پاسخ کامل : $v_c(t) = v_h(t) + v_p$ ← پاسخ خصوصی

پاسخ همگن

$v_h(t) \Rightarrow \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{2} v_c(t) = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} S + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow S = -1/2$

فرم کلی پاسخ همگن : $v_h(t) = A_1 e^{-t/2}$

از روی شرایط اولیه

فرم کلی پاسخ خصوصی $v_p = A_2$

پاسخ خصوصی باید در معادله دیفرانسیل اصلی صدق کند :

$0 + \frac{1}{2} A_2 = 2 \Rightarrow A_2 = 4$

پاسخ کامل : $v_c(t) = A_1 e^{-t/2} + 4$

$t = 0^+ \quad 0 = A_1 \times e^0 + 4 \Rightarrow \boxed{A_1 = -4}$

$v_c(t) = -4e^{-t/2} + 4 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow v_c(t) = 4(1-e^{-t/2})u(t)$

(2) استفاده از فرم کلی مدارهای RC مرتبه اول در حضور منابع DC :

$t \geq 0 \rightarrow$ مدار RC مرتبه اول در حضور منابع DC

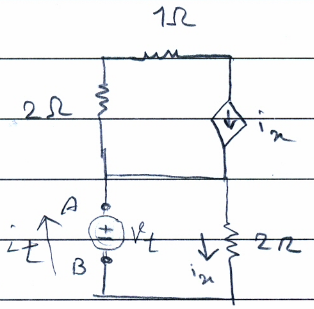
فرم کلی پاسخ : $\forall t \geq 0 \rightarrow v_c(t) = (v_0 - v_\infty) e^{-t/\tau} + v_\infty$

$v_0 = 0$ ← در روش اول با توجه به تحلیل مدار در $t<0$ بدست آمد

$v_\infty = ?$ ← پس از مدت طولانی بعد از تغییر وضعیت کلید، حالت در حضور منابع DC مدار پایدار می‌شود

$$v_{\infty} = v_{2\Omega} = 2_{\Omega} \times 2A = 4\,\text{Volt}$$

$$\tau = R_{th} \cdot C$$



از دو سر خازن که مقاومت تونن را حساب می‌کنیم.
منبع مستقل را صفر می‌کنیم و به دو سر A و B یک منبع ولتاژ v_t اعمال می‌کنیم و داریم $R_{th} = \frac{v_t}{i_t}$

$$v_t = v_{2\Omega} = 2\Omega \times i_x$$

$$i_x = i_t$$

$$v_t = 2 \times i_t \Rightarrow \frac{v_t}{i_t} = 2 = R_{th}$$

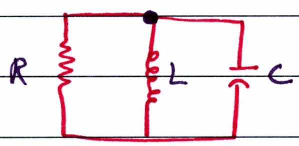
$$\tau = 2 \times 1 = 2$$

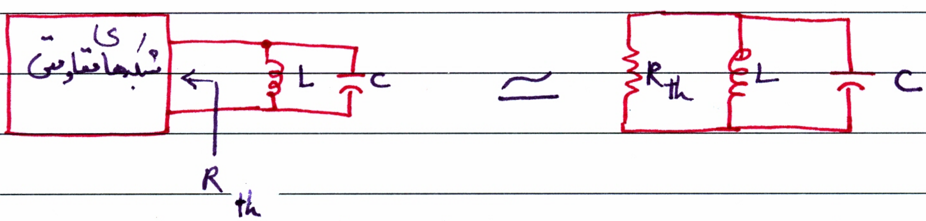
$$v_c(t) = (0-4)e^{-t/2} + 4 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow v_c(t) = 4(1-e^{-t/2})\,u(t)$$

مدارهای مرتبه دوم

مدارهای مرتبه دوم مدارهایی هستند که در آنها دو عنصر ذخیره کننده انرژی مستقل هستند (یعنی مثلاً دو خازنی که با هم سری و موازی نباشند یا دو سلفی که با هم سری و موازی نباشند و یا یک سلف و یک خازن) وجود داشته باشد، معادله دیفرانسیل حاکم بر این نوع مدارها، یک معادله دیفرانسیل مرتبه 2 خواهد بود.

۱. پاسخ طبیعی (همگن یا ورودی صفر) مدارهای RLC موازی:





Subject: Date:

متغیر معادله دیفرانسیل $= v_c(t)$

فرض می‌کنیم : $v_c(0) = V_0$

$i_L(0) = I_0$

KCL : $i_R + i_L + i_C = 0$

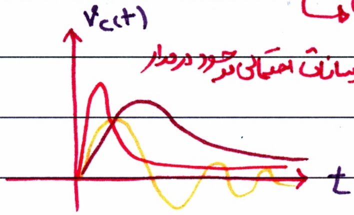
$$\frac{v_c(t)}{R} + \frac{1}{L}\int v_c(t)\,dt + C\frac{dv_c(t)}{dt} = 0$$

از طرفین مشتق می‌گیریم $\longrightarrow$ $\frac{1}{R}\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{L}v_c(t) + C\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} = 0$

طرفین تقسیم بر C $\longrightarrow$ $\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v_c(t) = 0$ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن در مدار RLC موازی

$\frac{1}{RC}$: ضریب میرایی $= 2\alpha$

$\frac{1}{LC}$: فرکانس نوسانات احتمالی موجود در مدار $= \omega_0^2$



انواع پاسخ:

فوق میرا

میرای بحرانی

فرو میرا (میرای نوسانی)

می‌توان نتیجه گرفت در مدار RLC موازی:

$$2\alpha = \frac{1}{RC} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

می‌توان معادله دیفرانسیل را به این صورت نوشت:

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv_c(t)}{dt} + \omega_0^2 v_c(t) = 0$$

معادله مشخصه : $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$

ریشه‌ها معادله مشخصه : $s_1, s_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

حالت اول: $\alpha^2 - w_0^2 > 0 \leftarrow \alpha > w_0 \Longrightarrow$ حالت فوق میرا $\leftarrow S_1, S_2$ دو عدد حقیقی متمایز و منفی

$$S_1, S_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - w_0^2}$$

$V_c(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ فرم کلی پاسخ حالت در حالت فوق میرا

از روی شرایط اولیه

$$t = 0^+ : i_L(0^+) = A_1 + A_2 \rightarrow I_0 = A_1 + A_2$$

$i_L'(t) = S_1 A_1 e^{s_1 t} + S_2 A_2 e^{s_2 t}$ ، از فرم کلی پاسخ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$t = 0^+ : i_L'(t) = S_1 A_1 + A_2 S_2$$

$$KVL(0^+) : R i_L(0^+) + L i_L'(0^+) + V_c(0^+) = 0$$

$$R I_0 + L i_L'(0) + V_0 = 0 \longrightarrow i_L'(\ ) = \frac{-1}{L}(V_0 + R I_0)$$

از حل این دستگاه معادلات A_1 و A_2 بدست می‌آید

$$\begin{cases} I_0 = A_1 + A_2 \\ -\frac{1}{L}(V_0 + R I_0) = S_1 A_1 + S_2 A_2 \end{cases}$$

حالت دوم: $\alpha^2 - w_0^2 = 0$ ⟵ حالت میرای بحرانی $\rightarrow S_1 = S_2 = -\alpha$

$i_L(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}$ ، فرم کلی پاسخ حالت میرای بحرانی

$$t = 0^+ : i_L(0^+) = A_1 \longrightarrow A_1 = I_0$$

از فرمول پاسخ نسبت به t مشتق می گیریم : $i'_L(t) = A_2 e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\alpha t}(A_1 + A_2 t)$

$t=0^+ : \underbrace{i'_L(0^+)}_{-\frac{1}{L}(V_0+RI_0)} = A_2 - \alpha \underbrace{A_1}_{I_0}$

حالت سوم : $s_1 , s_2 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ ← میرای نوسانی ← $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$

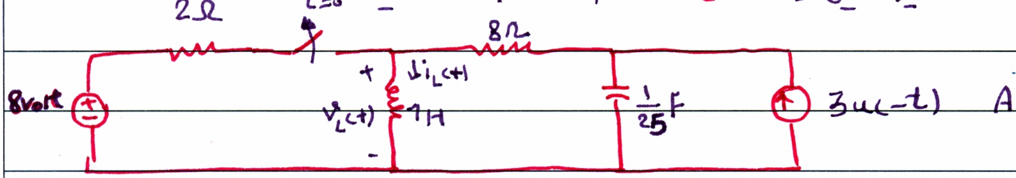
فرمول پاسخ همان حالت میرای نوسانی ← $i_L(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t))e^{-\alpha t}$

ω_d را تعریف می کنیم : $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

$t=0^+ : i_L(0^+) = B_1 \Rightarrow B_1 = I_0$

از فرمول پاسخ نسبت به t مشتق می گیریم و در آن $t=0^+$ را قرار ← $\underbrace{i'_L(0^+)}_{-\frac{1}{L}(V_0+RI_0)} = -\alpha \underbrace{B_1}_{I_0} + \omega_d B_2$

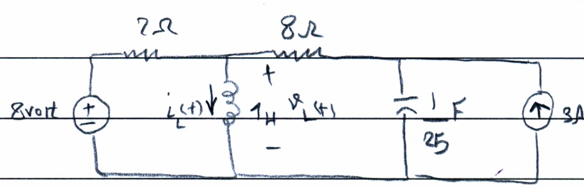
Example : مدار شکل زیر را تحلیل کرده و $V_L(t)$ را در تمام لحظات به دست آورید.

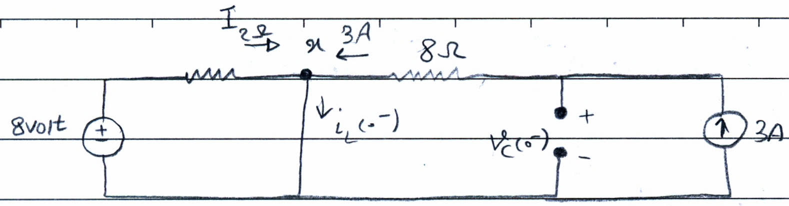


می دانیم $V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$

① $t<0$ ← کلید بسته ← $u(-t)=1$

← پس از گذشت مدت طولانی سلف در حضور منابع DC اتصال کوتاه و خازن در حضور منابع DC مدار باز است.



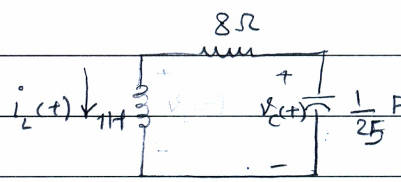


$v_C(0^-) = v_{8\Omega} = 8\Omega \times 3A = 24 volt$

$i_L(0^-) = ?$ $\begin{cases} KCL(x) : I_{2\Omega} + 3A = i_L(0^-) \\ I_{2\Omega} = \dfrac{8 volt}{2\Omega} = 4 Amper \end{cases}$ $\Rightarrow i_L(0^-) = 7 Amper$

$t \geq 0 \rightarrow$ کلید باز است $\rightarrow u(-t) = 0$

← مدار RLC سری بدون منبع تحریک



RLC سری $\begin{cases} \alpha = \dfrac{R}{2L} = \dfrac{8}{2\times 1} = 4 \\ \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{\sqrt{1\times\frac{1}{25}}} = 5 \end{cases}$

$\alpha^2 - \omega_0^2 = 16 - 25 = -9 < 0 \rightarrow$ میرای نوسانی

از طرفی چون در $t=0$ انرژی از منبع نیست شرط پیوستگی برقرار است $\rightarrow v_C(0^+) = v_C(0^-) = 24 Volt$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 7 Amper$

فرم کلی پاسخ همان حالت میرای نوسانی : $i_L(t) = (B_1 \cos(3t) + B_2 \sin(3t))\, e^{-2t}$ $\forall t \geq 0$

$\boxed{\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = \sqrt{9} = 3}$

$t = 0^+$: $i_L(0^+) = B_1 \rightarrow B_1 = 7 A$

از فرم کلی پاسخ مشتق گرفته و $t=0^+$ را جایگذاری می‌کنیم : $i_L'(0^+) = -\overset{4}{\alpha} \overset{7}{B_1} + \overset{3}{\omega_d} B_2$

KVL (0^+) $\rightarrow$ درجهت پادساعتگرد : $v_L(0^+) - v_C(0^+) + v_R(0^+) = 0$

$$L i_L'(0^+) - v_C(0^+) + R i_L(0^+) = 0$$

$$i_L'(0^+) - 24 + 8\,\Omega \times 7A = 0 \Rightarrow i_L'(0^+) = -32$$

$$-32 = -4 \times 7 + 3B_2 \Rightarrow B_2 = -4/3$$

$$i_L(t) = \left(7\cos(3t) - \frac{4}{3}\sin(3t)\right)e^{-4t} \qquad \forall t \geq 0$$

$$i_L(t) = \left[\left(7\cos 3t\right) - \frac{4}{3}\sin(3t)\; e^{-4t}\right]u(t)$$

$$v_L(t) = \frac{di_L(t)}{dt} = \left[\left(-21\sin 3t - 4\cos 3t\right]e^{-4t} - 4\left[7\cos(3t) - \frac{4}{3}\sin(3t)\,e^{-4t}\right]u(t)$$

$$+\ \delta(t)\left[\left(7\cos(3t)\right) - \frac{4}{3}\sin(3t)\,e^{-4t}\right]$$

$$v_L(t) = \left[\left(-32\cos(3t) - \frac{47}{3}\sin(3t)\right)e^{-4t}\right]u(t) + 7\,\delta(t)$$

$$\rightarrow \forall t > 0 \rightarrow \begin{cases} u(t) = 1 \\ \delta(t) = 0 \end{cases}$$

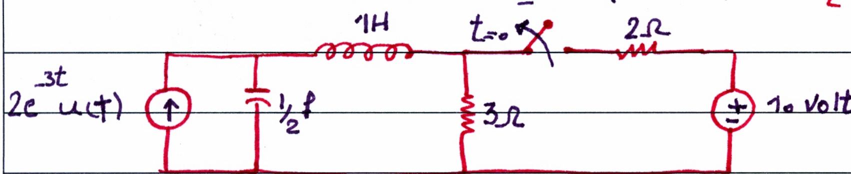
$$\Rightarrow v_L(t) = \left(-32\cos(3t) - \frac{47}{3}\sin(3t)\right)e^{-4t}$$

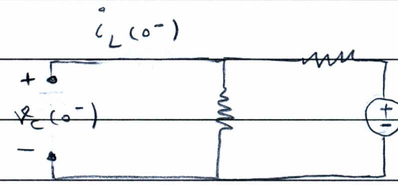
پاسخ کامل مدارهای مرتبه دوم RLC :

پاسخ کامل = پاسخ همگن + پاسخ خصوصی

سمت راست معادله دیفرانسیل	فرم کلی پاسخ خصوصی
عدد ثابت K	عدد ثابت A
$Ae^{\alpha t}$	$A_2 e^{\alpha t}$
$A_1 \sin(\omega t+\varphi_1)$	$A_2 \sin(\omega t+\varphi_2)$

Example : در مدار شکل زیر $i_L(t)$ را در تمام لحظات بدست آورید.





1) $t<0 \longrightarrow u(t)=0$
کلید بسته

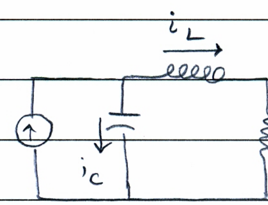
پس از زمانی مدت طولانی قبل از $t=0$ سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز می‌شود.

$i_L(0^-)=0$

تقسیم ولتاژ : $v_C(0^-) = \frac{3\Omega}{3\Omega+2\Omega}\times 10 = 6$ volt

$t\geq 0 \longrightarrow$ کلید باز می‌شود
$u(t)=1$

پاسخ همگن RLC سری : $\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{3}{2}$ ، $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 2$



$i_L(t) = i_h(t) + i_p(t)$
پاسخ همگن ، پاسخ خصوصی

یادآوری : RLC سری : $\alpha = \frac{R}{2L}$ ، $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

RLC موازی : $\alpha = \frac{1}{2RC}$ ، $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\alpha^2 - \omega_0^2 = \frac{9}{4} - 2 > 0 \longrightarrow$ فوق میرا

فرم کلی پاسخ همگن فوق میرا : $i_h(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

$$S_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -3/2 - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = -2$$

$$S_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -3/2 + \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = -1$$

$$2e^{-3t}u(t) - i_L(t) \leftarrow \frac{1}{1/2}\int i_c(t)\,dt$$

کلاسی پاسخ خصوصی : KVL: $1 \times \frac{di_L(t)}{dt} + 3i_L(t) - \cancel{v_C(t)} = 0$

از طرفین معادله مشتق می‌گیریم : $\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 3\frac{di_L(t)}{dt} - 4e^{-3t}u(t) + 2i_L(t) = 0$

$$\underbrace{\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}}_{\text{ناپیوستگی از نوع پله}} + \underbrace{3}_{2\alpha}\overbrace{\frac{di_L(t)}{dt}}^{\text{پیوسته}} + \underbrace{2}_{\omega_0^2}\overbrace{i_L(t)}^{\text{پیوسته}} = \underbrace{4e^{-3t}u(t)}_{\text{ناپیوستگی از جنس پله}}$$

درجات ناپیوستگی : مشتقات ضربه
ضربه
:
پله
:
پیوستگی

$i_L(t)$ پیوسته $\rightarrow i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = 0$

$$\underbrace{i_C(t)}_{\text{پله}} = 2\underbrace{e^{-3t}u(t)}_{\text{پله}} - i_L(t) \rightarrow \text{پیوسته}$$

$$\underbrace{i_C(t)}_{\text{پله}} = \underbrace{\frac{c\,dv_C(t)}{dt}}_{\text{پله}} \Rightarrow v_C(t) \Rightarrow \text{پیوسته} \Rightarrow v_C(0^-) = v_C(0^+) = v_C(0) = 6$$

پاسخ خصوصی : $\forall t \geq 0 \rightarrow u(t) = 1$

فرم کلی پاسخ خصوصی : $i_p(t) = A_3 e^{-3t}$

پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل اصلی صدق می‌کند $\Rightarrow 9A_3e^{-3t} - 9A_3e^{-3t} + 2 \times A_3\cancel{e^{-3t}} = 4\cancel{e^{-3t}}$

$$A_3 = \frac{4}{2} = 2$$

پاسخ خصوصی $\boxed{i_p = 2e^{-3t}}$

پاسخ کامل : $A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-t} + 2e^{-3t} = 0$

از روی شرایط اولیه

$t = 0^+ \Rightarrow i_L(0^+) = A_1 + A_2 + 2 = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 = -2$

از پاسخ کامل نسبت به t مشتق می‌گیریم : $i'_{L}(t) = -2A_1 e^{-2t} - A_2 e^{-t} - 6e^{-3t}$

$\hookrightarrow t = 0^+ \Rightarrow i'_L(0^+) = -2A_1 - A_2 - 6$

$KVL(0^+) : \dfrac{L\, di_L(0^+)}{dt} + 3i_L(0^+) - v_C(0^+) = 0$

جایگذاری

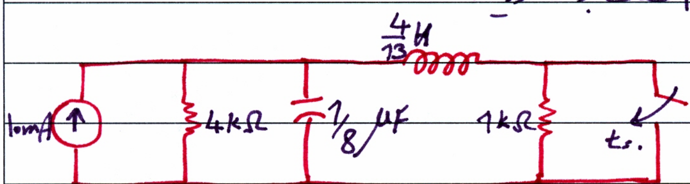
$1 \times i'_L(0^+) + 3\cancel{i_L(0^+)}^{0} - 6 = 0 \Rightarrow i'_L(0^+) = 6$

$-2A_1 - A_2 = 12$

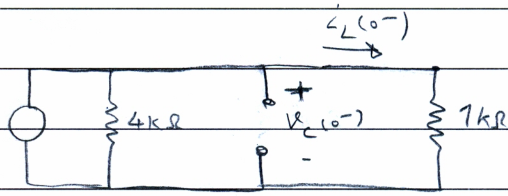
$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -2 \\ -2A_1 - A_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A_1 = -10 \\ A_2 = 8 \end{matrix}$$

پاسخ کامل : $-10e^{-2t} + 8e^{-t} + 2e^{-3t} = i_L(t) \quad \forall\, t \geq 0$

Example : در مدار شکل زیر $v_c(t)$ را در تمام لحظات بدست آورید.



1) $t < 0 \Rightarrow$ کلید باز



تقسیم جریان : $i_L(0^-) = \dfrac{4k\Omega}{4k\Omega + 1k\Omega} \times 10mA = 8mA$

$V_c(0^-) = 1k\Omega \times 8mA = 8\,volt$

پاسخ کامل ← پاسخ خصوصی

2\. $t \geq 0$ → کلید بسته → مدار RLC موازی با منبع ثابت → $V_c(t) = V_h(t) + V_p(t)$

پاسخ همگن

معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار: KCL: $\frac{V_c(t)}{R} + C\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int V_c(t)\,dt = 10\,mA$

از طرفین مشتق می‌گیریم: $\frac{1}{R}\frac{dV_c(t)}{dt} + C\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} + \frac{1}{L}V_c(t) = 0$

$$\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC}V_c(t) = 0$$

پیوسته

$$\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} + \underbrace{\frac{1}{4k\Omega\times\frac{1}{8}\mu F}}\frac{dV_c(t)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{\frac{4}{13}\times\frac{1}{8}\mu F}}V_c(t) = 0$$

پیوسته: $V_c(0^-) = V_c(0^+) = 8\,volt$

$2\alpha = 1000$ $\qquad \omega_0^2 = 26\times10^6$

شرط پاسخ همگن: $\alpha^2 - \omega_0^2 = 10^6 - 26\times10^6 < 0 \Rightarrow$ میرای نوسانی

شکل کلی پاسخ همگن حالت میرای نوسانی: $V_c(t) = (B_1\cos(\omega_d t) + B_2\sin(\omega_d t))\,e^{-\alpha t}$ $\quad (B_1 = 8,\ B_2 = 1{,}6)$

تعریف می‌کنیم: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 5\times10^3$

$\Rightarrow V_c(0^+) = B_1 \Rightarrow B_1 = 8\,volt$

از پاسخ معادله اصلی نسبت به t مشتق می‌گیریم:

$V_c'(0^+) = -\alpha B_1 + \omega_d B_2 \Rightarrow \boxed{B_2 = 1{,}6}$ $\quad (\alpha = 1000,\ \omega_d = 5000,\ B_1 = 8)$

$V_c'(0^+) = ? \Rightarrow KCL(0^+):\ 10mA = \frac{V_c(0^+)}{4k\Omega} + \frac{1}{8}\mu F \times V_c'(0^+) + i_L(0^+)$

$i_L(t) = \frac{1}{L}\int V_c(t)\,dt \Rightarrow \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L}V_c(t) \to i_L(t) \to i_L(0^+) = i_L(0^-) = 8\,mA$

پیوسته   پیوسته   پیوسته

$$\cancelto{0}{v'_c(0^+)} = -1000\,(8) + 5000\,B_2 \Rightarrow B_2 = 1,6$$

$$v_c(t) = \left(8\cos(5000t) + 1,6\sin(5000t)\right)e^{-1000t}$$

روش فازور :

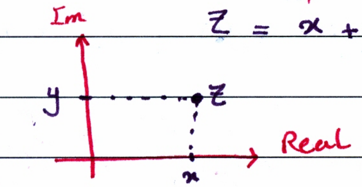
این روش یک ابزار ریاضی برای حل مسایل مربوط به پاسخ حالت دائمی سینوسی است که در آن نیازی به نوشتن معادله دیفرانسیل و استفاده از اپراتورهای مشتق و انتگرال نیست. این روش در حوزه اعداد مختلط کار می‌کند

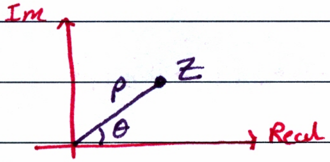
یادآوری اعداد مختلط :

بخش حقیقی

$$Z = x + jy \rightarrow$$ بخش موهومی

← حوزه دکارتی :





$$Z = \rho e^{j\theta} = \rho\angle\theta$$

← حوزه قطبی :

تبدیل یک عدد مختلط از حوزه دکارتی به حوزه قطبی :

$$Z = x + jy \longrightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2} \; ; \; \theta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow$$

$$Z = \sqrt{x^2+y^2}\, e^{\mathrm{Arctan}\, y/x}$$

تبدیل یک عدد مختلط از حوزه قطبی به حوزه دکارتی :

$$Z = \rho e^{j\theta} = \rho\angle\theta \longrightarrow x = \rho\cos\theta \; ; \; y = \rho\sin\theta \rightarrow Z = \rho\cos\theta + j\rho\sin\theta$$

* برای جمع و تفریق اعداد مختلط بهتر است از حوزه دکارتی استفاده کنیم و برای ضرب و تقسیم بهتر از حوزه قطبی استفاده کنیم

$$\begin{cases} Z_1 = x_1 + jy_1 \\ Z_2 = x_2 + jy_2 \end{cases} \Rightarrow Z_1 \pm Z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

$$\begin{cases} Z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1} \\ Z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2} \end{cases} \Rightarrow Z_1 \times Z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)} = \rho_1\rho_2 \angle \theta_1+\theta_2$$

$$\Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1-\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \angle \theta_1-\theta_2$$

★ تعریف بردار فاز:

بردار فاز تبدیلی است که عناصر مداری (منابع مستقل سینوسی و کسینوسی ، مقاومت‌ها ، خازن‌ها و سلف‌ها) را از حوزه اعداد حقیقی به حوزه اعداد مختلط برد.

تبدیل منابع مستقل سینوسی و کسینوسی از حوزه اعداد حقیقی به حوزه اعداد مختلط :

منبع ولتاژ مستقل در حوزه اعداد حقیقی (حوزه زمان)

$V(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$

$\xrightarrow{\text{تبدیل به}}$ $V = V_m \angle \varphi$

حوزه فازور

$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

$\xrightarrow{\text{تبدیل به}}$ $I = I_m \angle \varphi$

حوزه فازور

تعریف امپدانس : نسبت فازور ولتاژ به فازور جریان امپدانس نامیده می‌شود .

$$\underset{\text{(عدد مختلط)}}{\overset{\text{امپدانس}}{Z}} = \frac{V}{I}$$

V ← فازور ولتاژ (عدد مختلط)

I ← فازور جریان (عدد مختلط)

از آنجایی که امپدانس یک عدد مختلط است پس هم بخش حقیقی دارد وهم بخش موهومی .

← به بخش حقیقی امپدانس ، مقاومت می‌گویند

به بخش موهومی امپدانس ، راکتانس می‌گویند .

تعریف ادمیتانس : نسبت فازور جریان به فازور ولتاژ را ادمیتانس می‌گویند .

$$Y = \frac{I}{V}$$

Y ← ادمیتانس ، واحد : زیمنس

I ← فازور جریان

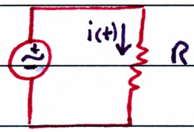
V ← فازور ولتاژ

← به بخش حقیقی ادمیتانس، هدایت یا رسانایی گویند

به بخش موهومی ادمیتانس، سوسپتانس گویند.

تبدیل مقاومت از حوزه اعداد حقیقی به حوزه فازور:

$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$



$$Z_R = \frac{V_R}{I_R}$$

امپدانس معادل مقاومت در حوزه فازور

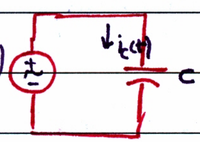
$$v_R(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad V_R = V_m \angle \varphi$$

$$i_R(t) = \frac{V_m}{R} \cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad I_R = \frac{V_m}{R} \angle \varphi$$

$$Z_R = \frac{V_m \angle \varphi}{\frac{V_m}{R} \angle \varphi} = R \angle \varphi - \varphi = R \angle 0 = R \underbrace{e^{0}}_{1} = R$$

تبدیل خازن از حوزه اعداد حقیقی به حوزه فازور:

$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$



$$Z_C = \frac{V_C}{I_C}$$

امپدانس معادل خازن در حوزه فازور

$$v_C(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad V_C = V_m \angle \varphi$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = -C V_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= V_m C \omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

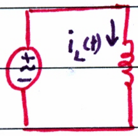
$$\rightarrow \quad I_C = V_m C \omega \angle \varphi + \frac{\pi}{2}$$

یادآوری: $-\sin(\alpha) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$

$$Z_C = \frac{V_m \angle \varphi}{V_m C\omega \angle +\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega C} \angle -\pi/2 = \frac{1}{\omega C}$$

تبدیل سلف از حوزه اعداد حقیقی به حوزه فازور:

$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$



$$Z_L = \frac{V_L}{I_L}$$

امپدانس معادل سلف در حوزه فازور

$v_L(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$

$\rightarrow V_L = V_m \angle \varphi$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int v_L(t)\,dt$$

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = j\omega L$$

روش حل مسائل در حوزه فازور:

۱. تبدیل تمام عناصر مداری از قبیل منابع مستقل:

مقاومت‌ها، خازن‌ها و سلف‌ها در حوزه فازور (کاری به منابع وابسته نداریم)

$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\text{فازور}} V = V_m \angle \varphi$

$R \xrightarrow{\text{فازور}} R$

$C \xrightarrow{\text{فازور}} \frac{-j}{\omega C}$

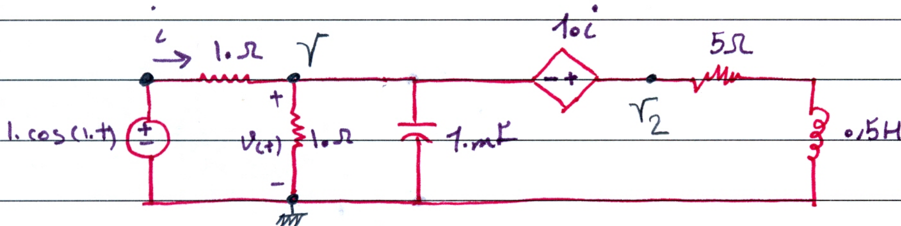
$L \xrightarrow{\text{فازور}} j\omega L$

2. نوشتن KVL و KCL های لازم در حلقه‌ها و گره‌ها برای تحلیل مدار

3. حل معادلات جبری مختلط فوق

4. بازگرداندن پاسخ‌ها به حوزه زمان

Example: مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. $v(t)$ را در حوزه زمان بدست آورید.



$10\cos(10t) \xrightarrow{\text{فازور}} 10\angle 0 \quad \omega=10$

$10\Omega \longrightarrow 10$

$5\Omega \longrightarrow 5$

$C = 10\,\mu F \longrightarrow \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{10\times 10\times 10^{-3}} = -10j$

$L = 0.5\,H \longrightarrow j\omega L = j\times 10\times 0.5 = 5j$

$$KCL\ (v_1, v_2):\quad \frac{v-10\angle 0}{10} + \frac{v-0}{10} + \frac{v-0}{-10j} + \frac{\overset{10\angle 0}{v_2}-0}{5+5j} = 0$$

رابطه ابرگره: $v_2 - v = 10I \Rightarrow v_2 - v = 10\angle 0 - v \rightarrow v_2 = 10\angle 0$

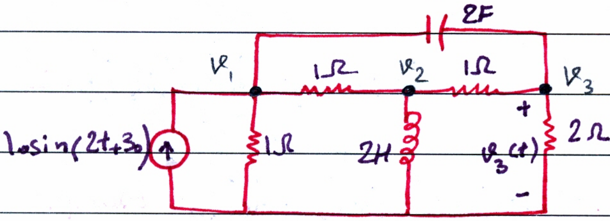
رابطه در رابطه منابع وابسته: $I = \frac{10\angle 0 - v}{10}$

$$\frac{1}{10}v - 1 + \frac{v}{10} + \frac{1}{10}jv + \frac{10}{5+5j} = 0$$

$$\frac{1}{10}(2+j)v = 1 - \frac{2}{1+j} \Rightarrow \frac{1}{10}(2+j)v = \frac{-1+j}{1+j}\times\frac{1-j}{1-j}$$

$$\Rightarrow v = \frac{10j}{2+j} = \frac{10\angle 90}{\sqrt{5}\angle 27^\circ} \Rightarrow v = \frac{10}{\sqrt{5}}\angle 90-27$$

Example: مدار شکل زیر در حالت ماندگار سینوسی است $v_3(t)$ را در حوزه زمان بدست آورید.



$$10\sin(2t+30) \longrightarrow 10\angle 30 \quad w=2$$

$$1\Omega \longrightarrow 1\Omega$$

$$2\Omega \longrightarrow 2\Omega$$

$$2F \longrightarrow \frac{-j}{wC} = \frac{-j}{2\times 2} = -\frac{1}{4}j$$

$$2H \longrightarrow jwL = j\times 2\times 2 = 4j$$

$$KCL(1): \frac{v_1}{1} + \frac{v_1-v_2}{1} + \frac{(v_1-v_3)4j}{(-\frac{1}{4}j)4j} = 10\angle 30^\circ$$

$$KCL(2): \frac{(v_2)j}{(4j)j} + \frac{v_2-v_1}{1} + \frac{v_2-v_3}{1} = 0$$

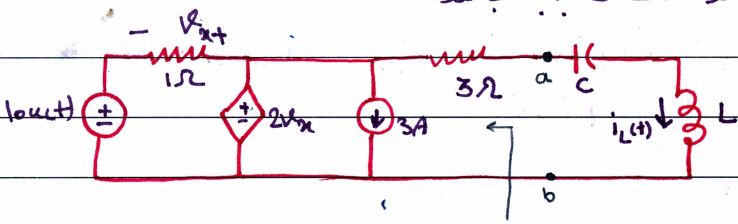
$$KCL(3): \frac{(v_3-v_1)4j}{(-\frac{1}{4}j)4j} + \frac{v_3-v_2}{1} + \frac{v_3}{2} = 0$$

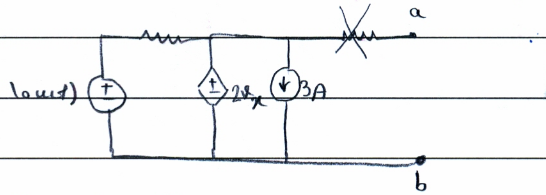
$$\begin{cases} (2+4j)v_1 - v_2 - 4jv_3 = 10\angle 30 \\ -v_1 + (2-\frac{1}{4}j)v_2 - v_3 = 0 \\ -4jv_1 - v_2 + (\frac{3}{2}+4j)v_3 = 0 \end{cases}$$

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2+4j & -1 & -4j \\ -1 & 2-\frac{1}{4}j & 0 \\ -4j & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+4j & -1 & -4j \\ -1 & 2-\frac{1}{4}j & -1 \\ -4j & -1 & \frac{3}{2}+4j \end{vmatrix}} = \frac{(2+8j)\times 10\angle 30}{6+11,25j} = \frac{\sqrt{68}\angle 76 \times 10\angle 30}{12,74\angle 62} = 6,46\angle \overbrace{76+30-62}^{44^\circ}$$

$$\Rightarrow v_3(t) = 6,46\sin(2t+44)$$

Example : در مدار شکل زیر معادله دیفرانسیل حاکم بر جریان سلف را نوشته و مقادیر C و L را طوری تعیین کنید که مدار در حالت میرای بحرانی باشد و فرکانس طبیعی نوسانات آن برابر 2 باشد.

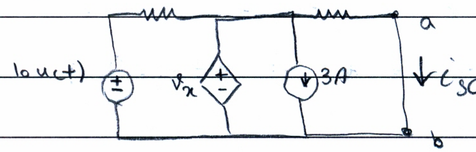




$v_{oc} = v_{th}$

$KVL:\ -10u(t) - v_x + 2v_x = 0 \rightarrow v_x = 10u(t)$

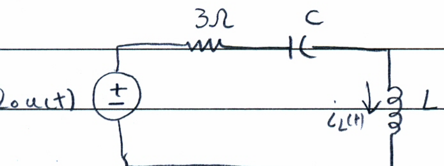
$v_{oc} = 2v_x = 20u(t) = v_{th}$



$i_{sc} = i_{3\Omega} = \frac{v_{3\Omega}}{3\Omega} = \frac{20}{3}u(t)$

$v_{3\Omega} = 2v_x = 2\times 10u(t)$

$R_{th} = \frac{v_{oc}}{I_{sc}} = \frac{20u(t)}{\frac{20}{3}u(t)} = 3\Omega$



$KVL:\ -20u(t) + 3i_L(t) + \frac{1}{C}\int i_L(t)dt + \frac{di_L(t)}{dt} = 0$

از طرفین مشتق می‌گیریم $\rightarrow -20\delta(t) + 3\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{C}\frac{i_L(t)}{1} + L\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} = 0$

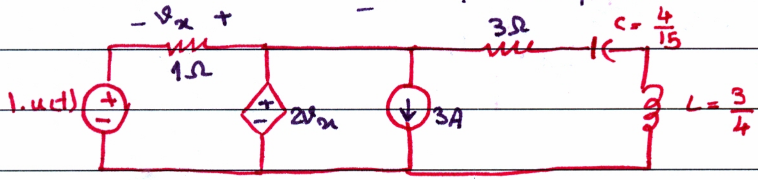
طرفین تقسیم بر L : $\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + \underbrace{\frac{3}{L}}_{2\alpha}\frac{di_L(t)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{w_0^2} i_L(t) = \frac{20}{L}\delta(t)$

در حالت میرای بحرانی : $\alpha = w_0 \longrightarrow \frac{3}{2L} = 2 \rightarrow L = 3/4\,H$

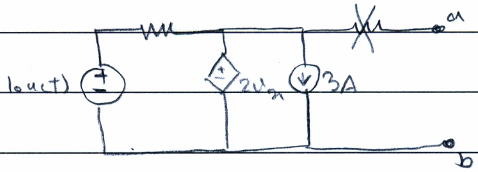
$2\alpha = \frac{3}{L} \rightarrow \alpha = \frac{3}{2L}$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \rightarrow \frac{1}{LC} = 4 \rightarrow \frac{1}{3/4 \times C} = 4 \rightarrow C = 1/3\ F$$

Example : در مدار شکل زیر جریان سلف را در تمام لحظات بدست آورید.



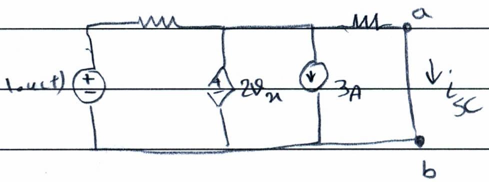
$v_{oc} = v_{th}$



$KVL: -10u(t) - v_x + 2v_x = 0 \rightarrow v_x = 10u(t)$

$v_{oc} = 2v_x = 20u(t) = v_{th}$

$i_{sc} = i_{3\Omega} = \frac{v_{3\Omega}}{3\Omega} = \frac{20}{3}u(t)$



$v_{3\Omega} = 2v_x = 2 \times u(t) \times 10$

$R_{th} = \frac{v_{oc}}{I_{sc}} = \frac{20u(t)}{\frac{20}{3}u(t)} = 3\Omega$

با استفاده از مثال صفحه قبل داریم : $\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{3}{L}\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{20}{L}\delta(t)$

$t < 0 \rightarrow u(t) = 0 \qquad i_L(0^-) = 0 \quad ; \quad v_C(0^-) = 0$

$$\begin{cases} i_L(0^-) = 0 \\ v_C(0^-) = 0 \end{cases}$$

$\forall t \geq 0 \qquad \underbrace{\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}}_{\text{صفر}} + \underbrace{4\frac{di_L(t)}{dt}}_{\text{پله}} + \underbrace{5 i_L(t)}_{\text{پیوسته}} = \underbrace{\frac{80}{3}\delta(t)}_{\text{ضربه}}$

$i_L = i_h + \cancel{i_p}^{\,0}$

چون سمت راست معادله دیفرانسیل شامل $\delta(t)$ می باشد و $\delta(t)$ در تمام لحظات جز $t=0$ برابر صفر است پس پاسخ خصوصی این معادله برابر صفر است

$2\alpha = 4 \rightarrow \alpha = 2$

$\omega_0^2 = 5 \qquad \alpha^2 - \omega_0^2 = 4 - 5 = -1 < 0$

میرای نوسانی

Subject: Date:

فرم کلی پاسخ همگن حالت میرای نوسانی : $i_h(t) = \left(B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)\right) e^{-\alpha t} = i_L(t)$

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{1} = \boxed{1}$

$t = 0^+ \Rightarrow i_L(0^+) = B_1$ چون $i_L(t)$ پیوسته $\Rightarrow i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \Rightarrow \boxed{B_1 = 0}$

از $i_L(t)$ مشتق می‌گیریم $t = 0^+$: $i'_L(0^+) = -\alpha B_1 + \omega_d B_2 \Rightarrow B_2 = \frac{80}{3}$

چون $i'_L(t)$ از جنس پله است پس پیوسته نیست پس

$i'_L(0^+) \neq i'_L(0^-) \Rightarrow$ برای محاسبه $i'_L(0^+)$ از طرفین معادله دیفرانسیل یکبار در بازه 0^- تا 0^+ انتگرال می‌گیریم

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{di_L(t)}{dt} + 4\times 0 + 5\times 0 = \frac{80}{3}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt$$

$$i'_L(0^+) - \cancel{i'_L(0^-)} + 0 + 0 = \frac{80}{3}\times 1$$

$$\boxed{i'_L(0^+) = \frac{80}{3}}$$

$$i_L(t) = \left(\frac{80}{3}\sin(t)\right) e^{-2t} u(t)$$