x+۴)t^۲$ در نتیجه خواهیم داشت

$$x = \frac{۱+۴t^۲}{۱-t^۲}, \quad dx = \frac{۱۰t}{(۱-t^۲)^۲}dt.$$

پس

$$\sqrt{(x+۴)(x-۱)} = (\frac{۱+۴t^۲}{۱-t^۲}+۴)t = \frac{۵t}{۱-t^۲}.$$

بنابراین با جایگذاری در انتگرال داریم

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^{۲}+۳x-۴}} &= \int \frac{۱۰t(۱-t^{۲})}{۵t(۱-t^{۲})^{۲}}dt = \int \frac{۲}{۱-t^{۲}}dt \\ &= \ln\left|\frac{۱+t}{۱-t}\right|+c \\ &= \ln\left|\frac{۱+\sqrt{\frac{x-۱}{x+۴}}}{۱-\sqrt{\frac{x-۱}{x+۴}}}\right|+c \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{x+۴}+\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x+۴}-\sqrt{x-۱}}\right|+c.\end{aligned}$$

مساله ۳.۱۰.۱۲. *یک فرمول کاهشی برای انتگرال $\int (\ln x)^n dx$ به دست آورید.*

حل. قرار دهید $u=(\ln x)^n$ و $dv=dx$ در این صورت داریم

$$du=\frac{n(\ln x)^{n-۱}}{x}dx, \quad v=x.$$

بنابراین مطابق روش جزء به جزء داریم

$$\int (\ln x)^n dx = \int udv = uv - \int vdu = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-۱}dx + c.$$

مساله ۴.۱۰.۱۲. *یک فرمول کاهشی برای انتگرال $\int \frac{dx}{(x^{۲}+a^{۲})^n}$ به دست آورید و سپس آن را به ازای $n=۳$ محاسبه کنید.*

حل. قرار می‌دهیم $I_n=\int \frac{dx}{(x^{۲}+a^{۲})^n}$. حال فرض کنیم $u=\frac{۱}{(x^{۲}+a^{۲})^n}$, $dv=dx$ در این صورت داریم

$$v=x, \quad du=-\frac{۲nxdx}{(x^{۲}+a^{۲})^{n+۱}}.$$

بنابراین با استفاده از روش جزء به جزء داریم

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}.\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}.\frac{1}{a^2}I_n.$$

حال برای محاسبه I_3 ابتدا I_1 و I_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c \\ I_2 &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \\ &= \frac{1}{2a^2}.\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}.I_1 \\ &= \frac{1}{2a^2}.\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c \end{aligned}$$

اکنون داریم

$$\begin{aligned} I_3 = \int \frac{d_x}{(x^2+a^2)^3} &= \frac{1}{4a^2}.\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}I_2 \\ = \frac{1}{4a^2}.\frac{x}{(x^2+a^2)^2} &+ \frac{3}{8a^4}.\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{3}{8a^5}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c. \end{aligned}$$

مساله ۵.۱۰.۱۲. *انتگرال زیر را حل کنید.*

$$I = \int \frac{(x^2-1)dx}{(x^4+3x^2+1)\tan^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}$$

حل. ابتدا در صورت و مخرج از $x^۲$ فاکتور می‌گیریم لذا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^۲\left(۱-\frac{۱}{x^۲}\right)dx}{x^۲\left(x^۲+۳+\frac{۱}{x^۲}\right)\tan^{-۱}\left(\frac{x^۲+۱}{x}\right)} \\ &= \int \frac{\left(۱-\frac{۱}{x^۲}\right)dx}{\left(\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲+۱\right)\tan^{-۱}\left(x+\frac{۱}{x}\right)}. \end{aligned}$$

حال تغییر متغیر $x+\frac{۱}{x}=t$ را در نظر می‌گیریم پس داریم $\left(۱-\frac{۱}{x^۲}\right)dx=dt$ در نتیجه با جایگذاری در انتگرال خواهیم داشت

$$I=\int \frac{dt}{(t^۲+۱)\tan^{-۱}t}.$$

با تغییر متغیر $u=\tan^{-۱}t$ داریم $du=\frac{dt}{t^۲+۱}$ بنابراین

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u} = \ln|u|+c = \ln|\tan^{-۱}t|+c \\ &= \ln\left|\tan^{-۱}\left(x+\frac{۱}{x}\right)\right|+c. \end{aligned}$$

مساله ۶.۱۰.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را به دست آورید.*

$$I=\int \frac{dx}{a^۲\sin^۲ x+b^۲\cos^۲ x}$$

حل. داریم

$$I=\int \frac{dx}{a^۲\sin^۲ x+b^۲\cos^۲ x}=\frac{۱}{b^۲}\int \frac{۱}{\frac{a^۲}{b^۲}\tan^۲ x+۱}.\frac{dx}{\cos^۲ x}$$

فرض کنیم $\frac{a}{b}\tan x=t$ در این صورت $dt=\frac{a}{b}\frac{dx}{\cos^۲ x}$ در نتیجه داریم

$$I = \frac{۱}{ab}\int \frac{dt}{۱+t^۲}=\frac{۱}{ab}\tan^{-۱}t+c$$

$$= \frac{۱}{ab}\tan^{-۱}\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + c.$$

مساله ۷.۱۰.۱۲. *مطلوبست محاسبه* $I = \int \cos(\ln x)dx$.

حل. قرار می‌دهیم $dv = dx$ و $u = \cos(\ln x)$ در این صورت داریم $v = x$ و $du = -\sin(\ln x)\frac{dx}{x}$ پس مطابق روش جزء به جزء داریم

$$I = \int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx.$$

حال برای محاسبه $\int \sin(\ln x)dx$ با روش مشابه فرض می‌کنیم $u = \sin(\ln x),\ dv = dx$ در این صورت $du = \cos(\ln x)\frac{dx}{x},\ v = x$ در نتیجه

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx.$$

بنابراین

$$I = \int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - I.$$

لذا حاصل انتگرال برابر است با

$$I = \frac{x}{۲}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c.$$

مساله ۸.۱۰.۱۲. *حاصل انتگرال زیر را به دست آورید.*

$$\int x\ln\left(۱ + \frac{۱}{x}\right)dx$$

حل. می‌دانیم

$$\ln(۱ + \frac{۱}{x}) = \ln(\frac{x+۱}{x}) = \ln(x+۱) - \ln x.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\int x\ln(۱ + \frac{۱}{x})dx &= \int x(\ln(x+۱) - \ln x)dx\\ &= \int x\ln(x+۱)dx - \int x\ln x dx.\end{aligned}$$

اکنون برای محاسبه هر کدام از انتگرال‌های سمت راست رابطه اخیر به روش جزء به جزء داریم

$$\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = xdx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x+1} \\ \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}.$$

پس

$$\begin{aligned} \int x\ln(x+1)dx &= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-1)dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|x+1| \\ &= \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + c. \end{aligned}$$

به طور مشابه نیز داریم

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c.$$

بنابراین

$$\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x}{2} + c.$$

مساله ۹.۱۰.۱۲. *انتگرال زیر را محاسبه کنید.*

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$$

حل. فرض کنیم $\tan x = t$ در این صورت $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt$ و $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2$ بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx &= \int t^2(1+t^2)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + c. \end{aligned}$$

مساله ۱۰.۱۰.۱۲. *مطلوبست محاسبه*

$$\int \frac{dx}{\sin x(۲+\cos x-۲\sin x)}.$$

حل. با تغییر متغیر $\tan\frac{x}{۲}=z$ داریم

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sin x(۲+\cos x-۲\sin x)}\\
&\qquad=\int \frac{\frac{۲dz}{۱+z^{۲}}}{\frac{۲z}{۱+z^{۲}}(۲+\frac{۱-z^{۲}}{۱+z^{۲}}-\frac{۴z}{۱+z^{۲}})}\\
&\qquad=\int \frac{(۱+t^{۲})}{t(t^{۲}-۴t+۳)}dt\\
&\qquad=\int \frac{(۱+t^{۲})}{t(t-۳)(t-۱)}dt\\
&\qquad=\int (\frac{\frac{۱}{۳}}{t}+\frac{\frac{۵}{۳}}{t-۳}+\frac{-۱}{t-۱})dt\\
&\qquad=\frac{۱}{۳}\int\frac{dt}{t}+\frac{۵}{۳}\int\frac{dt}{t-۳}+\int\frac{dt}{t-۱}\\
&\qquad=\frac{۱}{۳}\ln|t|+\frac{۵}{۳}\ln|t-۳|-\ln|t-۱|+c\\
&\qquad=\frac{۱}{۳}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{۲}\right)\right|+\frac{۵}{۳}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{۲}\right)-۳\right|-\ln\left|\tan\left(\frac{x}{۲}\right)-۱\right|+c.
\end{aligned}$$

۱۱.۱۲ مسایل

۱. *حاصل انتگرال‌های زیر را به دست آورید.*

۱. $\int (x^{۴}+\sqrt[۴]{x})dx$

۲. $\int (\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+\sqrt[۳]{x})dx$

۳. $\int \sqrt{۲x+۳}dx$

۴. $\int \sqrt{۴x^{۲}-۱}xdx$

۵. $$\int e^x\sqrt{e^x-1}\,dx$$

۶. $$\int \frac{\ln x}{x}dx$$

۷. $$\int \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x}}dx$$

۸. $$\int \frac{x^3-4}{\sqrt[3]{x}}dx$$

۹. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+1}}$$

۱۰. $$\int \sin^2 xdx$$

۱۱. $$\int \cos^2 xdx$$

۱۲. $$\int x\sin(x^2)dx$$

۱۳. $$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$$

۱۴. $$\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$$

۱۵. $$\int \sin^3 x\cos xdx$$

۱۶. $$\int \cos^3 x\sin xdx$$

۱۷. $$\int \tan x\sec^2 xdx$$

۱۸. $$\int a\tan^3 x(1+a\tan^2 x)dx$$

۱۹. $$\int \sin(\cos x)\sin xdx$$

۲۰. $$\int \cos(\sin x)\cos xdx$$

۲۱. $$\int e^{2x}\sin xdx$$

۲۲. $$\int e^{3x}\cos 2xdx$$

۲۳. $$\int e^x\sin 2xdx$$

۲۴. $$\int e^{-4x}(x^3+4x-1)dx$$

۲۵. $$\int \sec^3 xdx$$

۲۶. $$\int x\sec x\tan xdx$$

۲۷. $$\int \ln xdx$$

۲۸. $$\int (\ln x)^2dx$$

.۲۹
$$\int x \ln x dx$$

.۳۰
$$\int x^{۲} \ln x dx$$

.۳۱
$$\int x^{۲} \sin x dx$$

.۳۲
$$\int x^{۳} \cos x dx$$

.۳۳
$$\int (x^{۲}+۱) \sin^{۲} x dx$$

.۳۴
$$\int (x^{۲}+۱) \cos^{۲} x dx$$

.۳۵
$$\int \sin^{-۱} x dx$$

.۳۶
$$\int \cos^{-۱} ۲x dx$$

.۳۷
$$\int x \sin^{-۱} x dx$$

.۳۸
$$\int x^{۲} \sin^{-۱} x dx$$

.۳۹
$$\int \sqrt{x} \ln x dx$$

.۴۰
$$\int ۳^{x} e^{x} dx$$

.۴۱
$$\int x \tan^{-۱} x dx$$

.۴۲
$$\int \frac{x \sin^{-۱} x}{\sqrt{۱-x^{۲}}} dx$$

.۴۳
$$\int \frac{x \tan^{-۱} x}{(x^{۲}+۱)^{۲}} dx$$

.۴۴
$$\int \ln(x+\sqrt{۱+x^{۲}}) dx$$

.۴۵
$$\int \sin^{-۱} x (\frac{x dx}{\sqrt{(۱-x^{۲})^{۳}}})$$

.۴۶
$$\int \frac{\sin^{-۱}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

.۴۷
$$\int \sec x . \tan^{۲} x dx$$

.۴۸
$$\int e^{۲x} e^{e^{x}} dx$$

.۴۹
$$\int x e^{\sqrt{x}} dx$$

.۵۰
$$\int \frac{dx}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$$

.۵۱
$$\int \sqrt{۱-x^{۲}} dx$$

۵۲. $$\int \sqrt{4x^2 - 1}\,dx$$

۵۳. $$\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$$

۵۴. $$\int \frac{asx}{\sqrt{3 - \sin^2 x}}dx$$

۵۵. $$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}dx$$

۵۶. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$$

۵۷. $$\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}dx$$

۵۸. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$$

۵۹. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$$

۶۰. $$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{16 - x^2}}$$

۶۱. $$\int \frac{dx}{3x^2 + 2x + 4}$$

۶۲. $$\int \frac{dx}{\sqrt{4x + x^2}}$$

۶۳. $$\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)}$$

۶۴. $$\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{1 + x + x^2}}$$

۶۵. $$\int \frac{(x + 1)dx}{(2x + x^2)\sqrt{2x + x^2}}$$

۶۶. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x - x^2}}$$

۶۷. $$\int \sqrt{\frac{2 + 3x}{x - 3}}dx$$

۶۸. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)^3}}$$

۶۹. $$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

۷۰. $$\int \frac{(2x - 1)dx}{(x - 1)(x - 2)}$$

۷۱. $$\int \frac{(x^2 + x)dx}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

۷۲. $$\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x}$$

۷۳. $$\int \frac{xdx}{(x + 1)(x + 3)}$$

۷۴. $$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$$

۷۵. $$\int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)}$$

۷۶. $$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$$

۷۷. $$\int \frac{(x-8)dx}{x^3-4x^2+4x}$$

۷۸. $$\int \frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$$

۷۹. $$\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$$

۸۰. $$\int \frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^3}$$

۸۱. $$\int \frac{(x^3+x-1)dx}{(x^2+2)^2}$$

۸۲. $$\int \frac{dx}{x^3+1}$$

۸۳. $$\int \frac{x^5 dx}{x^3-1}$$

۸۴. $$\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$$

۸۵. $$\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$$

۸۶. $$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$$

۸۷. $$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}dx$$

۸۸. $$\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$$

۸۹. $$\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}dx$$

۹۰. $$\int \frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}dx$$

۹۱. $$\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx$$

۹۲. $$\int \frac{(\sqrt[3]{x}+2)^4}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

۹۳. $$\int \sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

روش $z=\tan(\frac{x}{2})$

۹۴. $$\int \frac{dx}{\sin x+1}$$

۹۵. $$\int \frac{dx}{2+\cos x}$$

.۹۶
$$\int \frac{\sin^{۳} x}{۲+\cos x}dx$$

.۹۷
$$\int \frac{dx}{۲-\sin^{۲} x}$$

.۹۸
$$\int \frac{\cos x dx}{۱+۲\cos x}$$

.۹۹
$$\int \frac{dx}{a\tan x(۸+۷\cos ۲x)}$$

.۱۰۰
$$\int \frac{dx}{۳\cos ۲x+۱}$$

.۱۰۱
$$\int \frac{dx}{۴-۵\sin x}$$

.۱۰۲
$$\int a\tan^{۵} x dx$$

.۱۰۳
$$\int \frac{dx}{(۱+\cos x)^{۲}}$$

.۱۰۴
$$\int \frac{dx}{\sin^{۲} x+\tan^{۲} x}$$

.۱۰۵
$$\int \sin x.\sin ۳x dx$$

.۱۰۶
$$\int \cos ۴x\cos ۷x dx$$

.۱۰۷
$$\int \cos ۲x\sin ۴x dx$$

.۱۰۸
$$\int \sin(\frac{۱}{۴}x)\cos(\frac{۳}{۴}x)dx$$

.۱۰۹
$$\int \sin^{۲} x\cos^{۳} x dx$$

.۱۱۰
$$\int \sin ۴x\sin^{۲} ۳x dx$$

.۱۱۱
$$\int \cos^{۲} x\cos^{۲} ۳x dx$$

.۱۱۲
$$\int (\sin x)(\cos x+\sin x)^{۲}dx$$

.۱۱۳
$$\int \tan^{۴} x dx$$

.۱۱۴
$$\int \sec^{۴} x dx$$

.۱۱۵
$$\int x^{۶}e^{x}dx$$

.۱۱۶
$$\int (\ln x)^{۳}dx$$

.۱۱۷
$$\int x^{n}e^{-x^{۲}}dx$$

.۱۱۸
$$\int (x^{۲}+۱)^{n}dx$$

.۱۱۹
$$\int \sec^{۳} x.csc^{۴} x dx$$

.۱۲۰

$$\int \tan^{۳} x . \sec^{۵} x dx$$

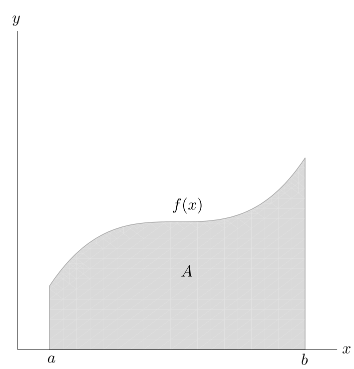
فصل ۱۳

کاربردهای انتگرال

در این فصل به برخی کاربردهای انتگرال که از اهمیت بیشتری برخودار هستند به صورت زیر اشاره می‌کنیم.

۱.۱۳ مساحت ناحیه

همان طوری‌که در فصل دهم بیان شد یکی از تعابیر هندسی انتگرال معین تابع $f(x)$ در فاصله $a \leq x \leq b$ سطح ناحیه محدود به این تابع و خطوط $x = b$ و $x = a$ و محور xها می‌باشد لذا ساده‌ترین کاربرد انتگرال محاسبه مساحت یك ناحیه می‌باشد که در شکل زیر نشان داده شده است.



$$\text{مساحت ناحیه } A = \int_a^b f(x)dx$$

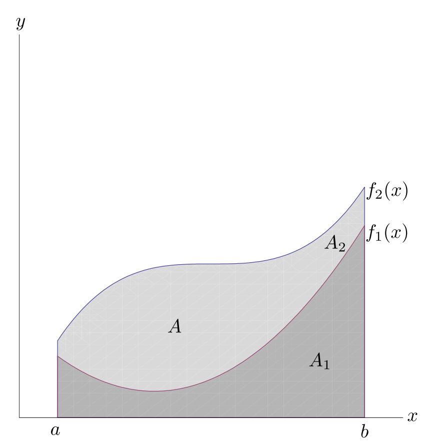
در حالت کلی‌تر مساحت محدود بین دو یا چند منحنی را می‌توان محاسبه کرد بطور مثال اگر ناحیه A محدود بین منحنی‌های $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ در فاصله $a \leq x \leq b$ باشند آنگاه مساحت

ناحیه A عبارت است از $\int_a^b [f_۲(x) - f_۱(x)]dx$ زیرا اگر $A_۲$ سطح زیر منحنی $y_۲ = f_۲(x)$ و $A_۱$ سطح زیر منحنی $y_۱ = f_۱(x)$ در فاصله $a \leq x \leq b$ باشد آنگاه داریم

$$\begin{aligned} A_۲ \text{ مساحت} &= \int_a^b f_۲(x)dx, \\ A_۱ \text{ مساحت} &= \int_a^b f_۱(x)dx, \\ A \text{ مساحت} &= \int_a^b [f_۲(x) - f_۱(x)]dx \end{aligned}$$

توجه داریم که

$$\begin{aligned} A \text{ مساحت ناحیه} &= A_۲ \text{ مساحت ناحیه} - A_۱ \text{ مساحت ناحیه} \\ &= \int_a^b f_۲(x)dx - \int_a^b f_۱(x)dx \\ &= \int_a^b [f_۲(x) - f_۱(x)]dx \end{aligned}$$



ملاحظه ۱.۱.۱۳. *با توجّه به اینکه مساحت همواره دارای مقدار مثبتی است لذا در محاسبه مساحت به کمك انتگرال‌ها باید دقت نمائیم که اگر ناحیه A محدود به دو منحنی $y_۱ = f_۱(x)$ و $y_۲ = f_۲(x)$ باشد آنگاه در تفاضل $f_۲(x) - f_۱(x)$ منحنی بالائی باید در ابتدا و منحنی پائینی بعد از آن در تفاضل قرار گیرند و چون ممکن است گاهی دچار اشتباه یا شك و تردید باشیم می‌توان با قرار دادن قدر مطلق*

این مشکل را برطرف نمود بنابراین می‌توان نوشت

$$A \text{ مساحت} = \int_a^b |f_۲(x) - f_۱(x)|dx = \int_a^b |f_۱(x) - f_۲(x)|dx.$$

مثال ۲.۱.۱۳. *فرض کنید A ناحیه محدود به منحنی‌های $y = x^۲$ و $y = x$ باشد در این صورت نقاط برخورد آنها عبارت است از $x = ۰, ۱$ بنابراین*

$$A \text{ مساحت} = \int_۰^۱ |x - x^۲|dx = [\frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۳}{۳}]_۰^۱ = \frac{۱}{۶}.$$

مثال ۳.۱.۱۳. *مساحت ناحیه محصور شده توسط دو منحنی $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را در فاصله $[۰, ۲\pi]$ بدست آورید.*

حل. ابتدا تقاطع دو منحنی را در فاصله$[۰, ۲\pi]$ بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases} \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = ۱$$

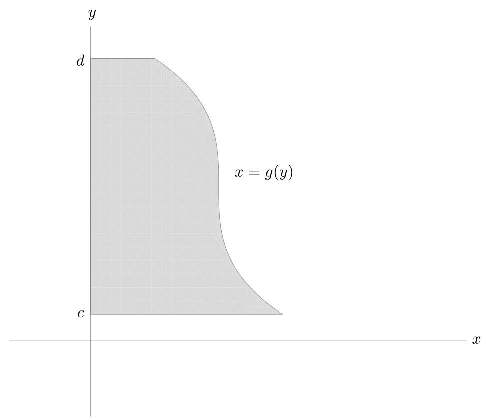
پس $x = \frac{\pi}{۴}$ و $x = \frac{۵\pi}{۴}$ نقاط برخورد می‌باشند.
بنابراین اگر A ناحیه مورد نظر باشد آنگاه

$$\begin{aligned} A \text{ مساحت} &= \int_۰^{۲\pi} |\sin x - \cos x|dx \\ &= \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}} (\sin x - \cos x)dx + \int_{\frac{۵\pi}{۴}}^{۲\pi} (\cos x - \sin x)dx \\ &= [\cos x + \sin x]_۰^{\frac{\pi}{۴}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}} + [\cos x + \sin x]_{\frac{۵\pi}{۴}}^{۲\pi} \\ &= (\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱) + (\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}) + (۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}) \\ &= ۴\sqrt{۲} \end{aligned}$$

ملاحظه ۴.۱.۱۳. *محاسبه سطح یك ناحیه را می‌توان به کمك انتگرال‌گیری بر حسب متغیر y نیز انجام داد. در واقع می‌توان به جای افراز روی محور xها، افراز روی محور yها در نظر گرفت در این حالت $\int_c^d g(y)dy$ مساحت ناحیه محدود به منحنی $x = g(y)$ و خطوط $y = c$ و $y = d$ و محور yها داشت که در شکل زیر نمایش داده شده است.*

$$A \text{ مساحت} = \int_c^d g(y)dy$$

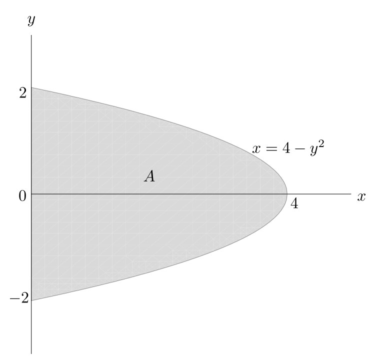
بطور مشابه می‌توان مساحت محدود بین دو منحنی را نیز بر حسب متغیر y بدست آورد. در مثال زیر



شکل ۱.۱۳: شکل مربوط به ملاحظه ۴.۱.۱۳

مساحت محدود به دو منحنی را به دو طریق یعنی بر حسب متغیر x و بر حسب متغیر y محاسبه می‌کنیم.

مثال ۵.۱.۱۳. *مساحت ناحیه محدود به منحنی $x = ۴ - y^۲$ و محور yها را به دو طریق (انتگرال‌گیری بر حسب متغیرهای x و y) بدست آورید.*



حل.

الف) انتگرال‌گیری بر حسب متغیر y.

$$A \text{ مساحت} = \int_{-۲}^{۲} (۴ - y^۲)dy = [۴y - \frac{y^۳}{۳}]_{-۲}^{۲}$$

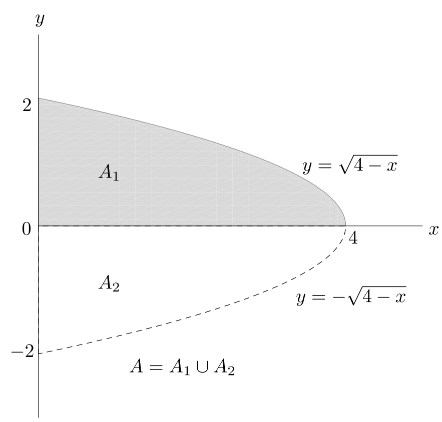
$$= \quad ۸ - \frac{۸}{۳} + ۸ - \frac{۸}{۳} = \frac{۳۲}{۳}.$$

ب) انتگرال‌گیری بر حسب متغیر x.

اگر در منحنی $x = ۴ - y^۲$ متغیر y را بر حسب x بدست آوریم آنگاه خواهیم داشت $y = \pm\sqrt{۴ - x}$ بنابراین ناحیه A به دو ناحیه $A_۱$ و $A_۲$ مطابق شکل زیر تقسیم می‌شود که مساحت هر یک برابر است با

$$\begin{aligned} A_۱ &= \int_۰^۴ \sqrt{۴ - x}dx = [-\frac{۲}{۳}(۴ - x)^{\frac{۳}{۲}}]_۰^۴ \\ &= \frac{۱۶}{۳}. \end{aligned}$$

چون سطح ناحیه $A_۱$ و $A_۲$ به جهت تقارن نسبت به محور xها یکسان هستند پس



$$A \text{ مساحت ناحیه} = ۲ \times A_۱ \text{مساحت ناحیه} = ۲ \times \frac{۱۶}{۳} = \frac{۳۲}{۳}.$$

ملاحظه ۶.۱.۱۳. *با توجّه به یکسان بودن حاصل انتگرال‌ها برای محاسبه مساحت چه بر حسب x و چه بر حسب y می‌توان روشی را برگزید که دارای راه حل کوتاه‌تر باشد و این بستگی به عوامل زیر دارد.*

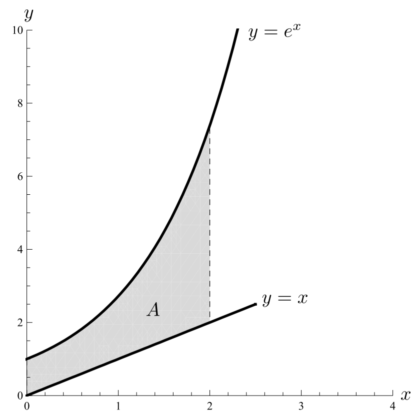
۱. *ناحیه کمتری را ایجاد کند.*

۲. *انتگرال‌های ساده‌تری حاصل شوند.*

۳. *تبدیل یك متغیر بر حسب متغیر دیگر به سادگی انجام پذیرد.*

در مثال زیر می‌توان به عوامل فوق بیشتر اشاره نمود.

مثال ۷.۱.۱۳. *مساحت ناحیه A محدود به منحنی‌های $y = e^x$ و $y = x$ در نقاط $x = ۲$ و $x = ۰$ را بدست آورید.*



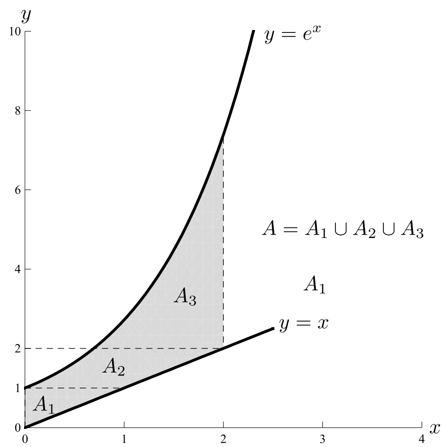
حل.

الف) بر حسب متغیر x.

$$\begin{aligned} A\text{ناحیه مساحت} &= \int_۰^۲ (e^x - x)dx \\ &= [e^x - \frac{x^۲}{۲}]_۰^۲ = e^۲ - ۲ - ۱ \\ &= e^۲ - ۳ \end{aligned}$$

ب) بر حسب متغیر y. در این حالت سه ناحیه $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ حاصل می‌شود و داریم

$$\begin{aligned} A_۱ \text{ ناحیه مساحت} &= \int_۰^۱ (y - ۰)dy = [\frac{y^۲}{۲}]_۰^۱ = \frac{۱}{۲} \\ A_۲ \text{ ناحیه مساحت} &= \int_۱^۲ (y - Lny)dy = [\frac{y^۲}{۲} - yLny + y]_۱^۲ \\ &= ۲ - ۲Ln۲ + ۲ - \frac{۱}{۲} - ۱ = \frac{۵}{۲} - ۲Ln۲ \\ A_۳ \text{ ناحیه مساحت} &= \int_۲^{e^۲} (۲ - Lny)dy = [۲y - yLny + y]_۲^{e^۲} \\ &= ۳e^۲ - e^۲Lne^۲ - ۶ + ۲Ln۲ = e^۲ - ۶ + ۲Ln۲. \end{aligned}$$



بنابراین

$$\begin{aligned} \text{ناحیه مساحت } A &= \frac{۱}{۲} + \frac{۵}{۲} - ۲Ln۲ + e^{۲} - ۶ + ۲Ln۲ \\ &= e^{۲} - ۳ \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که انتگرال بر حسب متغیر x در مثال فوق جواب ساده‌تر و سریع‌ترحاصل می‌شود.

۲.۱۳ طول قوس یك منحنی

قضیه ۱.۲.۱۳. *فرض کنید منحنی $y = f(x)$ مشتق‌پذیر و مشتق آن نیز در فاصله $a \leq x \leq b$ پیوسته باشد در این صورت طول قوس این منحنی عبارت است از*

$$S = \int_a^b \sqrt{۱ + (f'(x))^{۲}}dx.$$

اثبات. فرض کنیم $p = [a = x_۰, x_۱, x_۲, \cdots, x_{n-۱}, x_n = b]$ افرازی به طول n از $[a, b]$ باشد در این صورت فرض می‌کنیم S_i قسمتی از طول قوس منحنی که در فاصله $x_{i-۱} \leq x \leq x_i$ قرار دارد باشد در این صورت وتر $L_i = \overline{Q_{i-۱}Q_i}$ تقریبی برای S_i است و داریم

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-۱})^{۲} + (f(x_i) - f(x_{i-۱}))^{۲}}.$$

چون $f(x)$ روی $[a, b]$ مشتق‌پذیر است پس شرایط قضیه مقدار میانگین برای $f(x)$ در $[x_{i-۱}, x_i]$ برقرار است و داریم

$$\exists c_۱ \in (x_{i-۱}, x_i) \quad f'(c_۱) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-۱})}{x_i - x_{i-۱}} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-۱})}{\Delta x_i}.$$

بنابراین $f'(c_i)\Delta x_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ پس
$$L_i = \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\Delta x_i.$$
لذا $\sum_{i=1}^{n} L_i$ تقریبی برای طول قوس $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ می‌باشد. حال اگر $n \to \infty$ آنگاه $\sum_{i=1}^{n} L_i$ به سمت طول قوس منحنی یعنی S میل می‌کند

از طرف دیگر
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i$$
به سمت
$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$
میل می‌کند(تعریف ۱۶.۳.۱۰ را ببینید.) بنابراین
$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$
و حکم ثابت است. □

مثال ۲.۲.۱۳. *طول قوس منحنی $y = \sqrt{1 - x^2}$ را بدست آورید.*

حل. می‌دانیم $y = \sqrt{1 - x^2}$ یك نیم‌دایره به شعاع یك می‌باشد بنابراین
$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx \\
&= 2\int_0^1 \sqrt{1 + (\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}})^2}dx \\
&= 2\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}dx \\
&= 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\
&= [2\sin^{-1} x]_0^1 \\
&= 2(\frac{\pi}{2} - 0) = \pi
\end{aligned}$$
بطور مستقیم نیز می‌توانستیم به کمك محیط دایره محاسبه نمائیم.
$$\text{محیط نیم دایره} = \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r = \pi \times 1 = \pi$$

مثال ۳.۲.۱۳. *طول قوس منحنی $y = \cosh x$ را در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ بدست آورید.*

حل. داریم $\frac{dy}{dx}=\sinh x$ و بنابراین

$$\begin{aligned} S &= \int_{-۱}^{۱}\sqrt{۱+\sinh^{۲} x}dx \\ &= \int_{-۱}^{۱}\cosh x dx \\ &= ۲\int_{\circ}^{۱}\cosh x dx = [۲\sinh x]_{\circ}^{۱} = ۲\sinh ۱ - \circ = ۲\sinh ۱ \end{aligned}$$

ملاحظه ۴.۲.۱۳. *اگر معادله منحنی بصورت $x=g(y)$ و یا بصورت پارامتری $x=x(t)$ و $y=y(t)$ باشد آنگاه فرمول محاسبه طول قوس بصورت زیر تبدیل میشود.*

$$\int_{c}^{d}\sqrt{۱+(\frac{dx}{dy})^{۲}}dx, \quad \int_{t_۱}^{t_۲}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^{۲}+(\frac{dy}{dt})^{۲}}$$

مثال ۵.۲.۱۳. *طول قوس منحنی $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=۱$ را بدست آورید.*

حل. ابتدا آنرا بصورت پارامتری تبدیل میکنیم $y=\sin^{۳} t$ و $x=\cos^{۳} t$ و لذا $\frac{dx}{dt}=-۳\sin t\cos^{۲} t dt$ و $\frac{dy}{dt}=۳\cos t\sin^{۲} t$ و بنابراین

$$\begin{aligned} S &= \int_{\circ}^{۲\pi}\sqrt{(-۳\sin t\cos^{۲} t)^{۲}+(۳\cos t\sin^{۲} t)^{۲}}dt \\ &= ۴\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۹\sin^{۲} t\cos^{۴} t+۹\cos^{۲} t\sin^{۴} t}dt \\ &= ۴\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۹\sin^{۲} t\cos^{۲} t(\cos^{۲} t+\sin^{۲} t)}dt \\ &= ۴\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} ۳\sin t\cos t dt \\ &= ۴[\frac{۳}{۲}\sin^{۲} t]_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \\ &= ۴(\frac{۳}{۲}-\circ)=۶ \end{aligned}$$

مثال ۶.۲.۱۳. *طول قوس منحنی $x=y^{۲}$ را که در فاصله $\circ\leq y\leq\frac{۱}{۲}$ قرارگرفته است را بدست آورید.*

حل. داریم $\frac{dx}{dy} = ۲y$ و لذا

$$S = \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \sqrt{۱ + ۴y^۲}dy$$

با تغییر متغیر $۲y = \sinh t$ داریم $۱ + ۴y^۲ = ۱ + \sinh^۲ t = \cosh^۲ t$ و نیز $۲dy = \cosh t dt$ پس

$$\begin{aligned} \int \sqrt{۱ + ۴y^۲}dy &= \frac{۱}{۲}\int \cosh^۲ t dt \\ &= \frac{۱}{۲}\int \frac{۱ + \cosh ۲t}{۲}dt \\ &= \frac{۱}{۴}[t + \frac{۱}{۲}\sinh ۲t] \\ &= \frac{۱}{۴}[\sinh^{-۱}(۲y) + y\sqrt{۱ + ۴y^۲}]. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} S &= \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \sqrt{۱ + ۴y^۲}dy \\ &= \frac{۱}{۴}[\sinh^{-۱}(۲y) + y\sqrt{۱ + ۴y^۲}]_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \\ &= \frac{۱}{۴}[\sinh^{-۱}(۱) + \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۴ \times (\frac{۱}{۲})^۲} - ۰] \\ &= \frac{۱}{۴}\sinh^{-۱}(۱) + \frac{\sqrt{۲}}{۲}. \end{aligned}$$

۳.۱۳ حجم حاصل از دوران یك سطح

یکی دیگر از کاربردهای انتگرال معین محاسبه حجم اجسامی است که تحت شرایط خاص بوجود آمده‌اند این شرایط عبارتند از دوران یك سطح در صفحه حول محور xها یا محور yها است. توجّه داریم که از دوران یك سطح حول یك محور یك حجم حاصل می‌شودو بطور مثال اگر سطح یك نیم‌دایره حول قطر آن دوران کند یك کره توپر حاصل می‌گردد و یا اگر سطح مستطیل حول یکی از اضلاع آن دوران کند یك استوانه توپر بدست می‌آید.

در حالت کلی فرض کنیم بخواهیم حجم جسمی که بین صفحات $x = a$ و $x = b$ قرار دارد را که توسط رویه $f(x, y) = ۰$ از بالا و توسط صفحه xy از پائین محدود است را محاسبه کنیم. با فرض آنکه مساحت سطح مقطع هر صفحه که بر محور xها در فاصله a تا b عمود باشد را

بدانیم لذا اگر مساحت این سطح مقطع در نقطه $x \in [a, b]$ بصورت تابع $A(x)$ بیان‌شود و اگر $P_n = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ یك افراز برای بازه $[a, b]$ باشد آنگاه نقطه $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ را دلخواه در نظر می‌گیریم. در این صورت حاصل جمع $V_n = \sum\limits_{i=1}^{n} A(z_i)\Delta x_i$ تقریبی برای حجم جسم است. وقتی $n \longrightarrow \infty$ آنگاه $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} V_n$ به سمت V، حجم جسم، میل خواهد کرد یعنی $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} V_n = V$.

از طرفی وقتی $n \to \infty$ آنگاه $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} A(z_i)\Delta x_i$ عبارت است از حاصل جمع ریمان تابع $A(x)$ در فاصله $a \leq x \leq b$ (تعریف ۱۶.۳.۱۰ را ببینید.) بنابراین داریم

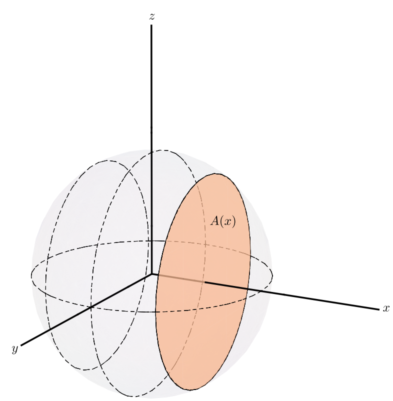
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} A(z_i)\Delta x_i = \int_a^b A(x)dx.$$

پس

$$V \text{ حجم جسم } = \int_a^b A(x)dx.$$

مثال ۱.۳.۱۳. *حجم یك کره به شعاع r را بدست آورید.*

حل. فرض کنیم کره طوری قرار گرفته است که مرکز آن در مبدأ مختصات باشد (شکل زیر را



ببینید) در این صورت صفحه P_x کره را در دایره‌ای که شعاع آن (با استفاده از قضیه فیثاغورث) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ است قطع می‌کند. بنابراین مساحت سطح مقطع $A(x)$ عبارت است از $A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$.

با بکار بردن فرمول محاسبه حجم که در فوق بیان شد به ازای $a = -r$ و $b = r$ داریم

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)dx$$

$$= \quad ۲\pi[r^۲x - \frac{x^۳}{۳}]_۰^r = ۲\pi(r^۳ - \frac{r^۳}{۳}) = \frac{۴}{۳}\pi r^۳.$$

مثال فوق را می‌توان از این دیدگاه نیز مورد توجّه قرار داد که حجم کره به شعاع r عبارت است از حجم حاصل از دوران یك دایره به شعاع r حول یك قطر از آن. به بیان ساده‌تر اگر قطری از دایره را در نظر بگیریم که روی محور xها منطبق است آنگاه می‌توان گفت حجم کره حاصل از دوران ناحیه محدود به تابع $y = \sqrt{r^۲ - x^۲}$، $-r \leq x \leq r$ حول محور xها است.

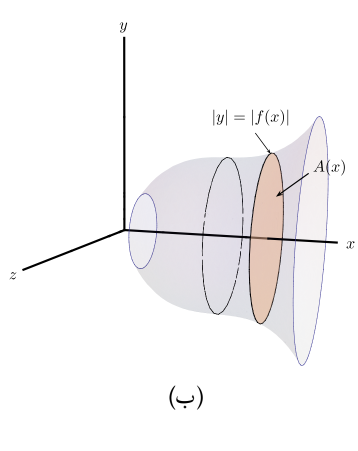
حال به توصیف حالت کلی‌تر می‌پردازیم.

فرض کنیم A ناحیه محدود به نمودار $y = f(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ و محور xها باشد. می‌خواهیم حجم حاصل از دوران این ناحیه حول محور xها را بدست آوریم برای محاسبه این حجم دو روش وجود دارد که عبارتند از روش برشی (روش واشری) و روش لایه‌ای استوانه‌ای که در ذیل به بیان هر یك خواهیم پرداخت.

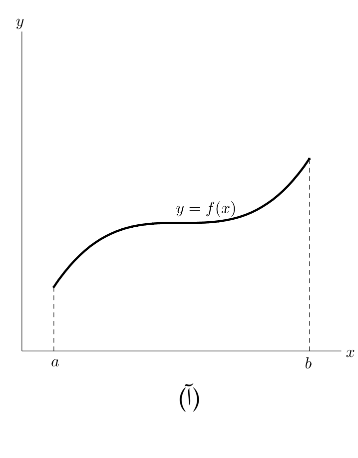
الف) حجم جسم دوار با روش برشی (روش واشری).

ناحیه A محدود به نمودار $y = f(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ و محور xها را مطابق شکل (آ) در نظر می‌گیریم. با دوران ناحیه A حول محور xها حجمی حاصل می‌شود که آنرا V می‌نامیم. چنانچه $A(x)$ مساحت یك مقطع عرضی در x عمود بر محور xها باشد آنگاه این مقطع عبارت از دایره‌ای به شعاع $|f(x)|=|y|$ خواهد بود و مساحت این مقطع برابر است با $A(x) = \pi y^۲ = \pi|f(x)|^۲$ بنابراین با بکار بردن فرمول مقدماتی حجم $V = \int_a^b A(x)dx$ فرمول زیر برای حجم حاصل از دوران ناحیه A حول محور xها حاصل می‌شود.

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^۲ dx \qquad (۱.۱۳)$$



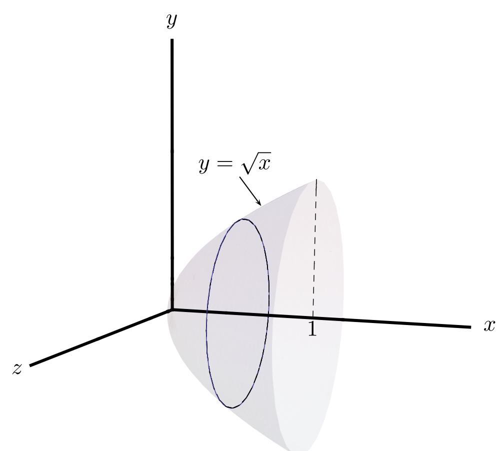
(ب)



(آ)

مثال ۲.۳.۱۳. *حجم حاصل از دوران ناحیه A محدود به منحنی $y = \sqrt{x}$ و خطوط $x = ۰$ و $x = ۱$ و $y = ۰$ حول محور xها را بدست آورید.*

حل. با توجّه به فرمول ۱.۱۳ و شکل زیر داریم



$$\begin{aligned} V &= \int_۰^۱ \pi(\sqrt{(x)})^۲ dx = \int_۰^۱ \pi x dx \\ &= \pi[\frac{x^۲}{۲}]_۰^۱ = \pi(\frac{۱}{۲} - ۰) = \frac{\pi}{۲}. \end{aligned}$$

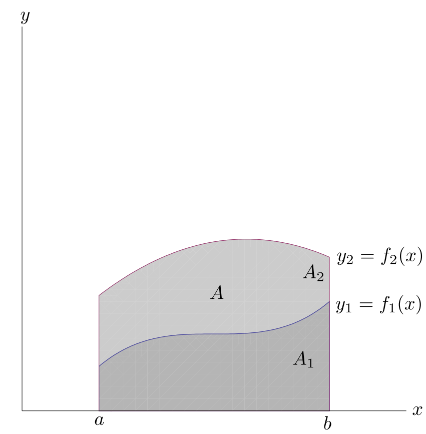
ملاحظه ۳.۳.۱۳. *اگر ناحیه A محدود به منحنی‌های $y_۱ = f_۱(x)$ از پائین و $y_۲ = f_۲(x)$ از بالا و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد آنگاه حجم حاصل از دوران ناحیه A را می‌توان بصورت زیر بدست آورید.*

فرض کنیم $A_۱$ سطح زیرمنحنی $y_۱ = f_۱(x) \quad a \leq x \leq b$ و $A_۲$ سطح زیر منحنی $y_۲ = f_۲(x)$، $a \leq x \leq b$ و $V_۱$ حجم حاصل از دوران ناحیه $A_۱$ و $V_۲$ حجم حاصل از دوران ناحیه $A_۲$ حول محور xها باشد در این صورت

$$\begin{aligned} \text{حجم حاصل از دوران ناحیه } A \text{ حول محور } x\text{ها} &= V \\ &= V_۲ - V_۱ \\ &= \int_a^b \pi[f_۲(x)]^۲ dx - \int_a^b \pi[f_۱(x)]^۲ dx \\ &= \int_a^b \pi[[f_۲(x)]^۲ - [f_۱(x)]^۲] dx \end{aligned}$$

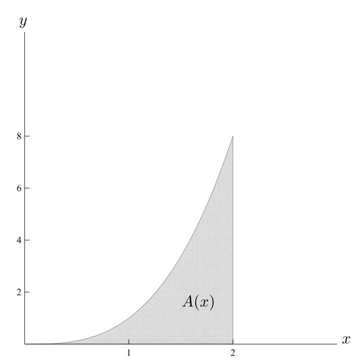
بنابراین

$$V=\int_a^b \pi[[f_۲(x)]^۲-[f_۱(x)]^۲]dx.$$



مثال ۴.۳.۱۳. *حجم حاصل از دوران ناحیه* A *محدود به منحنی* $y=x^۳$ *و خطوط* $y=۸$ *و* $x=۰$ *را بدست آورید.*

حل. با توجّه به شکل داریم



$$\begin{aligned} V &= \int_۰^۲ \pi[۸^۲-(x^۳)^۲]dx=\pi\int_۰^۲(۶۴-x^۶)dx \\ &= \pi[۶۴x-\frac{x^۷}{۷}]_۰^۲=\pi[۱۲۸-\frac{۱۲۸}{۷}]=\frac{۷۶۸}{۷}\pi. \end{aligned}$$

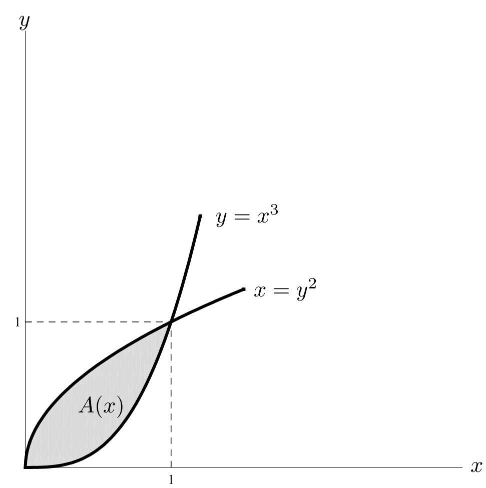
ملاحظه ۵.۳.۱۳. *مشابه آنچه که در مورد حجم حاصل از دوران ناحیه A حول محور xها بیان شد می‌توان حجم ناحیه A محدود به منحنی $x = g(y)$ و خطوط $x = ۰$ و $y = c$ و $y = d$ را وقتی حول محور yها دوران کند، بصورت زیر بدست آورد.*

$$V = \int_c^d \pi[g(y)]^۲ dy \tag{۲.۱۳}$$

چنانچه ناحیه A محدود به منحنی‌های $x_۱ = g_۱(y)$ از چپ و $x_۲ = g_۲(y)$ از راست و خطوط $y = c$ از پائین و $y = d$ از بالا باشد آنگاه حجم حاصل از دوران این ناحیه حول محور yها عبارت است از

$$V = \int_c^d \pi[[g_۲(y)]^۲ - [g_۱(y)]^۲]dy.$$

مثال ۶.۳.۱۳. *حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی‌های $y = x^۳$ و $x = y^۲$ را حول محور xها و نیز حول محور yها بدست آورید.*



حل. اگر $V_۱$ حجم حاصل از دوران حول محور xها و $V_۲$ حجم حاصل از دوران حول محور yها فرض کنیم آنگاه به توجّه به شکل داریم

$$\begin{aligned} V_۱ &= \int_۰^۱ \pi[(\sqrt{x})^۲ - (x^۳)^۲]dx = \pi \int_۰^۱ (x - x^۶)dx \\ &= \pi[\frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۷}{۷}]_۰^۱ = [\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۷}] = \frac{۵\pi}{۱۴}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_۲ &= \int_۰^۱ \pi[(\sqrt[۳]{y})^۲ - (y^۲)^۲]dy = \pi\int_۰^۱ (y^{\frac{۲}{۳}} - y^۴)dy \\ &= \pi[\frac{۳}{۵}y^{\frac{۵}{۳}} - \frac{y^۵}{۵}]_۰^۱ = \pi[\frac{۳}{۵} - \frac{۱}{۵}] = \frac{۲\pi}{۵}. \end{aligned}$$

ب) روش لایه‌های استوانه‌ای.

فرض کنید A ناحیه محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور xها و خطوط $x = a$ و $x = b$ $(۰ \leq a < b)$ باشد که حول محور yها دوران می‌کند. برای محاسبه حجم حاصل از دوران، با توجّه به فرمول ۲.۱۳ لازم است که از معادله $y = f(x)$، x را بر حسب y بدست آوریم به عبارت دیگر معادله $y = f(x)$ را بصورت $x = g(y)$ تبدیل کنیم و همیشه چنین کاری به سادگی انجام نمی‌پذیرد. مثلاً فرض کنید $y = x^۳ + x + ۱$ در اینصورت حل این معادله و پیدا کردن x بر حسب y با کمی محاسبات همراه است و حتی گاهی ممکن است حالت بدتر اتّفاق افتد و معادله $y = f(x)$ اصلاً قابل حل نباشد و نیز گاهی ممکن است پس از حل معادله به انتگرال دشواری برخورد نمائیم. برای گریز از این مشکل می‌توان از روش دیگری به مسئله نزدیک شد که بنام روش لایه‌های استوانه‌ای معروف است. در این روش حجم جسم را بصورت جمع نامتناهی از لایه‌های استوانه‌ای به ضخامت dx در نظر می‌گیریم. جهت درك شهودی بهتر می‌توان روش لایه‌های استوانه‌ای را به لایه‌های (پوسته‌های) یك پیاز تصور کرد چرا که حجم یك پیاز بوسیله جمع نامتناهی سطح پوسته‌های آن حاصل می‌شود ضخامت این پوسته‌ها بسیار کم و همان گونه که در فوق اشاره شد برابر dx فرض می‌شود. با این روش جسم مورد نظر را به صورت استوانه‌هایی که محورشان محور yهاست تجزیه می‌کنیم هر گاه شعاع استوانه x و ارتفاعش $f(x)$ باشد آنگاه سطح جانبی این استوانه برابر است با

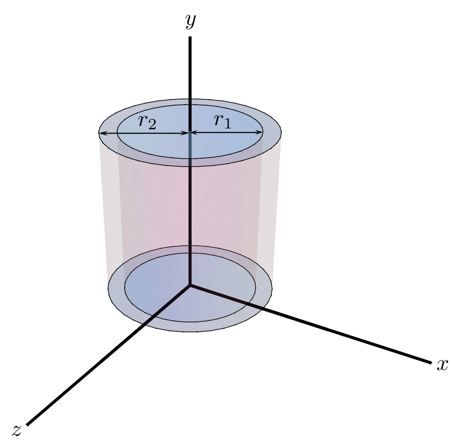
$$A(x) = ۲\pi|xf(x)|.$$

و حجم لایه‌های استوانه‌ای به ضخامت dx و به عبارت دیگر عنصر دیفرانسیل حجم برابر با $dv = A(x)dx = ۲\pi|xf(x)|dx$ است. V حجم جسم حاصل از دوران حول محور yها است و بصورت زیر حاصل می‌شود

$$f(x) \geq ۰, \quad ۰ \leq a \leq b, \quad V = \int_a^b ۲\pi|xf(x)|dx$$

بصورت دقیق‌تر نیز می‌توان فرمول فوق را از طریق زیر بدست آورد. فرض کنیم شکل زیر یك لایه استوانه‌ای با شعاع درونی $r_۱$، شعاع بیرونی $r_۲$ و ارتفاع h باشد حجم V با کم کردن حجم استوانه درونی $V_۱$ از حجم استوانه بیرونی $V_۲$ محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_۲ - V_۱ = \pi r_۲^۲ h - \pi r_۱^۲ h = \pi(r_۲^۲ - r_۱^۲)h \\ &= \pi(r_۲ + r_۱)(r_۲ - r_۱)h \end{aligned}$$



$$= \quad ۲\pi \frac{r_۲ + r_۱}{۲} h(r_۲ - r_۱)$$

اگر فرض کنیم $\Delta r = r_۲ - r_۱$ (ضخامت لایه استوانه‌ای) و $r = \frac{۱}{۲}(r_۲ + r_۱)$ (شعاع متوسط لایه استوانه‌ای) باشد آنگاه حجم یك لایه استوانه‌ای چنین می‌شود.

$$\Delta V = ۲\pi r h \Delta r \qquad (۳.۱۳)$$

و می‌توان این فرمول را بصورت زیر به خاطر سپرد.

$V =$ (ضخامت)(ارتفاع)(دایره محیط).

حال فرض کنید V حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به منحنی $y = f(x)$ $(f(x) \geq ۰)$ و خطوط $y = ۰$، $x = a$ و $x = b$ که در آن $(۰ \leq a < b)$ باشد. فرض کنیم $p = [a = x_۰, x_۱, x_۲, \cdots, x_{n-۱}, x_n = b]$ یك افراز برای $[a, b]$ باشد و فرض کنید z_i نقطه وسط $[x_{i-۱}, x_i]$ یعنی $z_i = \frac{۱}{۱}(x_{i-۱} + x_i)$ باشد. اگر مستطیلی با قاعده $[x_{i-۱}, x_i]$ و ارتفاع $f(z_i)$ حول محور yها دوران کند آنگاه یك لایه استوانه‌ای با شعاع متوسط z_i، ارتفاع $f(z_i)$ و ضخامت $\Delta x_i = x_i - x_{i-۱}$ پدید می‌آید.

لذا بنا به فرمول حجم یك لایه استوانه‌ای فرمول ۳.۱۳ داریم

$$\Delta V_i = ۲\pi z_i f(z_i) \Delta x_i.$$

بنابراین حجم تقریبی V عبارت است از

$$V \approx \sum_{i=۱}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=۱}^{n} ۲\pi z_i f(z_i) \Delta x_i.$$

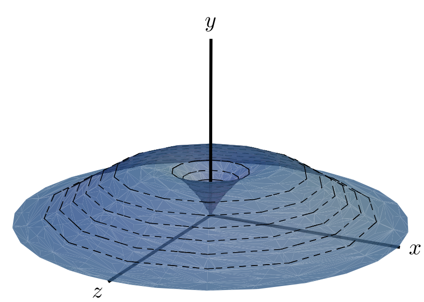
حال اگر $|p| \longrightarrow ۰$ آنگاه مقدار دقیق حجم V بصورت زیر حاصل می‌شود

$$V = \lim_{|p|\longrightarrow ۰} \sum_{i=۱}^{n} ۲\pi z_i f(z_i)\Delta x_i = \int_a^b ۲\pi x f(x) dx.$$

بنابراین حجم حاصل از دوران ناحیه A محصور به منحنی $y = f(x)$ $(f(x) \geq ۰)$ و $x = a$ و $x = b$، $(۰ \leq a < b)$ و $y = ۰$ حول محور yها عبارت است از

$$V = \int_a^b ۲\pi x f(x) dx.$$

مثال ۷.۳.۱۳. *حجم حاصل از دوران فاصله محدود به منحنی $y = x(x-۱)^۲$ و $y = ۰$ حول محور yها را بدست آورید.*



حل. با توجّه به شکل بالا داریم

$$\begin{aligned} V &= \int_۰^۱ ۲\pi x[x(x-۱)^۲]dx = ۲\pi \int_۰^۱ (x^۴ - ۲x^۳ + x^۲)dx \\ &= ۲\pi[\frac{x^۵}{۵} - \frac{x^۴}{۲} + \frac{x^۳}{۳}]_۰^۱ = \frac{\pi}{۱۵}. \end{aligned}$$

ملاحظه ۸.۳.۱۳.

۱. *اگر ناحیه A محدود به منحنی‌های $y_۱ = f_۱(x)$ از پائین، $y_۲ = f_۲(x)$ از بالا و خطوط $x = a$ و $x = b$، $(۰ \leq a < b)$ و $y = ۰$ باشد آنگاه حجم حاصل از دوران ناحیه A حول محور yها را می‌توان با تفاضل حجمها بصورت زیر بدست آورد.*

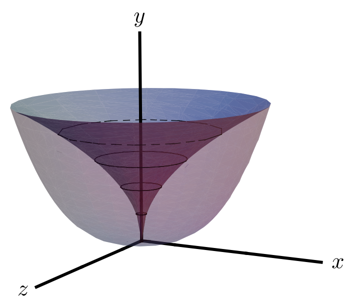
$$V = \int_a^b ۲\pi x[f_۲(x) - f_۱(x)]dx$$

۲. *روش لایه‌های استوانه‌ای این امکان را برای ما فراهم می‌سازد که حجمهای حاصل از دوران یك ناحیه حول محور xها را نیز بتوانیم بدست آوریم بدین منظور کافی است نقش متغیرهای x و*

y را در فرمولهای بدست آمده فوق تعویض نمائیم در اینصورت حجم حاصل از دوران ناحیه A محصور به منحنی $x = g(y)$، $x = 0$، $y = c$ و $y = d$ ($0 \leq c < d$) حول محور xها عبارت است از

$$V = \int_c^d 2\pi y g(y) dx.$$

مثال ۹.۳.۱۳. *حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین منحنی‌های $y = x^3$ و $x = y^2$ حول محور yها و حول محور xها را با روش لایه‌های استوانه‌ای بدست آورید.*



حل. با توجه شکل بالا داریم

۱. دوران حول محور yها.

نقاط تقاطع دو منحنی عبارت است از $y = x^3 = (y^2)^3 = y^6$ پس $y(y^5 - 1) = 0$ و $y = 0, 1$ و یا بطور متناظر $x = 0, 1$ نقاط تقاطع برخورد دو منحنی هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x[\sqrt{x} - x^3]dx = 2\pi \int_0^1 (x^{\frac{2}{3}} - x^4)dx \\ &= 2\pi[\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}} - \frac{x^5}{5}]_0^1 = 2\pi[\frac{2}{5} - \frac{1}{5}] = \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

۲. دوران حول محور xها.

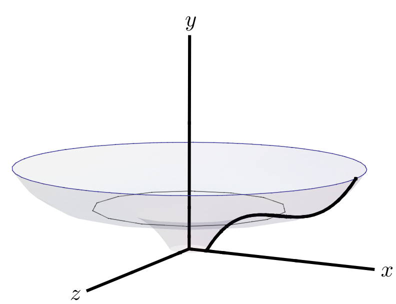
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi y[\sqrt[3]{y} - y^2]dy \\ &= 2\pi y = 2\pi \int_0^1 (y^{\frac{4}{3}} - y^3)dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad ۲\pi[\frac{۳}{۷}y^{\frac{۷}{۳}} - \frac{y^۴}{۴}]_۰^۱ \\
&= \quad ۲\pi[\frac{۳}{۷} - \frac{۱}{۴}] \\
&= \quad ۲\pi(\frac{۵}{۲۸}) = \frac{۵\pi}{۱۴}
\end{aligned}
$$

توجه دارید که مقادیر بدست آمده با مثال ۶.۳.۱۳ که از روش برشی محاسبه شده‌اند مطابقت دارد.

۴.۱۳ سطح جانبی حاصل از دوران یك منحنی

فرض کنیم $y = f(x)$، $a \leq x \leq b$، یك تابع مشتق‌پذیر و مثبت و دارای مشتق پیوسته باشد می‌خواهیم سطح جانبی حاصل از دوران قوس S مربوط به تابع $y = f(x)$ از نقطه $A(a, f(a))$ تا $B(b, f(b))$ را بدست آوریم. بدین منظور افراز $P = \{a = x_۰, x_۱, x_۲, \cdots, x_{n-۱}, x_n = b\}$ را برای $[a, b]$ در نظر می‌گیریم. اگر S_i قسمتی از طول قوس منحنی که در فاصله $x_{i-۱} \leq x \leq x_i$ قرار



دارد باشد و L_i وتر PQ فرض شود مطابق شکل، آنگاه داریم

$$L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^۲ + (\Delta y_i)^۲}, \quad r_۱ = y_i, \quad r_۲ = y_i + \Delta y_i.$$

و سطح جانبی حاصل از دوران L_i حول محور xها عبارت است از سطح جانبی یك مخروط ناقص و برابر است با

$$\Delta A_i = \pi(r_۱ + r_۲)L_i = \pi(۲y_i + \Delta y_i)\sqrt{(\Delta x_i)^۲ + (\Delta y_i)^۲}.$$

ΔA_i تقریبی برای سطح جانبی حاصل از دوران طول قوس S_i حول محور xها می‌باشد. بنابراین $\sum_{i=۱}^{n} \pi(۲y_i + \Delta y_i)\sqrt{(\Delta x_i)^۲ + (\Delta y_i)^۲}$ تقربی برای سطح جانبی مورد نظر است. حال اگر $\|P\| \longrightarrow ۰$ آنگاه مقدار دقیق سطح جانبی بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$\text{سطح جانبی حاصل از دوران} = \lim_{\|p\| \longrightarrow ۰} \sum_{i=۱}^{n} \pi(۲y_i + \Delta y_i)\sqrt{(\Delta x_i)^۲ + (\Delta y_i)^۲}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\|p\|\longrightarrow ۰} \sum_{i=۱}^{n} ۲\pi(y_i + \frac{۱}{۲}\Delta y_i)\sqrt{۱ + (\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})^۲}\Delta x_i \\ &= \int_a^b ۲\pi y\sqrt{۱ + (\frac{dy}{dx})^۲}dx \\ &= \int_a^b ۲\pi y\sqrt{۱ + [f'(x)]^۲}dx. \end{aligned}$$

بنابراین سطح جانبی حاصل از دوران $y = f(x)$، $a \leq x \leq b$ حول محور xها بوسیله فرمول زیر بدست می‌آید

$$A = \int_a^b ۲\pi y\sqrt{۱ + (y')^۲}dx.$$

اگر عبارت داخل انتگرال فرمول فوق را dA، عنصر دیفرانسیل سطحی جانبی و عنصر دیفرانسیل طول قوس $\int_a^b ۲\pi y\sqrt{۱ + (y')^۲}dx$ را ds فرض کنیم آنگاه می‌توان فرمول زیر را بطور ساده‌تر به خاطر سپرد.

$dA = ۲\pi$(شعاع دوران)(عنصر دیفرانسیل طول قوس) عنصر دیفرانسیل سطح جانبی

در حالتی که دوران یك منحنی حول محور yها صورت گیرد سطح جانبی حاصل از دوران این منحنی با تعویض متغیرهای x و y بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$A = \int_a^b ۲\pi x\sqrt{۱ + (\frac{dx}{dy})^۲}dx$$

مثال ۱.۴.۱۳. *مساحت جانبی رویه حاصل از دوران منحنی $y = \sqrt{x}$، $۰ \leq x \leq ۲$ حول محور xها را بدست آورید.*

حل. عنصر دیفرانسیل طول قوس برابر است با

$$ds = \sqrt{۱ + (\frac{dy}{dx})^۲}, \quad dx = \sqrt{۱ + (\frac{۱}{۲\sqrt{x}})^۲}, \quad ds = \frac{\sqrt{۴x + ۱}}{۲\sqrt{x}}dx.$$

و شعاع دوران برابر y است، لذا داریم

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b ۲\pi\rho ds \\ &= \int_۰^۲ ۲\pi(\sqrt{x})\frac{\sqrt{۴x + ۱}}{۲\sqrt{x}}dx \\ &= \pi\int_۰^۲ \sqrt{۴x + ۱}dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [\pi(\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۴})(۴x+۱)^{\frac{۳}{۲}}]_{۰}^{۲} \\ &= \frac{\pi}{۶}(۲۷-۱) \\ &= \frac{۱۳\pi}{۳}. \end{aligned}$$

ملاحظه ۲.۴.۱۳. *در صورتی‌که معادله منحنی بصورت پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$، $\alpha \leq t \leq \beta$ داده شده باشد، فرمول سطح جانبی حاصل از دوران حول محور xها بصورت زیر در می‌آید.*

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} ۲\pi y(t)\sqrt{(\frac{dx}{dt})^{۲} + (\frac{dy}{dt})^{۲}}dt \qquad (۴.۱۳)$$

مثال ۳.۴.۱۳. *نیمدایره $y = \sqrt{a^{۲} - x^{۲}}$ را حول محور xها دوران داده‌ایم سطحی جانبی‌کره حاصل را بدست آورید.*

حل. معادله نیمدایره را می‌توان بصورت پارامتری زیر نظر گرفت

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \qquad ۰ \leq t \leq \pi$$

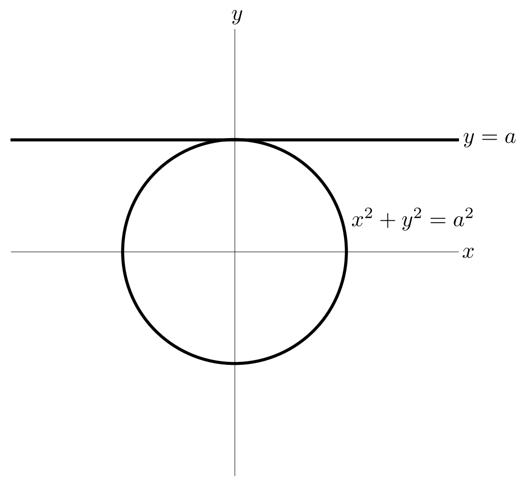
بنابراین سطح جانبی طبق فرمول ۴.۱۳ برابر است با

$$\begin{aligned} A &= \int_{۰}^{\pi} ۲\pi(a\sin t)\sqrt{(-a\sin t)^{۲} + (a\cos t)^{۲}}dt \\ &= ۲\pi a^{۲}\int_{۰}^{\pi} \sin t dt \\ &= ۲\pi a^{۲}[-\cos t]_{۰}^{\pi} = ۴\pi a^{۲}. \end{aligned}$$

مثال ۴.۴.۱۳. *دایره $x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$ را حول خط $y = a$ دوران می‌دهیم و یك چنبره بصورت شکل حاصل می‌شود. سطح جانبی چنبره را بدست آورید.*

حل. داریم $x = a\cos\theta$ و $y = a\sin\theta$، $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$

$$\begin{aligned} ۲\pi\rho ds &= ۲\pi(y+a)ad\theta \\ &= ۲\pi(a\sin\theta + a)ad\theta \\ &= ۲\pi a^{۲}(\sin\theta + ۱)d\theta. \end{aligned}$$



بنابراین

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{۰}^{۲\pi} ۲\pi\rho ds \\
&= ۲\pi a^{۲}\int_{۰}^{۲\pi}(\sin\theta + ۱)d\theta \\
&= ۲\pi a^{۲}[-\cos\theta + \theta]_{۰}^{۲\pi} \\
&= ۲\pi a^{۲}(-۱ + ۲\pi - (-۱ + ۰)) \\
&= ۴\pi^{۲}a^{۲}.
\end{aligned}
$$

۵.۱۳ کار انجام شده

فرض کنید که جسمی توسط نیروی F در طول محور xها از $x = a$ تا $x = b$ جابجا شده باشد در این صورت کار انجام شده توسط این نیرو برابر است با

$$W = \int_{a}^{b} F(x)dx \quad \text{کار انجام شده}$$

توجه داریم که در این حالت شتاب ثابت می‌باشد.

دلیل فرمول فوق را می‌توان به این صورت بیان کرد که اگر $P = \{a = x_{۰}, x_{۱}, x_{۲}, \cdots, x_{n-۱}, x_n = b\}$ یک افراز برای $[a, b]$ باشد آنگاه $W_i = F(t_i)\Delta x_i$، $t_i \in [x_{i-۱}, x_i]$ تقریبی برای کار انجام شده در این فاصله است، بنابراین $\sum_{i=۱}^{n} W_i = \sum_{i=۱}^{n} F(t_i)\Delta x_i$ تقریبی برای کار کل یعنی w است.

حال اگر $n \longrightarrow \infty$ آنگاه داریم $W \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} W_i$ و لذا
$$W = \lim_{\|P\| \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} F(t_i)\Delta x_i.$$

مثال ۱.۵.۱۳. *برای نگهداری فنری که از طول طبیعی ۱۰ سانتیمتری‌اش تا طول ۱۵ سانتیمتری کشیده شده است یک نیروی ۴۰ نیوتنی لازم است، درکشیدن این فنر از طول ۱۵ سانتیمتر تا طول ۱۸ سانتیمتر چقدر کار انجام شده است؟*

حل. بنابه قانون هوك نیروی لازم جهت نگهداری فنری که x واحد از طول طبیعی آن کشیده شده باشد با x متناسب است یعنی $F(x) = kx$ که در آن k مقدار ثابت مثبتی است که ثابت فنر نامیده می‌شود. لذا با توجه به نیروی ۴۰ نیوتنی برای تغییر فنر از ۱۰ سانتیمتر به ۱۵ سانتیمتر داریم
$$F(0/15 - 0/10) = k(0/05).$$

بنابراین $40 = k(0/05)$ و یا $k = 800$ پس $F(x) = 800x$ لذا کار انجام شده برابر است با
$$W = \int_{0/05}^{0/08} 800x dx = [\frac{x^2}{2}]_{0/05}^{0/08} = 400[(0/08)^2 - (0/05)^2] = 1/56 \text{ ژول}.$$

۶.۱۳ گشتاورها و مرکز جرم

یکی دیگر از کابردهای انتگرال معین محاسبه جرم، گشتاورها و مرکز جرم می‌باشد که در رشته‌های فیزیك و مهندسی نقش اساسی دارد. هر کدام از محاسبات مربوط به جرم، گشتاور و مرکز جرم را می‌توان به سه صورت زیر در نظر گرفت.

الف) در امتداد یك سیم نازك.

ب) در یك ورقه نازك یا لایه.

ج) در یك جسم.

در هر کدام از حالات فوق فرض می‌کنیم که چگالی موبوطه (چگالی طولی - سطحی - حجمی) مقدار ثابت باشد بعبارت دیگر پراکندگی جرم بطور یکنواخت باشد در این صورت گشتاور را می‌توان بصورت زیر در هر یك از حالات فوق مشخص نمود.

فرض کنیم که اجرام $m_1, m_2, \cdots, m_k$ به ترتیب در نقاطی به فواصل $x_1, x_2, \cdots, x_k$ در روی یك محور از مبدأ آن قرار گرفته باشند در اینصورت گشتاور نسبت به مبدأ را بصورت $\sum_{i=1}^{k} m_i x_i$ تعریف می‌کنیم.

حال اگر تمام جرم یعنی $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i$ را در نقطه به فاصله x از مبدأ متمرکز سازیم آنگاه گشتاور کل عبارت است از $\overline{x}(\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i)$. نقطه $\overline{x}$ را مرکز جرم می‌گوئیم. با توجه به رابطه $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i = \overline{x}(\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i)$ نتیجه می‌شود که

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}.$$

حال اگر اجرام در نقاطی در صفحه مختصات مانند $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_k, y_k)$ قرار گرفته باشند در این صورت گشتاور نسبت به محور xها و نیز محور yها عبارت است از

$$\begin{aligned} M_x \text{ گشتاور نسبت به محور } x \text{ها} &= \sum_{i=1}^{k} m_i y_i, \\ M_y \text{ گشتاور نسبت به محور } y \text{ها} &= \sum_{i=1}^{k} m_i x_i. \end{aligned}$$

و مرکز جرم عبارت است از نقطه $(\overline{x}, \overline{y})$ که در آن

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}.$$

در فضا اگر جرم‌ها در نقاط زیر قرار داشته باشند،

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \cdots, (x_k, y_k, z_k)$$

در این‌صورت گشتاورها نسبت به صفحات مختصات بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} M_{yz} \text{ گشتاور نسبت به صفحه } yz &= \sum_{i=1}^{k} m_i x_i, \\ M_{xz} \text{ گشتاور نسبت به صفحه } xz &= \sum_{i=1}^{k} m_i y_i, \\ M_{xy} \text{ گشتاور نسبت به صفحه } xy &= \sum_{i=1}^{k} m_i z_i. \end{aligned}$$

نقطه $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ مرکز جرم عبارت است از نقطه‌ای که هر گاه تمام جرم را در آن متمرکز کنیم، تغییری در گشتاورها ایجاد نشود لذا مختصات مرکز جرم عبارت است از

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} m_i x_i}{\sum_{i=۱}^{k} m_i}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} m_i y_i}{\sum_{i=۱}^{k} m_i}, \quad \overline{z} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} m_i z_i}{\sum_{i=۱}^{k} m_i}.$$

اکنون فرض کنید جسم T در فضا بین صفحات $x = a$ و $x = b$ که بطور عمود بر محور xها می‌باشند قرار داشته باشد و فرض کنید $P = \{a = x_۰, x_۱, x_۲, \cdots, x_{n-۱}, x_n = b\}$ افرازی از $[a, b]$ باشد و Δm_i و ΔV_i به ترتیب جرم و حجم قسمتی از جسم بین صفحات عمود بر محور xها در نقاط $x_{i-۱}$ و x_i باشند و $K_i = (\tilde{x_i}, \tilde{y_i}, \tilde{z_i})$ مرکز جرم آن باشد. در اینصورت گشتاور این قسمت از جسم نسبت به صفحات xy، xz و yz به ترتیب عبارتند از $\tilde{x_i}\Delta m_i$ و $\tilde{y_i}\Delta m_i$ و $\tilde{z_i}\Delta m_i$.

بنابراین $\sum\limits_{i=۱}^{k} \tilde{x_i}\Delta m_i$ و $\sum\limits_{i=۱}^{k} \tilde{y_i}\Delta m_i$ و $\sum\limits_{i=۱}^{k} \tilde{z_i}\Delta m_i$ تقریبی برای گشتاور تمام جسم نسبت به صفحات xy و xz و yz خواهند بود.

حال اگر $n \longrightarrow \infty$ آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{k} \tilde{x_i}\Delta m_i \longrightarrow \int_a^b \overline{x} dm,$$
$$\sum_{i=۱}^{k} \tilde{y_i}\Delta m_i \longrightarrow \int_a^b \overline{y} dm,$$
$$\sum_{i=۱}^{k} \tilde{z_i}\Delta m_i \longrightarrow \int_a^b \overline{z} dm.$$

بنابراین مختصات مرکز جرم عبارت خواهند بود از

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b \tilde{x} dm}{\int_a^b dm}, \quad \overline{y} = \frac{\int_a^b \tilde{y} dm}{\int_a^b dm}, \quad \overline{z} = \frac{\int_a^b \tilde{z} dm}{\int_a^b dm}.$$

اگر چگالی حجمی جسم را با δ نمایش دهیم، آنگاه بنابه تعریف داریم $\delta = \lim_{\Delta V \longrightarrow ۰} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dv}$ پس $dm = \delta dV$.

- اگر جرم یك جسم، در فضا توزیع شده باشد آنگاه $dm = \delta dV$.

- اگر جرم یك جسم، در صفحه توزیع شده باشد $dm = \delta dA$ که dA جرء سطح است.

- اگر جرم یك جسم، در روی یك سیم نازك توزیع شده باشد آنگاه $dm = \delta ds$ که ds جزء طول قوس است.

بنابراین فرمولهای بدست آمده برای جرم، گشتاورها و مرکز جرم را در هر یك از سه حالت بیان شده می‌توان بصورت زیر خلاصه کرد.

الف) در امتداد یك سیم نازك.

$$\begin{aligned} \text{جرم } M &= \int dm = \int_a^b \delta dx \\ \text{گشتاور نسبت به مبداء } M_o &= \int x dm = \int_a^b x\delta dx \\ \text{مرکز جرم } \overline{x} &= \frac{M_o}{M} = \frac{\int_a^b x\delta dx}{\int_a^b \delta dx} \end{aligned}$$

ب) در یك ورقه نازك یا لایه.

$$\begin{aligned} \text{جرم} M &= \int dm = \int_a^b \delta dA \\ \text{گشتاور نسبت به محور } x \text{ها } M_x &= \int \tilde{y} dm \\ \text{گشتاور نسبت به محور } y \text{ها } M_y &= \int \tilde{x} dm \\ \text{مرکز جرم } (\overline{x}, \overline{y}), \quad \overline{x} &= \frac{M_y}{M} \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M} \end{aligned}$$

ج) در یك جسم.

$$\begin{aligned} \text{جرم} M &= \int dm = \int_a^b \delta dV \\ \text{گشتاور نسبت به صفحه } xz \; M_{xz} &= \int \tilde{y} dm \\ \text{گشتاور نسبت به صفحه } yz \; M_{yz} &= \int \tilde{x} dm \\ \text{گشتاور نسبت به صفحه } xy \; M_{xy} &= \int \tilde{z} dm \end{aligned}$$

$$\text{مرکز جرم } (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}), \quad \overline{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

حال به بررسی چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱.۶.۱۳. *مرکز جرم ناحیه A محدود به خطوط $y = x$ و $y = -x$ و $y = 1$ را با فرض $\delta = 2$*

بدست آورید.

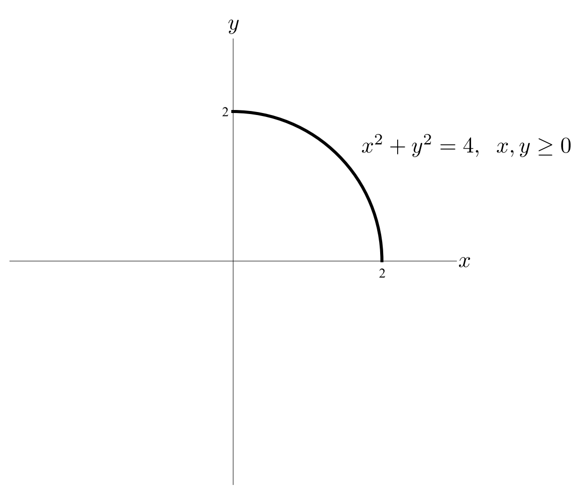
حل. چون A ناحیه‌ای در صفحه است لذا بنابه حالت (ب) داریم
$dm = \delta a dA = ۲dA.$

که dA یك جزء کوچك سطح بصورت مستطیل شکل افقی است لذا داریم

$$\begin{array}{rcl} dA &=& ۲xdy, \quad (\tilde{x},\tilde{y}) = (۰, y) \\ M &=& \int dm = \int_۰^۱ ۴xdy = \int_۰^۱ ۴ydy = [۲y^۲]_۰^۱ = ۲ \\ M_x &=& \int \tilde{y}dm = \int_۰^۱ y(۴ydy) = \int_۰^۱ ۴y^۲dy = [\frac{۴}{۳}y^۳]_۰^۱ = \frac{۴}{۳} \\ M_y &=& \int \tilde{x}dm = \int ۰dm = ۰ \\ \overline{x} &=& \frac{M_y}{M} = ۰, \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{۴/۳}{۲}. \end{array}$$

پس $(\overline{x},\overline{y}) = (۰, \frac{۲}{۳})$.

مثال ۲.۶.۱۳. *مفتولی را به شکل ربع دایره به شعاع $r = ۲$ خم کرده‌ایم. فرض کنید چگالی طولی در هر نقطه مانند x برابر $\delta(x) = ۲x$ باشد مختصات مرکز جرم مفتول را حساب کنید.*



حل. با توجه به شکل داریم

معادلات پارامتری ربع دایره عبارتند از $\begin{cases} x = ۲\cos t \\ y = ۲\sin t \end{cases}$ پس نتیجه می‌شود $ds = ((dx/dt)^۲ + (dy/dt)^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ داریم $ds = \sqrt{(-۲\sin t)^۲ + (۲\cos t)^۲} = ۲dt$ و بنابراین

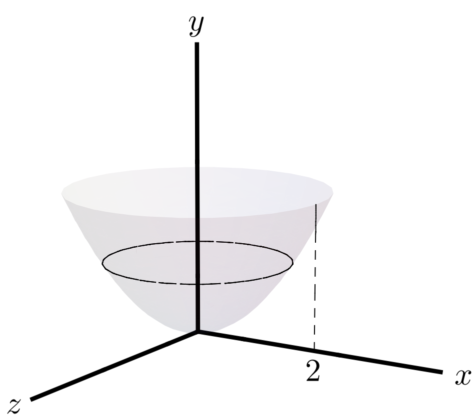
$$dm = \delta ds = ۲x ds = ۴\cos t dt.$$

و داریم

$$\begin{aligned} M &= \int dm = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} ۴\cos t dt = [۴\sin t]_۰^{\frac{\pi}{۲}} = ۴ \\ M_o &= \int \tilde{x} dm = \int x dm = \int (۲\cos t)(۴\cos t dt) = ۸\int_۰^۲ \frac{۱ + ۲\cos t}{۲} dt \\ &= ۴[t + \frac{۲\sin t}{۲}]_۰^{\frac{\pi}{۲}} = ۲\pi. \end{aligned}$$

لذا $\overline{x} = \frac{M_o}{M} = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$.

مثال ۳.۶.۱۳. *مرکز جرم جسم حاصل از دوران سطح محدود به منحنی $y = x^۲$ و خط $y = ۴$ حول محور yها را بدست آورید. چگالی حجمی را $\delta = k$ که k مقدار ثابت است در نظر بگیرید.*



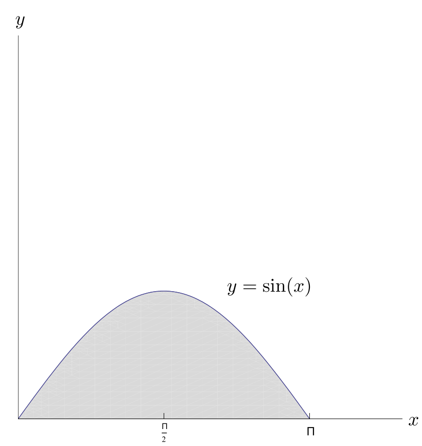
حل. با توجه به شکل بالا داریم $\overline{x} = \overline{z} = ۰$.
چون چگالی مقدار ثابتی است پس

$$\begin{aligned} dm &= \delta dV = k dV = k\pi x^۲ dy = k\pi y dy \\ M &= \int dm = \int_۰^۴ k\pi y dy = k\pi[\frac{y^۲}{۲}]_۰^۴ = ۸k\pi \end{aligned}$$

$$M_{xz} = \int \tilde{y}dm = \int_{۰}^{۴} y(k\pi y dy) = k\pi[\frac{y^{۳}}{۲}]_{۰}^{۴} = \frac{۶۴}{۳}k\pi$$

بنابراین $\frac{۸}{۳} = \frac{۶۴k\pi/۳}{۸k\pi} = \frac{M_{xz}}{M} = \overline{y}$ لذا مختصات مرکز جرم عبارت است از $(۰, \frac{۸}{۳}, ۰)$.

مثال ۴.۶.۱۳. *مرکز جرم ناحیه محدود به منحنی $y = \sin x$ و محور xها را در فاصله $۰ \leq x \leq \pi$ را بدست آورید. (چگالی سطحی را مقدار ثابت $\delta = ۱$ بگیرید)*



حل. با توجه به شکل بالا داریم

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = \frac{۱}{۲}, \quad dm = \delta dA = dA = ydx.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
M &= \int dm = \int_{۰}^{\pi} ydx = \int_{۰}^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{۰}^{\pi} = ۲ \\
M_y &= \int \tilde{x} dm = \int_{۰}^{\pi} x \sin x dx = [-x\cos x + \sin x]_{۰}^{\pi} = \pi \\
M_x &= \int \tilde{y} dm = \int \frac{y}{۲} dm = \int_{۰}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{۲}\right)(\sin x dx) = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\pi} \sin^{۲} x dx \\
&= \frac{۱}{۴}\int_{۰}^{\pi} (۱ - \cos ۲x)dx = [\frac{۱}{۴}x - \frac{۱}{۲}\sin^{۲} x]_{۰}^{\pi} = \frac{\pi}{۴}
\end{aligned}$$

از این‌رو

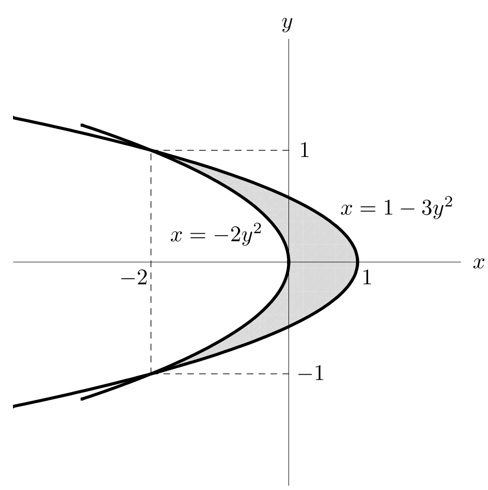
$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\pi}{۲}, \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{\pi}{۴}}{۲} = \frac{\pi}{۸}.$$

۷.۱۳ مسائل نمونه حل شده

مساله ۱.۷.۱۳. *مساحت ناحیه محدود به سهمی‌های* $x = -۲y^۲$ *و* $x = ۱ - ۳y^۲$ *را به دست آورید.*

حل. باتوجه به شکل ناحیه ملاحظه می‌شود که باید محاسبه انتگرال مربوط به سطح را با متغیر y انجام دهیم لذا داریم

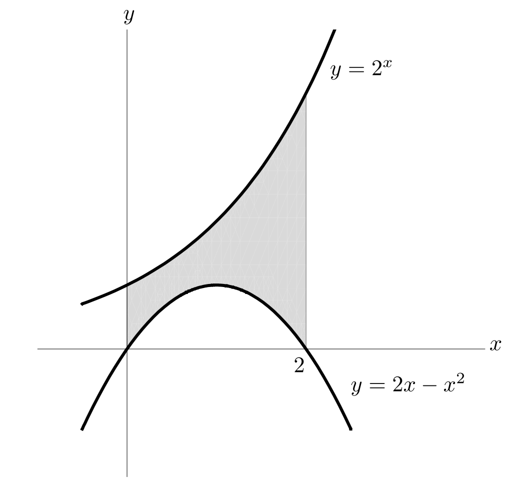
$$\begin{cases} x = -۲y^۲ \\ x = ۱ - ۳y^۲ \end{cases} \Rightarrow y = \pm ۱.$$



$$\begin{aligned} \text{مساحت ناحیه} &= \int_{-۱}^{۱} [(۱ - ۳y^۲) - (-۲y^۲)]dy \\ &= \int_{-۱}^{۱} (۱ - y^۲)dy \\ &= ۲\int_{-۱}^{۱} (۱ - y^۲)dy \\ &= ۲[y - \frac{y^۳}{۳}]_۰^۱ = \frac{۴}{۳}. \end{aligned}$$

مساله ۲.۷.۱۳. *مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های* $y = ۲^x$ *و* $y = ۲x - x^۲$ *و* $x = ۰$ *و* $x = ۲$ *را به دست آورید.*

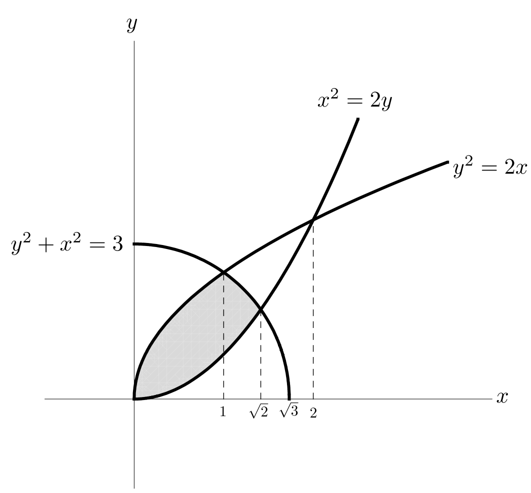
حل. همان‌طوری که از شکل ناحیه ملاحظه می‌شود متغیر مناسب انتگرال جهت محاسبه مساحت



متغیر x است. لذا داریم

$$\text{مساحت ناحیه} = \int_{\circ}^{۲} [۲^x - (۲x - x^۲)]dx = [\frac{۲^x}{Ln۲} - (x^۲ - \frac{x^۳}{۳})]_{\circ}^{۲} = \frac{۳}{Ln۲} - \frac{۴}{۳}.$$

مساله ۳.۷.۱۳. *مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های* $x^۲ = ۲y$ *و* $y^۲ = ۲x$ *و* $x^۲ + y^۲ = ۳$ *در ربع اول را به دست آورید.*



حل. باتوجه به شکل ملاحظه می‌شود که چه برحسب متغیر x و چه برحسب متغیر y باید ناحیه را به دو

قسمت تبدیل نموده و مساحت هرکدام را محاسبه و سپس بایکدیگر جمع نماییم لذا داریم

$$\begin{cases} x^۲ = ۲y \\ x^۲ + y^۲ = ۳ \end{cases} \Rightarrow y = \text{(غیر قابل قبول)} -۳, ۱.$$

بنابراین نقطه تقاطع $(\sqrt{۲}, ۱)$ می‌باشد همچنین

$$\begin{cases} y^۲ = ۲x \\ x^۲ + y^۲ = ۳ \end{cases} \Rightarrow x = \text{(غیر قابل قبول)} -۳, ۱.$$

لذا نقطه تقاطع $(۱, \sqrt{۲})$ می‌باشد.

اکنون برای محاسبه سطح نواحی $A_۱$ و $A_۲$ داریم

$$\begin{aligned} A_۱ \text{ مساحت } &= \int_۰^۱ (\sqrt{۲x} - \frac{x^۲}{۲})dx = [\sqrt{۲}\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} - \frac{x^۳}{۶})]_۰^۱ = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} - \frac{۱}{۶}, \\ A_۲ \text{ مساحت } &= \int_۱^{\sqrt{۲}} (\sqrt{۳ - x^۲} - \frac{x^۲}{۲})dx = [\frac{x}{۲}\sqrt{۳ - x^۲} + \frac{۳}{۲}\sin^{-۱}(\frac{x}{\sqrt{۳}}) - \frac{x^۳}{۶}]_۱^{\sqrt{۲}} \\ &= \frac{۳}{۲}(\sin^{-۱}(\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}) - \sin^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۳}})) - \frac{\sqrt{۲}}{۳} + \frac{۱}{۶}. \end{aligned}$$

بنابراین مساحت ناحیه فوق برابر است با مجموع مساحت‌های فوق یعنی

$$A_۱\text{مساحت} + A_۲\text{مساحت} = \frac{\sqrt{۲}}{۳} + \frac{۳}{۲}\sin^{-۱}(\frac{۱}{۳}).$$

مساله ۴.۷.۱۳. *کره‌ای به شعاع a مفروض است در میان این کره حفره‌ای استوانه‌ای شکل به شعاع b، $(b < a)$ ایجاد می‌کنیم حجم جسم باقیمانده را به دست آورید.*

حل. مسئله فوق را می‌توان بدین صورت بیان کرد که اگر ناحیه محدود به نیم‌دایره $y = \sqrt{a^۲ - x^۲}$ و خط $y = b$ را حول محور xها دوران دهیم آن‌گاه حجم حاصل از دوران دقیقا حجم مورد نظر خواهد بود لذا داریم

$$\begin{aligned} \text{حجم مورد نظر} &= \int_{-\sqrt{a^۲-b^۲}}^{\sqrt{a^۲-b^۲}} \pi[a^۲ - x^۲ - b^۲]dx \\ &= \pi[a^۲x - \frac{x^۳}{۳} - b^۲x]_{-\sqrt{a^۲-b^۲}}^{\sqrt{a^۲-b^۲}} \\ &= ۲\pi[a^۲\sqrt{a^۲ - b^۲} - \frac{(a^۲ - b^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۳} - b^۲\sqrt{a^۲ - b^۲}] \\ &= ۲\pi[(a^۲ - b^۲)^{\frac{۳}{۲}} - \frac{(a^۲ - b^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۳}] \end{aligned}$$

$$= \frac{۴\pi(a^۲ - b^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۳}.$$

مساله ۵.۷.۱۳. *دایره $(x-a)^۲ + y^۲ = r^۲$ که $r < a$ مفروض است. این دایره را حول محور yها دوران می‌دهیم جسم حاصل را یک چنبره می‌گوییم. حجم این چنبره را به دست آورید.*

حل. با استفاده از روش لایه‌های استوانه‌ای کافی است دو برابر حجم حاصل از دوران نیم‌دایره $y = \sqrt{r^۲ - (x-a)^۲}$ را محاسبه نماییم لذا داریم

$$V = ۲\int_{a-r}^{a+r} ۲\pi x\sqrt{r^۲ - (x-a)^۲}dx.$$

برای محاسبه انتگرال فوق فرض کنیم $u = x - a$ در این صورت $du = dx$ و داریم

$$\begin{aligned} V &= ۴\pi\int_{-r}^{r}(u+a)\sqrt{r^۲ - u^۲}du \\ &= ۴\pi\int_{-r}^{r}u\sqrt{r^۲ - u^۲}du + ۴\pi\int_{-r}^{r}a\sqrt{r^۲ - u^۲}du \\ &= ۰ + ۴\pi a(\frac{\pi r^۲}{۲}) = ۲\pi^۲ ar^۲. \end{aligned}$$

مساله ۶.۷.۱۳. *طول قوسی منحنی $x = \frac{۱}{۴}y^۲ - \frac{۱}{۲}Lny$ را در فاصله $۱ \leq y \leq ۲$ به دست آورید.*

حل. با توجه به فرم معادله منحنی کافی است طول قوس را از فرمول بر حسب متغیر y به صورت زیر استفاده نماییم.

$$S = \int_۱^۲ \sqrt{۱ + (\frac{dx}{dy})^۲}dy = \int_۱^۲ (\frac{۱}{۲}y + \frac{۱}{۲y})dy = \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۲}Ln۲$$

مساله ۷.۷.۱۳. *مساحت جانبی حاصل از دوران منحنی $x = \frac{۱}{۴}y^۲ - \frac{۱}{۲}Lny$ در فاصله $۱ \leq y \leq e$ حول محور yها را به دست آورید.*

حل.

$$\begin{aligned} &= \int_۱^e ۲\pi x\sqrt{۱ + (\frac{dx}{dy})^۲}dy \\ &= \int_۱^e ۲\pi(\frac{۱}{۴}y^۲ - \frac{۱}{۲}\ln y)(\frac{۱}{۲}y + \frac{۱}{۲y})dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ۲\pi \int_۱^e (\frac{۱}{۸}y^۳ + \frac{۱}{۸}y - \frac{۱}{۴}y\ln y - \frac{۱}{۴y}\ln y)dy \\
&= ۲\pi[\frac{y^۴}{۳۲} + \frac{y^۲}{۱۶} - \frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲}y^۲\ln y - \frac{۱}{۴}y^۲) - \frac{۱}{۸}(\ln y)^۲]_۱^e \\
&= ۲\pi(\frac{e^۴}{۳۲} + \frac{e^۲}{۱۶} - \frac{e^۲}{۱۶} - \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۳۲} - \frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۱۶}) \\
&= ۲\pi(\frac{e^۴}{۳۲} - \frac{۹}{۳۲}) = \frac{\pi}{۱۶}(e^۴ - ۹).
\end{aligned}$$

مساله ۸.۷.۱۳. *مرکز جرم و گشتاورهای ناحیه یکنواخت بیضی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ را به دست آورید (چگالی سطحی را $\delta = ۱$ در نظر بگیرید).*

حل. داریم $y = \pm b\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{a^۲}}$

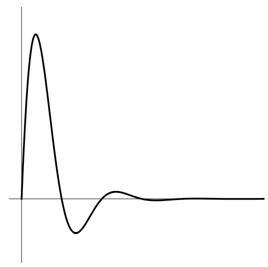
$$\begin{aligned}
dm &= \delta dA = dA = ۲b\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{a^۲}}dx \\
M &= \int_{-a}^a dm = \int_{-a}^a \frac{۲b}{a}\sqrt{a^۲ - x^۲}dx = \frac{۲b}{a}\int_{-a}^a \sqrt{a^۲ - x^۲}dx \\
&= \frac{b}{a}[x\sqrt{a^۲ - x^۲} + a^۲\sin^{-۱}(\frac{x}{a})]_{-a}^a = \pi a^۲ \\
M_x &= \int_{-a}^a \tilde{y}dm = \int_{-a}^a ydm = ۰ \\
M_y &= \int_{-a}^a \tilde{x}dm = \int_{-a}^a ۲bx\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{a^۲}}dx \\
&= ۲\frac{b}{a}\int_{-a}^a x\sqrt{a^۲ - x^۲}dx = \frac{۲b}{a}[\frac{-۱}{۳}(a^۲ - x^۲)^{\frac{۳}{۲}}]_{-a}^a = ۰
\end{aligned}$$

بنابراین $\overline{x} = \frac{M_y}{M} = ۰$ و $\overline{y} = \frac{M_x}{M} = ۰$ لذا مرکز جرم مبدأ مختصات می‌باشد.

مساله ۹.۷.۱۳. *نشان دهید مساحت محدود به منحنی $y = e^{-\alpha x}\sin\beta x$ که $x \geq ۰$ و محور xها تشکیل یك سری هندسی با قدر نسبت $q = e^{\frac{-\alpha\pi}{\beta}}$ می‌دهد.*

حل. توجه داریم که نقاط تقاطع منحنی $y = e^{-\alpha x}\sin\beta x$ با محور xها عبارت است از

$$x_n = \frac{n\pi}{\beta}, \quad n = ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots.$$



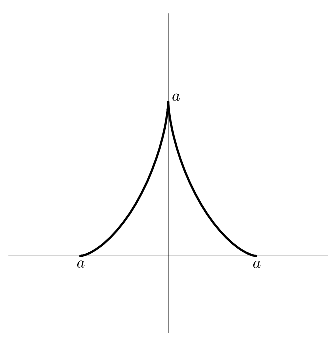
حال برای محاسبه هر کدام از مساحت‌های $S_۰$، $S_۱$، $S_۲$ و $\cdots$ داریم

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{\frac{n\pi}{۲}}^{\frac{(n+۱)\pi}{۲}} |y| dx = (-۱)^n \int_{\frac{n\pi}{۲}}^{\frac{(n+۱)\pi}{۲}} e^{-\alpha x} \sin \beta x \; dx \\ &= (-۱)^{n+۱} [-\frac{e^{-\alpha \frac{(n+۱)\pi}{\beta}}}{\alpha^۲ + \beta^۲} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x)]_{\frac{n\pi}{۲}}^{\frac{(n+۱)\pi}{۲}} \\ &= \frac{(-۱)^{n+۱}}{\alpha^۲ + \beta^۲} [e^{-\alpha \frac{(n+۱)\pi}{\beta}} \beta (-۱)^{n+۱} - e^{-\alpha \frac{n\pi}{\beta}} \beta (-۱)^n] \\ &= \frac{\beta}{\alpha^۲ + \beta^۲} e^{-\alpha \frac{n\pi}{\beta}} (۱ + e^{\frac{-\alpha\pi}{\beta}}). \end{aligned}$$

بنابراین قدر نسبت برابر است با

$$q = \frac{S_{n+۱}}{S_n} = \frac{e^{-\alpha \frac{(n+۱)\pi}{\beta}}}{e^{-\alpha \frac{n\pi}{\beta}}} = e^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}.$$

مساله ۱۰.۷.۱۳. *حجم حاصل از دوران منحنی پارامتری* $\begin{cases} x = a \cos^۳ t \\ y = a \sin^۳ t \end{cases}$ *حول محور xها را به دست آورید.*



حل. با توجه به شکل داریم

$$\begin{aligned} V &= ۲\int_{۰}^{a} \pi y^{۲} dx = ۲\pi \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} a^{۲} \sin^{۶} t(-۳a\cos^{۲} t \sin t)dt \\ &= ۶\pi a^{۳}\left[\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۷} tdt - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۹} tdt\right] \\ &= ۶\pi a^{۳}(\frac{۶}{۷}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۲}{۳} - \frac{۸}{۹}\times\frac{۶}{۷}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۲}{۳}) = \frac{۳۲}{۱۰۵}\pi a^{۳}. \end{aligned}$$

۸.۱۳ مسایل

۱. *سطح زیر هر یک از منحنی‌های داده شده زیر را در فواصل داده شده به دست آورید.*

۱. $y = \sin x, \quad ۰ \le x \le \pi$

۲. $۲)y = \sin^{-۱} x, \quad ۰ \le x \le ۱$

۳. $y = x^{۲} - ۱, \quad -۱ \le x \le ۱$

۴. $y = \sqrt{x}, \quad ۰ \le x \le ۴$

۵. $y = \tan x, \quad ۰ \le x \le ۱$

۶. $y = \frac{۱}{x}, \quad ۱ \le x \le e$

۲. *مساحت ناحیه محدود به هرکدام از دو منحنی‌های داده شده را به دست آورید.*

۱. $y = x^{۲}, y = x$

۲. $y = x^{۲}, y = x^{۴}$

۳. $y = e^{x}, y = x^{۲}$

۴. $y = x^{۲} - ۴, y = ۰$

۵. $y = x^{۲}, y = x^{۲} + ۴x$

۶. $x = \sqrt{y}, x = \sqrt[۳]{y}$

۷. $y^{۲} = ۲x - ۲, y = x - ۵$

۸. $x^{۲} - y + ۱ = ۰, x - y + ۱ = ۰$

۹. $y^2 = x, x^2 = y$

۱۰. $y = x^3 - 2x^2 - 3x, y = 2x63 - 3x^2 - 9x$

۱۱. $y = \sqrt{1 - x^2}, y = -\sqrt{1 - x^2}$

۱۲. $y = x^2, y = \sqrt{x}$

۳. سطح محصور بین $y = -x^2$ و $x = 2$ و $x = 4$ و محور xها را بیابید.

۴. مساحت ناحیه محصور توسط محور xها و منحنی $y = (x-3)(x-2)(x+1)$ و $x = 0$ و $x = 4$ را بیابید.

۵. ناحیه محصور بین $y = x^2 + 2$ و $y = x$ و $x = 1$ و $x = 2$ را به دست آورید.

۶. سطح محصور بین $y = \cos x + 1$ و $y = \frac{3}{2}$ و $x = 0$ و $x = \pi$ را بیابید.

۷. سطح محصور میان منحنی‌های $y = \ln x$ و $x = 2$ و $x = 0$ را به دست آورید.

۸. مساحت نواحی مشخص شده در هر کدام از موارد زیر را به دست آورید.

۱. $y = e^{-x}, x = \ln 2, x = \ln 5, y = 0$

۲. $y = \ln x^2, y = \ln 4, x = e$

۳. $y = \tan^2 x, y = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = 0$

۴. $x^2 + y^2 = 4, y = 0, x \geq 0$

۵. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}}, x = 0, y \geq 0$

۶. $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \pi$

۷. $y = \sec^2 x, y = \cot x, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$

۸. $y = \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}, x = 1, y = 0$

۹. $y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{x^2+1}$

۱۰. $y = x\sqrt{1+x^2}, x = 0, x = 1, y = 0$

۱۱. $x^2 + y^2 \leq 8, x \geq y, y \geq 0$

۱۲. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x \geq 0, y \geq 0$

۹. طول قوس هر کدام از منحنی‌های زیر رادر فواصل مشخص شده به دست آورید.

۱.
$$y = x^{\frac{۲}{۳}}, \quad ۱ \leq x \leq ۸$$

۲.
$$y = x^{۴} + ۲x^{-۲}, \quad ۱ \leq x \leq ۲$$

۳.
$$y = \frac{۱}{۶}x^{۳} + \frac{۱}{۲x}, \quad ۲ \leq x \leq ۵$$

۴.
$$x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = ۱, \quad \frac{۱}{۸} \leq x \leq ۱$$

۵.
$$۹y^{۲} = ۴x^{۳}, \quad ۰ \leq x \leq ۳$$

۶.
$$y = \frac{۱}{۳}(x^{۲} + ۲)^{\frac{۳}{۲}}, \quad ۰ \leq y \leq ۴$$

۷.
$$y = \frac{\sqrt{x}(۳x - ۱)}{۳}, \quad ۱ \leq x \leq ۴$$

۸.
$$x = y^{۲}, \quad ۰ \leq y \leq ۴$$

۹.
$$x = \sin y, \quad ۰ \leq x \leq ۱$$

۱۰.
$$x = \tan y, \quad ۰ \leq x \leq ۱$$

۱۰. *طول قوس منحنی پارامتری* $\begin{cases} x = ۲\cos t \\ y = ۳\sin t \end{cases}$ *را در فاصله* $۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲}$ *به دست آورید.*

۱۱. *طول قوس منحنی پارامتری* $\begin{cases} x = a\cos t + at\sin t \\ y = a\sin t - at\cos t \end{cases}$ *را به ازای* $a > ۰$ *و* $۰ \leq t \leq ۲\pi$ *به دست آورید.*

۱۲. *طول قوس منحنی* $y = Lnx$ *را از نقطه* $x = \sqrt{۳}$ *تا* $x = ۲\sqrt{۲}$ *به دست آورید.*

۱۳. *طول قوس نیم دایره* $y = \sqrt{a^{۲} - x^{۲}}$ *را به دست آورید.*

۱۴. *طول قوس منحنی پارامتری* $\begin{cases} x = a\cos^{۳} t \\ y = a\sin^{۳} t \end{cases}$ *را به دست آورید.*

۱۵. *حجم حاصل از دوران سطح محدود به منحنی* $y^{۲} = ۸x$ *و خط* $x = ۲$ *را حول محور* x*ها به دو روش برشی و لایه‌های استوانه‌ای به دست آورید و نشان دهید حاصل هر دو روش یکسان هستند.*

۱۶. *ناحیه* A *محدود به سهمی* $y = ۴x - x^{۲}$ *و خط* $y = ۶$ *و محور* x*ها مفروض است.*

الف) حجم حاصل از دوران ناحیه A *حول محور* x*ها را به دست آورید.*

ب) حجم حاصل از دوران ناحیه A *را حول محور* y*ها به دست آورید.*

۱۷. *حجم حاصل از دوران ناحیه درون دایره* $(x - a)^{۲} + y^{۲} = b^{۲}$ *حول محور* y*ها را به دست آورید.*

۱۸. ناحیه A محدود به منحنی‌های $y=-x^{2}-3x+6$ و $x+y=-3$ مفروض است. حجم حاصل از دوران این سطح حول محور xها و نیز حول خط $x=3$ را به دست آورید.

۱۹. حجم حاصل از دوران هرکدام از نواحی محدود به منحنی‌های زیر را حول محور xها و محور y ها به دو روش برشی و لایه‌های استوانه‌ای به دست آورید.

۱. $x^{2}-y^{2}=16, y=0, x=8$

۲. $4x^{2}+9y^{2}=36$

۳. $x=9-y^{2}, y=x-7$

۴. $y=2x^{2}, y=0, x=0, x=5$

۵. $y=x^{3}, x=0, y=8$

۶. $y=x^{2}, y=4x-x^{2}$

۷. $y=x^{2}-5x+6, y=0$

۸. $y=e-x^{2}, y=0, x=0, x=1$

۹. $y=2x^{2}, y=2x+4$

۱۰. $xy=4, y=(x-3)^{2}$

۱۱. $y=x^{2}, x=y^{2}$

۲۰. سطح جانبی رویه حاصل از دوران منحنی $y=x^{2}$ و $0\leq x\leq 2$ حول محور x ها را به دست آورید.

۲۱. سطح جانبی رویه حاصل از دوران منحنی $y=\sqrt{1-x^{2}}$ و $0\leq x\leq \frac{1}{2}$ حول محور xها را به دست آورید.

۲۲. سطح جانبی رویه حاصل از دوران منحنی $y=(x-1)^{2}$ و $0\leq x\leq 1$ حول محور xها را به دست آورید.

۲۳. سطح جانبی رویه حاصل از دوران منحنی $y=x^{3}$ و $0\leq x\leq 2$ حول محور xها را به دست آورید.

۲۴. سطح جانبی رویه حاصل از دوران منحنی $y=\frac{x^{3}}{4}+\frac{1}{3x}$ و $1\leq x\leq 3$ حول محور xها را به دست آورید.

۲۵. مساحت جانبی رویه حاصل از دوران منحنی $y^2 - x + 1 = 0$ و $-1 \le y \le 1$ حول محور yها را به دست آورید.

۲۶. مساحت رویه حاصل از دوران $x = \frac{y^4}{2} + \frac{1}{16y^2}$ و $1 \le y \le 3$ حول محور xها را به دست آورید.

۲۷. مساحت رویه حاصل از دوران رویه $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ و $x \ge 0$ و $y \ge 0$ حول محور yها را به دست آورید.

۲۸. مساحت رویه حاصل از دوران حلقه بسته $9ay^2 = x(3a - x)^2$ حول محور yها را به دست آورید.

۲۹. در بلند کردن یک کتاب ۱/۲ کیلوگرمی از کف زمین برای قرار دادن آن بر روی مسیری که ۰/۷ متر ارتفاع دارد چقدر کار انجام می‌شود؟

۳۰. هنگامی که ذره‌ای در فاصله x فوت از مبدأ قرار دارد یک نیروی $x^2 + 2$ پوندی بر آن عمل می‌کند. چقدر کار در حرکت آن از $x = 1$ تا $x = 3$ انجام می‌شود؟

۳۱. در بالا بردن یک وزنه ۶۰ کیلوگرمی از کف زمین تا ارتفاع ۲ متری چقدر کار انجام می‌شود.

۳۲. طول طبیعی فنری ۲۰ سانتی‌متر است. اگر یک نیروی ۲۵ نیوتنی برای نگهداری آن وقتی که تا طول ۳۰ سانتی‌متری کشیده شده لازم باشد برای کشیدن آن از ۲۰ سانتی‌متر تا ۲۵ سانتی‌متر چقدر کار لازم است.

۳۳. طناب سنگینی که ۵۰ فوت طول و ۰/۵ پوند برفوت وزن دارد از لبه ساختمانی که ۱۲۰ فوت ارتفاع دارد آویزان شده است درکشیدن این طناب تا بالای این ساختمان چقدر کار انجام می‌شود؟

۳۴. کابل یکنواختی که ۴۰ فوت طول و ۶۰ پوند وزن دارد از لبه یک ساختمان بلند آویخته شده است. برای بالاکشیدن این کابل به اندازه ۱۰ فوت چقدر کار لازم است؟

۳۵. مرکز جرم و گشتاورهای ناحیه یکنواخت با چگالی ثابت $\delta = 1$ محدود به منحنی‌های $y = Lnx$ و $y = 0$ و $y = e$ را به دست آورید.

۳۶. مرکز جرم ناحیه بیضی شکل به معادله $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ را با چگالی ثابت را به دست آورید.

۳۷. مرکز جرم و گشتاورهای ناحیه محدود به سهمی $y^2 = 4ax$ و خط $x = a$ را با چگالی $\delta = x + 1$ به دست آورد.

۳۸. مرکز جرم و گشتاورهای ناحیه محدود به منحنی‌های $x^2 + y^2 = 9$ و $4x^2 + 9y^2 = 36$ و محور yها در ناحیه $x \ge 0$ و $y \ge 0$ با چگالی ثابت به دست آورید.

۳۹. مرکز جرم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی‌های $y = x^2$ و $y = x^3$ حول محور yها را به دست آورید. چگالی حجمی را $\delta = 4$ درنظر بگیریم.

۴۰. مرکز جرم جسم حاصل از دوران ناحیه محدودبه منحنی‌های $y = x^2$ و $y = x^3$ حول محور xها را به دست آورید. چگالی حجمی را $\delta = 2$ در نظر بگیرید.

۴۱. مرکز جرم جسم مکعب مستطیل با چگالی حجمی $\delta = 1$ حاصل از دوران ناحیه محدود به خطوط $x = a$ و $y = b$ و $x = 0$ و $y = 0$ حول محور xها را به دست آورید.

۴۲. مرکز جرم جسم حاصل از دوران بیضی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ حول محور yها را با چگالی حجمی ثابت به دست آورید.

۴۳. مرکز جرم و گشتاورهای جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی‌های $y = x^2$ و $y = 4$ حول محور yها را با چگالی ثابت به دست آورید.

۴۴. مرکز جرم و گشتاورهای جسم مخروطی شکل حاصل از دوران ناحیه $y = x$ و $y = 2$ و $x = 0$ حول محور yها را به دست آورید. چگالی جسمی را $\delta = 1$ درنظر بگیرید .

فصل ۱۴

سری‌های نامتناهی

در فصل نهم با دنباله‌ها و خواص آنها و نیز همگرائی و واگرائی آنها آشنا شدیم در این فصل به معرفی دنباله خاصی بنام سری‌های نامتناهی می‌پردازیم.

برای دنباله نامتناهی $\{a_n\}$ مجموع زیر را در نظر می‌گیریم

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n + \ldots \tag{۱.۱۴}$$

مجموع فوق شامل تمامی جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ است. که یك سری نامتناهی نامیده می‌شود و در نمایشی اختصاری به صورت $\sum_n a_n$ یا $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نوشته می‌شود. اختصاص مفهومی به مجموع سریهای نامتناهی دارای اهمیتی ویژه است. در این فصل ما به مطالعه نظریه سریهای نامتناهی و رفتار آنها خواهیم پرداخت توجه داریم نوع رفتار دنباله‌ها که در فصل نهم بررسی شد ما را در شناخت خواص ابتدایی سریهای نامتناهی یاری خواهد کرد.

۱.۱۴ همگرایی و واگرایی سریهای نامتناهی

تعریف ۱.۱.۱۴. *فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای حقیقی باشد. دنباله $\{S_n\}$ را بصورت $S_n = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n$ تعریف می‌کنیم در این صورت $\{S_n\}$، دنباله مجموعهای جزئی سری نامتناهی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نامیده می‌شود.*

عدد a_n، جمله n ام سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ و S_n، n امین مجموع جزئی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نامیده می‌شود.

در بحث سریها عالم سخن را به اعداد حقیقی محدود کرده و لذا مقادیر a_n را در اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۱.۱۴. *سری نامتناهی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرا گوئیم، اگر دنباله $\{S_n\}$ شامل مجموعهای جزئی آن همگرا باشد. اگر $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ ، آنگاه S مجموع سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ نامیده می‌شود و می‌نویسیم $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ را واگرا گوییم اگر دنباله $\{S_n\}$ شامل مجموعهای جزئی آن واگرا باشد. منظور از رفتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ یعنی بررسی همگرایی و یا واگرایی آن.

تعریف ۳.۱.۱۴. *سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ را متناوب گوئیم اگر دنباله $\{S_n\}$ شامل مجموعهای جزئی آن متناوب باشد.*

بعبارت دیگر جملات a_n یك درمیان مثبت و منفی شود بدین منظور معمولاً سری متناوب را با $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ نمایش می‌دهیم. پیش از آنکه آزمونهای گوناگونی را بر همگرایی سریهای نامتناهی بنیان نهیم، چند مثال درباره سری‌های نامتناهی و آنچه هم اینك تعریف کردیم را در زیر می‌آوریم.

مثال ۴.۱.۱۴. *رفتار سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n(n+1))}$ را بررسی کنید.*

حل. در اینجا

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ نتیجه می‌گیریم که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n(n+1))}$ همگرا بوده حاصل جمع آن را بر ۱ است.

مثال ۵.۱.۱۴. *رفتار سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ را بررسی کنید که در آن $a_n = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n(n+1)}}\right)$.*

حل. داریم

$$a_n = \tan^{-1}\left(\frac{(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})}{1 + \frac{1}{n(n+1)}}\right) = \tan^{-1}\frac{1}{n} - \tan^{-1}\frac{1}{n+1}$$

پس

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} \frac{1}{n+1}$$

و چون $\lim_{n\to\infty} S_n = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$، نتیجه می‌گیریم که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست و حاصل جمع آن $\frac{\pi}{4}$ است.

مثال ۶.۱.۱۴. *رفتار سری* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ *را بررسی کنید.*

حل. برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n = \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$.

پس $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq \frac{n}{2}$. اینک چون $\lim_n Sn \geq \lim_n \frac{n}{2} = \infty$، پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

مثال ۷.۱.۱۴. *فرض کنید* $a_n = (-1)^n$ *در این صورت داریم*

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ باشد زوج} \\ 1 & \text{اگر } n \text{ باشد فرد} \end{cases}$$

پس $\{S_n\}$ یك دنباله متناوب است لذا بنا بر تعریف $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز یك سری متناوب است.

یکی از مسائل ابتدایی در مبحث سریهای نامتناهی، پیش بینی کردن شرایطی که ما را یاری می‌دهند تا معلوم کنیم یک سری دلخواه، همگرا، واگرا یا متناوب است. این شرایط آزمونهای همگرایی نامیده می‌شوند. شاید، ساده‌ترین تمامی آزمونها، در قضیه زیر فراهم شده است که شرط لازم همگرائی نامیده می‌شود.

قضیه ۸.۱.۱۴. *اگر* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *همگرا باشد، آنگاه* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

اثبات. فرض کنید $\{S_n\}$ دنباله مجموعهای جزئی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ باشد. همچنین فرض کنید $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. اگر قرار داد کنیم که $S_0 = 0$، آنگاه برای $n \geq 1$، $a_n = S_n - S_{n-1}$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

□

توجه نمایید که به عبارت دیگر قضیه فوق می‌گوید که اگر $\lim_{n=1}^{\infty} a_n \neq 0$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمی‌تواند همگرا باشد. عکس قضیه فوق همواره برقرار نیست. زیرا در حالی‌که $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}) = 0$ ولی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ همگرا نیست.(در ادامه این فصل آن را نشان خواهیم داد، مثال ۳.۲.۱۴ را ببینید.)

اثبات قضایای مقدماتی زیر درباره سریهای نامتناهی آسان است.برهان آنها به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌گردد.

قضیه ۹.۱.۱۴. *در رفتار یك سری، یعنی، همگرایی، واگرایی یا متناوب بودن یك سری نامتناهی در اثر اضافه کردن، حذف یا تغییردادن جملاتی متناهی از آن، تغییری حاصل نمی‌شود.*

قضیه ۱۰.۱.۱۴. *اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ به ترتیب به a و b همگرا، و α و β دو عدد حقیقی باشند، آنگاه*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$$

۲.۱۴ اصل عمومی همگرایی سری‌های نامتناهی

قضیه ۱.۲.۱۴ (اصل عمومی همگرایی کشی). *شرط لازم و کافی برای همگرایی سری نامتناهی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ آن است که برای هر $\epsilon > 0$، عدد صحیح و مثبت n موجود باشد بطوریکه برای هرعدد صحیح p، $p > 1$*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{a+p}| < \epsilon$$

اثبات. با توجه به قضیه‌های ۳.۳.۹ و ۵.۳.۹ برهان واضح است. □

نتیجه ۲.۲.۱۴. *سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و فقط اگر وقتی $n \to \infty$*

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0$$

R_n مانده سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ نامیده می‌شود.

مثال ۳.۲.۱۴. *نشان دهید سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست.*

حل. فرض کنید $a_n = \frac{1}{n}$. اگر سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه برای $\epsilon = \frac{1}{2}$، باید عدد صحیح nی موجود باشد بطوریکه برای هر عدد صحیح $p \geq 1$.

$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| < \frac{1}{2} \tag{۲.۱۴}$$

در حالی که برای $n = m$ و $p = m$ داریم

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{m+m} \geq \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

آنچه گفته شد با (۲.۱۴) در تناقض است.

مثال ۴.۲.۱۴. *سری* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *همگراست.*

حل. فرض کنید $n\epsilon N, a_n = \frac{1}{n^2}$. در این صورت برای هر عدد صحیح $p \geq 1$، داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&\quad < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&\quad = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}) \\
&\quad = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

پس دنباله حاصل‌جمع جزیی این سری یک دنباله کشی بوده و در نتیجه این سری همگراست.

۳.۱۴ سری با جملات نامنفی

در این بخش، درباره سریهای $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ بحث خواهیم کرد که برای هر n، $a_n \geq 0$ برای این چنین سری، معیار زیر را برای اظهار نظر درباره همگرایی آن دراختیار داریم.

قضیه ۱.۳.۱۴. *اگر* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *یک سری با جملات نامنفی باشد و* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *آنگاه*

الف) $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} a_n$ *همگراست اگر دنباله* $\{S_n\}$ *کراندار باشد.*

ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *واگراست اگر دنباله* $\{S_n\}$ *کراندار نباشد.*

اثبات. $\{S_n\}$ دنباله‌ای غیر نزولی است با توجه به قضیه ۲.۲.۹ قضیه اثبات شده است. □

دقت کنید که سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$، در حالیکه برای هر n، $a_n \geq 0$ ($a_n \leq 0$)، هرگز نمی‌تواند متناوب باشد اینک آزمونهای گوناگون همگرایی که ممکن است برای اظهار نظر درباره همگرایی یا واگرایی یک سری دلخواه مورد استفاده واقع شوند را، بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۱۴ (آزمون مقایسه). *فرض کنید برای هر $n \geq m$ که m عددی ثابت، مثبت و صحیح است، $0 \leq a_n \leq b_n$. در این صورت*

الف) اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

ب) اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگرا است.

اثبات. اثبات این قضیه با توجه به قضیه ۲.۲.۹ واضح است. □

نتیجه ۳.۳.۱۴. *فرض کنید برای هر $n \geq 1$، $a_n, b_n \geq 0$ و α عدد حقیقی مثبتی باشد. همچنین فرض کنید برای هر $n \geq m$ که m عدد ثابت، مثبت و صحیحی است، $a_n \leq \alpha b_n$. در این صورت*

الف) اینکه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ همگراست، ایجاب می‌کند که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد.

ب) اینکه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست، ایجاب می‌کند که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد.

نتیجه ۴.۳.۱۴. *فرض کنید برای هر $n \geq 1$، $a_n, b_n \geq 0$ و α و β دو عدد حقیقی مثبت باشند بطوریکه برای هر $n \geq m$، که m عددی ثابت، مثبت و صحیح است، $\alpha b_n \leq a_n \leq \beta b_n$. دراین صورت دو سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ همرفتار هستند.*

اثبات. فرض کنید $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. چون برای $n \geq m$، $\alpha b_n \leq a_n$ یا $b_n \leq \frac{1}{\alpha} a_n$، بنابر نتیجه ۳.۳.۱۴ همگراست. حالا فرض کنید که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد. در این صورت چون برای هر $n \geq m$، $a_n \leq \beta b_n$ دوباره از نتیجه ۳.۳.۱۴ همگرائی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ حاصل می‌شود.

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست اگر و فقط اگر سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد. □

قضیه ۵.۳.۱۴ (آزمون مقایسه حدی). *فرض کنید برای هر $n \geq 1$، $a_n, b_n \geq 0$ چنان باشند که $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$، α عددی حقیقی و مثبت است. در این صورت $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ همرفتارند.*

اثبات. قرار می‌دهیم $\epsilon = \frac{۱}{۲} > ۰$. در این صورت عدد صحیح و مثبت m موجود است بطوریکه برای $n \geq m$، $|\frac{a_n}{\alpha b_n} - ۱| < \frac{۱}{۲}$، یعنی $\frac{۳}{۲} > \frac{a_n}{\alpha b_n} > \frac{۱}{۲}$. پس برای هر $n \geq m$، $\frac{\alpha}{۲} b_n < a_n < \frac{۳}{۲}\alpha b_n$.
بنابراین از نتیجه ۴.۳.۱۴ حکم حاصل می‌گردد. □

آزمونهای قیاس تنها به ما اجازه می‌دهند که وظیفه بررسی همگرایی را درباره سری نامتناهی دلخواهی با توجه به همگرایی در سری دیگری به انجام برسانیم. اکنون همگرایی دو سری مهم را مورد بحث قرار می‌دهیم. این سریها در بسیاری حالات به عنوان آزمون سری‌های هندسی استفاده می‌شوند.

قضیه ۶.۳.۱۴. *سری $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} x^n$ همگراست، اگر و فقط اگر $|x| < ۱$ و در این حالت داریم* $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} x^n = \frac{۱}{۱-x}$.

اثبات. اگر $|x| \geq ۱$، آنگاه برای هر $n \geq ۰$، $|x^n| \geq ۱$ پس x_n نمی‌تواند به ۰ همگرا باشد. و بنابر قضیه ۸.۱.۱۴، نتیجه می‌گیریم که $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} x^n$ نمی‌تواند همگرا باشد. اینک حالتی را بررسی می‌کنیم که $|x| < ۱$. چون برای هر $n \geq ۰$، $(۱ - x)(۱ + x + x^۲ + \ldots + x^n) = ۱ - x^{n+۱}$، نتیجه می‌گیریم که برای $x \neq ۱$،

$$S_n = ۱ + x + x^۲ + \ldots + x^n = \frac{۱ - x^{n+۱}}{۱ - x}$$

چون $|x| < ۱$، بنا به مثال ۶.۱.۹ $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+۱} = ۰$. پس $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{۱}{۱-x}$ بنابراین $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} x^n$ همگراست و $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} x^n = \frac{۱}{۱-x}$. □

تعریف ۷.۳.۱۴. *سری $\ldots + \sum\limits_{n=۰}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^۲ + \ldots + ar^n$ را یک سری هندسی می‌نامیم که در آن a را جمله اول و r را قدر نسبت سری می‌نامیم. توجه داریم که هر جمله از این سری از ضرب قدر نسبت r درجمله قبلی حاصل شده است.*

قضیه ۸.۳.۱۴. *سری هندسی $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} ar^n$ را در نظر می‌گیریم. اگر $|x| < ۱$ آنگاه سری همگرا و چنانچه $|x| \geq ۱$ آنگاه سری واگراست.*

اثبات. با توجه به اینکه $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} ar^n = a\sum\limits_{n=۰}^{\infty} r^n$ لذا بنا به قضیه ۶.۳.۱۴ حکم برقرار است. □

قضیه ۹.۳.۱۴. *سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p > ۱$.*

اثبات. اگر $p \leq ۰$، آنگاه برای هر $n \geq ۱$، $\frac{۱}{n^p} = n^{-p} \geq ۱$ و بنابراین، دنباله $\{\frac{۱}{n^p}\}$ نمی‌تواند به صفر همگرا باشد لذا بنابر قضیه ۸.۱.۱۴، نتیجه می‌گیریم که اگر $p \leq ۰$، $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$، نمی‌تواند همگرا باشد، از این رو می‌توانیم فرض کنیم که $p > ۰$. فرض کنید $p > ۱$. همچنین فرض کنید $S_n = ۱ + \frac{۱}{۲^p} + \frac{۱}{۳^p} + \ldots + \frac{۱}{n^p}$. چون $p > ۱$، دنباله $\{\frac{۱}{n^p}\}$ غیر صعودی است پس برای $m \in \mathbb{N}$، داریم

$$\begin{aligned}
S_{۲^{m+۱}-۱} &= ۱ + (\frac{۱}{۲^p} + \frac{۱}{۳^p}) + \ldots + \left(\frac{۱}{(۲^m)^p} + \ldots + \frac{۱}{(۲^{m+۱}-۱)^p}\right) \\
&\leq ۱ + \frac{۲}{۲^p} + \frac{۴}{۴^p} + \ldots + \frac{۲^m}{(۲^m)^p} \\
&= ۱ + ۲^{۱-p} + ۴^{۱-p} + \ldots + (۲^m)^{۱-p} \\
&= ۱ + ۲^{۱-p} + (۲^{۱-p})^۲ + \ldots + (۲^{۱-p})^m \\
&= \frac{۱-(۲^{۱-p})^{m+۱}}{۱-۲^{۱-p}} < \frac{۱}{۱-۲^{۱-p}}
\end{aligned}$$

اکنون برای $n \in \mathbb{N}$، دلخواه، با استفاده از استقرا می‌توانیم نشان دهیم که

$$n < n + ۱ \leq ۲^n < ۲^{n+۱} - ۱$$

همچنین چون $\{S_n\}$ غیر نزولی است (چرا؟)، از این رو برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$S_n < S_{۲^{n+۱}-۱} < \frac{۱}{۱-۲^{۱-p}}$$

پس دنباله $\{S_n\}$ (از بالا) کراندار است لذا بنابر قضیه ۱.۳.۱۴ نتیجه می‌گیریم که سری $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ همگراست.

حال فرض کنید که $۰ < p \leq ۱$. در این حالت برای هر $n \in \mathbb{N}$، $n^p \leq n$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\frac{۱}{n} < \frac{۱}{n^p}$. چون $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست(مثال ۳.۲.۱۴) بدین ترتیب از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود که $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ واگراست. $\square$

مثال ۱۰.۳.۱۴. *رفتار سری* $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^۳+۵}$ *را بررسی کنید.*

حل. برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^۳+۵} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^۳} = \frac{۱}{n^{۵/۲}}$

چون $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۵/۲}}$ همگراست (قضیه ۹.۳.۱۴)، بدین ترتیب بنابر آزمون مقایسه، $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^۳+۵}$ همگراست.

مثال ۱۱.۳.۱۴. *برای* $a_n = \sqrt[۳]{n^۳+۱} - n$، *رفتار سری* $\sum a_n$ *را تعیین نمایید.*

حل. با توجه به اتحاد $a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲+ab+b^۲)$ داریم.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^۳+۱-n^۳}{(n^۳+۱)^{۲/۳}+n^۲+n(n^۲+۱)^{۱/۳}} \\ &= \frac{۱}{n^۲}\left[(۱+\frac{۱}{n^۳})^{۲/۳}+۱+(۱+\frac{۱}{n^۳})^{۱/۳}\right] \end{aligned}$$

حال اگر در نظر بگیریم $b_n = \frac{۱}{n^۲}$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} = \frac{۱}{(۱+\frac{۱}{n^۳})^{۲/۳}+۱+(۱+\frac{۱}{n^۳})^{۱/۳}} = \frac{۱}{۳}$$

بنابر آزمون مقایسه حدی، $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرا هستند. ولی $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ همگراست پس $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

مثال ۱۲.۳.۱۴. *همگرایی یا واگرائی سری زیر را بررسی کنید.*

$$\frac{۱}{\log ۲}+\frac{۱}{\log ۳}+\frac{۱}{\log ۴}+\ldots+\frac{۱}{\log n}+\ldots$$

حل. چون برای هر $n > ۱$، $\log n < n$، از این رو برای هر $n \geq ۲$، $\frac{۱}{\log n} > \frac{۱}{n}$. چون $\sum\limits_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست، با استفاده از آزمون مقایسه نتیجه می‌گیریم که $\sum\limits_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{\log n}$ واگراست.

مثال ۱۳.۳.۱۴. *فرض کنید* $a_n = \frac{۱}{n^{۱+\frac{۱}{n}}}$ *رفتار* $\sum a_n$ *راتعیین کنید.*

حل. در نظر می‌گیریم $b_n = \frac{۱}{n}$. در این صورت داریم $\frac{a_n}{b_n} = \frac{۱}{n^{۱/n}}$. چون $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n^{۱/n}} = \frac{۱}{۱} = ۱$. بنابر آزمون مقایسه حدی، $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرا هستند. ولی $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست. پس $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست.

مثال ۱۴.۳.۱۴. *رفتار سری زیر را بررسی کنید.*

$$۱+a+b+a^۲+b^۲+a^۳+b^۳+\ldots$$

که در آن $۰ < a < b < ۱$

حل. در این حالت به ازای $n \geq ۰$، $a_n \leq b^n$ که a_n جمله‌ی n ام این سری است. چون برای $|b|< ۱$، $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} b^n$، همگراست، نتیجه می‌گیریم که $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

درادامه به بیان واثبات سه ازمون مهم برای رفتارسریهامی پردازیم که اولین آن‌ها منسوب به دلامبر می‌باشد

قضیه ۱۵.۳.۱۴ (آزمون نسبت دالامبر). *فرض کنید برای هر* $n \in \mathbb{N}$، $a_n > ۰$ *و*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+۱}} = L$$

دراین صورت

الف) اگر $L > ۱$ *آنگاه* $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ *همگرا است،*

ب) اگر $L < ۱$ *آنگاه* $\sum a_n$ *واگرا است،*

ج) اگر $L = ۱$ *این آزمون توانایی تعیین رفتار سری را ندارد.*

اثبات.

الف) چون $L > ۱$، می‌توان $\epsilon > ۰$ را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $R = L - \epsilon > ۱$.
چون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+۱}} = L$ عدد صحیح و مثبت m موجود است بطوریکه برای $n \geq m$، $|\frac{a_n}{a_{n+۱}} - L|< \epsilon$ یعنی، $R = L - \epsilon < \frac{a_n}{a_{n+۱}} < L + \epsilon$. بدین ترتیب، برای $n > m$،

$$\frac{a_{n-۱}}{a_n} > R, \ldots, \frac{a_{m+۱}}{a_{m+۲}} > R, \frac{a_m}{a_{m+۱}} > R$$

با ضرب کردن نامساویهای فوق در یکدیگر، خواهیم داشت برای هر $n > m$، $\frac{a_m}{a_n} > R^{n-m}$. پس برای $n > m$، $a_n < R^m a_m \frac{۱}{R^n}$. چون $R > ۱$، $۰ < \frac{۱}{R} < ۱$، بنابر قضیه ۶.۳.۱۴، $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} (\frac{۱}{R})^n$، همگراست پس بنابر آزمون مقایسه $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) اگر $L < ۱$، $\epsilon > ۰$ را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $L + \epsilon = ۱$. چون

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+۱}} = L$$

عدد صحیح و مثبت m موجود است بطوریکه برای $n \geq m$، $|\frac{a_n}{a_{n+۱}} - L|< \epsilon$ یعنی، $L - \epsilon < \frac{a_n}{a_{n+۱}} < L + \epsilon$.

پس برای هر $n \geq m$، $a_n < a_{n+۱}$. چنین نتیجه می‌شود که برای هر $n \geq m$، $۰ < a_m < a_n$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\{a_n\}$ نمی‌تواند به صفر همگرا باشد. پس سری

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ نمی‌تواند همگرا باشد. ولی، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری با جملات مثبت است. بنابراین واگرا است.

ج) اگر $L=1$، این آزمون در این حالت بی نتیجه است. بعنوان مثال دو سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را در نظر بگیرید برای اولین سری داریم $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$، و برای دومین سری $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n^1} = (1+\frac{1}{n})^2$. چون $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$، برای هر دو سری داریم، $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$، ولی سری اول واگرا و سری دوم همگراست.

□

مثال ۱۶.۳.۱۴. *رفتار سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ را بررسی کنید.*

حل. داریم $a_n = \frac{n_n}{n!}$ و $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^n}{n!}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$. پس

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

بنابراین آزمون نسبت، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

مثال ۱۷.۳.۱۴. *برای $x > 0$، رفتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ را تعیین نمایید.*

حل. چون $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{x^n}{n!}\frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+1}} = \frac{n+1}{x}$. از این رو $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \infty$ بنابرآزمون نسبت، برای هر $x > 0$، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ همگراست.

مثال ۱۸.۳.۱۴. *رفتار سری زیر را بررسی کنید.*

$$1 + (\frac{2}{5})x + (\frac{6}{9})x^2 + (\frac{14}{17})x^3 + \dots, \quad (x > 0)$$

حل. صرف نظر از جمله نخستین، برای مابقی جملات، $a_n = \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}+1}x^n$ بنابراین

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}+1}x^n \frac{2^{n+2}+1}{2^{n+2}-2}.\frac{1}{x^{n+1}}$$
$$= \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^{n+1}}}.\frac{1+\frac{1}{2^{n+2}}}{1-\frac{1}{2^{n+1}}}.\frac{1}{x}$$

پس $\frac{۱}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+۱}}$. بنابرآزمون نسبت، $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست اگر $۱ > \frac{۱}{x}$، یعنی اگر $۱ < x$ و واگراست اگر $۱ < \frac{۱}{x}$، یعنی اگر $۱ > x$. اگر $x = ۱$، $a_n = \frac{۲^{n+۱}-۲}{۲^{n+۱}+۱} = \frac{۱-\frac{۱}{۲^n}}{۱+\frac{۱}{۲^{n+۱}}}$. بنابراین در این حالت داریم $\lim_{n\to\infty} a_n = ۱$ و بنابر قضیه ۸.۱.۱۴، $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست. بنابراین $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست اگر $۱ < x$ و واگراست اگر $x \leqslant ۱$.

قضیه ۱۹.۳.۱۴ (آزمون رابه). *فرض کنید برای هر* $n \in \mathbb{N}$، $a_n > ۰$ و

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱\right) = L$$

در این صورت

الف) اگر $۱ < L$ آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا است،

ب) اگر $۱ > L$ آنگاه سری $\sum a_n$ واگرا است،

ج) اگر $L = ۱$ آنگاه این آزمون توانایی تعیین رفتار سری $\sum a_n$ را ندارد.

اثبات.

الف) چون $L > ۱$، پس $\epsilon = \frac{L-۱}{۲} > ۰$ و چون $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱) = L$، عدد صحیح و مثبت m موجود است بطوریکه برای $n \geq m$، $|n(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱) - L| < \epsilon$، یعنی، $L - \epsilon < n(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱) < L + \epsilon$. بنابراین، برای $n \geq m$، $\frac{L+۱}{۲} < n(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱)$ یعنی،

$$\frac{L-۱}{۲} < n(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱) - ۱ = n\frac{a_n}{a_{n+۱}} - (n+۱)$$

پس، برای هر $n \geq m$، $\epsilon a_{n+۱} < na_n - (n+۱)a_{n+۱}$. از این مطلب چنین برمی‌آید که برای $n \geq m$،

$$\epsilon a_{m+۱} < ma_m - (m+۱)a_{m+۱}$$

و

$$\epsilon a_{m+۲} < (m+۱)a_{m+۱} - (m+۲)a_{m+۲}, \ldots, \epsilon a_n < (n-۱)a_{n-۱} - na_n$$

با جمع کردن نامساویهای فوق، برای $n \geq m$ ، حاصل می‌شود،

$$\epsilon(a_{m+۱} + a_{m+۲} + \ldots + a_n) < ma_m - na_n < ma_m$$

زیرا $na_n > ۰$. پس برای $n \geq m$، $a_{m+۱} + a_{m+۲} + \ldots + a_n < (\frac{m}{\epsilon})a_m$.

فرض کنید $S_n = a_۱ + a_۲ + \dots a_n$، در این صورت برای $n \geq m$، $S_n - S_m < (\frac{m}{\epsilon})a_m$ یعنی، $S_n < S_m + (\frac{m}{\epsilon})a_m$ همچنین چون $\{S_n\}$ غیر نزولی است نتیجه می‌گیریم که برای $۱ \leq m \leq n$، $S_m \leq S_n$. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که دنباله‌ی $\{S_n\}$ (از بالا) دارای کران $S_m + (\frac{m}{\epsilon})a_m$ است. بنابرقضیه ۱.۳.۱۴، نتیجه می‌گیریم که $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) $L < ۱$، $\epsilon > ۰$ را به گونه‌ای اختیار کنید که $L + \epsilon = ۱$. چون $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱) = L$، عدد صحیح مثبت m موجود است به طوریکه برای $n \geq m$. $n(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱) < L + \epsilon = ۱$ چنین بر می‌آید که برای $n \geq m$، $\frac{a_n}{a_{n+۱}} < \frac{n+۱}{n}$. پس برای $n \geq m$

$$\frac{a_m}{a_{m+۱}} < \frac{m+۱}{m}, \frac{a_{m+۱}}{a_{m+۲}} < \frac{m+۲}{m+۱}, \dots, \frac{a_{n-۱}}{a_n} < \frac{n}{n-۱}$$

با ضرب کردن نامساوی‌های فوق در هم، برای $n \geq m$ حاصل می‌شود، $\frac{a_m}{a_n} < \frac{n}{m}$ یا $a_n > (ma_m)\frac{۱}{n}$. چون $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست، بنابر آزمون مقایسه $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست.

ج) زمانی که $L = ۱$، این آزمون بی نتیجه است. فرض کنید $a_n = \frac{۱}{n}$، در این‌صورت

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱) = \lim_{n\to\infty} ۱ = ۱, \frac{a_n}{a_{n+۱}} = \frac{n+۱}{n}$$

و سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست.

بعدها نشان خواهیم داد که سری $\sum\limits_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n(\log n)^۲}$ همگراست. (مثال ۱۱.۴.۱۴ را ببینید.) درحالی که برای این سری $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱) = ۱$. برای $n \geq ۲$ داریم

$$\begin{aligned}
&n(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱)\\
&\quad = n\left[\frac{(n+۱)(\log(n+۱))^۲ - n(\log n)^۲}{n(\log n)^۲}\right]\\
&\quad = \frac{n[(\log(n+۱))^۲ - (\log n)^۲] + [\log(n+۱)]^۲}{(\log n)^۲}\\
&\quad = \frac{n[(\log(n+۱) - \log n)(\log(n+۱) + \log n)] + [\log(n+۱)]^۲}{(\log n)^۲}\\
&\quad = \frac{\log(۱+\frac{۱}{n})^n[\log n + \log(۱+\frac{۱}{n}) + \log n]) + [\log(n+۱)]^۲}{(\log n)^۲}\\
&\quad = \log(۱+\frac{۱}{n})^n\left[\frac{۲}{\log n} + \frac{\log(۱+\frac{۱}{n})}{(\log n)^۲}\right] + \left[\frac{\log n + \log(۱+\frac{۱}{n})}{(\log n)}\right]^۲
\end{aligned}$$

$$= \log(1+\frac{1}{n})^n \left[\frac{2}{\log n} + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{(\log n)^2}\right] + \left[1 + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{(\log n)}\right]^2$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = (\log e)[0+0] + [1+0]^2 = 1$.

$\square$

در مثال بعد، نشان خواهیم داد که آزمون رابه از آزمون نسبت موثرتر است.

مثال ۲۰.۳.۱۴. *برای* $x > 0$ *همگرائی و واگرائی سری زیر را بررسی کنید.*

$$\frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7}x + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}x^2 + \dots$$

حل. اگر a_n نمادی برای جمله ی n ام این سری باشد، آنگاه

$$a_n = \frac{2.4.6.8\dots(2n+2)}{3.5.7.9\dots(2n+3)}x^{n-1}$$

لذا

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+5}{2n+4}\right)\frac{1}{x}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{x}$$

بنابر آزمون نسبت، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر $x < 1$ و واگراست اگر $x > 1$. زمانی که $x = 1$، آزمون نسبت بی حاصل است اما آزمون رابه را می‌توان به کار برد. وقتی $x = 1$، $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{2n+4}$.

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+4} = \frac{1}{2}$$

بنابرآزمون رابه، وقتی $x = 1$، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست. پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر $x < 1$ و واگراست اگر $x \le 1$.

قضیه ۲۱.۳.۱۴ (آزمون لگاریتمی). *فرض کنید برای هر* $n \in \mathbb{N}$، $a_n > 0$ و

$$\lim_{n\to\infty} n\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = L$$

دراین صورت

الف) اگر $L > 1$ *آنگاه* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *همگرا است،*

ب) اگر $L < ۱$ آنگاه $\sum a_n$ واگرا است،

ج) اگر $L = ۱$ این آزمون توانایی تعیین رفتارسری را ندارد.

اثبات.

الف) فرض کنید $L > ۱$. $\epsilon > ۰$ را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $p = L - \epsilon > ۱$. چون $\lim\limits_{n\to\infty} n\log\frac{a_n}{a_{n+۱}} = L$ عدد صحیح و مثبت m موجود است بطوری که برای $n \geq m$، $n\log\frac{a_n}{a_{n+۱}} > L - \epsilon = p$. این مطلب ایجاب می‌کند که برای $n \geq m$، $\frac{p}{n} < \log\frac{a_n}{a_{n+۱}}$. چون تابع نمایی تابعی اکیدا صعودی است پس، $e^{\frac{p}{n}} < \frac{a_n}{a_{n+۱}}$. چون دنباله $(۱ + \frac{۱}{n})^n$ دنباله‌ای غیر نزولی و همگرا به e است، نتیجه می‌گیریم که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $(۱ + \frac{۱}{n})^p \leq e^{\frac{p}{n}}$. بنابراین برای هر عدد طبیعی به اندازه کافی بزرگ n، $(۱ + \frac{۱}{n})^p \leq e^{\frac{p}{n}}$. بنابراین برای $n \geq m$، $\frac{a_n}{a_{n+۱}} > \frac{۱/n^p}{۱/(n+۱)^p}$. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، $b_n = \frac{۱}{n^p}$، در این‌صورت برای هر $n \geq m$، $\frac{a_n}{a_{n+۱}} > \frac{b_n}{b_{n+۱}}$. برای $n \geq m$ داریم

$$\frac{b_m}{b_n} = \frac{b_m}{b_{m+۱}}\frac{b_{m+۱}}{b_{m+۲}}\cdots\frac{b_{n-۲}}{b_{n-۱}}\frac{b_{n-۲}}{b_n} < \frac{a_m}{a_{m+۱}}\frac{a_{m+۱}}{a_{m+۲}}\cdots\frac{a_{n-۱}}{a_n} = \frac{a_m}{a_n}$$

بنابراین برای $n \geqslant m$ داریم

$$\frac{b_m}{b_n} < \frac{a_m}{a_n}$$

و یا $a_n < (\frac{a_m}{b_m})b_n$، چون $p > ۱$، $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^p}$، همگراست. بنابر آزمون مقایسه نتیجه می‌گیریم که $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) اگر $L < ۱$، $\epsilon > ۰$ را به گونه‌ای اختیار کنید که $L + \epsilon = ۱$. چون $\lim\limits_{n\to\infty} n\log\frac{a_n}{a_{n+۱}} = L$، عدد صحیح و مثبت m موجود است بطوریکه برای $n \geq m$، $\lim\limits_{n\to\infty} n\log\frac{a_n}{a_{n+۱}} < L + \epsilon = ۱$. نتیجه می‌گیریم که برای $n \geq m$، $\frac{a_n}{a_{n+۱}} < e^{\frac{۱}{n}}$. ولی برای $x < ۱$، $e^x < \frac{۱}{۱-x}$ بنابراین، برای $n > m$، $\frac{a_n}{a_{n+۱}} < \frac{۱}{۱-۱/n} = \frac{n}{n-۱}$. حال همچون قسمت (ب) از آزمون رابه ملاحظه می‌شود که $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست.

ج) هنگامی که $L = ۱$، آزمون بی حاصل است. زیرا با فرض $a_n = \frac{۱}{n}$، داریم $\frac{a_n}{a_{n+۱}} = \frac{n+۱}{n}$ و $n\log\frac{a_n}{a_{n+۱}} = n\log(۱ + \frac{۱}{n}) = \log(۱ + \frac{۱}{n})^n$ و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} n\log\frac{a_n}{a_{n+۱}} = \log e = ۱$$

و سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ واگراست.

بعدا نشان خواهیم داد که سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ همگراست. (مثال ۱۱.۴.۱۴ را ببینید)

□

مثال ۲۲.۳.۱۴. *رفتار سری* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ *را بررسی کنید که در آن*

$$a_n = \frac{(1+n)^n}{n!}x^n, \quad (x > 0).$$

حل.

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(1+n)^n}{n!}x^n.\frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}\frac{1}{x^{n+1}}\\ &= \frac{(1+n)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}.\frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}.\frac{1}{x}\end{aligned}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}.\frac{1}{x} = \frac{1}{e}.\frac{1}{x}$$

بنابرآزمون نسبت، سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر $x < \frac{1}{e}$ و واگراست اگر $x > \frac{1}{e}$. هنگامی که $x = \frac{1}{e}$ آزمون نسبت ثمربخش نیست. وقتی $x = \frac{1}{e}$، می توان دید که $\lim\limits_{n\to\infty} n\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}$ بنابراین بنابه آزمون لگاریتم سری به ازای $x = \frac{1}{e}$ واگراست.

۴.۱۴ آزمونهای ریشه کُشی، انقباض و انتگرال

قضیه ۱.۴.۱۴ (آزمون ریشه‌ی مرتبه n ام کُشی). *فرض کنید برای هر* $n \in \mathbb{N}$، $a_n > 0$ و

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = L$$

در این‌صورت

الف) اگر $L < 1$ *آنگاه* $\sum a_n$ *همگراست،*

ب) اگر $L > 1$ *آنگاه* $\sum a_n$ *واگراست،*

ج) اگر $L = 1$ *این آزمون توانایی تعیین رفتارسری* $\sum a_n$ *را ندارد.*

اثبات.

الف) اگر $L < 1$، $\epsilon > 0$ را به گونه‌ای اختیار کنید که $R = L + \epsilon < 1$. چون $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = L$، عدد صحیح و مثبت m موجود است بطوریکه برای اعداد طبیعی $n \geq m$، $\left|(a_n)^{\frac{1}{n}} - L\right| < \epsilon$، یعنی $L - \epsilon < (a_n)^{\frac{1}{n}} < L + \epsilon = R$. از این رو، برای $n \geq m$، $a_n < R^n$. چون $R < 1$، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} R^n$ همگراست. پس بنابرآزمون قیاس اساسی، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) در حالت $L > 1$، $\epsilon > 0$ را به گونه‌ای اختیار کنید که $r = L - \epsilon > 1$. چون $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = L$، عدد صحیح و مثبت m موجود است بطوریکه برای هر $n \geq m$، $|(a_n)^{\frac{1}{n}} - L| < \epsilon$، یعنی $r = L - \epsilon < (a_n)^{\frac{1}{n}} < L + \epsilon$. از این رو، برای $n \geq m$، $r^n < a_n$، چون $r > 1$، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ واگراست. بنا برآزمون قیاس اساسی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$، نیز واگراست.

ج) برای حالت $L = 1$، با توجه به اینکه سریهای $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ به ترتیب واگرا و همگرا هستند و در هر دو حالت، داریم $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = 1$ نتیجه حاصل شده است.

$\square$

مثال ۲.۴.۱۴. *رفتار سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ را بررسی کنید.*

حل. برای $n \geq 1$، $(a_n)^{\frac{1}{n}} = (\frac{1}{n^n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$. پس $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) = 0 < 1$. بنابر آزمون ریشه‌ی مرتبه‌ی n ام کشی، سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ همگراست.

مثال ۳.۴.۱۴. *رفتار سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{-n^2}$ را بررسی کنید.*

حل. داریم $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{-n^2}$ و $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{-n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$ بنابرآزمون ریشه مرتبه n ام کشی، این سری همگراست.

مثال ۴.۴.۱۴. *فرض کنید.*

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n-\sqrt{n}} & \text{اگر } n \text{ باشد زوج} \\ 2^{-n+\sqrt{n}} & \text{اگر } n \text{ باشد فرد} \end{cases}$$

رفتار سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *را تعیین نمایید.*

حل. داریم
$$(a_{2n})^{1/2n} = (2^{-2n+\sqrt{2n}})^{1/2n} = 2^{-1+1/\sqrt{2n}}$$

پس
$$\lim_{n\to\infty} (a_{2n})^{1/2n} = \lim_{n\to\infty} (2^{-1+1/\sqrt{2n}}) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

همچنین
$$a_{2n+1} = (2^{-(2n+1+\sqrt{(2n+1)})})^{1/(2n+1)} = 2^{-1+1/\sqrt{2n+1}}$$

پس
$$\lim_{n\to\infty} (a_{2n+1})^{1/(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} (2^{-1+1/\sqrt{2n+1}}) = 2^{-1+0} = \frac{1}{2}$$

درنتیجه داریم $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$. بنابر آزمون ریشه مرتبه n ام کشی، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست. حال اگر آزمون نسبت را درباره این مثال بکار ببریم، دراین حالت داریم.
$$\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = \frac{2^{-2n+\sqrt{2n}}}{2^{-(2n+1)-\sqrt{2n+1}}} = 2^{1+\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}}$$

بنابراین $\lim_{n} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = \infty$ همچنین
$$\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{2^{-(2n+1)-\sqrt{2n-1}}}{2^{-2n+\sqrt{2n}}} = 2^{-1-\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}}$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = 0$ از این رو $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ موجود نیست.

پس، سریهایی وجود دارند که تشخیص همگرایی آنها با استفاده از آزمون نسبت ممکن نیست ولی با استفاده از آزمون ریشه چنین است. ولی عکس مطلب فوق همواره برقرار است، یعنی، هروقت رفتار یك سری با آزمون نسبت قابل تشخیص باشد، با آزمون ریشه نیز قابل تشخیص است.

مثال ۵.۴.۱۴. *رفتار سری با جمله* n *ام زیر را بررسی کنید.*
$$a_n = [(\frac{n+1}{n})^{n+1} - \frac{n+1}{n}]^{-n}$$

حل. چون برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\frac{n+1}{n} > 1$، نتیجه می‌گیریم که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n > 0$. حال
$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - \frac{n+1}{n}\right]^{-1} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{-1}$$

از این رو

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = (e-1)^{-1} = \frac{1}{e-1} < 1$$

پس بنابر آزمون ریشه مرتبه n ام کشی، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

مثال ۶.۴.۱۴. *سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{pn}}$ را بررسی کنید که p در آن عددی ثابت است.*

حل. فرض کنید $a_n = \frac{1}{n^{pn}}$، در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 0 & p > 0 \text{ اگر} \\ 1 & p = 0 \text{ اگر} \\ \infty & p < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

حال باتوجه به این که اگر $p = 0$ آنگاه $a_n = 1$، پس $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر $p > 0$ و واگراست اگر $p \leq 0$.

هرگاه دنباله $\{a_n\}$ دنباله‌ای غیر صعودی با جملات نامنفی باشد، می‌توانیم درباره همگرایی یا واگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ، با مشخص کردن همگرایی یا واگرایی سری کوچکتری، اظهار نظر کنیم، صورت دقیق‌تر این مطلب در قضیه‌ی زیر بیان گردیده است.

قضیه ۷.۴.۱۴ (آزمون تراکم کُشی). *اگر a_n دنباله‌ای غیر صعودی از اعداد مثبت باشد، آنگاه سریهای $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند.*

اثبات. فرض کنید $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ همگراباشد. در این صورت بنابر قضیه ۱.۳.۱۴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ (از بالا) کراندار است، یعنی، عدد حقیقی $l > 0$ موجود است بطوریکه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < l$. چون $\{a_n\}$ دنباله‌ای غیرصعودی است، داریم

$$a_1 \leq a_1$$

$$a_2 + a_3 \leq a_2 + a_2 = 2a_2$$

و به همین ترتیب از این‌ها نتیجه می‌گیریم، که

$$\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

برای هر عدد صحیح و مثبت m، داریم $۲^{m+۱} - ۱ > ۲^m \geq m + ۱ > m$. چون a_n دنباله‌ای با جملات مثبت است، نیتجه می‌گیریم که برای هر $m \geq ۱$

$$\sum_{k=۱}^{m} a_k \leq \sum_{k=۱}^{۲^{m+۱}-۱} a_k \leq \sum_{k=۰}^{\infty}(۲^k a_{۲^k}) < l$$

پس، دنباله مجموعهای جزئی $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} a_k$ (از بالا) کراندار است. بنابر ۱.۳.۱۴، $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست.
سپس، فرض کنید که $۲^n a_{۲^n}$ $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}$ واگراست. بنابر قضیه ۱.۳.۱۴، دنباله مجموعهای جزئی $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} a_n$ از بالا بیکران است.

از این رو برای $G > ۰$ دلخواه، داریم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} ۲^k a_{۲^k} > G$$

چون $\{a_n\}$ دنباله‌ای غیر صعودی با جملات مثبت است

$$a_۳ + a_۴ \geq ۲a_۴$$

$$a_۵ + a_۶ + a_۷ + a_۸ + \geq ۴a_۸$$

و عموما برای هر $n \geq ۱$،

$$a_{۲^n+۱} + a_{۲^n+۲} + \ldots + a_{۲^{n+۱}} > ۲^n a_{۲^{n+۱}}$$

قرار دهید $n > ۲^{m+۱}$ ، چون $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات مثبت است،

$$\begin{aligned}
a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n &\geq a_۱ + a_۲ + \ldots + a_{۲^{m+۱}} \\
&\geq a_۱ + a_۲ + ۲a_۴ + \ldots + ۲^m a_{۲^{m+۱}} \\
&\geq \frac{۱}{۲}a_۱ + a_۲ + ۲a_۴ + \ldots + ۲^m a_{۲^{m+۱}} \\
&\geq \frac{۱}{۲}\sum_{k=۰}^{m+۱} ۲^k a_{۲^k} \\
&\geq \frac{۱}{۲}\sum_{k=۰}^{\infty} ۲^k a_{۲^k} \\
&> G
\end{aligned}$$

بنابراین دنباله ی حاصل جمع جزیی $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ ازپایین بیکران است. بنابر ۱.۳.۱۴ $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست.

ما اثبات این مطلب را به فراگیر وامی‌گذاریم که همگرایی (واگرایی) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ایجاب می‌کند تا $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ نیز همگرا (واگرا) باشد. $\square$

مثال ۸.۴.۱۴. *رفتار سری* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *را بررسی کنید.*

حل. اگر $p \leq 0$، این سری واگراست. فرض کنید $P > 0$ در این حالت $\frac{1}{n^p}$ دنباله‌ای غیر صعودی است.

فرض کنید $a_n = \frac{1}{n^p}$.

برای $n \geq 0$، $2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = (2^{1-p})^n$. پس $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ یك تصاعد هندسی با قدر نسبت $r = 2^{1-p}$ است. بنابر قضیه ۸.۳.۱۴، سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ همگراست اگر $2^{1-p} < 1$. در نتیجه بنابر آزمون تراکم کشی، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر $p > 1$، و واگراست اگر $p \leq 1$.

مثال ۹.۴.۱۴. *رفتار سری* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$ *را بررسی کنید.*

حل. برای $p \leq 0$، این سری واگراست. فرض کنید $p > 0$.

هنگامی که $n > 1$، دنباله $\left\{\frac{1}{(\log n)^p}\right\}$ غیر صعودی است. فرض کنید $a_n = \frac{1}{(\log n)^p}$. اینك برای $n \geq 1$،

$$2^n a_{2^n} = 2^n \left(\frac{1}{(\log 2^n)^p}\right) = 2^n \frac{1}{n^p (\log 2)^p}$$

فرض کنید $b_n = \frac{2^n}{n^p}$، در این صورت

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{2^n}{n^p} \frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$$

از این رو $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})^p = \frac{1}{2} < 1$. بنا بر آزمون نسبت دالامبر، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ واگراست.

پس، سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ واگراست. بنابر آزمون تراکم کشی، به ازای هر $p \in \mathbb{R}$، $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$ واگراست.

قضیه ۱۰.۴.۱۴ (آزمون انتگرال کُشی - مك لورن). *اگر f تابعی نزولی نامنفی و بر $[1, \infty)$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه سری* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *و انتگرال* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *هردو همگرا یا هر دو واگرا هستند.*

اثبات. چون f بر بازه $[1,\infty)$ نزولی است، داریم برای

$$f(n) \leq f(x) \leq f(n-1), n \geq 2, n-1 \leq x \leq n$$

بنابراین

$$\int_{n-1}^{n} f(n)dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq \int_{n-1}^{n} f(n-1)dx$$

یا برای هر $n \geq 2$،

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq f(n-1)$$

پس برای $n \geq 2$،

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k-1)$$

ولی

$$\sum_{k=2}^{n} f(k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k), \quad \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx = \int_{1}^{n} f(x)dx$$

بنابراین، برای $n \geq 2$،

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_{1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \tag{۳.۱۴}$$

فرض کنید $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ همگرا باشد. چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ یك سری شامل جملات نامنفی است، دنباله مجموعهای جزیی آن (از بالا) کراندار است. از این رو، عدد حقیقی و مثبت M موجود است بطوریکه $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) < M$. پس، بنابر (۳.۱۴) دنباله $\{\int_1^n f(x)dx\}$ (از بالا) کراندار است. از این جا چنین برمی‌آید که $\int_1^\infty f(x)dx$ همگراست.

سپس، فرض کنید $\int_1^\infty f(x)dx$ همگرا باشد، در این صورت از (۳.۱۴) داریم، $\sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$ از بالا کراندار است. پس بنابر قضیه ۱.۳.۱۴، سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)$ همگراست. □

مثال ۱۱.۴.۱۴. *رفتار سری* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ *را بررسی‌کنید.*

حل. فرض کنید برای $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^p}$، اگر $f, p > 0$ تابعی نامنفی و بر $[2,\infty)$ نزولی است.

بنابر قضیه کشی - مک لورن،
$$\int_{۲}^{\infty} \frac{۱}{x(\log x)^p}dx, \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n(\log n)^p}$$
هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند. برای $p > ۰$ داریم
$$\int_{۲}^{x} \frac{dx}{x(\log x)^p} = \begin{cases} \log(\log x) - \log(\log ۲) & p = ۱ \text{ اگر } \\ \frac{(\log x)^{۱-p} - (\log ۲)^{۱-p}}{۱-p} & p \neq ۱ \text{ اگر } \end{cases}$$
لذا چنین حاصل می‌شود که $\int_{۲}^{\infty} f(x)dx$ همگراست اگر $p > ۱$ و واگراست اگر $۰ < p \leq ۱$ بنابراین سری $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n(\log n)^p}$ همگراست اگر $p > ۱$ و واگراست اگر $۰ < p \leq ۱$.

۵.۱۴ سری‌های متناوب

همان گونه که در ابتدای فصل آشنا شدیم، یك سری متناوب، در یکی از دو شکل زیر ظاهر می‌گردد
$$a_۱ - a_۲ + a_۳ - a_۴ + \ldots + (-۱)^{k+۱}a_k + \ldots$$
یا
$$-a_۱ + a_۲ - a_۳ + a_۴ + \ldots + (-۱)^{k}a_k + \ldots$$
که برای هر k، $a_k > ۰$. پس ممکن است یك سری متناوب به صورت $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}a_n$ یا (در حالت دوم) $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}a_n$ نوشته شود.

دست آورد زیر که حاصل تلاش لایب نیتز است شرایط کافی را برای همگرایی یك سری متناوب به ما معرفی می‌کند.

قضیه ۱.۵.۱۴ (لایب‌نیتز). *اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد بطوریکه*

الف) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \geq a_{n+۱}$

ب) $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$

آنگاه سری متناوب $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}a_n$ *همگراست.*

اثبات. فرض کنید $S_n = a_۱ - a_۲ + a_۳ - a_۴ + \ldots + (-۱)^{n+۱}a_n$. نشان خواهیم داد که دنباله‌های $\{S_{۲n}\}$ و $\{S_{۲n-۱}\}$ به حدودی برابر همگرا هستند و از آنجا نتیجه می‌گیریم که

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ همگراست برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم.

$$S_{2n+2}-S_{2n}=a_{2n+1}-a_{2n+2}\geq 0 \quad \text{بنابر(الف)}$$

بنابراین $\{S_{2n}\}$ دنباله‌ای غیر نزولی و یکنواست. همچنین

$$S_{2n}=a_1-[(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+\ldots+(a_{2n}-a_{2n-1})]\leq a_1$$

زیرا عبارت درون کروشه، نامنفی است. پس $\{S_{2n}\}$ یکنوا، غیر نزولی و از بالا کراندار است. بنابراین می‌باید همگرا باشد.

فرض کنید $\{S_{2n}\}$ به L همگرا باشد. اینک $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$ و چون $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$، نتیجه می‌گیریم که $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=L+0=L$ بنابر $\{S_{2n}\}$ و $\{S_{2n+1}\}$ نیز به L همگرایند. به ازای $\epsilon>0$، اعداد صحیح و مثبت p و q موجودند بطوریکه برای هر $n\geq p$، $|S_{2n}-L|<\epsilon$ و برای هر $n\geq q$، $|S_{2n+1}-L|<\epsilon$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که برای هر $n\geq\max\{2p,2q-1\}$، $|S_n-L|<\epsilon$. پس سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ به L همگراست. $\square$

از برهان فوق آشکار می‌گردد که اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ به L همگرا باشد، آنگاه $0\leq L\leq a_1$. همچنین $S_{2n}\leq L$. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $L\leq S_{2n+1}$. اکنون $0\leq S_{2n+1}-L\leq S_{2n+1}-S_{2n}=a_{2n+1}$ و از این رو $|S_{2n}-L|\leq a_{2n+1}$. به طریق مشابه، $|S_{2n+1}-L|\leq a_{2n+1}$. پس صرف نظر از اینکه n زوج یا فرد باشد، $|S_n-L|\leq a_{n+1}$.

در یافته‌های خویش نتیجه زیر را نیز بدست آورده‌ایم.

نتیجه ۲.۵.۱۴. *اگر سری متناوب $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ در فرضیات قضیه ۱.۵.۱۴ صدق کرده، به L همگرا باشد، آنگاه*

۱. $0\leq L\leq a_1$،

۲. *برای هر* $n\in\mathbb{N}$، $|S_n-L|\leq a_{n+1}$.

مثال ۳.۵.۱۴. *رفتار سری* $\ldots+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1$ *را بررسی کنید.*

حل. اینجا $a_n=\frac{1}{n}$، چون $a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1}$ و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$. سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ بنابر آزمون لایب نیتز، همگراست. فرض کنید $L=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$، در این صورت بنا به نتیجه ۲.۵.۱۴ برای $n=9$ داریم $|0/7456-L|\leq\frac{1}{10}$ و در

نتیجه، $۰/۶۴۵۶ \leq L \leq ۰/۸۴۵۶$. در واقع $S_۹ \leq L$ و بنابراین نتیجه می‌گیریم $۰/۶۴۵۶ \leq L \leq ۰/۷۴۵۶$.

مثال ۴.۵.۱۴. *رفتار سری متناوب زیر را بررسی کنید.*

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n (n+۵)}{n(n+۱)}$$

حل. فرض کنید

$$a_n = \frac{n+۵}{n(n+۱)}$$

برای بررسی شرط (الف) از قضیه ۱.۵.۱۴، می‌بینیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+۱}}{a_n} &= \frac{n+۱+۵}{(n+۱)(n+۲)} . \frac{n(n+۱)}{n+۵} \\ &= \frac{n^۲+۶n}{n^۲+۷n+۱۰} \\ &= \frac{n^۲+۶n}{(n^۲+۶n)+n+۱۰} < ۱ \end{aligned}$$

و از این رو برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n > a_{n+۱}$.

همچنین، $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+۵}{n(n+۱)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{n}+\frac{۵}{n^۲}}{۱+\frac{۱}{n}} = ۰$. پس، بنابر آزمون لایب‌نیتز، $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{n+۵}{n(n+۱)}$ همگراست.

مثال ۵.۵.۱۴. *رفتار سری* $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱} a_n$ *را بررسی کنید که در آن*

$$a_n = \frac{۱}{۲n-۱}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\ldots+\frac{۱}{n}\right).$$

حل. آزمون لایب نیتز را بکار می‌بریم تا نشان دهیم که $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n-۱} a_n$ همگراست، برای هر n داریم.

$$\begin{aligned} (۲n-۱)a_n - (۲n+۱)a_{n+۱} &= \frac{۱}{n+۱} \\ &\Rightarrow (۲n-۱)(a_n - a_{n+۱}) \\ &= ۲a_{n+۱} + \frac{۱}{n+۱} > ۰ \end{aligned}$$

این مطلب ایجاب می‌کند که برای هر n، $a_n > a_{n+1}$. می‌خواهیم نشان دهیم که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

اگر $m \in \mathbb{N}$ و $m \le x < m+1$، آنگاه $\frac{1}{m} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{m+1}$، بنابراین

$$\frac{1}{m}\int_m^{m+1} dx \ge \int_m^{m+1} \frac{1}{x}dx \ge \frac{1}{m+1}\int_m^{m+1} dx$$

یا

$$\frac{1}{m} \ge \log(m+1) - \log m \ge \frac{1}{m+1}$$

بنابراین

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \sum_{k=1}^{n}(\log(k+1) - \log k) > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

پس نتیجه می‌گیریم که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \ge \log(n+1) > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right)$$

پس

$$\frac{1}{2n-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \ge \frac{\log(n+1)}{2n-1} > \frac{1}{2n-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} - 1\right)$$

در نتیجه

$$a_n \ge \frac{\log(n+1)}{2n-1} > a_n - \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)} + \frac{\log(n+1)}{2n-1} > a_n \ge \frac{\log(n+1)}{2n-1}$$

حال با توجه به اصل فشار در دنباله‌ها داریم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$، پس $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ همگراست.

مثال ۶.۵.۱۴. *برای* $a_n = \frac{\log(n+1)}{(n+1)^2}$، *رفتار سری* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *را تعیین کنید.*

حل. داریم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)^3} = 0$ نشان خواهیم داد که برای هر n، $a_n > a_{n+1}$.

برای انجام این کار، نشان می‌دهیم که $f(x) = \frac{\log x}{x^3}$ به ازای $x \ge 2$، تابعی اکیدا نزولی است، داریم

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x^2 \log x}{x^6} = \frac{1 - 3\log x}{x^4}$$

آشکارا، برای $x > e^{\frac{1}{3}}$، $f'(x) < 0$. پس $f(x)$ اکیدا نزولی است اگر $x \ge 2$، (چون $e^{\frac{1}{3}} < 2$).
این مطلب ایجاب می‌کند که برای هر n، $f(n+2) < f(n+1)$. پس بنابر آزمون لایب نیتز، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ همگراست.

۶.۱۴ همگرایی مطلق

در این بخش، نشان می‌دهیم که چگونه می‌باید از مطالعات خود درباره سریهای شامل جملات نامنفی بهره جوییم، تا همگرایی سریهایی را با جملات دلخواه بیازماییم.

تعریف ۱.۶.۱۴. *گوییم سری نامتناهی* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *مطلقا همگراست اگر* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *همگرا باشد.*

دست آورد کلیدی این بخش مطالبی است که در قضیه ۲.۶.۱۴ بیان گردیده است.

قضیه ۲.۶.۱۴. *اگر* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *مطلقا همگرا باشد، آنگاه* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *همگراست.*

اثبات. این برهان مستقیما از اصل عمومی همگرایی کشی برای سریها حاصل می‌گردد. هرچند ما اینجا برهانی دیگر ارائه می‌کنیم. چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگراست، بنابر تعریف $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگراست. اکنون، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $-|a_n| \leq |a_n|$، بنابراین $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|an|$. چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ همگراست، بنابر آزمون قیاس اساسی، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ همگراست.

چون $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$، اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری نامتناهی باشد. در این صورت دو سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $n \geq 1$، $p_n = \frac{a_n+|a_n|}{2}$.

برای هر $n \geq 1$، $q_n = \frac{a_n-|a_n|}{2}$.

توجه نمایید که $p_n + q_n = a_n$ و $p_n - q_n = |a_n|$. اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگرا باشد، آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ و $|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n|$ هر دو همگرا هستند. بنابراین داریم که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ هر دو همگرایند. همچنین،

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

با توجه به آنچه گفته شد، شرط لازم در قضیه را نیز اثبات کرده‌ایم. □

تذکر ۳.۶.۱۴. *با نمادهای به‌کار رفته در اثبات قضیه ۲.۶.۱۴ در واقع به دست آورده‌ایم که* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

مطلقا همگراست اگر و تنها اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ هردو همگرا باشند. همچنین داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

مثال ۴.۶.۱۴. *برای $x \in \mathbb{R}$ رفتار سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ را بررسی کنید.*

حل. چون $|\cos(nx)| \leq 1$، خواهیم داشت $|a_n| = \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$.
چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، نتیجه می‌گیریم که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگراست. به بیان دیگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگراست.

مثال ۵.۶.۱۴. *فرض کنید $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری مطلقا همگرا باشد. دراین صورت برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ همگراست.*

حل. چون $|a_n \cos(nx)| \leq |a_n|$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$، مطلقا همگراست پس $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ نیز مطلقا همگراست.

مثال ۶.۶.۱۴. *رفتار سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{2^n+5}$ را بررسی کنید.*

حل. دراینجا $|a_n| = \frac{n+2}{2^n+5}$، همچنین

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \left(\frac{n+2}{2^n+5}\right)\left(\frac{2^{n+1}+5}{n+3}\right) = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)\left(\frac{2^{n+1}+5}{2^n+5}\right)$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2/n}{1+3/n}\right)\left(\frac{2+5/2^n}{1+5/2^n}\right) = 2$$

بنابر آزمون نسبت، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگراست. پس $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگراست.

مثال ۷.۶.۱۴. *نشان دهید که سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ همگراست.*

حل. داریم $|a_n| = \left|\sin \frac{1}{n}\right|$. فرض کنید $b_n = \frac{1}{n}$.

حال $1 = \frac{|\sin(\frac{1}{n})|}{(\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} \lim_{n\to\infty}$، پس، بنابر آزمون قیاس حدی، $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ واگراست.
بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ نمی‌تواند مطلقا همگرا باشد.

۷.۱۴ همگرایی شرطی

سری زیر را در نظر می‌گیریم
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$
مثال ۳.۵.۱۴ نشان می‌دهد که این سری همگرا است. هرچند، اگر به جای جملات، قدر مطلق آنها را قرار دهیم، این سری به سری
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$
تبدیل می‌شود که یك سری(سری هارمونیک) واگراست. چنین سریهایی، سریهای همگرائی مشروط نامیده می‌شوند.

تعریف ۱.۷.۱۴. *گوئیم، سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرایی مشروط است، اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ولی $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگرا نباشد. در مقابل قضیه ۲.۶.۱۴ درباره سریهای مطلقا همگرا، قضیه زیر را درباره سری‌های همگرای مشروط ارائه می‌کنیم.*

قضیه ۲.۷.۱۴. *اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مشروط باشد، آنگاه با توجه به نمادهای به کار رفته در قضیه ۲.۶.۱۴، $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ هر دو واگرایند.*

اثبات. نخست یادآوری می‌کنیم که هر دو $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ نمی‌توانند همگرا باشند، زیرا اگر هر دو این سریها چنین باشند، آنگاه این موضوع که برای $n \geq 1$، $|a_n| = p_n - q_n$ موجب می‌شود تا $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگرا باشد. ولی آنچه گفته شد با فرضیات ما مبنی بر آن‌که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگرا نمی‌باشد، در تناقض است. دیگر بار اگر $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ همگرا باشد آنگاه از این‌که $q_n = a_n - p_n$ داریم که از همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ نیز نتیجه شود. این ناممکن است، زیرا $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ نمی‌توانند بطور همزمان همگرا باشند. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ می‌باید واگرا باشد. به طریق مشابه، $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ می‌باید واگرا باشد. □

۸.۱۴ دسته‌بندی جملات یك سری و بازآرائی آن

۱.۸.۱۴ دسته‌بندی جملات یك سری

تعریف ۱.۸.۱۴. *فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری نامتناهی باشد و فرض کنید $\{m_n\}$ دنباله‌ای اکیدا صعودی از اعداد صحیح و مثبت باشد. همچنین فرض کنید.*

$$b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m_1}$$
$$b_2 = a_{m_1+1} + \ldots + a_{m_2}$$
$$b_3 = a_{m_2+1} + \ldots + a_{m_3}$$

گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متشکل از یك دسته بندی جملات $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است. مثلاً
$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + (a_6) + \ldots$

یك سری است، متشکل از دسته بندی جملات سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

طبیعتا این سوال در ذهن شکل می‌گیرد که آیا با دسته بندی‌کردن جملات یك سری، سرشت و خصلتهای آن دستخوش تغییر می‌شود؟ پاسخ این پرسش مثبت است. برای مثال، وقتی جملات یك سری متناوب را دسته بندی‌کنیم مثلا با دسته‌بندی $\ldots + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$، به صورت $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$، یك سری همگرا حاصل می‌گردد. تنها دست‌آورد این بخش در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۲.۸.۱۴. *هر سری حاصل از دسته بندی جملات یك سری همگرا، خود همگراست و حاصل جمع آن با حاصل جمع سری اصلی برابر است.*

اثبات. فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ حاصل از دسته بندی جملات سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ باشد. همچنین فرض کنید $\{S_n\}$ دنباله حاصلجمع‌های جزیی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\{T_n\}$ دنباله حاصلجمع‌های جزیی $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ باشد. در این‌صورت $\{T_n\}$ آشکارا یك زیر دنباله $\{S_n\}$ است. پس، اگر $\{S_n\}$ همگرا باشد، $\{T_n\}$ نیز چنین است. (قضیه ۲.۵.۹ را ببینید). □

۲.۸.۱۴ باز آرایی

اگر تعداد متناهی از اعداد را با یکدیگر جمع کنیم بنا به خاصیت شرکت‌پذیری در اعداد حقیقی، ترتیب انجام این عمل، فاقد اهمیت است. ولی هنگامی که سری‌های نامتناهی مورد بحث باشند، دیگر چنین

نیست. ترتیبی که جملات طی آن در سری نامتناهی قرار گرفته‌اند، در خصلت و حاصل جمع آن دخالت دارد.

تعریف ۳.۸.۱۴. *اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری نامتناهی و σ یک تابع یک به یک از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ باشد، آنگاه گوییم، $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ یک بازآرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است. مثلاً $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$ یک بازآرایی $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$، است.*

قضیه زیر که منسوب به ریمان است، علت نام‌گذاری سری‌های همگرای مشروط را به این نام توجیه می‌کند. به علت تکنیکی بودن از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم.

قضیه ۴.۸.۱۴. *فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرای مشروط باشد. همچنین فرض کنید $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$. در این صورت بازآرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ برای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با دنباله‌های حاصلجمع جزیی $S'n$ موجود است بطوریکه*

$$\lim_{n\to\infty} \inf S'_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \sup S'_n = \beta \qquad (4.14)$$

مثال ۵.۸.۱۴. *سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ را در نظر می‌گیریم بنا به قضیه لایب‌نیتز ۱.۵.۱۴ (مثال ۳.۵.۱۴ را ببینید) این سری همگراست. فرض کنید که $L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (در واقع می‌توان نشان داد $L = \log 2$، پس $L \neq 0$)*

پس داریم

$$0 \neq L = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \qquad (5.14)$$

پس بنا بر قضیه ۱۰.۱.۱۴

$$\frac{1}{2}L = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

و بنابراین به طور مسلم،

$$\frac{1}{2}L = 0 + \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} - 0 - \frac{1}{8} + \cdots \qquad (6.14)$$

پس اگر ۶.۱۴ را با ۵.۱۴ جمع کنیم، مجددا بنا بر ۱۰.۱.۱۴ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}L &= (1 + 0) + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - 0) + (\frac{-1}{4} + \frac{-1}{4}) + (\frac{-1}{5} + 0) \\ &+(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{7} + 0) + (\frac{-1}{8} + \frac{-1}{8}) + \cdots \end{aligned}$$

یا

$$\frac{۳}{۲}L = ۱ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۱} - \frac{۱}{۶} + \cdots \qquad (۷.۱۴)$$

سری سمت راست ۷.۱۴ یک تجدید آرایش سری سمت راست ۵.۱۴ است ولی این دو سری به دو مقدار متفاوت همگرایند.

تذکر ۶.۸.۱۴. *در واقع می‌توانیم یک تجدید آرایش سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$ بیابیم به گونه‌ای که به هر عدد حقیقی که از قبل تعیین شده مثلاً ۵۱۲ همگرا باشد بنا بر مثال ۳.۲.۱۴ می‌دانیم که سری $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots$ یک سری واگرا است (چرا؟) لذا مجموع‌های جزیی آن یک دنباله اکیداً صعودی است که دنباله‌ای بی‌کران است. بنابراین $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{N}$ اگر عدد فرد N به قدر کافی بزرگ باشد از ۵۱۲ بزرگتر است. فرض کنید که $N_۱$ کوچک‌ترین عدد صحیح فردی باشد که $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{N_۱} > ۵۱۲$ پس $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{N_۱} - \frac{۱}{۲} \leq ۵۱۲$ حال فرض می‌کنیم که $N_۲$ کوچک‌ترین عدد صحیح فردی باشد که از $N_۱$ بزرگتر است و*

$$۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{N_۱} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{N_۱ + ۲} + \cdots + \frac{۱}{N_۲} > ۵۱۲.$$

بنابراین

$$۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{N_۱} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{N_۱ + ۲} + \cdots + \frac{۱}{N_۲} - \frac{۱}{۴} \leq ۵۱۲.$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم می‌توانیم یک تجدید آرایش $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$ بسازیم که به ۵۱۲ همگرا باشد.

قضیه ۷.۸.۱۴. *اگر $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ یك سری با جملات نامنفی، و به A همگرا باشد، آنگاه هر بازآرایی از $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ به A همگراست.*

اثبات. فرض کنید $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ یك بازآرایی از $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ باشد. فرض کنید $\{S_n\}$ و $\{T_n\}$ به ترتیب دنباله‌های مجموعهای جزیی $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ باشند. همچنین فرض کنید

$$b_۱ = a_{n_۱}, b_۲ = a_{n_۲}, \ldots, b_m = a_{n_m}, \quad M = \max\{n_۱, n_۲, \ldots, n_m\}$$

آشکارا $T_m \leq S_m \leq A$، بدین ترتیب دنباله $\{T_n\}$ از بالا کراندار است. بنابر قضیه ۱.۳.۱۴، $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ همگراست. همچنین، اگر $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ به B همگرا باشد، آنگاه $B \leq A$. چون $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ به A همگراست.

$\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز یك بازآرایی از $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ است، با انجام دادن دوباره فرآیند فوق داریم $A \leq B$، پس

$A = B$. □

قضیه ۸.۸.۱۴ (دیریکله). *اگر* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *یک سری مطلقا همگرا و به* A *همگرا باشد، آنگاه هر بازآرایی از* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *به* A *همگراست.*

اثبات. برای هر $n \in \mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم.

$$q_n = \frac{1}{2}(a_n - |a_n|), \quad p_n = \frac{1}{2}(a_n + |a_n|)$$

بنابر تذکر ۳.۶.۱۴، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ هردو همگرایند. فرض کنید $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ به P و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ به Q همگرا باشد، در این صورت $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = P + Q$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = P - Q$

فرض کنید $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ یک بازآرایی از $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. همچنین فرض کنید.

$$v_n = \frac{1}{2}(-|b_n| + b_n), \quad u_n = \frac{1}{2}(|b_n| + b_n)$$

در این صورت $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ به ترتیب بازآراییهایی برای $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ هستند. همچنین

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-q_n)$ سریهای با جملات نامنفی هستند، از قضیه ۱۰.۱.۱۴، نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

پس

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\end{aligned}$$

پس $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$، یک بازآرایی از $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگرا و حاصل جمع آن A است. $\square$

از قضیه تجدید آرایش (بازآرایی) یک قضیه به صورت زیر در ضرب سری‌ها به دست می‌آید.

قضیه ۹.۸.۱۴. *اگر سری‌های $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ به ترتیب به A و B همگرای مطلق باشند، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$، که در آن $AB = C$ برای $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ و $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ همگرای مطلق C است.*

اثبات. داریم

$$|c_k| \leq |a_0 b_k| + |a_1 b_{k-1}| + \cdots + |a_k b_0|, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

لذا برای هر n،

$$\begin{aligned}&|c_0| + |c_1| + \cdots + |c_n| \\ &\quad\leq |a_0 b_0| + (|a_0 b_1| + |a_1 b_0|) + \cdots + (|a_0 b_n| + |a_1 b_{n-1}| + \cdots + |a_0 b_n|) \\ &\quad\leq (|a_0| + \cdots + |a_n|)(|b_0| + \cdots + |b_n|) \\ &\quad\leq (\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|)(\sum_{k-0}^{\infty}|b_k|).\end{aligned}$$

بنابراین دنباله‌های مجموع‌های جزیی سری $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|$ از بالا کراندار است و از این رو $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k| < \infty$ نامساوی فوق هم‌چنین همگرایی مطلق سری زیر را (که مجموعش $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ است) نشان می‌دهد.

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + a_0 b_3 + \cdots \qquad (۸.۱۴)$$

بنابر ۸.۸.۱۴ می‌توانیم جملات ۸.۱۴ را تجدید آرایش کنیم و بنویسیم

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = [a_0b_0] + [a_0b_1 + a_1b_0 + a_1b_1] + [a_0b_2 + a_2b_0 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2] + \cdots \tag{9.14}$$

جمله‌های داخل کروشه nاُم $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ سمت راست ۹.۱۴ از تمام حاصل‌ضرب‌های a_jb_k که در آن‌ها j یا k مساوی n است و هیچ کدام از j یا k بزرگتر از n نیست تشکیل شده‌اند اگر قرار دهیم

$$B_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n, \quad A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

آن‌گاه داریم

$$a_0b_0 = A_0B_0,$$

$$\begin{aligned} a_0b_1 + a_1b_0 + a_1b_1 &= (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) - a_0b_0 \\ &= A_1B_1 - A_0B_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_0b_2 + a_2b_0 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 \\ &\quad = (a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) - (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) \\ &\quad = A_2B_2 - A_1B_1. \end{aligned}$$

و به طور کلی، برای هر $n \geq 1$ مقدار داخل کروشه nاُم در سمت راست ۹.۱۴ برابر با $A_nB_n - A_{n-1}B_{n-1}$ است. بنابراین، مجموع کروشه اول در سمت راست ۹.۱۴ عبارت است از

$$[A_0B_0] + [A_1B_1 - A_0B_0] + \cdots + [A_nB_n - A_{n-1}B_{n-1}] = A_nB_n.$$

که به AB میل می‌کند وقتی $n \to \infty$. از این رو سمت راست ۹.۱۴ برابر AB است و برهان کامل می‌شود. $\square$

مثال ۱۰.۸.۱۴. *رفتار سری زیر را بررسی کنید.*

$$1 + \frac{1}{2}(5x - 3x^2) + \frac{1}{2^2}(5x - 3x^2)^2 + \frac{1}{2^3}(5x - 3x^2)^3 + \ldots, \quad x \in \mathbb{R} \tag{10.14}$$

حل. مقادیری را از $x \in \mathbb{R}$ مشخص خواهیم کرد که به ازای آنها سری ۱۰.۱۴ همگراست و می‌تواند بر اساس قوای صعودی x بازآرایی شود.

سری ۱۰.۱۴ یك تصاعد هندسی با قدر نسبت $r = \frac{1}{2}(5x - 3x^2)$ است. این سری همگراست اگر $\left|\frac{5x-3x^2}{2}\right| < 1$، یعنی، اگر $-2 < 5x - 3x^2 < 2$. پس ۱۰.۱۴ برای مقادیری از x همگراست

که در ازای آنها $3x^2-5x-2<0$ و $3x^2-5x+2>0$ ولی $3x^2-5x-2<0$ اگر و فقط اگر $-\frac{1}{3}<x<2$ و $3x^2-5x+2>0$ اگر و فقط اگر $x<\frac{2}{3}$ یا $x>1$. از این رو سری ۱۰.۱۴ همگراست اگر $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup(1,2)$.

سری ۱۰.۱۴ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود،

$$1+\frac{1}{2}(5x-3x^2)+\frac{1}{4}(25x^2-30x^3+9x^4)+\dots \tag{11.14}$$

همچنین می‌تواند بر اساس قوای صعودی x به صورت زیر بازآرایی شود.

$$1+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{4}x^2-\frac{30}{4}x^3+\frac{9}{4}x^4+\dots$$

اگر این سری مطلقا همگرا باشد، یعنی، اگر سری زیر:

$$1+\frac{1}{2}(5|x|+3|x|^2)+\frac{1}{4}(25|x|^2+30|x|^3+9|x|^4+\dots$$

همگرا باشد. اما این سری همگرا خواهد بود اگر

$$\frac{5|x|+3|x|^2}{2}<1$$

یعنی، اگر $(3|x|-1)(|x|+2)<0$. ولی شرط لازم و کافی برای وقوع این نامساوی آن است که $|x|<\frac{1}{3}$

۹.۱۴ آزمون‌هایی بر سری‌های عمومی

تنها آزمونی که تا کنون برای همگرایی یك سری همگرای مشروط شناخته‌ایم، آزمون لایب نیتز است. ولی سریهای همگرای مشروطی وجود دارند که اثبات همگرایی آنها با کمك آزمون لایب نیتز مقدور نیست. بعنوان مثال می‌توان به سادگی تحقیق کرد که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n}$ همگرای مطلق نیست.

به زودی نشان خواهیم داد که این سری همگرای مشروط است. ما نمی‌توانیم برای این سری آزمون لایب نیتز را بکار ببریم اگر سری مورد نظر همچون یك سری متناوب به نظر می‌رسد به این دلیل است که $\sin(n)$ تا بی نهایت، هر بار مقادیری مثبت و منفی می‌پذیرد. قضیه‌ی زیر کمك بسیار مؤثری در این بخش خواهد بود.

قضیه ۱.۹.۱۴. *فرض کنید $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی و m عدد ثابت، صحیح و مثبتی باشد. همچنین برای $n\geq m$ فرض کنید $S_n=a_{m+1}+\dots+a_n$. در این صورت، برای $n\geq m$،*

$$\sum_{k=m}^{n}a_kb_k=S_nb_{n+1}-\sum_{k=m}^{n}S_k(b_{k+1}-b_k)$$

اثبات. تعریف می‌کنیم $S_{m-1}=0$ در این صورت به ازای هر $k\geq m$، $a_k=S_k-S_{k-1}$. برای

$n \geq m$ داریم.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k \\
&= (S_m - S_{m-1}) b_m + (S_{m+1} - S_m) b_{m+1} + \ldots + (S_n - S_{n-1}) b_n \\
&= S_m (b_m - b_{m+1}) + S_{m+1} (b_{m+1} - b_{m+2}) + \ldots + S_{n-1} (b_{n-1} - b_n) \\
&\quad + S_n b_n \\
&= S_m (b_m - b_{m+1}) + S_{m+1} (b_{m+1} - b_{m+2}) + \ldots + S_{n-1} (b_{n-1} - b_n) \\
&\quad + S_n (b_n - b_{n+1}) + S_n b_{n+1} \\
&= S_n b_{n+1} + \sum_{k=m}^{n} S_k (b_k - b_{k+1}) \\
&= S_n b_{n+1} - \sum_{k=m}^{n} S_k (b_{k+1} - b_k)
\end{aligned}$$

برای $m = 1$، فرمول فوق به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} S_k (b_{k+1} - b_k) \tag{۱۲.۱۴}$$

که $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. □

فرمول فوق ما را یاری خواهد کرد تا نتیجه‌ی زیر که به لم آبل معروف است را به اثبات رسانیم.

قضیه ۲.۹.۱۴ (لم آبل). *فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری از اعداد حقیقی باشد که $\{S_n\}$، دنباله‌ی مجموعهای جزئی آن در نامعادله ی زیر صدق می‌کند،*

$$m \leq S_n \leq M, \quad (n \in \mathbb{N})$$

و فرض کنید $\{b_n\}$ دنباله‌ای غیرصعودی از اعداد حقیقی نامنفی باشد، در این صورت برای $n \in \mathbb{N}$

$$m b_1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq M b_1$$

به ویژه، اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|S_n| \leq M$. آنگاه

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq M b_1$$

اثبات. از قضیه‌ی پیشین داریم

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_n b_{n+1}$$

بنابر فرضیات فوق، برای هر $k \in \mathbb{N}$

$$m \leq S_k \leq M, \quad b_k \geq 0, \quad b_k - b_{k+1} \geq 0$$

بنابراین

$$\begin{aligned} m\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) + mb_{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq M\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) + Mb_{n+1} \\ \Rightarrow m[(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) + b_{n+1}] \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\ \leq M[(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) + b_{n+1}] \\ \Rightarrow mb_1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq Mb_1 \end{aligned}$$

□

اینک با استفاده از دست آورد فوق و فرمول جمعبندی از قضیه ۱.۹.۱۴، قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳.۹.۱۴. *فرض کنید* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *یک سری از اعداد حقیقی باشد که* $\{S_n\}$*، دنباله ی مجموع‌های جزئی آن کراندار باشد، فرض کنید* $\{b_n\}$ *دنباله‌ای غیر صعودی از اعداد حقیقی و به صفر همگرا باشد. در این صورت* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *همگراست.*

اثبات. از اصل عمومی همگرایی کشی بر سری‌ها (قضیه ۱.۲.۱۴) بهره خواهیم جست. یعنی، نشان خواهیم داد که برای $\epsilon > 0$ دلخواه عدد صحیح و مثبت m موجود است بطوریکه

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| < \epsilon, \qquad (n \geq m, \quad p \geq 1)$$

چون دنباله حاصل جمع جزیی $\{S_n\}$ کرانداراست. $M > 0$ موجود است بطوریکه برای هر $n \in N$، $|S_n| < M$. پس، اگر m عددی صحیح و ثابت باشد، آنگاه برای $r > n \geq m$،

$$\left|\sum_{k=n}^{r} a_k\right| = |S_r - S_{n-1}| \leq |S_r| + |S_{n-1}| \leq M + M = 2M$$

با استفاده از قضیه ۲.۹.۱۴، خواهیم داشت برای $p \geq ۱$،

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| \leq ۲Mb_n$$

چون $\lim_{n\to\infty} b_n = ۰$ برای $\epsilon > ۰$ دلخواه عدد صحیح و مثبت m موجود است بطوریکه برای هر $n \geq m$، $b_n < \epsilon/۲M$.

از این رو برای هر $n \geq m$ و $p \geq ۱$، $\left|\sum_{k=n}^{n+k} a_k b_k\right| \leq ۲Mb_n < \frac{\epsilon}{۲}$. پس $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n b_n$ همگراست. $\square$

اینک وعده‌ی خود را درباره‌ی نشان دادن همگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ تحقق می‌بخشیم.

مثال ۴.۹.۱۴. *برای $x \in \mathbb{R}$ رفتار سری زیر را بررسی کنید.*

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

حل. با توجه به مثلثات، می‌دانیم که وقتی m عددی صحیح باشد، اگر $x \neq ۲m\pi$ (مسایل حل شده اعداد مختلط را ببینید)، آنگاه

$$S_n = \sin x + \sin(۲x) + \ldots + \sin(nx) = \frac{\cos\frac{x}{۲} - \cos\frac{۲n+۱}{۲}x}{۲\sin\frac{x}{۲}}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$|S_n| \leq \frac{۱}{|\sin\frac{x}{۲}|}$$

یعنی $\{S_n\}$، دنباله‌ی مجموعهای جزیی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \sin(nx)$ کراندار است. همچنین $\{\frac{۱}{n}\}$ دنباله‌ای اکیدا یکنوا و نزولی بوده و به صفر همگراست. بنابر آزمون دیریکله قضیه ۳.۹.۱۴ نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

برای هر $x \in \mathbb{R}$ همگراست.

مثال ۵.۹.۱۴. *رفتار سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log n}$ را بررسی کنید* $(x \in \mathbb{R})$.

حل. در مثال قبل نشان داده‌ایم که دنباله ی $\{S_n\}$ وقتی $S_n = \sin x + \ldots + \sin(nx)$ به ازای

$x \neq ۲m\pi$ کراندار است. همچنین $\{\frac{۱}{\log n}\}$، دنباله‌ی اکیدا نزولی از اعداد حقیقی بوده به صفر همگراست. پس بنابر آزمون دیریکله قضیه ۳.۹.۱۴، به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log n}$ همگراست.

سرانجام مطلب زیر را که منسوب به آبل است به اثبات می‌رسانیم.

قضیه ۶.۹.۱۴. *اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ سری همگرایی از اعداد حقیقی باشد و اگر دنباله‌ی $\{b_n\}$ یکنوا و همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n b_n$ نیز همگراست.*

اثبات. بدون آنکه به کلیت برهان لطمه‌ای وارد شود می‌توان تصور کرد که $\{b_n\}$ نزولی باشد. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. همچنین فرض کنید که برای $n \in N$، $c_n = b_n - b$. در این صورت $c_n \geq ۰$ و $\lim_{n\to\infty} c_n = ۰$. همچنین $\{c_n\}$غیر صعودی است. چون $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست، $\{S_n\}$، دنباله ی مجموع‌های جزیی آن کراندار است. بنابر قضیه ۳.۹.۱۴، $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n c_n$ همگراست. همچنین، بنابر قضیه ۱۰.۱.۱۴، $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n b$ همگراست. دیگر بار با استفاده از قضیه‌ی ۱۰.۱.۱۴، نتیجه می‌گیریم که $\sum_{n=۱}^{\infty} (a_n c_n + a_n b)$ همگراست و در نتیجه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n b_n$ همگراست. □

۱۰.۱۴ مسایل نمونه حل شده

مساله ۱.۱۰.۱۴. *اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ یک سری واگرا از اعداد مثبت باشد آن‌گاه دنباله‌ای از اعداد مثبت مانند $\{\varepsilon_n\}_{n=۱}^{\infty}$ وجود دارد که $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = ۰$ ولی $\sum_{n=۱}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ باز هم واگرا باشد.*

حل. فرض کنید $S_n = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n$. ابتدا نشان می‌دهیم که $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{s_{k+۱} - s_k}{s_{k+۱}}$ واگرا است. برای این منظور برای هر $m \in \mathbb{N}$، عدد $n \in \mathbb{N}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $s_{n+۱} > ۲s_m$(این امر

امکان‌پذیر است زیرا $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$) اما $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای غیر نزولی است. از این رو

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{k+1}} &\geq \sum_{k=m}^{n}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{n+1}}\\ &= \frac{S_{n+1}-S_m}{S_{n+1}}\\ &> \frac{S_{n+1}-\frac{1}{2}S_{n+1}}{S_{n+1}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $m\in\mathbb{N}$، عدد $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{k+1}} \geq \frac{1}{2}$$

بنابراین مجموع‌های جزئی سری $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{k+1}}$ دنباله‌ای کشی تشکیل نمی‌دهند. در نتیجه $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{k+1}} = \infty$. ولی $S_{k+1}-S_k = a_{k+1}$ بنابراین $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{s_k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{s_{k+1}} = \infty$. اگر $\epsilon_k = \frac{1}{S_k}$ آنگاه $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$ و $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\varepsilon_k a_k = \infty$.

مساله ۲.۱۰.۱۴.

الف) *اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرای مطلق باشد و اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|b_n|}$ موجود باشد آن‌گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است.*

ب) *اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \infty$ و اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|b_n|}$ موجود باشد آن‌گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n| = \infty$.*

حل.

الف) چون بنا به فرض دنباله $\{\frac{|a_n|}{|b_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست پس کراندارنیز می‌باشد. بنابراین عدد مثبتی مانند M موجود است که $|a_n| \leq M|b_n|$ برای هر $n\in\mathbb{N}$، در نتیجه $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$.
پس بنا به نتیجه ۳.۳.۱۴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است.

ب) همانند الف) داریم $|a_n| \leq M|b_n|$ و یا $\frac{1}{M}|a_n| \leq |b_n|$، پس دوباره با توجه به نتیجه ۳.۳.۱۴

داریم $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|=\infty$.

مساله ۳.۱۰.۱۴. *اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای غیرصعودی از اعداد مثبت باشد و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} na_n=0$.*

حل. فرض کنیم $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=A$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} S_n=A=\lim_{n\to\infty} S_{2n}$. بنابراین، $\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$. اکنون $S_{2n}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}\geq na_{2n}\geq 0$. از این‌رو

$$\lim_{n\to\infty} na_{2n}=0. \tag{13.14}$$

ولی $a_{2n+1}\leq a_{2n}$. پس

$$(2n+1)a_{2n+1}\leq\left(\frac{2n+1}{2n}\right)(2na_{2n})$$

در نتیجه با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty} na_{2n}=0$، داریم

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}=0 \tag{14.14}$$

حال حکم از ۱۳.۱۴ و ۱۴.۱۴ حاصل می‌شود.

مساله ۴.۱۰.۱۴. *نشان دهید اگر در مسئله ۳.۱۰.۱۴ فرض غیرصعودی بودن دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را حذف کنیم، حکم دیگر برقرار نخواهد بود.*

حل. سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم $\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ مربع کامل باشد}\\ \frac{1}{n^2} & \text{اگر } n \text{ مربع کامل نباشد}\end{cases}$.
در این‌صورت داریم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9}+\ldots$. از این رو مجموع‌های جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ از بالا کراندار است زیرا این مجموع‌های جزئی از $(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots)+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots)$ کوچکتر و این مقدار از $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ کوچکتر است بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است ولی na_n وقتی $n\to\infty$ به صفر میل نمی‌کند، زیرا برای n هایی مربع کامل هستند داریم $na_n=1$.

مساله ۵.۱۰.۱۴. *نشان دهید که عکس مساله ۲.۱۰.۱۴ نیز برقرار نیست.*

حل. کافی است سری $\sum\limits_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{n\log n}$ را در نظر بگیریم که طبق مثال ۱۱.۴.۱۴ واگرا است در حالی‌که

$$\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\log n}=۰.$$

مساله ۶.۱۰.۱۴. *نشان دهید که* $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n+n^۲+n}{۲^{n+۱}n.(n+۱)}=۱$.

حل. به سادگی می‌توان دید که:

$$\frac{۲^n+n^۲+n}{n.(n+۱)۲^{n+۱}}=\frac{۱}{۲}[(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱})+\frac{۱}{۲^n}]$$

از این رو

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^۲+n+۲^n}{n(n+۱)۲^{n+۱}}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱})+\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲^n}=۱$$

(مثال ۴.۱.۱۴ و قضیه ۶.۳.۱۴ را ببینید).

مساله ۷.۱۰.۱۴. *فرض کنیم* $۰<a<۱<b$ *و* $ab<۱$. *نشان دهید سری زیر همگرا است.*

$$\sum a_n=a+ab+a^۲b+a^۲b^۲+\ldots+a^nb^{n-۱}+a^nb^n+\ldots$$

حل. چون داریم $a_{۲n}=a^nb^n$ و $a_{۲n+۱}=a^{n+۱}b^n$ برای بررسی این سری آزمون نسبت را نمی‌توان به کار برد زیرا $\frac{a_{۲n+۲}}{a_{۲n+۱}}=\frac{a^{n+۱}b^{n+۱}}{a^{n+۱}b^n}=b$ و $\frac{a_{۲n+۱}}{a_{۲n}}=\frac{a^{n+۱}b^n}{a^nb^n}=a$ و در نتیجه $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+۱}}{a_k}$ موجود نیست. حال اگر آزمون ریشه $n-$ ام کشی (قضیه ۱.۴.۱۴) را بکار می‌بریم در این‌صورت داریم:

$$\begin{aligned}\sqrt[۲n]{a_{۲n}}=(a^nb^n)^{\frac{۱}{۲n}} &= \sqrt{ab}\to\sqrt{ab}\\ \sqrt[۲n+۱]{a_{۲n+۱}} &= (a^{n+۱}b^n)^{\frac{۱}{۲n+۱}}=a^{\frac{n+۱}{۲n+۱}}b^{\frac{n}{۲n+۱}}\to\sqrt{ab}\end{aligned}$$

بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt{ab}$ و چون $ab<۱$، پس سری مورد بحث همگرا است.

مساله ۸.۱۰.۱۴. *رفتار سری* $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n}{(۵+(-۱)^n)^n}$ *را بررسی نمایید.*

حل. چون $\frac{۲^n}{(۵+(-۱)^n)^n}\leq(\frac{۱}{۲})^n$ بنابه قضیه ۲.۳.۱۴(آزمون مقایسه) این سری همگرا است و حال آنکه هیچ‌یک از دو آزمون نسبت(قضیه ۱۵.۳.۱۴) و آزمون ریشه $n-$ام کشی(قضیه ۱.۴.۱۴) در مورد آن کارساز نیست اما آزمون را به(قضیه ۱۹.۳.۱۴) را نیز می‌توان به‌کار برد.

مساله ۹.۱۰.۱۴. *اگر سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد اما به طور مطلق همگرا نباشد آنگاه برای هر عدد α، یک بازآرایی مانند $\{b_n\}$ از $\{a_n\}$ موجود است که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$.*

حل. فرض کنید $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ سری حاصل از جملات مثبت $\{a_n\}$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ نمایانگر سری حاصل از جملات منفی این سری باشد(اثبات قضیه ۸.۸.۱۴ را ببینید) قضیه ۸.۸.۱۴ نتیجه می‌دهد که سریهای $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ همگرا نیستند حال فرض کنید که α یک عدد حقیقی دلخواه باشد برای سادگی فرض کنید $\alpha > 0$(حالت $\alpha < 0$ یک بازسازی ساده از $\alpha > 0$ است). چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ همگرا نیست، عدد طبیعی N چنان موجود است $\sum\limits_{n=1}^{N} p_n > \alpha$. فرض کنید N_1کوچکترین N با این خاصیت باشد. بنابراین داریم $\sum\limits_{n=1}^{N_1 - 1} p_n \leq \alpha$ (۱) و حال آنکه $\sum\limits_{n=1}^{N_1} p_n > \alpha$ (۲)، حال اگر قرار دهیم $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{N_1} p_n$ آنگاه $S_1 - \alpha \leq p_{N_1}$ زیرا $S_1 - \alpha \leq S_1 - \sum\limits_{n=1}^{N_1 - 1} p_n = p_{N_1}$.حال فرض کنید M_1 کوچکترین عدد طبیعی باشد که $T_1 = s_1 + \sum\limits_{n=1}^{M_1} q_n < \alpha$. مانند قبل داریم $\alpha - T_1 \leq -q_{M_1}$. اگر این روند را ادامه دهیم با انتخاب کوچکترین اعداد ممکن N_k یا M_k، حاصل‌جمع‌هایی بدست می‌آوریم که متناوبا بزرگتر و کوچکتر از α هستند. دنباله

$$P_1, \ldots, P_{N_1}, q_1, \ldots, q_{M_1}, P_{N_1+1}, \ldots, P_{N_2}, \ldots$$

یک بازآرایی از $\{a_n\}$ است. توجه نمایید که با توجه به مطالب فوق داریم $|S_k - \alpha|$ و $|T_k - \alpha|$ به ترتیب کوچکتر یا مساوی P_{N_k} و یا $-q_{M_k}$ هستند و چون این‌ها اعضایی از دنباله اصلی $\{a_n\}$ هستند باید به ترتیب به طور نزولی به 0 همگرا باشد چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

مساله ۱۰.۱۰.۱۴. *رفتار سری $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{k})^k$ را بررسی نمایید.*

حل. با توجه به آزمون ریشه $n-$ام کشی(قضیه ۱.۴.۱۴) داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left((\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

پس این سری همگرا است.

۱۱.۱۴　مسایل

۱. در هر یک از تمرینات زیر مقدار سری را محاسبه نمایید.

۱.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{5^k}\right),$$

۲.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right),$$

۳.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2},$$

۴.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{12.2^{k+1}}{3^{k-2}}-\frac{15.3^{k+1}}{4^{k+2}}\right),$$

۵.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

۶.
$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\cdots,$$

۷.
$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\cdots,$$

۸.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{n^2+n+1},$$

۹.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^{n+1}},$$

۱۰.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},$$

۱۱.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an+b}{n(n+1)(n+2)},\quad (a,b\in\mathbb{R}),$$

۱۲.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

۱۳.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(n+2)!},\quad (p\in\mathbb{N}),$$

۱۴.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)(k+x+1)(k+x+2)},\quad (x>0)$$

۲. سریی بنویسید که مجموع جزیی n اُم آن

الف)
$$S_n=\frac{n+1}{n}$$

ب)
$$S_n=\frac{-1+2^n}{2^n}$$

ج)

$$S_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

باشد و مقدار سری زیر را نیز بیابید.

۳. نشان دهید که سری‌های زیر واگرا هستند.

۱.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

۲.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

۳.
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots,$$

۴.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2^n} 2^{-n}.$$

۴. رفتار سری‌های زیر را تعیین نمایید.

۱.
$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^2\sqrt{\ln k}},$$

۲.
$$\sum_{k=0}^{\infty} ke^{k},$$

۳.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^3},$$

۴.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}},$$

۵.
$$\sum_{k=3}^{\infty} ke^{-k^4},$$

۶.
$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k\ln\ln k},$$

۷.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} k}{1+k^2},$$

۸.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sech} k,$$

۹.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 k},$$

۱۰.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n},$$

۱۱.
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^۲}{n!},$$

۱۲.
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\tan^{-۱} \frac{۱}{n}\right)^n,$$

۱۳.
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n!}{n^n},$$

۱۴.
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n}{n^۴},$$

۱۵.
$$\sum_{m=۰}^{\infty} \frac{m+۱}{(m+۲)۲^m},$$

۱۶.
$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n^۳+۱}},$$

۱۷.
$$\sum_{k=۳}^{\infty} \frac{۱}{(\ln k)^{\ln\ln k}},$$

۱۸.
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^n,$$

۱۹.
$$\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{(\ln n)^x}, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

۲۰.
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۱+\frac{۱}{n})^{۲n}}{e^n},$$

۲۱.
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۱+\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n^۲}+\cdots+\frac{۱}{n^k}}}, \quad (k \in \mathbb{N}),$$

۲۲.
$$\sum_{n=۱}^{\infty} e^{\frac{m(n-۱)!}{(n+m)!}}, \quad (m\in\mathbb{N}),$$

۲۳.
$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{(\ln n)^n},$$

۲۴.
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n+۱)۳^{۲n+۱}}.$$

۵. نشان دهید برای $p > ۱$
$$\frac{۱}{(p-۱)(n+۱)^{p-۱}} < \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k^p} - \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k^p} < \frac{۱}{(p-۱)(n+۱)^{p-۱}} + \frac{۱}{(n+۱)^p}.$$

۶. نشان دهید
$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n e.$$

۷. نشان دهید که اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ با جملات مثبت، همگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n^۲$ نیز همگراست.

۸. اگر $a_n \geq ۰$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n^۲$ همگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ نیز همگراست.

۹. در هر یک از تمرینات زیر تعیین کنید که آیا سری داده شده همگرای مطلق، همگرای مشروط یا متباعد است.

۱.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!},$$

۲.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{n!},$$

۳.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

۴.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(-1)^{n-1}}{2n+1},$$

۵.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \tan^{-1}\frac{1}{n^2},$$

۶.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cot^{-1} n,$$

۷.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6\cdots.(2n)},$$

۸.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\frac{1}{n},$$

۹.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6\cdots.(2n)}\right)^p, \quad (p>0),$$

۱۰.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{10000} x^n, \quad (|x|<1).$$

۱۰. اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ آن‌گاه نشان دهید که $|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

۱۱. ثابت کنید

الف)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$$

ب)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{4(2n^2-n)^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{4(n^2+n)^2}$$

۱۲. نشان دهید که
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+bn}\right) = \ln(1+b)$$

۱۳. اگر $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ آن‌گاه نشان دهید که هر یک از سری‌های زیر به مجموعی که برای‌شان مشخص شده همگرایند.

الف)

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots = \frac{A}{2}$$

ب)

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots = A$$

ج)

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots = \frac{3}{2}A$$

۱۴. سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید که این سری همگراست در حالی‌که سری حاصل از تغییر ترتیب آن به صورت

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

(یک جمله منفی به دنبال دو جمله مثبت بیاید) واگراست.

۱۵. نشان دهید که اگر x مضربی از π نباشد، آن‌گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$ همگراست.

۱۶. نشان دهید که

$$0 < \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) < 1$$

۱۷. نشان دهید که هیچ بازآرایی از سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ وجود ندارد که به -1 همگرا باشد.

۱۸. نشان دهید که اگر $a_n > 0$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آن‌گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ واگرا است.

۱۹. مثالی از دنباله $\{a_n\}$ ارائه نمایید که

الف) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا باشد اما $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد.

ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ واگرا باشد.

۲۰. نشان دهید که اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگرا باشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح $p \geq 1$، $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^p$ همگرا است.

۲۱. اعداد حقیقی a و b را چنان بیابید که سری زیر

الف) همگرا

ب) مطلقا همگرا باشد.

$$\frac{a}{1} - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \cdots + \frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n} + \cdots$$

۲۲. نشان دهید که اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگرا باشد، آن‌گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ نیز مطلقا همگرا است.

۲۳. نشان دهید که اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ مطلقا همگرا باشند، آن‌گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ نیز مطلقا همگرا است.

۲۴. نشان دهید که اگر $a_n > 0$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آن‌گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ همگرا است و مقدار سری را نیز تعیین نمایید.

۲۵. رفتار سری‌های زیر را تعیین نمایید.

الف)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\ln n}$$

ب)

$$\frac{1}{2.1} + \frac{2}{3.3} - \frac{3}{4.2} + \frac{4}{5.5} + \frac{5}{6.7} - \frac{6}{7.4} + \cdots + \frac{3n-2}{(3n-1)(4n-3)} + \frac{3n-1}{3n(4n-1)} - \frac{3n}{(3n+1)(2n)} + \cdots.$$

۲۶. اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد و $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

و به کمک آن مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}}{n}$ را بیابید.

۲۷. اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد و اگر برای هر عدد طبیعی n، $\varepsilon_n = \pm 1$ آن‌گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ همگرا است.

۲۸. اگر برای هر دنباله $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ با $\varepsilon_n = \pm 1$ برای $(n \in \mathbb{N})$، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n$ همگرا باشد آن‌گاه سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است.

۲۹. درستی تساوی $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right)^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ را نشان دهید.

۳۰. فرض کنید $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله با جملات مثبت باشد و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = l < 1$ نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ و به کمک آن (یا به هر روش دیگری) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n \cos \pi n}{n!}$ را بیابید.

۳۱. اگر $a_n > 0$ و $c > 0$ آن‌گاه دو سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c+a_n}$ همرفتارند.

۳۲. فرض کنید که $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد باشد که $0 \le a_n \le 9$. نشان دهید $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ همگراست و مقدار آن بین ۰ و ۱ است(این عدد را معمولا با نماد $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ نشان می‌دهیم)

۳۳. فرض کنید $x \in [0, 1)$. نشان دهید که دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد صحیح وجود دارد که $0 \le a_n \le 9$ و $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

۳۴. نشان دهید که $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله تکراری باشد بدین معنی که این دنباله به صورت $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \cdots$ باشد آن‌گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ عددی گویا است که آن را تعیین خواهید نمود.

۳۵. اگر $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ عدد گویا باشد آن‌گاه $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از مرتبه‌ای به بعد تکراری است.

۳۶. نشان دهید که سری که جمله عمومی آن $a_n = \frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$ باشد همگراست اگر $b > a > 0$ و واگراست اگر $a \ge b > 0$.

۳۷. با فرض $0 < a < b < 1$، رفتار سری $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$ را بررسی نمایید.

۳۸. اگر در سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ داشته باشیم $\frac{a_{n+3}}{a_n} = r < 1$ آن‌گاه این سری همگراست. این حکم را تعمیم دهید.

۳۹. فرض کنید $a_n \ge 0$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. نشان دهید $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ همگراست.

۴۰. فرض کنید $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد و فرض کنید $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیردنباله دلخواهی از دنباله اعداد طبیعی باشد و سرانجام فرض کنید

$$b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}, \qquad b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2},$$
$$\cdots, \qquad b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \ldots + a_{n_k}, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

نشان دهید که $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_n$ همگراست و مجموعش با مجموع $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ برابر است.

۴۱. مثالی از یک سری $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ بیاورید به گونه‌ای که $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots$ همگرا باشد ولی $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ واگرا باشد (این نشان می‌دهد که برداشتن پرانتزها ممکن است اشکالاتی ایجاد کنند).

۴۲. اگر $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| = A$ و $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$ که در آن A و B اعداد حقیقی هستند. آن‌گاه $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ که در آن $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ و $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ به $C = AB$ همگرا است.

فصل ۱۵

سری‌های توانی

۱.۱۵ مقدمه

یادآوری می‌کنیم که برای هر عدد حقیقی x، اگر $|x| < ۱$، سری هندسی $۱ + x + x^۲ + \ldots + x^n + \ldots$ همگرا است و مجموع آن عبارت از $\frac{۱}{۱-x}$ است و اگر $|x| \geq ۱$ این سری واگرا است (قضیه ۶.۳.۱۴). همچنین با توجه به آزمون نسبت (قضیه ۱۵.۳.۱۴) ملاحظه می‌شود که برای هر عدد حقیقی x، سری

$$۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

همگرا است در نتیجه این سری تابعی بر $\mathbb{R}$ است. برخی از مهمترین توابع در ریاضی به کمک سریهای نامتناهی مناسب هم قابل تعریف هستند که از آن جمله می‌توان توابع مثلثاتی، توابع معکوس مثلثاتی، تابع نمائی، تابع لگاریتم، توابع هذلولی و توابع معکوس هذلولی و $\cdots$ نام برد. برای این منظور ابتدا لازم است که سریهای توانی را تعریف نمائیم.

تعریف ۱.۱.۱۵. *یك سری توانی عبارت از یك سری به شکل*

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n = a_۰ + a_۱.x + a_۲x^۲ + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (۱.۱۵)$$

است که در آن x یك متغیر حقیقی است. ثابت‌های a_n ضرائب سری نامیده می‌شوند. برای هر x ثابت، سری ۱.۱۵ یك سری عددی معمولی است که می‌توان آنرا برای همگرائی و واگرائی آزمون نمود. یك سری توانی ممکن است برای بعضی از مقادیر x همگرا و برای بعضی مقادیر x واگرا باشد و مجموع این سری عبارت است از تابع

$$f(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

که حوزه تعریف آن مجموعه تمام x هایی است که سری برای آنها همگرا است توجه نمائید که f مشابه

یك چندجمله‌ای است با این تفاوت که f دارای تعداد نامتناهی جمله است. برای مثال اگر ۱ $= a_n$ آنگاه سری توانی همان سری هندسی است یعنی

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

که همگرا است اگر و فقط اگر ۱ $> |x|$. بطورکلی، هر سری به شکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots$$

را یك سری توانی حول نقطه c نامیم. توجه نمائید که وقتی $x = c$ تمام جملات بجز جمله اول صفر هستند و برای $x = c$ همواره سری همگرا است.

مثال ۲.۱.۱۵. *برای چه مقادیر x، سری $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ همگرا است.*

حل. با توجه به آزمون نسبت داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

بنابراین، این سری واگرا است اگر ۰ $x \neq$ بنابراین سری مورد بحث فقط برای ۰ $x =$ همگرا است.

مثال ۳.۱.۱۵. *برای چه مقادیری از x سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ همگرا است.*

حل. چون

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-3)^n}{n}} \right| = |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x-3|$$

بنا به آزمون نسبت (قضیه ۱۵.۳.۱۴) داریم که اگر ۱ $> |x-3|$ آنگاه سری مورد بحث مطلقا همگرا خواهد شد. امّا

$$|x-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-3 < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4$$

پس این سری مطلقا همگرا است اگر $2 < x < 4$ و واگرا است اگر $x > 4$ و یا $x < 2$. برای x هایی که $|x-3| = 1$ و یا $x = 2$ و $x = 4$، آزمون نسبت اطلاعی راجع به همگرائی و واگرائی سری نمی‌دهد. امّا اگر $x = 2$ آنگاه سری تبدیل به سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ می‌شود که بنا به قضیه لایبنیتز (قضیه ۱.۵.۱۴) همگرا است و اگر $x = 4$ سری تبدیل به سری همساز (مثال ۳.۲.۱۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ می‌شود که واگرا است. همچنانکه قبلاً نیز اشاره شد یکی از کاربردهای اساسی سریهای توانی در ارائه روشی که

این سریها برای نمایش توابع مهمی که در ریاضیات، فیزیک و شیمی ایجاد می‌شوند می‌باشد. یکی از این نوع توابع، تابع بسل است.

مثال ۴.۱.۱۵. *حوزه تعریف تابع بسل مرتبه صفر*

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

را بیابید.

حل.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^1}}\right| = x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4(n+1)^2}=0$$

که با توجه به آزمون نسبت (قضیه ۱۵.۳.۱۴) چون همواره $1 > 0$ پس این سری برای تمام x ها همگرا است یا به عبارت دیگر حوزه تعریف تابع بسل مرتبه صفر تمام $\mathbb{R}$ است. توجه نمائید که در مثالهای بالا مجموعه تمام x هایی که برای آنها سری توانی همگرا است یك بازه اعم از یك باز تك نقطه‌ای یعنی $[0,0]$، یك بازه کراندار $(2,4)$ و یا یك بازه نامتناهی $(-\infty,\infty)$ است این مطلب همواره برای تمام سری‌های توانی درست است که در زیر تحت چند قضیه آنرا نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۱.۱۵. *اگر سری توانی* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *برای* x_0 *همگرا باشد آنگاه برای هر* x *که* $|x|<|x_0|$ *مطلقا همگرا است و اگر برای* x_0 *واگرا باشد آنگاه برای هر* x *که* $|x|\geq|x_0|$ *واگرا است.*

اثبات. چون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ همگرا است پس بنا به قضیه ۸.۱.۱۴ $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ ، بنابراین برای $\epsilon = 1$ عدد طبیعی n موجود است که برای هر عدد طبیعی $n > N$ داریم

$$|a_n x_0^n| < 1$$

حال اگر عدد حقیقی x چنان باشد که $|x|<|x_0|$ آنگاه $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$، در نتیجه برای هر $n > N$، چون $\left|\frac{x}{x_0}\right|^n < 1$ ، پس

$$|a_n x^n| = \left|a_n.(\frac{x}{x_0})^n.x_0^n\right| = |a_n x_0^n|\left|(\frac{x}{x_0})^n\right| = |a_n x_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n < |a_n x_0^n|$$

بنابراین بنا به آزمون مقایسه قضیه ۲.۳.۱۴، $\sum|a_n x^n|$ همگرا و یا $\sum a_n x^n$ مطلقا همگرا است. اکنون فرض کنید که $\sum a_n x^n$ برای x_1 که $|x_1|<|x_0|$ همگرا باشد (فرض خلف) در این صورت بنا به آنچه که در بالا ثابت شد برای x_0 نیز همگرا خواهد بود که یك تناقض است. □

قضیه ۶.۱.۱۵. *برای هر سری توان $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ فقط یکی از حالات زیر برقرار است*

(الف) سری فقط برای $x = 0$ همگرا است

(ب) سری برای تمام مقادیر x همگرا است

(ج) عدد حقیقی مثبت r موجود است که سری همگرا است اگر $|x| < r$ و واگرا است اگر $|x| > r$

اثبات. فرض کنید که (الف) و (ب) برقرار نباشند در این صورت اعداد حقیقی غیرصفر b و d وجود دارند که $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برای $x = b$ همگرا و برای $x = d$ واگرا باشد. بنابراین مجموعه

$$A = \left\{ x : \text{همگرا است } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\}$$

زیرمجموعه‌ای غیرخالی و سره از اعداد حقیقی است و بنا به قضیه قبل سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برای هر x، $|x| > |d|$ واگرا است پس برای هر $x \in A$، d، $|x| \le d$. به عبارت دیگر d یك کران بالای A است پس بنا به اصل تمامیت سوپرمم A موجود است. فرض کنید $\sup A = r$ حال اگر $x \notin A$ آن‌گاه سری $\sum a_n x^n$ واگرا است و اگر $|x| < r$، در این صورت بنا به خاصیت مشخصه سوپرمم عضو x_0 در A موجود است که $|x| < x_0 \le r$ که در این صورت بنا به قضیه قبل، سری $\sum a_n x^n$ همگرا است. □

نتیجه ۷.۱.۱۵. *برای سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ فقط یکی از حالات زیر برقرار است.*

(الف) سری فقط برای $x = c$ همگرا است

(ب) سری برای تمام مقادیر x همگرا است

(ج) عدد حقیقی مثبت r موجود است که برای هر x، اگر $|x-c| < r$، آنگاه سری مطلقا همگرا و اگر $|x-c| > r$ آنگاه سری واگرا است.

اثبات. با انتخاب $u = x - c$، سری تبدیل به سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ گردیده که بنا به قضیه قبل نتیجه حاصل شده است. □

با توجه به قضیه بالا تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۸.۱.۱۵. *تعریف: عدد r در حالت (ج) در قضیه قبل را شعا ع همگرائی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ نامیم.*

در حالت (الف) شعاع همگرائی را صفر و در حالت (ب) آنرا بینهایت تعریف می‌کنیم. توجه نمائید که با توجه به قضیه قبل در حالتی که سری برای تمام اعداد حقیقی همگرا نباشد داریم

$$r = \sup\left\{|x|: \text{است همگرا } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right\}$$

بازه همگرائی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ عبارت است از بازه‌ای شامل تمام اعداد حقیقی x که $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ همگرا است. توجه نمائید که اگر $r = 0$ آنگاه بازه همگرائی بازه تک‌نقطه‌ای $\{c\}$ است و اگر $r = \infty$ آنگاه بازه همگرائی $R = (-\infty, \infty)$ است و در حالتی که r یك عدد حقیقی مثبت است بازه همگرائی یکی از بازه‌های $(c-r, c+r)$، $[c-r, c+r)$، $(c-r, c+r]$ و یا $[c-r, c+r]$ است بسته به آنکه به ترتیب سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ در هر یك از نقاط $x = c-r$ و $x = c+r$ واگرا، در نقطه $x = c+r$ واگرا و در $x = c-r$ همگرا، در $x = c-r$ همگرا و در $x = c+r$ واگرا، و یا در هر یك از نقاط $x = c-r$ و $x = c+r$ همگرا باشد. اکنون در جدول زیر شعاع و بازه‌ی همگرایی را مشخص می‌نماییم.

سری توانی	شعاع همگرایی	بازه همگرایی
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$	$r = 1$	$(-1, 1)$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$r = 0$	$\{0\}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$r = 1$	$[2, 4)$
$\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$r = \infty$	$(-\infty, \infty)$

توجه نمائید که هر گاه شعاع همگرائی سری عدد حقیقی مثبت r باشد آنگاه بازه همگرائی همواره شامل بازه $(c-r, c+r)$ می‌باشد. عموما آزمون نسبت و بعضی اوقات آزمون ریشه برای تعیین شعاع همگرائی بکار می‌روند امّا هیچگاه این آزمونها را نمی‌توان برای تعیین همگرائی یا واگرائی سری برای نقاط مرزی بازه همگرائی بکار برد بنابراین رفتار سری برای این نقاط را باید توسط آزمونهای دیگر تعیین نمود.

مثال ۹.۱.۱۵. *شعاع و بازه همگرائی* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ *را بدست آورید.*

حل. چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}}{\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}}\right| = 3|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = 3|x|$$

پس با توجه به آزمون نسبت (قضیه ۱۵.۳.۱۴)، سری همگرا است اگر $3|x| < 1$ و یا $|x| < \frac{1}{3}$ و سری واگرا است اگر $|x| > \frac{1}{3}$. بنابراین $r = \frac{1}{3}$. در نتیجه بازه همگرائی شامل بازه $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ است. برای تعیین رفتار سری در نقاط مرزی $x = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ داریم:
برای $x = -\frac{1}{3}$،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n(\frac{-1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

که مثلاً بنا به آزمون انتگرال (قضیه ۱۰.۴.۱۴) یك سری واگرا است.
و برای $a = \frac{1}{3}$،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n.(\frac{1}{3}^n)}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

که بنا به قضیه لایب‌نیتز (قضیه ۱.۵.۱۴) یك سری متناوب همگرا است پس بازه همگرائی سری، $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ می‌باشد.

مثال ۱۰.۱.۱۵. *شعاع و بازه همگرائی سری* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ *را تعیین نمائید.*

حل. چون

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}} \right| = \frac{|x+2|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{|x+2|}{3}$$

پس بنا به آزمون نسبت سری همگرا است اگر $\frac{|x+2|}{3} < 1$ و واگرا است اگر $\frac{|x+2|}{3} > 1$. در نتیجه شعاع همگرائی سری $r = 3$ است بنابراین بازه همگرائی شامل بازه $(-5 \text{ و } 1)$ است. برای تعیین رفتار سری در نقاط مرزی $x = 1$ و $x = -5$ داریم: برای $x = 1$،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n$$

لذا یك سری واگرا است چون شرط لازم همگرائی را ندارد. و برای $x = -5$،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$$

که باز هم یك سری واگرا است چون شرط لازم همگرائی را ندارد. بنابراین بازه همگرائی سری عبارت از $(-5 \text{ و } 1)$ است. توجه نمائید که همچنانکه قبلاً نیز اشاره شده است چون رفتار یك سری با ضرب جمله

به جمله آن در یك عدد ثابت غیرصفر تغییر نمی‌کند پس شعاع سری‌های $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ ، $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}$ و $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k-1}$ یکسان است.

اکنون قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که به کمك آن ضرائب یك سری توانی را می‌توان چنان تغییر داد که شعاع و بازه همگرائی تغییر ننماید.

قضیه ۱۱.۱.۱۵. *فرض کنید c_n دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = 1$ در این صورت سری‌های $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k x^k$ دارای شعاع‌های همگرائی یکسانی هستند.*

اثبات. فرض کنید r و r' به ترتیب شعاع همگرایی سری‌های $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k x^k$ و $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ باشند و ابتدا فرض کنید که $r > 0$. برای اثبات $r = r'$ نشان می‌دهیم که $r \leq r'$ و $r \geq r'$، برای این منظور فرض کنید که $r > |x| > 0$. در این صورت $0 < \frac{(r-|x|)}{|x|}$ در نظر می‌گیریم $0 < \epsilon < \frac{r-|x|}{|x|}$ که در این صورت داریم $r > |x|(1+\epsilon) > 0$ حال از اینکه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = 1$ پس برای $\epsilon > 0$ فرض شده در بالا عدد طبیعی N چنان موجود است که برای هر عدد طبیعی $n \geq N$ داریم

$$1 - \epsilon < \sqrt[n]{c_n} < 1 + \epsilon$$

و یا

$$|\sqrt[n]{c_n} - 1| < \epsilon$$

در نتیجه برای هر عدد طبیعی $n \geq N$ داریم

$$|c_n x^n| = (\sqrt[n]{c_n}|x|)^n < ((1+\epsilon)|x|)^n$$

امّا چون $r > |x|(1+\epsilon)$ پس سری $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|(1+\epsilon)^n |x|^n$ همگرا است بنابراین با توجه به آزمون مقایسه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n x^n$ مطلقا همگرا است بنابراین $r' \geq r$ اکنون چون $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{c_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} = 1$ و $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_k}(c_k a_k x^k)$ بنا به استدلال فوق داریم $r' \leq r$ با توجه به استدلال بالا داریم که اگر $r' = 0$، آنگاه $r = 0$.

حالت $r = \infty$ را نیز به طریق مشابه می‌توان اثبات کرد که اثبات آنرا به خواننده واگذار می‌کنیم. □

نتیجه ۱۲.۱.۱۵. *سریهای $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ ، $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ ، $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و دارای شعاع تقارب یکسان هستند.*

اثبات. با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ، در این صورت اثبات نتیجه با توجه به قضیه قبل واضح است. □

۲.۱۵ مشتق و انتگرال سری‌های توانی

همچنانکه قبلاً نیز متذکر شده‌ایم، هر سری توانی $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ را می‌توان به صورت تابع $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ تصور کرد که دامنه تعریف آن همان بازه همگرائی سری می‌باشد. همچنین گفتیم که چنین f ی را می‌توان یك چندجمله‌ای با تعداد نامتناهی جمله تصور کرد. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که مشتق و انتگرال تابع f نیز مانند چندجمله‌ایها است. که در این رابطه، قضیه زیر بیان می‌دارد که مشتق و انتگرال جمله به جمله سریهای توانی با خود سری دارای شعاع همگرائی یکسانی هستند.

قضیه ۱.۲.۱۵. *فرض کنید که سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارای شعاع همگرائی $r > 0$. در این صورت تابع f با ضابطه $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ روی بازه $(-r, r)$ مشتق‌پذیر (در نتیجه پیوسته) بوده و داریم*

(الف)

$$\frac{d}{d_x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d_x}(a_n x^n) \quad \text{ویا} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r a_n x^{n-1}$$

(ب)

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\int_0^x t^n dt\right) \quad \text{یا} \quad \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

اثبات. (الف) فرض کنید x و c در بازه $(-r, r)$ دلخواه باشند. در این صورت بنا به قضیه تیلور (قضیه ۱.۳.۷ را ببینید). در فصل مشتق داریم

$$x^n = c^n + nc^{n-1}(x-c) + \frac{n(n-1)}{2}(x-c)^2 (z_n)^{n-2} \qquad (2.15)$$

که z_n نقطه‌ای بین x و c است. حال با توجه به تعریف مشتق تابع f در نقطه c و ۲.۱۵ داریم

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(c)}{x-c} &= \frac{1}{x-c}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n\right) \\
&= \frac{1}{x-c}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n - c^n)\right) \\
&= \frac{1}{x-c}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(nc^{n-1}(x-c) + \frac{n(n-1)}{2}(z_n)^{n-2}(x-c)^2\right)\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(nc^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(z_n)^{n-2}(x-c)\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n z_n^{n-2}(x-c)
\end{aligned}$$

توجه نمائید که هر یك از سری‌های $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1}$ و $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n z_n^{n-2}$ با توجه به اینکه z_n و c در بازه همگرائی $(-r,r)$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n(n-1)}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

مطلقا همگرا هستند بنابراین $\lim\limits_{x\to c} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n z_n^{n-2}(x-c) = 0$ در نتیجه $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \sum\limits_{n-1}^{\infty} n a_n c^{n-1}$ و بدین ترتیب اثبات (الف) کامل شده است.

(ب) اگر در نظر بگیریم $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ در این صورت بنا به نتیجه ۱۲.۱.۱۵، g و f دارای شعاع‌های همگرائی یکسانی هستند و چون $g(0) = 0$ و بنا به قسمت الف) $g'(x) = f(x)$ پس بنا به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$\int_o^x f(t)dt = g(x)$$

و بدین ترتیب اثبات قسمت (ب) قضیه نیز کامل شده است.

□

مثال ۲.۲.۱۵. *نشان دهید که برای هر x که $|x| < 1$،*

$$\tan^{-1} x = x\frac{-x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

به کمك آن $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ *را تا سه رقم اعشار تقریب نمائید.*

حل. چون سری هندسی

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \frac{1}{1+x^2}$$

دارای شعاع همگرائی ۱ است پس بنا به قضیه ۱.۲.۱۵ ب) داریم

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

هرگاه $|x| < 1$ و بنابراین

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^5 - \frac{1}{7}(\frac{1}{2})^7 + \ldots$$

یك سری متناوب است و چون $\frac{1}{9}(\frac{1}{2})^9 < \frac{3}{10^4}$ پس مقدار تقریبی $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ تا سه رقم اعشار عبارت است از

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^5 - \frac{1}{7}(\frac{1}{2})^7 = 0/463$$

مثال ۳.۲.۱۵. *مقدار سری*

$$s(x) = \frac{x^2}{1\times 2} + \frac{x^3}{2\times 3} + \ldots + \frac{x^n}{(n-1)n} + \ldots$$

را بیابید.

حل. با توجه به قضیه ۱.۲.۱۵ الف) داریم

$$\begin{aligned} s'(x) &= x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n-1} \cdots \\ s''(x) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \end{aligned}$$

که $s''(x)$ یك سری هندسی است و داریم

$$s'(0) = 0, \quad s''(x) = \frac{1}{1-x}$$

حال چون

$$s'(x) = \int_0^x s''(x)dx = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$$

بنابراین

$$s(x) = \int_0^x \ln(1-t)dt = (1-x)\ln(1-x) + x$$

مثال ۴.۲.۱۵. *نشان دهید* $\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) = ۲(x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} + \cdots)$ *برای* $|x| < ۱$ *همچنین مقدار* $\ln ۳$ *را تا سه رقم اعشار تقریب نمائید.*

حل. چون سری‌های هندسی

$$\begin{aligned} \frac{۱}{۱-x} &= ۱ + x + x^۲ + x^۳ \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n, \\ \frac{۱}{۱+x} &= ۱ - x + x^۲ - x^۳ \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} (-x)^n \end{aligned}$$

دارای شعاع همگرایی یک هستند پس با توجه به قضیه ۱.۲.۱۵ داریم

$$\begin{aligned} \ln(۱-x) &= -\int_۰^x \sum_{n=۰}^{\infty} t^n dt = -\left(x + \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۴}{۴} + \cdots\right), \\ \ln(۱+x) &= \int_۰^x \sum_{n=۰}^{\infty} (-t)^n dt = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \cdots \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \ln\frac{۱+x}{۱-x} &= \ln(۱+x) - \ln(۱-x) \\ &= \left(x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \cdots\right) + \left(x + \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۴}{۴} + \cdots\right) \\ &= ۲\left(x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} + \cdots\right) \end{aligned}$$

وقتی‌که $|x| < ۱$. برای به دست آوردن مقدار تقریبی $\ln ۳$ تا سه رقم اعشار برای $x = \frac{۱}{۲}$ داریم

$$\begin{aligned} \ln\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}} &= \ln ۳ \\ &\doteq ۲\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲})^۳ \frac{۱}{۵}(\frac{۱}{۲})^۵ + \frac{۱}{۷}(\frac{۱}{۲})^۷\right) \\ &= ۱/۰۹۹. \end{aligned}$$

مثال ۵.۲.۱۵. *نشان دهید که*

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

که در آن $|x| < 1$.

حل. همچنانکه در مثال قبل دیدیم $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots$ وقتی که $|x| < 1$. بنابراین بنا به ۱.۲.۱۵ الف) با مشتق‌گیری از طرفین تساوی فوق داریم

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

وقتی که $|x| < 1$.

۳.۱۵ سری تیلور و مَکلورن

با توجه به قضیه ۱.۲.۱۵ هر تابع تعریف شده به وسیله یك سری توانی بینهایت بار مشتق‌پذیر است و مشتقات آن نیز با مشتق‌گیری جمله به جمله از جملات سری بدست می‌آیند. سؤالی که اینجا مطرح می‌شود این است که آیا اگر تابعی بینهایت بار مشتق‌پذیر باشد آیا می‌توان آنرا با یك سری توانی نمایش داد. حقیقت امر این است که این مطلب در حالت کلی درست نیست امّا برای توابع معمولی که در ریاضی عمومی با آنها سر و کار داریم این مطلب درست است.

حال فرض کنید که f تابعی باشد که با یك سری توانی قابل نمایش باشد یعنی فرض کنید

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \end{aligned} \tag{۳.۱۵}$$

در این صورت با توجه به ۱.۲.۱۵ ضرائب a_n به صورت زیر از روی تابع f و مشتقات آن ساخته می‌شوند

$$a_0 = \frac{f(c)}{0!}$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + \cdots + na_n(x-c)^{n-1} + \cdots$$

بنابراین داریم $a_1 = \frac{f'(c)}{1!}$ و چون

$$f''(x) = 2a_2 + 3.2a_3(x-c) + \cdots + n(n-1)a_n(x-c)^{n-2} + \cdots$$

بنابراین $a_۲ = \frac{f''(c)}{۲!}$ و با استقراء داریم

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-۱)\cdots(k-n+۱)a_k(x-c)^{k-n}$$

بنابراین $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$. حال با جایگذاری در ۳.۱۵

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \\ &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{۲!}(x-c)^۲ + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots \end{aligned}$$

که آن‌را سری تیلورر تابع f در نقطه c می‌نامند، بنابراین

تعریف ۱.۳.۱۵. *اگر تابع f در همسایگی از نقطه c بینهایت بار مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه بسط تیلور تابع f در نقطه c یا سری تیلور تابع f در نقطه c عبارت است از*

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{۲!}(x-c)^۲+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

و در حالتی‌که $c = ۰$ آن‌را بسط مکلورن تابع f نامند یعنی سری مکلورن تابع f عبارت است از

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n = f(۰) + f'(۰)x + \frac{f''(۰)}{۲!}x^۲ + \cdots + \frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n + \cdots$$

توجه نمائید با توجه به بحث بالا اگر تابعی قابل نمایش به صورت یك سری توانی حول نقطه c باشد آنگاه آن تابع با سری تیلور خود در نقطه c برابر است.

امّا توابعی وجود دارند که در یك نقطه بینهایت بار مشتق‌پذیر هستند امّا سری تیلور آن توابع با خود تابع برابر نیست به عنوان مثال تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{۱}{x^۲}} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

در ۰ بینهایت بار مشتق‌پذیر است و سری مَکلورن تابع f با f برابر نیست.

مثال ۲.۳.۱۵. *سری مَکلورن تابع $f(x) = e^x$ را نوشته و شعاع همگرائی سری را نیز بدست آورید.*

حل. چون $f^{(n)}(x) = e^x$ پس $f^{(n)}(۰) = ۱$ بنابراین سری مَکلورن تابع نمائی عبارت است از

و چون $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

پس بنا به آزمون نسبت، شعاع همگرائی این سری بینهایت است.

با توجه به مثال فوق داریم که $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ برای تمام اعداد حقیقی x همگرا است پس برای هر عدد حقیقی x، این سری شرط لازم همگرائی را دارد یعنی،

نتیجه ۳.۳.۱۵. *برای هر عدد حقیقی x،* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$.

مثال ۴.۳.۱۵. *سری مَکلورن تابع سینوس و بازه همگرائی آنرا بیابید.*

حل. برای $f(x) = \sin(x)$ داریم $f(0) = 0$ و

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'(0) = 1\\
&f''(x) = -\sin(x) \Longrightarrow f''(0) = 0\\
&f''(x) = -\cos(x) \Longrightarrow f''(0) = -1\\
&f^{(4)}(x) = \sin(x) \Longrightarrow f^{(4)}(0) = 0
\end{aligned}$$

و چون مشتقات با دوره تناوب چهار تکرار می‌شوند بنابراین سری مکلورن تابع سینوس به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + \ldots &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

و چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = |x^2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1$$

پس بنا به آزمون نسبت بازه همگرائی این سری تمام اعداد حقیقی است.

مثال ۵.۳.۱۵. *سری تیلور تابع $f(x) = \ln x$ را در $c = ۱$ نوشته و بازه همگرائی آنرا بیابید.*

حل. با توجه به تعریف سری تیلور کافی است $f^{(n)}(۱)$ را برای هر عدد صحیح نامنفی محاسبه نمائیم که داریم

$$\begin{aligned}
&f(x) = \ln x \Longrightarrow f(۱) = \ln ۱ = ۰\\
&f'(x) = \frac{۱}{x} \Longrightarrow f'(۱) = ۱\\
&f''(x) = \frac{-۱}{x^۲} \Longrightarrow f''(۱) = -۱\\
&f'''(x) = \frac{-۲}{x^۳} \Longrightarrow f'''(۱) = -۲\\
&f^{(n)}(x) = (-۱)^{n-۱}\frac{(n-۱)!}{x^n} \Longrightarrow f^{(n)}(۱) = (-۱)^{n-۱}(n-۱)!
\end{aligned}$$

بنابراین سری تیلور تابع $\ln x$ حول نقطه $c = ۱$ عبارت است از

$$\begin{aligned}
\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۱)}{n!}(x-۱)^n &= (x-۱) - \frac{۱}{۲!}(x-۱)^۲ + \frac{۲}{۳!}(x-۱)^۳ \cdots\\
&\quad +(-۱)^{n-۱}\frac{(n-۱)!}{n!}(x-۱)^n + \cdots\\
&= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}(x-۱)^n}{n}
\end{aligned}$$

و چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-۱)^n(x-۱)^{n+۱}}{(n+۱)}}{\dfrac{(-۱)^{n-۱}(x-۱)^n}{n}}\right| = |x-۱|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+۱} = |x-۱|$$

بنا به آزمون نسبت داریم که اگر $|x-۱| < ۱$ آنگاه سری مطلقا همگرا و اگر $|x-۱| > ۱$ آنگاه سری واگرا است. بنابراین سری همگرا است اگر $۰ < x < ۲$ برای $x = ۰$، سری به $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{-۱}{n}$ تبدیل می‌شود که واگرا است و برای $x = ۲$ سری تبدیل به $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$ می‌شود که بنا به قضیه لایبنیتز

همگرا است پس بازه همگرائی سری برابر $[0,2)$ است.

اکنون به بیان شرطی کافی برای برابری سری تیلور یک تابع در یک نقطه و خود تابع می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که شرط لازم برای وجود سری تیلور، بینهایت بار مشتق‌پذیر بودن تابع است به عبارت دیگر اگر تابعی از هر مرتبه‌ای دارای مشتق باشد آن‌گاه سری تیلور آن موجود است که در این صورت بنا به فرمول تیلور (قضیه تیلور ۱.۳.۷) برای هر عدد طبیعی n داریم

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

که در آن $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ (یعنی دنباله حاصل جمع جزئی سری تیلور تابع f در نقطه c) و $R_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(z_n)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$ که z_n بین x و c است. در این صورت

قضیه ۶.۳.۱۵. *اگر تابع f در همسایگی از c بینهایت بار مشتق‌پذیر باشد و اگر برای هر x در این همسایگی $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ آنگاه در این همسایگی تابع f با سری تیلور مربوطه در c با هم برابرند*

اثبات. بنا به آنچه که در بالا دیدیم برای هر عدد طبیعی n داریم

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل شده است □

مثال ۷.۳.۱۵. *نشان دهید که*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

حل. همچنانکه در مثال ۲.۳.۱۵ دیدیم سری مکلورن تابع نمائی عبارت است از

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

پس $e^x = P_n(x) + R_n(x)$ که $P_n(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$ و $R_n(x) = \dfrac{e^{z_n}x^{n+1}}{(n+1)!}$ که درآن z_n بین x و 0 است. حال اگر $x > 0$ چون تابع نمائی اکیدا صعودی است پس $e^{z_n} < e^x$ در نتیجه $0 < R_n(x) < \dfrac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$ امّا از طرفی بنا به نتیجه ۳.۳.۱۵ داریم $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$، پس بنا به قضیه فشردگی در دنباله‌ها داریم $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ و اگر $x < 0$ در این صورت $e^{z_n} < e^0 = 1$ بنابراین $0 < R_n(x) < \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ که دوباره بنا به قضیه فشردگی در دنباله‌ها و اینکه $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

داریم $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = ۰$ بنابراین بنا به قضیه ۶.۳.۱۵، حکم اثبات شده است.

تذکر ۸.۳.۱۵. *برای هر عدد $x > ۰$، $e^x > ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ توجه نمائید که برای $x = ۱$ داریم $\cdots + \frac{۱}{n!} + \cdots + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۲!} + ۱ + ۱ = e$ قبلاً در فصل دنباله‌ها دیدیم که $۲ < e < ۳$ و در آنجا ذکر نمودیم که e عددی گنگ است. اکنون این ادعا را اثبات می‌نمائیم.*

نتیجه ۹.۳.۱۵. *e عددی گنگ است.*

اثبات. فرض کنید که e عدد گویا بوده باشد (فرض خلف) بنابراین اعداد طبیعی m و n که $n \geq ۲$ موجودند که $e = \frac{m}{n}$. از طرفی بنا به فرمول تیلور داریم همچنانکه در مثال قبل (مثال ۷.۳.۱۵) دیدیم
$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{z_n} x^{n+۱}}{(n+۱)!}$$
که z_n بین x و ۰ است. پس برای $x = ۱$ داریم
$$e = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{۱}{n!} + \frac{e^{zn}}{(n+۱)!}$$
که $۱ > z_n > ۰$ چون تابع نمائی اکیدا صعودی است پس $۳ > e > e^{zn} > ۱$ بنابراین

$$n!\, e = n!\, (۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{۱}{n!}) + \frac{e^{z_n}}{n+۱}$$
$$\frac{e^{z_n}}{n+۱} = n!\, e - n!\, (۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{۱}{n!})$$

امّا $n!\, e$ و $n! \left(۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{۱}{n!} \right)$ هر دو اعداد طبیعی هستند بنابراین $\frac{e^{zn}}{n+۱}$ عددی صحیح است که چون $۳ > e^{z_n} > ۱$ پس $\frac{۳}{n+۱} > \frac{e^{zn}}{n+۱} > \frac{۱}{n+۱}$ اما چون $n \geq ۲$ پس $n + ۱ \geq ۳$ بنابراین $۱ > \frac{e^{zn}}{n+۱} > ۰$ که متناقض با صحیح بودن $\frac{e^{zn}}{n+۱}$ است. بنابراین فرض خلف باطل است یعنی e گنگ است.

مثال ۱۰.۳.۱۵. *سری مکلورن توابع سینوس هذلولی و کسینوس هذلولی را بنویسید و نشان دهید که این سریها با توابع مزبور برابرند.*

حل. چون بنا به مثال ۷.۳.۱۵ دیدیم
$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

برای تمام اعداد حقیقی x، پس داریم
$$e^{-x} = ۱ + (-x) + \frac{(-x)^{۲}}{۲!} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$
در نتیجه
$$e^x + e^{(-x)} = ۲\left(۱ + \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۴}}{۴!} + \cdots + \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} + \cdots\right)$$
بنابراین
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} = ۱ + \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۴}}{۴!} + \cdots + \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} + \cdots$$
و بنا به قضیه ۱.۲.۱۵
$$\sin h(x) = (\cos hx)' = \frac{۲x}{۲!} + \frac{۴x^{۳}}{۴!} + \cdots + \frac{۲nx^{۲n-۱}}{(۲n)!} + \cdots$$
$$= x + \frac{x^{۳}}{۳!} + \cdots + \frac{x^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!} + \cdots$$
□

مثال ۱۱.۳.۱۵. *نشان دهید که*

$$\sin x = x - \frac{x^{۳}}{۳!} + \frac{x^{۵}}{۵!} - \frac{x^{۷}}{۷!} + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!},$$
$$\cos x = ۱ - \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۴}}{۴!} - \frac{x^{۶}}{۶!} + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n \frac{x^{۲n}}{(۲n)!}.$$

بنا به مثال ۴.۳.۱۵ و بنا به فرمول تیلور برای هر عدد طبیعی n، داریم
$$f(x) = \sin x = P_n(x) + R_n(x)$$
که در آن $P_n(x) = \sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k \frac{x^{۲k+۱}}{(۲k+۱)!}$ و $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+۱)}(z_n)x^{۲n+۱}}{(n+۱)!}$ که z_n بین x و ۰ است. چون $f(x) = \sin x$ پس $f^{(n+۱)}(z_n)$ برابر $\pm\sin z_n$ یا $\pm\cos z_n$ بنابراین
$$|f^{(n+۱)}(z_n)| \leq ۱$$
در نتیجه
$$۰ \leq |R_n(x)| = \frac{|f^{(n+۱)}(z_n)||x^{n+۱}|}{(n+۱)!} \leq \frac{|x|^{n+۱}}{(n+۱)!}$$
که با توجه به نتیجه ۳.۳.۱۵ و قضیه فشردگی در دنباله‌ها داریم $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = ۰$ بنابراین بنا به

قضیه ۶.۳.۱۵ داریم
$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
اکنون با توجه به قضیه (الف) ۱.۲.۱۵ داریم
$$\cos x=(\sin x)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
نتیجه ۱۲.۳.۱۵. *اگر i واحد موهومی باشد (یعنی $i^2=-1$) آن‌گاه برای هر عدد حقیقی x،*

(الف)
$$\cos x+i\sin x=e^{ix},$$

(ب)
$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$

(ج)
$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

اثبات. با توجه به مثال ۱۱.۳.۱۵ داریم
$$\begin{aligned}\cos x+i\sin x &= (1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots)+i(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots)\\ &= 1+(ix)+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\cdots\\ &= e^{ix}\end{aligned}$$

اکنون با تبدیل x به $-x$ داریم
$$\cos x-i\sin x=\cos(-x)+i\sin(-x)=e^{-ix}$$
که بدین ترتیب (ب) و (ج) نیز نتیجه می‌شوند. □

مثال ۱۳.۳.۱۵. *تابع $f(x)=\cos^2 x$ را به صورت یك سری بنویسید.*

حل. چون $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ پس با توجه به مثال ۱۱.۳.۱۵ داریم
$$\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

بنابراین

$$\cos^{۲} x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{۲^{۲n-۱} x^{۲n}}{(۲n)!}$$

همانطورکه در مثال ۱۰.۳.۱۵ نیز دیدیم سری‌های توانی را مانند چندجمله‌ایها می‌توان با هم جمع و تفریق کرد به همین ترتیب سریهای توانی را مانند چندجمله‌ایها می‌توان ضرب و تقسیم کرد. امّا به علت پیچیدگی فقط چند جمله اول آنرا می‌توان نوشت که البته از مهم‌ترین جملات سری هستند.

مثال ۱۴.۳.۱۵. *سه جمله غیرصفر از سری مکلورن توابع زیر را بنویسید.*

(الف) $e^x \sin x$

(ب) $\tan x$

حل. همچنانکه در مثالهای ۱۰.۳.۱۵ و ۱۱.۳.۱۵ دیدیم، داریم

(الف)

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{و} \quad \sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots$$

پس

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= (۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots)(x - \frac{x^۳}{۳!} + \cdots) \\ &= (x + x^۲ + \frac{x^۳}{۲!} + \frac{x^۴}{۳!} + \cdots - \frac{x^۳}{۳!} - \frac{x^۴}{۳!} - \cdots) \\ &= x + x^۲ + \frac{۱}{۳} x^۳ + \cdots \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots}{۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \cdots} \\ &= x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{۲}{۱۵} x^۵ + \cdots \end{aligned}$$

توجه نمائید که در تقسیم سریها مانند تقسیم چندجمله‌ای‌ها که بر حسب درجه از کوچك به بزرگ مرتب شده‌اند عمل می‌کنیم.

تبصره ۱۵.۳.۱۵. *با توجه به فرمول تیلور داریم که اگر تابع f تا مرتبه $(n+1)$ ام روی بازه $[a,b]$ شامل نقطه c مشتق‌پذیر باشد در این صورت برای هر x، در این بازه، عدد حقیقی z بین x و c موجود است که*

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

که در آن P_n چندجمله‌ای مرتبه n–اُم تیلور تابع f در نقطه c و $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$ جمله مانده تیلور تابع f در نقطه c معروف به جمله مانده لاگرانژ می‌باشد. در این صورت اگر f را با P_n تقریب کنیم خطای تقریب عبارت است از

$$|R_n(x)|=|f(x)-P_n(x)|$$

که غالباً توسط $\dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n-1}$ تخمین زده می‌شود. توجه نمائید که حالت خاص $n=1$ این تقریب همان تقریب به کمك دیفرانسیل است که هم اکنون عبارتی برای خطا به صورت $|R_1(x)|$ داریم.

مثال ۱۶.۳.۱۵.

(الف) فرمول مَکلورن تابع $f(x)=\ln(1+x)$ برای $n=5$ بنویسید.

(ب) به کمك قسمت (الف) مقدار تقریبی $\ln(1/2)$ را محاسبه و برآوردی از مقدار خطای موجود در این تقریب بدست آورید.

حل.

(الف) با توجه به اینکه $f(x)=\ln(1+x)$ داریم $f(0)=0$ و همچنین

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} \Longrightarrow f'(0)=1\\
f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \Longrightarrow f''(0)=-1\\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \Longrightarrow f'''(0)=2\\
f^{(4)}(x) &= \frac{-6}{(1+x)^4} \Longrightarrow f^{(4)}(0)=-6\\
f^{(5)}(x) &= \frac{24}{(1+x)^5} \Longrightarrow f^{(5)}(0)=24
\end{aligned}$$

$$f^{(۶)}(x) = \frac{-۱۲۰}{(۱+x)^۶}$$

بنابراین بنا به فرمول تیلور داریم

$$\begin{aligned}\ln(۱+x) &= x - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{۲x^۳}{۳!} - \frac{۶x^۴}{۴!} + \frac{۲۴x^۵}{۵!} + R_۵(x)\\ &= x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \frac{x^۵}{۵} + R_۵(x)\end{aligned}$$

که در آن

$$R_۵(x) = \frac{f^{(۶)}(z)}{۶!}x^۶ = \frac{-۱۲۰}{(۱+z)^۶۶!}x^۶ = -\frac{x^۶}{۶(۱+z)^۶}$$

وقتی که z عددی بین x و ۰ است.

(ب) بنا به قسمت (الف) داریم

$$\ln(۱+x) \doteq P_۵(x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \frac{x^۵}{۵}$$

بخصوص اگر $x = ۰/۲$ باشد آنگاه

$$\ln(۱/۲) \doteq ۰/۲ - \frac{(۰/۲)^۲}{۲} + \frac{(۰/۲)^۳}{۳} - \frac{(۰/۲)^۴}{۴} + \frac{(۰/۲)^۵}{۵} \doteq ۰/۱۸۲۳۳۰۶۷$$

و مقدار خطا در این تقریب برابر است با

$$|R_۵(۰/۲)| = \frac{(۰/۲)^۶}{۶(۱+z)^۶}$$

که $۰ < z < ۰/۲$. چون $z > ۰$ پس $\frac{۱}{۱+z} < ۱$، پس $\frac{۱}{(۱+z)^۶} < ۱$ و

$$|R_۵(۰/۲)| = \frac{(۰/۲)^۶}{۶(۱+z)^۶} < \frac{(۰/۲)^۶}{۶} = \frac{۰/۰۰۰۰۶۴}{۶} < ۰/۰۰۰۰۱۱$$

بنابراین مقدار خطا در این تقریب کمتر از ۰/۰۰۰۰۱۱ است.

مثال ۱۷.۳.۱۵. *مقدار تقریبی $\sqrt[۴]{e}$ را با تقریب کمتر از ۰/۰۰۰۱ بیابید.*

حل. با توجه به اینکه برای هر عدد حقیقی x،

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

که در آن
$$R_n(x) = \frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1}$$
و $x < z < 0$، اگر $x = \frac{1}{4}$ آنگاه $\frac{1}{4} > z > 0$ و چون تابع نمائی تابع اکیدا صعودی و $e < 3$ داریم
$$e^z < e^{\frac{1}{4}} < 3^{\frac{1}{4}} < 2$$

و
$$\left|R_n(\frac{1}{4})\right| = \frac{e^z}{(n+1)!}(\frac{1}{4})^{n+1} < \frac{2}{(n+1)!\,4^{n+1}} = \frac{1}{2\times 4^n(n+1)!}$$
برای $n = 3$ داریم
$$|R_3(\frac{1}{4})| < \frac{1}{2\times 4^3(4!)} = \frac{1}{3072} < 0/0004$$
که به اندازه کافی خوب نیست. بنابراین $n = 4$ را امتحان می‌کنیم. در این صورت
$$|R_4(\frac{1}{4})| < \frac{1}{2\times 4^3(5!)} = \frac{1}{61440} < 0/00002$$
که مناسب است. در این صورت مقدار تقریب عبارت است از
$$\sqrt[4]{e} \doteq P_4(\frac{1}{4}) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2(2!)} + \frac{1}{4^3(3!)} + \frac{1}{4^4(4!)} \doteq 1/28402$$

مثال ۱۸.۳.۱۵. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ *تا سه رقم اعشار تقریب نمائید.*

حل. اگر در مثال ۷.۳.۱۵ x، با $-x^2$ عوض کنیم داریم
$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \cdots$$
بنابراین با توجه به قضیه ۱.۵.۱۴ (ب) داریم
$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)} + \cdots$$
حال با توجه به قضیه لایب‌نیتز ۱.۵.۱۴ برای $n = 5$ داریم
$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \doteq 0/747$$
که حداکثر مقدار خطا عبارت است
$$\frac{1}{(2(5)+1)5!} = \frac{1}{1320}$$

۴.۱۵ سری دوجمله‌ای

یادآوری می‌کنیم دو جمله‌ای خیام – نیوتن برای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی x عبارت است از

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k \\ &\quad + \cdots + x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_k x^k\end{aligned}$$

که در آن

$$C_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

وقتی‌که n عدد طبیعی نیست هم می‌توان این بسط را نوشت امّا دیگر تعداد جملات متناهی نخواهد بود که آنرا سری دوجمله‌ای نامیم.

تعریف ۱.۴.۱۵. *فرض کنید a یك عدد حقیقی باشد در این صورت سری*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 1 + ax + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$$

که در آن

$$C_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

یك سری دوجمله‌ای، یك سر متناهی (یعنی دارای فقط تعداد متناهی جمله غیرصفر) است اگر و فقط a یك عدد طبیعی باشد. چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a-n}{n+1}\right| = |x|$$

بنابراین، بنا به آزمون نسبت داریم که سری دوجمله‌ای دارای شعاع همگرائی ۱ است. بنابراین این سری یك تابع $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ با حوزه تعریف $(-1, 1)$ تعریف می‌کند. همچنانکه ابتدای بحث اشاره شد اگر a عددی طبیعی باشد آن‌گاه $f(x) = (1+x)^a$. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که این تساوی برای هر عدد a برقرار است.

قضیه ۲.۴.۱۵. *فرض کنید که a عددی حقیقی باشد آن‌گاه*

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

که در آن $c_n = \dfrac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$ *وقتی‌که* $|x| < 1$.

اثبات. فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ابتدا نشان می‌دهیم $\frac{d}{dx}(f(x)(1+x)^{-a}) = 0$ برای این منظور داریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x)(1+x)^{-a}) &= f'(x)(1+x)^{-a} - af(x)(1+x)^{-a-1}\\ &= (f'(x)(1+x) - af(x))(1+x)^{-a-1}\end{aligned}$$

کافی است نشان دهیم $f'(x)(1+x) - af(x) = 0$ برای این منظور بنا به قضیه ۱.۲.۱۵ (الف) داریم

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$$

بنابراین

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n$$

در نتیجه

$$f'(x)(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)c_{n+1} + nc_n)x^n.$$

امّا

$$\begin{aligned}(n+1)c_{n+1} + nc_n &= \frac{(n+1)a(a-1)\cdots(a-n)}{(n+1)!} + \frac{na(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}\\ &= \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n+n)}{n!} = ac_n\end{aligned}$$

بنابراین

$$f'(x)(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} ac_n x^n = af(x)$$

در نتیجه

$$f'(x)(1+x) - af(x) = af(x) - af(x) = 0$$

بنابراین تا کنون نشان داده‌ایم

$$\frac{d}{dx}(f(x)(1+x)^{-a}) = 0.$$

در نتیجه داریم $f(x)(1+x)^{-a} = k$ که k یك عدد ثابت است. برای تعیین k چون $f(0) = 1$ پس

داریم $k = ۱$. بنابراین داریم
$$f(x) = (۱ + x)^a$$
و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل شده است. $\square$

مثال ۳.۴.۱۵. *$\sqrt{۱ + x}$ را به صورت یک سری توانی بنویسید*

حل. بنا به قضیه ۲.۴.۱۵ داریم $a = \frac{۱}{۲}$ پس
$$\sqrt{۱+x} = ۱ + \frac{۱}{۲}x + \frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲} - ۱)}{۲!}x^۲ + \cdots + \frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲} - ۱)\cdots(\frac{۱}{۲} - n + ۱)}{n!}x^n + \cdots$$
وقتی که $|x| < ۱$.

مثال ۴.۴.۱۵. *تابع $\sinh^{-۱} x = \ln(x + \sqrt{۱ + x^۲})$ را به صورت یک سری توانی بنویسید*

حل. فرض کنید $f(x) = \ln(x + \sqrt{۱ + x^۲})$ در این صورت داریم
$$f'(x) = \frac{۱ + \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}}{x + \sqrt{۱ + x^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}}$$
در نتیجه بنا به قضیه ۲.۴.۱۵ داریم
$$\begin{aligned}\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}} &= (۱ + x^۲)^{-\frac{۱}{۲}} \\ &= ۱ - \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲^۲}\frac{۳}{۲!}x^۴ + \cdots + (-۱)^n \frac{۱ \times ۳ \times \cdots \times (۲n - ۱)}{۲^n \times n!}x^{۲n} + \cdots\end{aligned}$$
اگر $|x| < ۱$. حال بنا به قضیه (ب ۱.۲.۱۵) داریم
$$\begin{aligned}\ln(x + \sqrt{۱ + x^۲}) &= \int_۰^x \frac{dt}{\sqrt{۱ + t^۲}} \\ &= x - \frac{۱}{۲ \times ۳}x^۳ + \frac{۱ \times ۳}{۲^۲ \times ۲ \times ۵}x^۵ \\ &\quad + \cdots + \frac{(-۱)^n \times ۱ \times ۳ \times \cdots \times (۲n - ۱)}{۲^n \times (n!)(۲n + ۱)}x^{۲n+۱} + \cdots\end{aligned}$$

مثال ۵.۴.۱۵. *توابع $\sin^{-۱} x$ و $\sec^{-۱} \frac{۱}{x}$ را به صورت سری توانی بنویسید.*

حل. فرض کنید $f(x) = \sin^{-۱} x$ در این صورت $f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ پس بنا به قضیه ۲.۴.۱۵

داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-x^2)^2 + \cdots + \\ &\quad + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)}{2!}x^4 + \cdots + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!}x^{2n} + \cdots \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به قضیه (ب ۱.۲.۱۵) داریم

$$\begin{aligned} \sin^{-1} x &= x + \frac{x^3}{(2)(3)} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)}{(2!)5}x^5 + \cdots + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-1)}{(n!)(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{(\frac{x}{2})^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

حال چون $\sec\cos^{-1} x = \frac{1}{x}$ پس $\sec^{-1}\frac{1}{x} = \cos^{-1} x$. امّا $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$ پس با توجه به قسمت الف داریم

$$\sec^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{(\frac{x}{2})^{2n+1}}{2n+1}.$$

۵.۱۵ مسایل

۱. *در هر یک از تمرینات زیر شعاع بازه همگرایی سریهای توانی را بیابید.*

۱. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!},$

۲. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\, x^k}{10^k},$

۳. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{k+1},$

۴. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x+1)^{2k}}{(k+1)^2 5^k},$

۵. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^3 x^k}{2k!},$

۶. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^k}{3^k},$

۷. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{2^k\sqrt{k+1}}$,

۸. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^k}{(k+1)(k+2)2^k}$,

۹. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}x^k$,

۱۰. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}x^k$,

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$,

۱۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}}x^n, \quad (a>1)$,

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$,

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}}x^{2n+1}$.

۲. نشان دهید که بازه همگرایی سری توانی $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax+b)^k}{c^k}$ که در آن $a>0$ و $c>0$ عبارت است از $\left(\frac{-c-b}{a}, \frac{c-b}{a}\right)$.

۳. نشان دهید که اگر بازه همگرایی یک سری توانی به صورت $(a,b]$ باشد، آن‌گاه آن سری در b همگرای مشروط است.

۴. اگر $a_k = 2^{-k}$ برای k های زوج و $a_k = 2^{-k+1}$ برای k های فرد باشد، آن‌گاه سری توانی $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ دارای بازه همگرایی $(-2,2)$ است. توجه کنید که $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ وجود ندارد.

۵. شعاع همگرایی سری‌های توانی زیر را بیابید.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$,

۲. $\sum_{n=1}^{\infty} (a^n+b^n+c^n)x^n, \quad (a,b,c\geq 0)$,

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3 x^{3n}}{(3n)!}$,

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}x^n$,

۵. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!\, x^{n!}$,

۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

۶. نشان دهید که اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r > 0$ آن‌گاه سری توانی $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ دارای شعاع همگرایی $\frac{1}{r}$ است.

۷. مقدار سری‌های زیر را بیابید.

۱. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x^{2n-1}+x^{2n}),$$

۲. $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{2n+1},$$

۳. $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)^n},$$

۴. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)},$$

۵. $$1-x^3+x^6-x^8+\cdots,$$

۶. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)(2n)},$$

۷. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{n(2n+1)},$$

۸. $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{3^n}}{2n}.$$

۸. هر یک از توابع زیر را به صورت یک سری توانی نوشته و شعاع همگرایی سری را نیز بیابید.

۱. $$f(x)=xe^x,$$

۲. $$f(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt,$$

۳. $$\ln(1+x+x^2),$$

۴. $$\ln(1-x-2x^2),$$

۵. $$\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2},$$

۶. $$\tan^{-1}\frac{2x^3}{1+3x^2},$$

۷. $$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

۸. $$\sin^{-1}x,$$

۹. $$x(4-x)^{\frac{3}{2}},$$

۱۰. $$\sec^{-1}\frac{1}{x},$$

.۱۱
$$\ln(\sqrt{۱+x^{۳}}-x),$$

.۱۲
$$\frac{۱}{۱+x+x^{۲}},$$

.۱۳
$$\frac{۱}{۱-x-۲x^{۲}},$$

.۱۴
$$(\sin x^{-۱})^{۲},$$

.۱۵
$$\frac{\sin x}{x},$$

.۱۶
$$\frac{۱-\cos x}{x},$$

.۱۷
$$\sin^{۲} x,$$

.۱۸
$$\sinh^{۴} ۲x,$$

.۱۹
$$e^{x^{۲}-۱}.$$

.۹ نشان دهید که
$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^{۲n}(n!)x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}=\frac{\sin^{-۱} x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

.۱۰ در هر یک از تمرینات زیر سری تیلور تابع داده شده را در نقطه مفروض بنویسید.

.۱
$$\ln|x|, \quad c=-۱$$

.۲
$$\sin x, \quad c=-\frac{\pi}{۳}$$

.۳
$$\cos^{۳} x, \quad c=\frac{\pi}{۳}$$

.۴
$$\ln(x^{۲}+۴x+۴), \quad c=-۱$$

.۵
$$\frac{۱-x+x^{۲}}{۱+x+x^{۲}}, \quad c=۰$$

.۶
$$\sqrt{x^{۳}}, \quad c=۱$$

.۷
$$(x-۱)^{۲}\sin x, \quad c=۰$$

.۸
$$x^{۲}e^{x}, \quad c=۰$$

.۹
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq ۰ \text{ اگر } \\ ۱ & x=۰ \text{ اگر }\end{cases}, \quad c=۰$$

۱۱. نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & |x| < 1 \text{ اگر } \\ \frac{1}{1-x} & |x| > 1 \text{ اگر } \end{cases}.$$

۱۲. x را چنان بیابید که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ همگرا باشد.

۱۳. نشان دهید که

$$\pi = \frac{10}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{3 \times 9^n}\right).$$

۱۴. نشان دهید که اگر چه تابع $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در ۰ بینهایت مشتق‌پذیر است ولی سری مک‌لورن f با f برابر نیست.

۱۵. نشان دهید که برای $x \in [0, 1)$،

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

نمایه

کتاب‌نامه

[۱] ج. استوارت، *حسابگان دیفرانسیل و انتگرال*، ترجمه محمد حسین علامت‌ساز، علی اکبر محمدی و حسین ناهید، انتشارات دانشگاه اصفهان.

[۲] ر. ا. آدامز، *حساب دیفرانسیل و انتگرال*، ترجمه سید حسین اورعی، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

[۳] ر. ا. سیلورمن، *حساب دیفرانسیل، انتگرال و هندسه تحلیلی*، ترجمه علی اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی.

[۴] ک. ای. راس، *آنالیز مقدماتی نظریه حسابان*، ترجمه بهمن هنری، فاطمه قانع و شیرین حجازیان، انتشارات آستان قدس رضوی.

[۵] ر. گولدبرگ، *روش‌های آنالیز حقیقی*، ترجمه محمد علی پور عبدالله نژاد و باقر نشوادیان، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

[۶] رپ. م. فیتز پاتریک، *درسی در آنالیز ریاضی*، ترجمه ملک منصور شریف و شهرام رضاپور، انتشارات علمی و فنی.

[۷] ر. کامیابی‌گل، *آنالیز ریاضی I*، موسسه چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

[۸] و. ا. گرانویل، ب. ف. اسمیت و ر. لانگل، *مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال*، ترجمه محمود آق اولی، انتشارات دهخدا.

[۹] ج. توماس، *حسابان و هندسه تحلیلی*، ترجمه ؟؟؟، انتشارات نشر دانشگاهی.

[۱۰] غ. مصاحب، *آنالیز ریاضی*، شرکت سهامی افست.

[11] S. I. Crossman, *Calculus part I, II*, Academic Press, 1981.

[12] R. E. Johnson, *Calculus With Analysis Geometry*, Allyn Banson, INC. Boston.

[13] Spivak, *Calculus*.