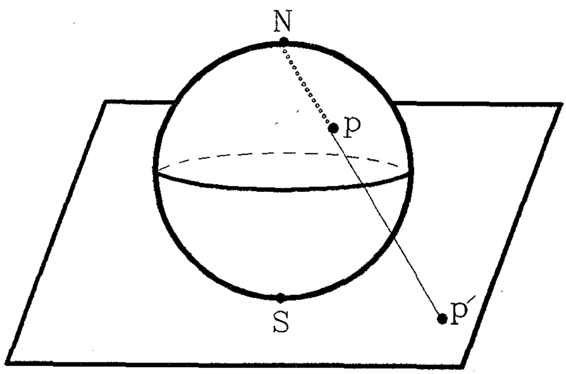
پیشگفتار: در دروس آنالیز فراگرفتیم که چگونه می‌توان محاسبات دیفرانسیل و انتگرال را روی بازهای $\mathbb{R}^n$ انجام داد .هندسه دیفرانسیل یا منیفلد در حقیقت عبارت از گسترش و تعمیم این محاسبات وبررسی هندسی آنها روی زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^n$ است که بتوان بر روی آن یک **دستگاه مختصات** مناسب به طور موضعی (یعنی در همسایگی هر نقطه)تعریف نمود. به عنوان مثال می‌توان دستگاههای مختصات مختلفی روی کره $S^۲$ به عنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۳$ به صورت زیر تعریف نمود.

الفـ فرض کنیم یک نقطه از کره $S^۲$ به عنوان نقطه‌ای از $\mathbb{R}^۳$ عبارت باشد از $x = (x_۱, x_۲, x_۳)$ و در نتیجه $x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ = ۱$ لذا $S^۲ = \{(x_۱, x_۲, x_۳) \in \mathbb{R}^۳ | f(x) = ۰\}$ که در آن تابع $f : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ به صورت $f : (x_۱, x_۲, x_۳) \to x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ - ۱$ تعریف می‌شود.



شکل ۱.۱ : تصویر استریوگرافیک

می‌توان از تصویر استریوگرافیک[1] به عنوان یک روش ارائه مختصات روی کره استفاده کرد در این روش مختصات هر نقطه P از کره را توسط مختصات P' از صفحه‌تعریف می‌نمائیم. به شکل ۱.۱ مراجعه شود.

با این روش تمام نقاط کره به جز قطب شمال N دارای یک مختصات خواهند شد و برای

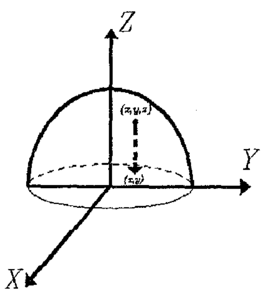
[1] *Stereographic projection*

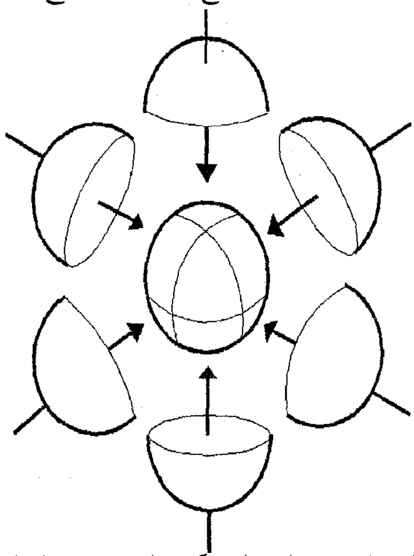
معرفی کل کره می‌توان یک تصویر استریوگرافیک دیگر نسبت به قطب جنوب S تعریف نمود (که تمام کره بجز قطب جنوب را معرفی می‌نماید)سپس با استفاده از این دو دستگاه مختصات استریوگرافیک می‌توان کل کره را پوشانید.

ب- می‌توان دستگاه مختصات دیگری نیز برای کره معرفی نمود که نیمکره شمالی را توسط نمودار تابع $z = f_۱(x,y) = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$ ونیمکره جنوبی را توسط تابع زیر بپوشاند.

$$z = f_۲(x,y) = -\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$$

اما اگر در اینجا فرض را برآن بگذاریم که حوزه تعریف توابع فوق قرص بازی از صفحه $\mathbb{R}^۲$ باشند این توابع روی کره $S^۲$ دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ را نمی‌پوشانند . لذا برای اینکه بتوانیم یک دستگاه مختصات به کره نسبت دهیم باید توابع دیگری نیز مشابه توابع فوق تعریف کنیم تا حوزه مقادیر توابع مذکور کل کره را بپوشاند .حدس می‌زنید برای اینکار احتیاج به چند تابع (یا نیمکره باز)داریم ؟ جواب این سؤال را می‌توانید با مراجعه به شکل زیر بدست آورید توجه کنید که وارون توابع بالا همان توابع مختصات هستند.





شکل ۱.۲ : با شش تابع یا نیمکره باز نیز می‌توان کره را پوشانید که در سمت چپ یکی از آنها را مشاهده می‌کنید

در اینجا مایل هستیم با انتخاب چند دستگاه مختصات مناسب روی $S^{۲}$ شرایط لازم برای تعریف یک تابع دیفرانسیل‌پذیر (بعنوان مثال از $S^{۲}$ در $S^{۲}$) را فراهم آوریم. بررسی این مختصات روی زیر مجموعه‌هایی از $I\!R^n$ و انتخاب بهترین آنها جهت محاسبات حساب دیفرانسیل و انتگرال ما را بر آن می‌دارد که در این فصل به تعریف یکی از اساسی‌ترین مفاهیم جدید ریاضی به نام منیفلد بپردازیم.

۱.۱ § کارت‌های موضعی و اطلس [۱]

در اینجا به تعریف نگاشتی می‌پردازیم که از آن برای تعیین مختصات روی مجموعه با استفاده می‌شود.

تعریف: *فرض کنیم M یک مجموعه ناتهی، O زیر مجموعه بازی از $M, I\!R^n$ و $U \subseteq$ باشد. نگاشت دوسویی $x : U \mapsto x(U) = O \subset I\!R^n$ را یک* **کارت** *n* **بعدی**، *U را حوزه کارت و زوج (x, U) را یک* **کارت موضعی** *می‌نامیم.*

اگر تابع $P^i : I\!R^n \to I\!R$ به صورت $P^i : (t^{۱}, \cdots, t^n) \mapsto t^i$ تعریف شود آنگاه توابع $x^i = P^i \circ x : U \longrightarrow I\!R$ را **توابع مختصاتی**[۲] می‌گویند. به همین دلیل زوج (x, U) را **دستگاه مختصات موضعی**[۳] نیز می‌نامند . لذا هر نقطه روی U توسط n تایی از توابع حقیقی $(x^{۱}, \cdots, x^n)$ معرفی می‌شود.

تذکر ۱: همانطوری که ملاحظه نمودید درتعریف کارت موضعی (x, U) دو موضوع مطرح است، اولاً x دوسویی باشد، ثانیاً $x(U)$ باز باشد.

مثال ۱: فضای $M = I\!R^n$ همراه با نگاشت همانی $x = Id$ یک کارت موضعی nبعدی بدیهی روی $I\!R^n$ تشکیل می‌دهد.

$$x = Id : I\!R^n \to I\!R^n \qquad ; x(p) = p$$

---

[۱] *Local chart (Carte locale) – Atlas*

[۲] *Coordinate functions (Fonctions des coordonne'es)*

[۳] *Local coordinate system*

مثال ۲: نیمکره باز $S^{۲}_{+}$ با نگاشت تصویر روی صفحه $I\!R^{۲}$ (مثال ج در پیشگفتار) یک کارت ۲بعدی روی $S^{۲}$ تعریف می‌نماید. (شکل ۱.۲ : سمت چپ)

در حقیقت نگاشت دو سویی تصویر f را از نیمکره باز $S^{۲}_{+}$ در دیسک باز $D^{۲}$ زیر در نظر گرفته‌ایم

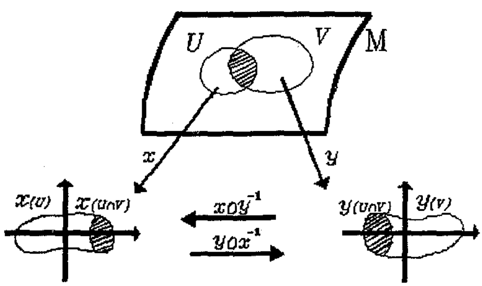
$$f:\ S^{۲}_{+} \longrightarrow D^{۲} \subset I\!R^{۲}$$
$$(x, y, \sqrt{۱ - x^{۲} - y^{۲}}) \longrightarrow (x, y)$$

لذا $(f, S^{۲}_{+})$ یک کارت دوبعدی روی $S^{۲}$ تعریف می‌کنند.

مثال ۳: $M = M_{n,p}(I\!R)$ مجموعه ماتریس‌های $n \times p$ حقیقی همراه با نگاشت

$$x : M_{n,p}(I\!R) \to I\!R^{np}$$
$$[a_{ij}] \longmapsto (a_{۱۱}, a_{۱۲}, \cdots a_{ij}, \cdots, a_{np})$$

یک کارت npبعدی روی تمام M تعریف می‌نماید.



شکل ۱.۳ : کارت‌های مرتبط و نگاشت تغییر کارت

تعریف: فرض کنیم (x, U) و (y, V) دو کارت موضعی n- بعدی روی M باشند، گوئیم این دو کارت C^k- مرتبط [۱] هستند اگر نگاشت زیر که آنرا **نگاشت تغییر کارت** می‌نامیم

---
[۱] $k - related\ (k - relie')$

$$y \circ x^{-۱} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

و معکوس آن توابعی از کلاس C^k بین دو باز $I\!R^n$ باشند. به عبارت دیگر $x(U \cap V)$ و $y(U \cap V)$ بازهایی از $I\!R^n$ بوده و $y \circ x^{-۱}$ و $x \circ y^{-۱}$ از کلاس C^k باشند. درحالت $U \cap V = \phi$ بنا به تعریف این دو کارت را C^k- مرتبط می‌نامیم.

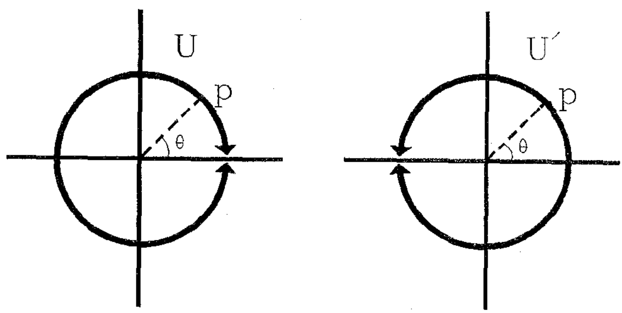
تعریف: گوئیم یک خانواده از کارت‌های C^k مرتبط $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ تشکیل یک اطلس C^k n بعدی روی M می‌دهند اگر حوزه تعریف آنها M را بپوشاند، یعنی $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$

مثال ۴: فرض کنیم $M = S^۱ = \{(x, y) \in I\!R^۲ : x^۲ + y^۲ = ۱\}$

$$U = \{(\cos\theta, \sin\theta) : ۰ < \theta < ۲\pi\} \subseteq M$$

$$x : U \longrightarrow]۰, ۲\pi[$$

$$p = (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \theta$$



شکل ۱.۴ : تعریف دو کارت که دایره را می‌پوشاند

x یک تابع دوسویی از U روی بازی از $I\!R$ است بنابراین (x, U) یک کارت روی $S^۱$ تعریف می‌نماید. فرض کنیم

$$U' = \{(\cos\theta, \sin\theta) : -\pi < \theta < \pi\}$$

$$x' : U' \longrightarrow]-\pi, \pi[$$

$(\cos\theta, \sin\theta) \longrightarrow \theta$

(x', U') کارت دیگری روی S^{1} تعریف می‌کند.

در نتیجه دو دستگاه مختصات موضعی روی دایره تعریف نمودیم که کل M را می‌پوشانند.

حال نگاشت تغییر کارت را بررسی کنیم.

در اینجا $x(U \cap U') =]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$ یک باز از $\mathbb{R}$ بوده و به همین صورت $x'(U \cap U') =]0, \pi[\cup]-\pi, 0[$ نیز یک باز از $\mathbb{R}$ می‌باشد.

بنابراین روی فاصله $]0, \pi[$ داریم $x = x'$ و در نتیجه $x' \circ x^{-1}|_{]0,\pi[} = Id$ و روی فاصله $]\pi, 2\pi[$ داریم $x'(p) = x(p) - 2\pi$ چون $x(p) = \theta$ پس $p = x^{-1}(\theta)$ لذا $x' \circ x^{-1}(\theta) = \theta - 2\pi$ در نتیجه

$$x' \circ x^{-1}(\theta) = \begin{cases} \theta & \theta \in]0, \pi[\\ \theta - 2\pi & \theta \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

چون نگاشت تغییر کارت از کلاس C^{∞} می‌باشد، یک اطلس C^{∞} یک‌بعدی روی S^{1} که از دو کارت تشکیل شده است تعریف نمودیم.

مثال ۵: فرض کنیم $M = A \cup B$ به طوری که A و B دو پاره خط زیر باشند.

$$A = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^{2} | -1 < t < 1\}$$

$$B = \{(t, t) \in \mathbb{R}^{2} | 0 < t < 1\}$$

فرض کنیم دو کارت (x, A) و (y, V) به صورت زیر تعریف شوند

$x : A \longrightarrow]-1, 1[\subset \mathbb{R}$

$(t, 0) \longmapsto t$

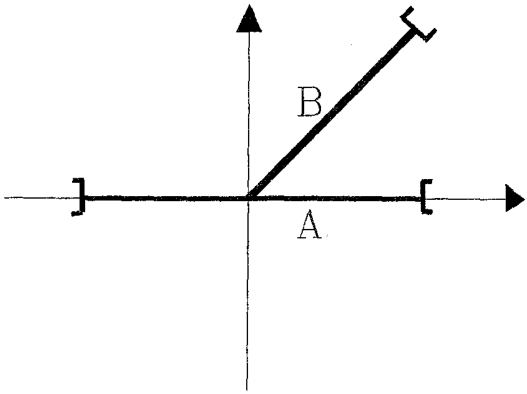
$V = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^{2} | -1 < t \leq 0\} \cup \{(t, t) \in \mathbb{R}^{2} | 0 < t < 1\}$

به طوری که

$y : V \rightarrow]-1, 1[$

$(t,\circ) \longmapsto t$

$(t,t) \longmapsto t$



شکل ۱.۵ : دو کارت غیر مرتبط

حوزه تعریف این دو کارت M را می‌پوشاند و همین طور داریم $y\circ x^{-۱} = Id$ بنابراین نگاشت تغییر کارت از کلاس C^k می‌باشد .اما حوزه تعریف $y\circ x^{-۱}$ (یعنی $x(A\cap V)$) عبارت است از فاصله $[\circ, ۱-]$ که باز نیست و در نتیجه این دو کارت C^k- مرتبط نبوده و تشکیل یک اطلس نمی‌دهند.

تمرین: نشان دهید C^k- مرتبط بودن یک رابطه هم‌ارزی نیست.(کافی است عدم برقراری شرط تعدی را بررسی کنید)

۲.۱ § اطلس ماکزیمال ـمنیفلد دیفرانسیل‌پذیر

همانطور که دیدیم ارائه یک اطلس به ما اجازه می‌دهد که یک دستگاه مختصات روی یک مجموعه تعریف نمائیم . فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ دو اطلس C^k nبعدی از M باشند. ممکن است مجموعهٔ کارت‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ به روی هم یک اطلس C^k از M نباشند زیرا اگر $x\in\mathcal{A}$ و $y\in\mathcal{A}'$ آنگاه ممکن است $y\circ x^{-۱}$ یا معکوس آن از کلاس C^k نباشد .برای آنکه $\mathcal{A}\cup\mathcal{A}'$ نیز یک اطلس C^k باشد تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف: دو اطلس C^k nبعدی از M را **هم ارز**[1] گوئیم اگر اجتماع آنها نیز یک اطلس C^k باشد.

مثال ۶: می‌خواهیم یک اطلس C^∞ دیگر روی S^1 تعریف نموده و هم ارزی آنرا با اطلسی که قبلاً روی S^1 تعریف کردیم بررسی نمائیم. فرض کنیم $U_1 = \{(x,y) \in S^1 | x > 0\}$

$$x_1 : U_1 \to]-1,1[$$

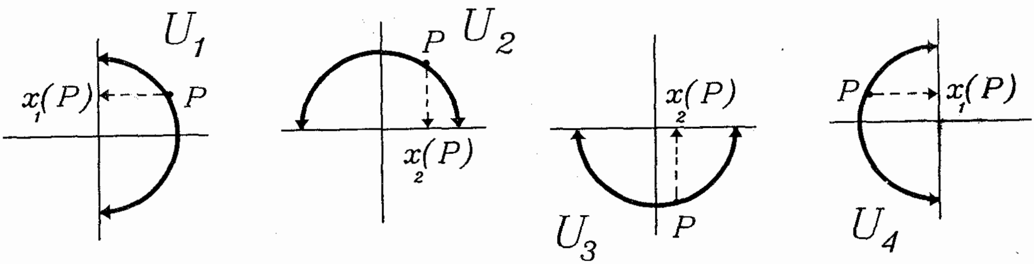
$$(x,y) \longmapsto y$$

در این صورت (x_1, U_1) یک کارت موضعی برای S^1 می‌باشد. به همین صورت فرض کنیم

$$U_2 = \{(x,y) \in S^1 | y > 0\}$$

$$x_2 : U_2 \to]-1,1[$$

$$(x,y) \longmapsto x$$



شکل ۱.۶ : اطلس چهار کارتی روی دایره

در این صورت (x_2, U_2) نیز کارت دیگری روی S_1 می‌باشد. و به همین ترتیب اگر فرض کنیم

$$U_3 = \{(x,y) \in S^1 | y < 0\}$$

$$U_4 = \{(x,y) \in S^1 | x < 0\}$$

$$x_4 : U_4 \to]-1,1[\quad , \quad x_3 : U_3 \to]-1,1[$$

$(x_4, U_4), (x_3, U_3)$ کارت‌های دیگری روی S^1 می‌باشند حوزه تعریف این چهار

---

[1] *equivalent*

کارت $S^۱$ را می‌پوشاند و نگاشت‌های تغییر کارت از کلاس C^k می‌باشند. به عنوان مثال نگاشت $x_۲ \circ x_۱^{-۱}$ را بررسی می‌کنیم. روی $U_۱ \cap U_۲$ داریم $y = \sqrt{۱ - x^۲}$ بنابراین اگر

$$x_۱ : U_۱ \cap U_۲ \to]۰, ۱[$$
$$p \longmapsto x_۱(p) = t$$

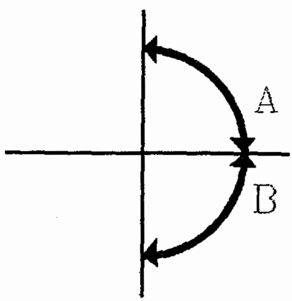
نگاشت $x_۲ \circ x_۱^{-۱}$ از کلاس C^∞ است زیرا

$$x_۲ \circ x_۱^{-۱} :]۰, ۱[\to]۰, ۱[$$
$$t \longmapsto \sqrt{۱ - t^۲}$$

در نتیجه یک اطلس C^∞ دیگر روی $S^۱$ تعریف نمودیم .حال این سوال را مطرح می‌کنیم که آیا این اطلس با اطلس ارائه شده در مثال ۴ هم‌ارز می‌باشد؟ برای پاسخ به این سوال نگاشت تغییر کارت روی $U \cap U_۱$ را در نظر می‌گیریم. داشتیم

$$\begin{array}{ll} x : U \to]۰, ۲\pi[& x' : U' \to]-\pi, \pi[\\ (\cos\theta, \sin\theta) \longmapsto \theta & (\cos\theta, \sin\theta) \longmapsto \theta \\ ۰ < \theta < ۲\pi & -\pi < \theta < \pi \end{array}$$

$$U \cap U_۱ = A \cup B$$



شکل ۱.۷ : حوزه تعریف نگاشت تغییر کارت

رجوع شود به شکل زیر

$$A = \{(x, y) \in S^۱ | x > ۰, y > ۰\}$$
$$B = \{(x, y) \in S^۱ | x > ۰, y < ۰\}$$

روی A داریم : $x_1(p) = \sin x(p)$ بنابراین اگر $p = x^{-1}(\theta)$ آنگاه

$$\begin{aligned} x_1 \circ x^{-1} :]0, \pi/2[&\to]0, 1[\\ \theta &\longmapsto \sin\theta \end{aligned}$$

یک نگاشت C^∞ است. روی B نیز چنین است.

به همین صورت می‌توان بررسی نمود که نگاشت‌های تغییر کارت بین کارتهای دو اطلس $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ از کلاس C^∞ می‌باشند بنابراین $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ یک اطلس C^∞ می‌باشد.لذا $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ دو اطلس هم‌ارز هستند.

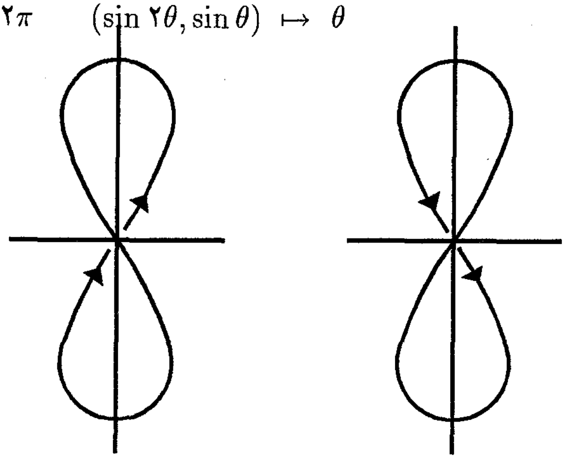
حال در اینجا مثالی از دو اطلس می‌آوریم که هم ارز نمی‌باشند.

مثال ۷: فرض کنیم

$$H = \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 | x_1 = \sin 2\theta, x_2 = \sin\theta, \theta \in]0, 2\pi[\}$$

$$x : H \longrightarrow]0, 2\pi[\subset I\!R$$

$$0 < \theta < 2\pi \qquad (\sin 2\theta, \sin\theta) \mapsto \theta$$



شکل ۱.۸ : یک مجموعه با دو اطلس غیر هم‌ارز

در اینجا یک اطلس داریم که از یک کارت تشکیل می‌شود می‌توان اطلس دیگری در نظر گرفت

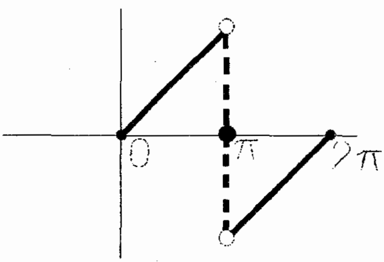
$x' : H \longrightarrow]-\pi, \pi[\subset \mathbb{R}$

$(\sin ۲\theta, \sin\theta) \mapsto \theta$

$-\pi < \theta < \pi$

نشان می‌دهیم این دو اطلس هم‌ارز نمی‌باشند. در حقیقت نگاشت تغییر کارت عبارت است از

$$\begin{aligned} x' \circ x^{-۱} : x(H) &\longrightarrow x'(H) \\ ]\circ, ۲\pi[&\mapsto]-\pi, \pi[\end{aligned}$$



شکل ۱.۹ : نمودار نگاشت تغییر کارت

به عبارت دیگر
$$x' \circ x^{-۱}(\theta) = \begin{cases} \theta & \circ < \theta < \pi \\ \circ & \theta = \pi \\ \theta - ۲\pi & \pi < \theta < ۲\pi \end{cases}$$
این تابع C^∞ نیست زیرا نمودار آن در نقطه $\theta = \pi$ پیوسته نیست . بنابراین این دو اطلس هم ارز نمی‌باشند.

تعریف: یک اطلس C^k از M را **ماکزیمال**[۱] یا **کامل** گوئیم اگر زیرمجموعهٔ یک اطلس C^k دیگر نباشد.

قضیه: فرض کنیم A یک اطلس C^k باشد. در این صورت یک وتنها یک اطلس C^k ماکزیمال $\overline{A}$ وجود دارد که شامل A باشد.

---
[۱] *maximal , complet*

اثبات: اثبات واضح است کافی است ابتدا به عنوان تمرین ثابت کنید رابطه هم‌ارز بودن اطلسها یک رابطه هم‌ارزی است، سپس قرار دهید:

$$\overline{\mathcal{A}} = \cup \mathcal{A}'$$

در اینجا $\mathcal{A}'$ کلیه اطلس‌های هم‌ارز با اطلس $\mathcal{A}$ است. یکتایی $\overline{\mathcal{A}}$ از هم‌ارزی بودن رابطه اطلسهای هم‌ارز نتیجه می‌شود. □

گاهی اوقات اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}}$ را اطلس اشباع شده $\mathcal{A}$ نیز می‌گویند.

تعریف: مجموعه M همراه با یک اطلس C^k ماکزیمال nبعدی را یک **منیفلد دیفرانسیل‌پذیر**[۱] n بعدی از کلاس C^k می‌گوئیم (ما غالبا" برای اختصار آن را منیفلد می‌نامیم). یک اطلس ماکزیمال روی M را **یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری**[۲] نیز می‌گویند.

تذکر ۲: برای تعریف نمودن ساختار یک منیفلد دیفرانسیل پذیر روی مجموعه M کافی است بعد از قضیه فوق یک اطلس C^k در نظر گرفت، سپس اطلس C^k ماکزیمالی را که شامل آن می‌باشد را در نظر گرفت. در واقع می‌توان ثابت کرد بعد از مشخص نمودن اطلس $\mathcal{A}$ کافی است تمام کارت‌های C^k- مرتبط را به آن اضافه کنیم تا اطلس ماکزیمال شامل $\mathcal{A}$ بدست آید.

مثال ۸: فرض کنیم $M = \mathbb{R}^n$ و $\mathcal{A} = Id$. ساختار دیفرانسیل پذیر C^∞ تعریف شده توسط $\mathcal{A}$ عبارت است از اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\overline{\mathcal{A}} = \left\{ \begin{array}{ll|l} x : U \subset \mathbb{R}^n \to & O \subset \mathbb{R}^n & x \text{دوسویی ، } x \circ Id^{-1} \text{ ، } Id \circ x^{-1} \text{ یعنی} \\ & \text{باز } O \ \mathbb{R}^n & x \text{ و } x^{-1} \text{ از کلاس } C^\infty \text{ باشند} \end{array} \right\}$$

بدین صورت اشباع نمودن اطلس طبیعی $(\mathbb{R}^n, Id)$ عبارت است از در نظر گرفتن تمام دستگاههای مختصات موضعی (x, U) روی $\mathbb{R}^n$ (به نحوی که x دیفئومورفیسم-C^∞ باشد، یعنی x و x^{-1} از کلاس C^∞ باشند.)

تذکر ۳: بجای $\mathbb{R}^n$ در تعریف منیفلد دیفرانسیل‌پذیر می‌توان یک فضای باناخ با بعد احیاناً

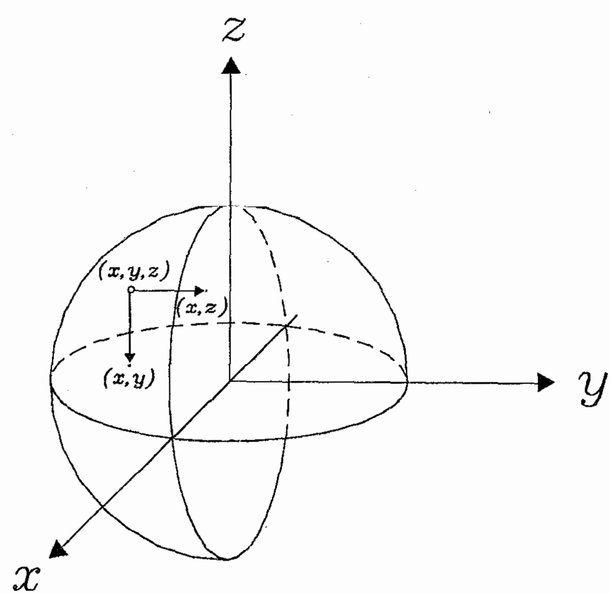
---

[۱] *Differentiable manifold (Varie'te' différentiable)*

[۲] *Differentiable structure (Structure différentiable)*

نامتناهی در نظر گرفت. در این صورت دامنه تعریف منیفلد گسترده می‌شود ولی مطالعه آن کمی پیچیده‌تر می‌گردد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توان به [۱۸] صفحه ۴۲۱ مراجعه نمود.

مثال ۹: در مقدمه این فصل شکل ۱.۲ دیدیم کره را می‌توان توسط شش نیمکره باز پوشانید. اگر فرض کنیم هر نیمکره باز حوزه تعریف یک کارت باشد نشان می‌دهیم که این کارت‌ها C^∞ مرتبط هستند. فرض کنیم U_1 نیمکره باز شمالی و φ_1 نگاشتی باشد که U_1 را بر قرص بازی از صفحه که در زیر آن قرار دارد تصویر نماید.



شکل ۱.۱۰ : *رابطه بین دو کارت در روی کره*

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 : U_1 \subset S^2 & \longrightarrow & O_1 \subset \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (x,y) \end{array}$$

φ_1 یک به یک بوده تصویر آن باز است لذا (φ_1, U_1) یک کارت روی S^2 تعریف می‌کند. در این صورت اگر U_2 نیمکره باز شرقی بوده و توسط φ_2 بر روی قرص بازی از صفحه

مقابل خود تصویر گردد زوج (φ_2, U_2) یک کارت ۲ـ بعدی روی S^2 است.

$$\varphi_2 : U_2 \subset S^2 \longrightarrow \sigma_2 \subset \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (x,z)$$

لذا نگاشت تغییر کارت بصورت زیر می‌باشد

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$
$$(x,y) \longrightarrow (x,z)$$

از $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ نتیجه می‌شود نگاشت تغییر کارت و معکوس آن دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^∞ بوده باز را به باز می‌برند بنابراین دو کارت فوق C^∞ـ مرتبط هستند. به همین صورت ثابت می‌شود که شش کارت فوق تشکیل یک اطلس ـ C^∞ ۲ ـ بعدی روی S^2 می‌دهند که آنرا با $\mathcal{A}$ نشان می‌دهیم.

$\overline{\mathcal{A}}$ اطلس ماکزیمالی که از اشباع نمودن $\mathcal{A}$ بدست می‌آید یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری روی S^2 تعریف می‌کند. بنابراین S^2 یک منیفلد C^∞ ۲ـ بعدی است.

منیفلد حاصلضرب[1]

فرض کنیم M_1 و M_2 دو منیفلد از کلاس C^k با اطلس‌های C^∞، $\mathcal{A}_1$ و $\mathcal{A}_2$ باشند.آنگاه حاصلضرب $M_1 \times M_2$ به طور طبیعی دارای یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری از کلاس C^k می‌باشد که توسط حاصلضرب اطلس‌های $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{A}_1 = \{(x_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A} \qquad \mathcal{A}_2 = \{(x_\beta, U_\beta)\}_{\beta \in B}$$
$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{x_\alpha \times x_\beta, U_\alpha \times U_\beta\}_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$$
$$x_\alpha \times x_\beta : U_\alpha \times U_\beta \to \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$$

---

[1] *Product manifold (Variété de produit)*

نگاشت فوق دوسویی است و حوزه مقادیر آن حاصلضرب دو باز در $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ بوده لذا یک کارت است.

داریم

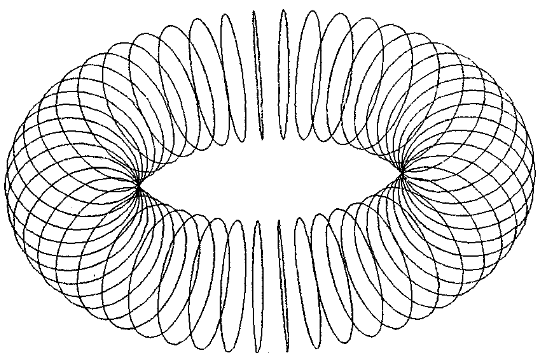
$$(x_\alpha \times x_\beta)\circ(x_{\alpha'} \times x_{\beta'})^{-1} = (x_\alpha \times x_\beta)\circ(x_{\alpha'}^{-1} \times x_{\beta'}^{-1}) = (x_\alpha \circ x_{\alpha'}^{-1} \times x_\beta \circ x_{\beta'}^{-1})$$

نگاشت تغییر کارت C^∞ است در نتیجه $M_1 \times M_2$ منیفلد C^∞ به بعد $n_1 + n_2$ است.

$$\dim(M_1 \times M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$$

مثال ۱۰: چنبره[1] دو بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^2 = S^1 \times S^1$$



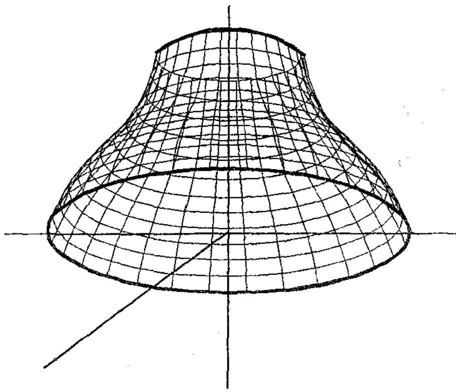
شکل ۱.۱۱ : *نمایش دوایری از چنبره*

چنبره T^2، منیفلدی دیفرانسیل‌پذیر با بعد ۲ است. برای مشخص نمودن اطلس آن ابتدا اطلس S^1 را که از دو کارت (x, U) و (x', U') تشکیل گردیده است در نظر می‌گیریم(رجوع

[1] $Torus\ (Tore)$

شود به مثال ۴). اطلس حاصلضرب $T^۲$ از کارت‌های $x \times x$ ، $x' \times x$، $x \times x'$ و $x' \times x'$ تشکیل می‌گردد. چون نگاشت‌های تغییر کارت از کلاس C^∞ هستند، $T^۲$ از کلاس C^∞ می‌باشد. (شکل ۱.۱۰) به همین صورت چنبره n بعدی $T^n = S^۱ \times \cdots \times S^۱$ منیفلدی با بعد n می‌باشد.

مثال ۱۱: **سطح دوار**[۱] که از حاصلضرب یک منحنی در یک دایره پدید می‌آید نیز یک منیفلد دوبعدی است. (شکل ۱.۱۲)



شکل ۱.۱۲ : نمایش خطوطی از سطح دوّار

تمرین

۱ـ با استفاده از **تصویر استریوگرافیک**[۲] بشرح زیر ثابت کنید کره S^n یک منیفلد $n-$ بعدی است.

$$S^n = \{(x_۱, \cdots, x_{n+۱}) \in I\!R^{n+۱} | x_۱^۲ + \cdots + x_{n+۱}^۲ = ۱\}$$

ابتدا کره $S^۲$ را در نظر گرفته فرض کنیم $U_۱ = S^۲ - \{N\}$ کره بدون قطب شمال و $U_۲ = S^۲ - \{S\}$ کره بدون قطب جنوب باشد. تصویر استریوگرافیک نقطه p روی کره

[۱] *Surface of revolution (Surface de revolution)*

[۲] *sterographic projection (Projection stéréographic)*

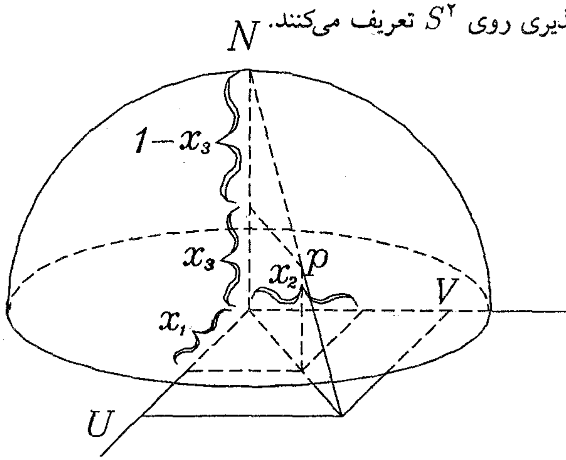
نسبت به قطب شمال و جنوب را با φ_1 و φ_2 نمایش می‌دهیم.

الف) اگر (x_1, x_2, x_3) مختصات نقطه p باشد با توجه به شکل و خواص مثلثهای متشابه ثابت کنید.

$$\varphi_1(p) = \left(\frac{x_1}{1-x_3} \ , \ \frac{x_2}{1-x_3}\right)$$

$$\varphi_2(p) = \left(\frac{x_1}{1+x_3} \ , \ \frac{x_2}{1+x_3}\right)$$

ب) نشان دهید (φ_1, U_1) و (φ_2, U_2) دو کارت C^∞ مرتبط بوده و یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری روی S^2 تعریف می‌کنند.



شکل ۱.۱۳ : جزئیات تصویر استریوگرافی

ج) با استفاده از تصویر استریوگرافیک نسبت به قطب شمال و جنوب نشان دهید کره S^n با دو کارت (φ_1, U_1) و (φ_2, U_2) که بشرح زیر تعریف می‌شوند یک منیفلد $n-$ بعدی است.

$$U_1 = S^n - \{N\} \quad , \quad U_2 = S^n - \{S\}$$
$$\varphi_1(p) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$
$$\varphi_2(p) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right)$$

۲ـ نشان دهید هر فضای برداری حقیقی به بعد n یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر nبعدی است.

۳ـ فرض کنیم $M = GL(n$ و $I\!R)$ گروه خطی ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ (یا مجموعه تبدیلات خطی وارون‌پذیر حقیقی $I\!R^n$)باشد. نشان دهید M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است.

راهنمایی: چون دترمینان این ماتریس‌ها مخالف صفر است از خاصیت نگاشت پیوسته دترمینان نتیجه می‌شود که تصویر M توسط نگاشت Id در $I\!R^{n^2}$ باز است و با یک کارت کلی M منیفلد دیفرانسیل‌پذیر می‌شود.

۴ـ با ارائه یک مثال نشان دهید عکس تمرین ۲ برقرار نیست.

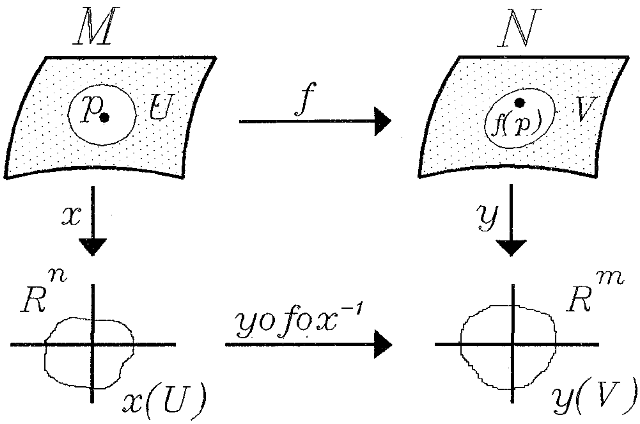
۳.۱ § توابع دیفرانسیل پذیر روی منیفلدها

یکی از مهمترین دلایل تعریف منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر ایجاد شرایطی روی مجموعه M بود که تحت آن شرایط ما بتوانیم روی این مجموعه تابع دیفرانسیل‌پذیر را تعریف نمائیم. در اینجا به تعریف نگاشت دیفرانسیل پذیر از یک منیفلد به منیفلد دیگر می‌پردازیم.

تعریف: فرض کنیم M و N دو منیفلد از کلاس C^k باشند. نگاشت f از M در N را درنقطه $p \in M$، **دیفرانسیل‌پذیر از کلاس** C^r $(r \leq k)$ گوئیم اگر یک کارت موضعی (x, U) در اطلس ماکزیمال M شامل نقطه p ویک کارت موضعی (y, V) شامل نقطه $f(p)$ در اطلس ماکزیمال N موجود باشد به طوری که نگاشت زیر

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset I\!R^n \to y(V) \subset I\!R^m$$

در نقطه $x(p)$ از کلاس C^r باشد.



شکل ۱.۱۴ : *تعریف تابع دیفرانسیل‌پذیر بین دو منیفلد*

اگر f در تمام نقاط M دیفرانسیل‌پذیر باشد گوئیم **f** روی **M** **دیفرانسیل‌پذیر** است. این تعریف بستگی به انتخاب کارت‌های موضعی ندارد یعنی اگر این شرایط برای دو کارت x, y برقرار شوند برای هر دو کارت x', y' دیگری نیز برقرار خواهند بود، زیرا اگر x' و y' دو کارت دیگر در اطراف نقطه p و $f(p)$ باشند آنگاه

$$y' \circ f \circ x'^{-1} = \underbrace{(y' \circ y^{-1})}_{\text{از کلاس } C^k} \circ \underbrace{(y \circ f \circ x^{-1})}_{\text{از کلاس } C^r} \circ \underbrace{(x \circ x'^{-1})}_{\text{از کلاس } C^k}$$

در نتیجه نگاشت $y' \circ f \circ x'^{-1}$ از کلاس C^r می‌باشد.

تعریف: نگاشت f از منیفلد M در منیفلد N را یک **دیفئومورفیسم**[1] از کلاس C^r گوئیم اگر f دوسویی بوده و f و f^{-1} از کلاس C^r باشند.

اگر $r = 0$ آنگاه f را **همئومورفیسم**[2] می‌نامیم. براحتی ثابت می‌شود که اگر چنین نگاشتی بین دو منیفلد موجود باشد، آنگاه این دو منیفلد دارای ابعاد مساوی‌اند. باید توجه داشت که کلاس یک منیفلد C^k و کلاس نگاشتی که روی آن تعریف می‌شود C^r، ممکن

---

[1] $C^r - diffeomorphism$

[2] $homeomorphism$

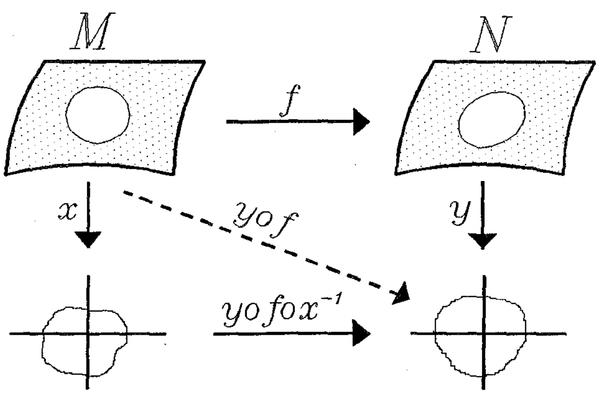
است یکی نباشد. $(r \leq k)$

قضیه: فرض کنیم M و N دو منیفلد C^k $n-$بعدی با اطلسهای ماکزیمال باشند و نگاشت $f : M \to N$ دو سویی باشد. آنگاه f یک دیفئومورفیسم C^r است اگر وتنها اگر تعویض اطلس نماید. به عبارت دیگر اگر وتنها اگر

$$\mathbf{y} \in \mathcal{A}(\mathbf{N}) \iff \mathbf{y} \circ \mathbf{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{M})$$

در اینجا $\mathcal{A}(M)$ و $\mathcal{A}(N)$ اطلس‌های ماکزیمال M و N می‌باشند. $(r = k)$

اثبات: فرض کنیم شرط قضیه برقرار است. از $y \in \mathcal{A}(N)$ نتیجه شود $y \circ f \in \mathcal{A}(M)$. این بدان معنی است که $y \circ f$ یک کارت مرتبط با کارت‌های $\mathcal{A}(M)$ می‌باشد، یعنی به ازاء هر $x \in \mathcal{A}(M)$ نگاشت تغییر کارت $(y \circ f) \circ x^{-1}$ از کلاس C^r می‌باشد و بنا به تعریف f از کلاس C^r است. (چون y کارت N و x کارت M است)



شکل ۱.۱۵ : *تعویض اطلس تابع f*

همچنین از $y \circ f \in \mathcal{A}(M)$ نتیجه شود که $y \in \mathcal{A}(N)$. به ازاء هر کارت دیگر از $\mathcal{A}(M)$ مانند x نگاشت تغییر کارت $x \circ (y \circ f)^{-1}$ از کلاس C^k می‌باشد. بنابراین $x \circ f^{-1} \circ y^{-1}$ از کلاس C^k بوده و در نتیجه چون y یک کارت N است بنابه تعریف،

f^{-1} از کلاس C^r می‌باشد و لذا f دیفئومورفیسم C^r است.

عکس قضیه نیز به همین سادگی قابل بررسی می‌باشد. □

مثال: فرض کنیم $M = I\!R$ همراه با کارت زیر باشد

$$\begin{aligned} x : M &\longrightarrow I\!R \\ t &\longmapsto t^{3} \end{aligned}$$

اطلس ماکزیمال چون تک کارتی است به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\overline{\mathcal{A}'} = \{y' : U \subset M \to O \subset I\!R \text{ بازه } | C^\infty \text{ از کلاس } y' \circ x^{-1},\ x \circ y'^{-1}\ ,\ \text{ دوسویی } y'\}$$

یادآوری می‌کنیم که اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}'}$ با اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}}$ وابسته به اطلس $\mathcal{A} = Id$ که در مثال بخش قبل بر روی $I\!R$ تعریف گردید متفاوت است زیرا $Id \notin \overline{\mathcal{A}}'$ (در حقیقت $Id \circ x^{-1}$ نگاشت $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ است که در نقطه $t = 0$ مشتق‌پذیر نیست لذا Id نمی‌تواند متعلق به اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}'}$ باشد). به این نحو روی $I\!R$ دو **اطلس ماکزیمال** متفاوت یا **دو ساختاردیفرانسیل پذیری** مختلف تعریف نمودیم. با این حال اگر چه این دو اطلس ماکزیمال متفاوت هستند اما با یکدیگر دیفئومورف می‌باشند (یعنی یک دیفئومورفیسم بین آنها وجود دارد)زیرا یک نگاشت دوسویی مانند f بین دو اطلس وجود داردکه تعویض اطلس نموده یا به طور معادل اطلسها را به یکدیگر تبدیل می‌نماید. به عبارت دیگر

$$\begin{array}{ccc} (I\!R, \overline{\mathcal{A}'}) & \xrightarrow{f} & (I\!R, \overline{\mathcal{A}}) \\ x \downarrow & \searrow & \downarrow y \\ I\!R & \xrightarrow{Id} & I\!R \end{array}$$

در حقیقت اگر فرض کنیم $f(t) = t^{3}$ چون f دوسویی است، با توجه به قضیه قبل داریم

$(y \circ f) \circ x^{-1} \Rightarrow$ و $x \circ (y \circ f)^{-1}$ از کلاس C^∞ هستند $\Rightarrow y \circ f \in \overline{\mathcal{A}'}$

$y \in \overline{\mathcal{A}} \Rightarrow y \circ Id$ و $Id \circ y^{-1}$ از کلاس C^∞ هستند (چون $x = f$)

چون روابط فوق برگشت‌پذیر می‌باشند بنابر قضیه بالا f یک دیفئومورفیسم (نسبت به دو اطلس فوق الذکر)می‌باشد.

تذکر ۱: *باید توجه داشت که در مثال بالا f ممکن است برای ساختارهای دیفرانسیل‌پذیری دیگر دیفئومورفیسم نباشد به عنوان مثال اگر روی دومنیفلد بالا اطلس $A = Id$ تعریف شده باشد آنگاه معکوس f در صفر مشتق پذیر نبوده و در نتیجه f دیفئومورفیسم نیست. بنابراین مفهوم* **دیفرانسیل‌پذیری یک تابع بر روی یک منیفلد بستگی به اطلس ماکزیمال یا ساختار دیفرانسیل‌پذیری منیفلد دارد.** *در روی $I\!R^n$ غالباً ساختار دیفرانسیل‌پذیری طبیعی (یعنی اطلسی که توسط نگاشت همانی تعریف می‌شود) را در نظر می‌گیرند.*

تذکر ۲: *در مثال بالا f دیفئومورفیسم بوده و دو ساختار دیفرانسیل‌پذیری فوق روی $I\!R$ با تقریب یک دیفئومورفیسم با هم برابر می‌باشند.*

حال در اینجا با مسئله طبقه بندی نمودن ساختارهای دیفرانسیل‌پذیری[1] C^∞ با تقریب یک دیفئومورفیسم مواجه می‌شویم. بعداً خواهیم دید که هر ساختار دیفرانسیل‌پذیری روی M یک توپولوژی روی M ایجاد می‌کند که آنرا توپولوژی ذاتی خواهیم نامید.

در مورد $M = I\!R^n$ و $(n \neq ۴)$ می‌توان نشان داد که تمام ساختارهای دیفرانسیل پذیری که همان توپولوژی $I\!R^n$ را ایجاد می‌کنند با ساختار دیفرانسیل‌پذیر طبیعی (یعنی اطلسی که توسط نگاشت همانی $A = Id$ تعریف می‌شود) دیفئومورف می‌باشند. اما اگر $n = ۴$ باشد توسط دونالدسون[2] ثابت شده است که روی $I\!R^۴$ ساختارهای دیفرانسیل پذیر C^∞ غیر دیفئومورف نیز وجود دارند که توپولوژی آنها همان توپولوژی ذاتی $I\!R^۴$ است. اخیراً اثبات گردیده است که مجموعه ساختارهای غیر دیفئومورف روی $I\!R^۴$ نامتناهی و ناشمارا نیز می‌باشند.

در اینجا مشاهده می‌شود که $I\!R^۴$ با $I\!R^n$ به ازاء $n \neq ۴$ تفاوت فاحش دارد. به همین دلیل است که بخش عظیمی از تحقیقات هندسه به مطالعه منیفلدهای چهاربعدی اختصاص یافته است. این تحقیقات نشان می‌دهد که بعد چهارم دارای خواص فوق‌العاده و غیرعادی

---

[1] *Classification of Differential Structure*

[2] *Donaldson*

است و فضای چهار بعدی مکان و زمان در فیزیک کاربرد فراوان دارد.

اما در مورد کره با بُعد $n \leq ۶$ فقط یک نوع ساختار دیفرانسیل‌پذیری (با تقریب یک دیفئومورفیسم) وجود دارد. در روی $S^{۷}$، ۲۸ نوع ساختار دیفرانسیل‌پذیری و در روی $S^{۳۱}$ بیش از شانزده میلیون ساختار دیفرانسیل‌پذیری وجود دارد. این نتایج توسط میلنر[۱] بدست آمده‌اند. همانطوریکه مشاهده می‌شود مسئله طبقه‌بندی ساختارهای دیفرانسیل‌پذیری یک مسئله باز بوده و فقط در موارد معدودی تعداد آن مشخص شده است.

۴.۱ § یادآوری قاعده زنجیره‌ای[۲] در $I\!R^n$ و بیان آن برای منیفلدها

در این بخش ابتدا قاعده زنجیره‌ای در روی $I\!R^n$ را یادآوری نموده سپس آنرا برای منیفلدها تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم $f : I\!R^n \to I\!R$ یک تابع حقیقی باشد مشتقات جزئی تابع f را با $D_i f$ نشان داده به صورت زیر تعریف می‌نماییم

$$(D_i f)(a) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a^{۱}, \cdots, a^i + h, \cdots, a^n) - f(a)}{h}$$

اگر $f : I\!R^n \to I\!R$ و $g : I\!R^m \to I\!R^n$ باشد آنگاه مشتقات جزئی تابع مرکب $f \circ g$ از قاعده زنجیره‌ای به دست می آید .این مشتقات را می‌توان در رابطه زیر خلاصه نمود :

قاعده زنجیره‌ای $D_i(f \circ g)(a) = \sum_{j=۱}^{n} D_j f(g(a)) \cdot (D_i g^j)(a)$

که در آن g^jها مولفه‌های تابع gبوده که از رابطه زیر بدست می‌آیند.

$$g : I\!R^m \longrightarrow I\!R^n$$

$$g : x = (x_{۱}, \cdots, x_m) \mapsto (g^{۱}(x), \cdots, g^n(x))$$

$$j = ۱, \cdots, n, \; i = ۱, \cdots, m$$

---

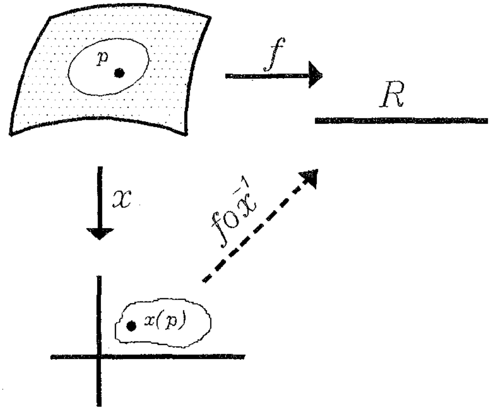
[۱] مراجعه شود به [۲۱]، [۲۲] و [۲۳] *Milnor*

[۲] *Chain rule*

حال می‌خواهیم قاعده زنجیره‌ای را برای توابع تعریف شده روی منیفلدها تعمیم دهیم. برای اینکار باید از وجود کارت‌های موضعی استفاده کنیم. امّا قبل از این کار به بیان چند تعریف و قرارداد نمادگذاری می‌پردازیم.

نگاشت f از منیفلد M در مجموعهٔ اعداد حقیقی را یک **تابع حقیقی روی** M می‌نامیم.

جبر توابع $\mathbf{C}^\infty$ در نقطه p از منیفلد M یا مجموعه توابع حقیقی C^∞ از یک همسایگی $p \in M$ در $\mathbb{R}$ را با $C^\infty(p)$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم $f \in C^\infty(p)$



شکل ۱.۱۶ : تابع حقیقی روی یک منیفلد

در اینجا اگر احتمال اشتباه نرود از نماد $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ جهت نشان دادن مشتقات جزئی $f \circ x^{-1}$ استفاده می‌کنیم.

نمادگذاری:

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(p)} = D_i(f \circ x^{-1})(x(p))}$$

حال با استفاده از کارت‌ها، قاعده زنجیره‌ای را برای منیفلدها بیان می‌کنیم.

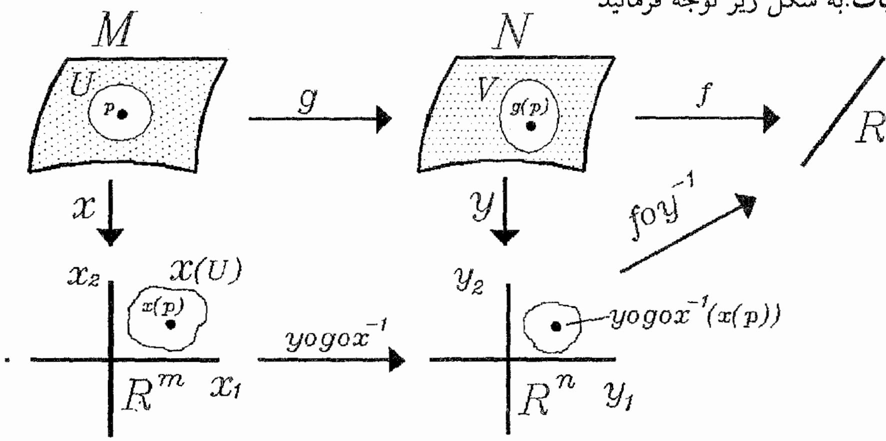
لم: فرض کنیم $g : M \to N$ و $f : N \to \mathbb{R}$ و $f \circ g \in C^\infty(p)$ **در این صورت**

اگر x و y کارت‌هایی روی M و N حول p و $g(p)$ باشند، داریم

$$\boxed{\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x^i}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^j}\right)_{g(p)}\left(\frac{\partial g^j}{\partial x_i}\right)_p}$$

که در آن $g^j=y^j\circ g$.

اثبات: به شکل زیر توجه فرمائید



شکل ۱.۱۷ : ترکیب دو تابع روی منیفلدها

داریم :

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(p)=D_i((f\circ y^{-1})\circ(y\circ g\circ x^{-1}))_{(x(p))}$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای در $\mathbb{R}^n$ داریم

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(p)=\sum_{j=1}^{n}D_j(f\circ y^{-1})_{(y\circ g\circ x^{-1})(x(p))}D_i(y^j\circ g\circ x^{-1})_{x(p)}$$
$$i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$$

با استفاده از نمادگذاری فوق داریم

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(p)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^j}\right)_{g(x^{-1}(x(p)))}\left(\frac{\partial(y^j\circ g)}{\partial x_i}\right)(p)$$

اگر قرار دهیم $g^j = y^j \circ g$ حکم ثابت می‌شود. □

تمرین:

۱ـ نشان دهید اگر (x, U) و (y, V) دو کارت روی منیفلد M بوده و f تابع حقیقی $f : M \to \mathbb{R}$ باشد، آنگاه در $U \cap V$ رابطه بین مشتقات جزئی f در کارت‌های x و y عبارت است از

$$(\frac{\partial f}{\partial x_i})_p = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial y_j}{\partial x_i}) \frac{\partial f}{\partial y_j}$$

در اینجا ماتریس $(\frac{\partial y_j}{\partial x_i})$ را **ماتریس ژاکوبین‌تغییر** مختصات و دترمینان آنرا **ژاکوبین**[1] تغییر مختصات می‌نامند.

۲ـ نشان دهید تابع $f : M \to N$ دیفرانسیل‌پذیر است اگر وتنها اگر برای هر تابع دیفرانسیل‌پذیر $g : N \to \mathbb{R}$ تابع $g \circ f$ دیفرانسیل‌پذیر باشد.

۵.۱ § توپولوژی منیفلدها

I توپولوژی ذاتی[2]

توپولوژی ذاتی (یا توپولوژی وابسته به اطلس) روی منیفلد M در حقیقت توپولوژی است که توسط حوزه تعریف کارت‌ها روی M تعریف می‌شود. به عبارت دیگر در اینجا نشان می‌دهیم که خانواده حوزه تعریف تمام کارت‌های M دراطلس ماکزیمال تشکیل یک توپولوژی روی M می‌دهند.

براین اساس می‌توان منیفلدها را به عنوان فضاهای توپولوژیکی تعریف نموده آنها را مورد مطالعه قرارداد.

گزاره ۱: **فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر، زوج (x, U) یک کارت روی M و**

---

[1] $Jacobian$

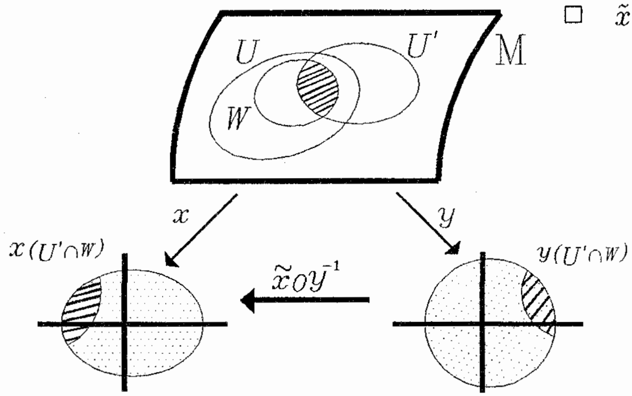
[2] $Intrinsic\ Topology\ (Topologie\ intrinseque)$

$W \subset U$ اگر $x(W)$ بازی از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه زوج $(x|_W, W)$ نیز یک کارت روی M از همان اطلس ماکزیمال است.

اثبات: فرض کنیم Aیک اطلس ازM باشد باید نشان دهیم که اگر $\tilde{x} = x|_W$ آنگاه $\tilde{x}$ متعلق به اطلس ماکزیمال $\overline{A}$ است. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم که $\tilde{x}$ با تمام کارت‌های A C^k-مرتبط می‌باشد بدین منظور لازم است ثابت کنیم برای هر کارت (y, U') از $\mathcal{A}$ نگاشت تغییر کارت $\tilde{x} \circ y^{-1}$و $y \circ \tilde{x}^{-1}$ از کلاس C^k بین دو باز از $\mathbb{R}^n$ می‌باشند. اگر $y \in A$ داریم

$$\tilde{x} \circ y^{-1} = x \circ y^{-1}|_{y(U' \cap W)} \quad \text{و} \quad y \circ \tilde{x}^{-1} = y \circ x^{-1}|_{x(U' \cap W)}$$

چون $x \circ y^{-1}$ یک دیفئومورفیسم C^k است، $\tilde{x} \circ y^{-1}$ و $y \circ \tilde{x}^{-1}$ نیز دیفئومورفیسم‌های C^k می‌باشند. حال کافی است ثابت کنیم که $x(U' \cap W)$ و $y(U' \cap W)$ باز هستند. چون کارت های (x, U) و (y, U') مرتبط C^k می‌باشند $x(U \cap U')$ باز می‌باشد و از طرف دیگر بنابر فرض $x(W)$ باز است لذا $x(U \cap U') \cap x(W) = x(U \cap U' \cap W) = x(U' \cap W)$ باز بوده، به همین صورت $y(U' \cap W)$ باز می‌باشد زیرا تصویر $x(U' \cap W)$ است و در نتیجه $\tilde{x} \in \overline{\mathcal{A}}$ $\square$



شکل ۱.۱۸ : تحدید یک کارت نیز می‌تواند تحت شرایطی یک کارت باشد

گزاره ۲ : اگر M منیفلدی به بعد n ازکلاس C^k باشد آنگاه M دارای یک توپولوژی است که اعضای پایه آنرا گردایه حوزه تعریف کارت‌های اطلس ماکزیمال M تشکیل می‌دهند.

این توپولوژی را توپولوژی ذاتی یا توپولوژی وابسته به اطلس نامیده آنرا توسط T_M نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات توپولوژی وابسته به اطلس را توپولوژی کانونی نیز می‌نامند.

اثبات: در اینجا باید شرایط پایه توپولوژی را بشرح زیر تحقیق کنیم. فرض کنیم $\mathcal{A}$ مجموعهٔ حوزه‌های تعریف کارت‌ها باشد درستی روابط زیر را بررسی می‌نمائیم.

I اجتماع همه اعضای $\mathcal{A}$ برابر M است.

II اشتراک هر دو عضو $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ باشد

طبق خاصیت اطلس I بخودی خودبرقرار خواهد شد. برای شرط II ابتدا نشان می‌دهیم که اگر U, V حوزه تعریف دو کارت (y, V) و (x, U) بافرض $U \cap V \neq \phi$ روی M باشند، آنگاه $U \cap V$ نیز حوزه تعریف کارت دیگری روی M است.

می‌دانیم نگاشت تغییر کارت زیر نگاشت C^k از بازی در $\mathbb{R}^n$ در باز دیگری در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$$

لذا $x(U \cap V)$ بازی در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد و بنا بر گزاره قبل $(x|_{U \cap V}, U \cap V)$ یک کارت با حوزه تعریف $U \cap V$ روی M می‌باشد. به این ترتیب $\mathcal{A}$ یک پایه توپولوژی است که توپولوژی پدید آمده آن، T_M یک توپولوژی روی M تعریف می‌نماید. $\square$

یادآوری می‌کنیم که پایه توپولوژی خانواده‌ای است مانند $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه‌های M که M را می‌پوشاند و در شرط زیر صدق می‌کند

$$\forall U, V \in \mathcal{B}\ \forall p \in U \cap V \quad \exists W \in \mathcal{B} \quad p \in W \subset U \cap V$$

لذا همان طور که در بالا دیدیم برای اثبات پایه بودن کافی است نشان دهیم اشتراک غیرتهی $U \cap V \neq \phi$ حوزه تعریف هر دو کارت M، حوزه تعریف کارت دیگری روی M می‌باشد.

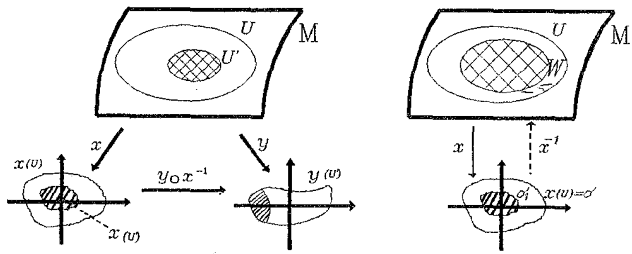
موضوع دیگری که باید در نظر داشت آن است که بنابر آنچه گذشت **اشتراک حوزه تعریف دو کارت حوزه تعریف یک کارت می‌باشد، اما اجتماع حوزه تعریف دو کارت الزاماً حوزه تعریف یک کارت نخواهد بود.** به عنوان مثال نقض در این مورد کره را با تصویر

استریوگرافیک در نظر می‌گیریم. اجتماع دو حوزه تعریف کارتهای مربوط به قطب شمال و جنوب نمی‌تواند دامنه یک کارت باشد.

گزاره ۳: فرض کنیم (x, U) یک کارت روی M باشد نگاشت x یک همئومورفیسم نسبت به توپولوژی ذاتی است.

اثبات: چون x دوسویی است برای آنکه همئومورفیسم باشد کافی است نشان دهیم $x : U \to \sigma \subset I\!R^n$ (برای توپولوژی ذاتی) پیوسته وباز می‌باشد. فرض کنیم σ_1 بازی از $I\!R^n$، $\sigma_1 \subset \sigma$ و $W = x^{-1}(\sigma_1)$ باشد. چون $x(W) = \sigma_1$ بازی است از $I\!R^n$ بنابر گزاره ۱ $(x|_W, W)$ یک کارت روی M بوده و W بازی از M می‌باشد (برای توپولوژی ذاتی). بنابراین x پیوسته است. شکل الف. حال نشان می‌دهیم x باز می‌باشد.

ابتدا U' بازی از اعضای پایه توپولوژی وابسته به اطلس‌ها $(U' \subset U)$را در نظرگرفته نشان می‌دهیم $x(U')$ باز است. U' حوزه تعریف کارتی مانند y می‌باشد و نگاشت تغییر کارت عبارت است از



شکل ۱.۱۹ : هر کارت یک همئومورفیسم است

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap U') \to y(U \cap U')$$

که دیفئومورفیسمی بین دو باز $I\!R^n$ است.شکل (ب). به همین صورت

$$y \circ x^{-1} : x(U') \to y(U')$$

دیفئومورفیسمی بین دو باز$I\!R^n$ است. بنابراین $x(U')$ بازی از $I\!R^n$ می‌باشد. حال فرض کنیم $V = \cup U'_i$ بازی از M برای توپولوژی وابسته به اطلسها باشد به طوری که U'_iها از

اعضای پایه این توپولوژی بوده و $V \subset U$ باشد نشان می‌دهیم $x(V)$ باز است.

$$x(V) = x(\cup U'_i) = \cup x(U'_i)$$

بنابر اثبات قسمت قبل $x(U'_i)$ ها باز هستند، لذا $x(V)$ باز می‌باشد و در نتیجه x یک نگاشت باز است. □

تذکر ۱: *با استفاده از نتایج بدست آمده در این بخش می‌توان منیفلدها را به صورت معادل زیر نیز تعریف نمود.*

تعریف منیفلد توپولوژیک: *فرض کنیم M یک فضای توپولوژیک باشد، می‌گوییم M یک* **منیفلد از کلاس C°** *(یا* **منیفلد توپولوژیک***) با بعد n است، اگر هر نقطه از آن دارای یک همسایگی در M بوده که با بازی از $I\!R^n$ همئومورف باشد.*

در اینجا اگر $p \in U$ و $U \subset M$ باشد، زوج (x, U) را یک کارت موضعی در همسایگی p گویند بشرط آنکه x همئورفیسمی از U در σ، بازی از $I\!R^n$ باشد.

تذکر ۲: *تعریف اخیر دارای این برتری است که خاصیت اساسی منیفلدها یعنی موضعاً همئومورف بودن با $I\!R^n$ را در مرحله اول معرفی می‌نماید. اما تعریفی که در ابتدای این فصل آوردیم از جهت کاربرد عملی‌تر است و برای آنکه ثابت کنیم مجموعه‌ای یک منیفلد است احتیاج به آن نداریم که توپولوژی داشتن آن را بررسی نمائیم بلکه این خاصیت بخودی خود با ارائه نمودن حوزه تعریف کارت‌ها تحقق می‌یابد.*

به عنوان نتیجه‌ای از گزاره ۳ می‌توان قضیه زیر را بیان نمود.

قضیه ۱: **فرض کنیم $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^r باشد،آنگاه f پیوسته است.** (برای توپولوژی ذاتی M و N)

اثبات: فرض کنیم (x, U) و (y, V) کارت‌های M و N باشند بنابرتعریف نگاشت $F = y \circ f \circ x^{-1}$ دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^r می‌باشد (بعنوان نگاشتی از $I\!R^n$ در $I\!R^m$) بنابراین F برای توپولوژی طبیعی $I\!R^m$ و $I\!R^n$ پیوسته است. چون x و y بنابر گزاره ۳ همئومورفیسم‌هائی (نسبت به توپولوژی ذاتی M و N و توپولوژی طبیعی $I\!R^n$ و $I\!R^m$) می‌باشند نگاشت f، $f = y^{-1} \circ F \circ x$ پیوسته می‌باشد (برای توپولوژی وابسته

به اطلس‌های M و N). □

تذکر ۳: *سؤالی که به طور طبیعی با آن مواجه می‌شویم از اینقرار است:*

«فرض کنیم M یک فضای توپولوژیک با توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد، می‌خواهیم روی M ساختار یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر (اطلس ماکزیمال) تعریف نمائیم، تحت چه شرایطی توپولوژی وابسته به اطلسها $\mathcal{T}_M$ برابر توپولوژی $\mathcal{T}$ می‌گردد.»

بنابر گزاره ۳ اگر $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ کارت‌ها، همئومورفیسم‌هایی نسبت به $\mathcal{T}$ می‌باشند. عکس این موضوع را درگزاره بعد ثابت می‌نمائیم، به این صورت که اگر کارت‌های **فقط یک اطلس** همئومورفیسم‌هایی نسبت به $\mathcal{T}$ باشند آنگاه $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ (در اینجا لازم نیست که این فرض برای تمام اطلس‌ها مشمول اطلس ماکزیمال برقرار باشد)

گزاره ۴:*فرض کنیم $(M,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، همچنین فرض کنیم که M دارای ساختار یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بوده و $\mathcal{T}_M$ توپولوژی وابسته به اطلسهای آن باشد آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ باشد آن است که یک اطلس روی M موجود بوده که نگاشت کارت‌های آن نسبت به $\mathcal{T}$ همئومورفیسم باشد.*

اثبات: شرط لازم قبلاً اثبات گردیده است در اینجا به اثبات شرط کافی می‌پردازیم. فرض کنیم که کارت‌های یک اطلس $\mathcal{A}$ روی M نسبت به $\mathcal{T}$ همئومورفیسم باشند. ابتدا ثابت می‌کنیم که $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{T}$ فرض کنیم $U \in \mathcal{T}_M$ (یعنی بازی از توپولوژی وابسته به اطلس‌ها) و (x, W) یک کارت از $\mathcal{A}$باشد به طوری که $W \cap U \neq \phi$.

چون W بازی از $\mathcal{T}_M$ است $W \cap U \in \mathcal{T}_M$، بنابراین چون x یک همئومورفیسم نسبت به $\mathcal{T}_M$است $x(W \cap U)$ بازی از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. اما چون بنابرفرض x یک همئومورفیسم نسبت به $\mathcal{T}$ می‌باشد، $W \cap U \in \mathcal{T}$. حال $U = \cup_{p\in U}(W_p \cap U)$ که در آن W_p کارت‌هایی در همسایگی p می‌باشند. بنابراین U اجتماع بازها بوده و $U \in \mathcal{T}$ می‌باشد، در نتیجه $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{T}$.

حال ثابت می‌کنیم که $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_M$.فرض کنیم $U' \in \mathcal{T}$ و (x, W) کارتی از$\mathcal{A}$ باشد به طوری که $U' \cap W \neq \phi$. چون $W \in \mathcal{T}_M$ بنابر مطالب بالا $W \in \mathcal{T}$ در نتیجه $U' \cap W \in \mathcal{T}$. از طرف دیگر بنابر فرض همئومورفیسم بودن x نسبت به

$\mathcal{T}$، $x(U'\cap W)$ بازی از $I\!R^n$ است، چون x یک همئومورفیسم نسبت به $\mathcal{T}_M$ می‌باشد $U'\cap W\in\mathcal{T}_M$. حال چون U' اجتماع مجموعه‌هایی مانند $U'\cap W$ می‌باشد، $U'\in\mathcal{T}_M$، در نتیجه داریم $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}_M$. $\square$

تذکر ۴: منظور از یک منیفلد صفربعدی مجموعه‌ای است که همه نقاط آن نقاط تنها هستند یعنی توپولوژی آن توپولوژی گسسته است.

IIـ فضای توپولوژیک هاسدرف[۱]

در اینجا در ادامه این بخش به مطالعه برخی از خواص توپولوژیکی منیفلدها می‌پردازیم. تاکنون ما هیچگونه شرطی روی توپولوژی یک منیفلد قرار ندادیم، اما غالباً لازم است شرایط زیر را بدان اضافه نمائیم.

الف) شرط هاسدرف: یک فضای توپولوژیک را **هاسدرف** گوئیم اگربرای هر دو نقطه متمایز آن همسایگی‌هایی از این دو نقطه موجود باشند که یکدیگر را قطع نکنند. شرط هاسدرف بودن توپولوژی یک منیفلد برای اثبات یکتایی حد دنباله‌های همگرا روی منیفلدها ضروری است، از اینرو اغلب اوقات منیفلدها را هاسدرف فرض می‌نمائیم. اما این موضوع تأیید کننده آن نیست که الزاماً توپولوژی منیفلدها باید هاسدرف باشد و براحتی می‌توان منیفلدهایی مثال زد که این توپولوژی هاسدرف نباشند. ([۲] بخش ۲.۲.۱۰.۴ یا [۵] صفحه ۵ [۲])

ب) شرط پایه شمارا:[۲] اگر M را بتوان توسط تعدادی شمارا از کارت‌ها پوشانید می‌گوئیم M دارای پایه شمارا است.

شرط پایه شمارا داشتن یک منیفلد جهت وجود یک افراز واحد دیفرانسیل‌پذیر بر روی آن الزامی است، در پیوست فصل ۲ به مطالعه دقیقتر این موضوع می‌پردازیم.

توجه: نظر به اهمیت شرط هاسدرف بودن از این به بعد کلیه **منیفلدها را هاسدرف** و **دارای پایه شمارا** فرض می‌نمائیم، مگر آنکه عکس آن تصریح گردد.

[۱] *Hausdorff*

[۲] *Countable basis (base dénombrable)*

فضای توپولوژیک M را **موضعاً فشرده**[۱] گوییم اگر برای هرنقطه p از M و هرهمسایگی U ازp یک همسایگی فشرده از p مانند K موجود باشد به طوری که $K \subset U$ باشد.
فضای توپولوژیک M را **موضعاً همبند**[۲] گوئیم اگر برای هر نقطه p از M و هرهمسایگی U از p یک همسایگی همبند مانند V از p موجود باشد به طوری که $V \subset U$ باشد.

قضیه ۲: هر منیفلد M یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده است.
اثبات: فرض کنیم $p \in M$ و(x, U)یک کارت در همسایگی p باشد. بنابر گزاره ۳، x یک همئومورفیسم از U روی $x(U)$، همسایگی $x(p)$ است. چون $I\!R^n$ موضعاً فشرده است یک همسایگی فشرده K از $x(p)$ در $I\!R^n$ موجود است به طوری که $x(p) \in K \subset x(U)$.
حال می‌گوئیم چون x^{-1} پیوسته است و نگاشت پیوسته فشردگی را حفظ می‌نماید بنابراین $x^{-1}(K)$ یک همسایگی فشرده از p در U می‌باشد، لذا بنابر تعریف M موضعاً فشرده است. □

قضیه ۳: هر منیفلد M، موضعاً همبند است. (در این قضیه M الزاماً هاسدرف نیست)
اثبات: فرض کنیم $p \in M$ بوده و (x, U) یک کارت در همسایگی p باشد. چون $I\!R^n$ موضعاً همبند است هر همسایگی $x(U)$ از $x(p)$ شامل یک همسایگی همبند V از$x(p)$ می‌باشد به طوری که $x(p) \in V \subset U$. حال چون x^{-1} پیوسته است و نگاشت پیوسته همبندی را حفظ می‌نماید، $x^{-1}(V)$ یک همسایگی همبند از p در U می‌باشد.لذا بنابر تعریف M موضعاً همبند است. □

---

[۱] *Locally Compact (Locallement Compact)*
[۲] *Locally Connected (Locallement Connexe)*

به همین صورت می‌توان خواص دیگری از جمله معادل بودن **همبندی**[۱] و **همبندی مسیری**[۲] را برای منیفلدها ثابت کرد.

گزاره ۵: **فرض کنیم $f : M \to N$ دیفرانسیل‌پذیر بوده و U زیرمجموعه بازی از M باشد. در این صورت $f|_U$ نیز دیفرانسیل‌پذیر است.**

اثبات این گزاره براحتی با استفاده از تعریف دیفرانسیل پذیری درنقطه p صورت گرفته به عنوان تمرین واگذار می‌گردد. (می‌دانیم هر زیرمجموعهٔ باز از M یک منیفلد است.)

گزاره ۶: **اگر $f : M \to N$ دیفئومورفیسم بوده و U زیرمجموعه بازی از M باشد. آنگاه $f|_U$ نیز یک دیفئومورفیسم بین U و $f(U)$ می‌باشد.**

اثبات این گزاره با استفاده از گزاره قبل صورت گرفته به عنوان تمرین واگذار می‌گردد.

گزاره ۷: **فرض کنیم $g : M \to N$ و $f : N \to P$ دیفرانسیل‌پذیر باشند آنگاه $f \circ g$ دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد. اگر f و g دیفئومورفیسم باشند $f \circ g$ نیز دیفئومورفیسم می‌باشد.**

اثبات این گزاره با استفاده از تعریف دیفرانسیل‌پذیری در یک نقطه و خاصیت دیفرانسیل‌پذیر بودن ترکیب دو تابع دیفرانسیل‌پذیر در $\mathbb{R}^n$ صورت گرفته به عنوان تمرین واگذار می‌گردد.

تمرین:

۱ـ گزاره ۵ و ۶ را ثابت کنید.

۲ـ گزاره ۷ را ثابت کنید.

۳ـ فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر به بعد n باشد.

الف ـ نشان دهید هر کارت M یک دیفئومورفیسم از حوزه تعریف آن به تصویرش می‌باشد.

ب ـ نشان دهید هر دیفئومورفیسم از یک زیر مجموعه باز M در زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^n$ یک کارت M است.

۴ـ ثابت کنید اگرمنیفلد توپولوژیک M همبند باشد آنگاه بعد M به کارت‌های M

---

[۱] *Connected (Connexe)*

[۲] *Connected by arc (Connexe par arc)*

بستگی ندارد و مقداری ثابت است.

راهنمایی: از قضیه پایایی دامنه[1] بشرح زیر استفاده کنید (اثبات این قضیه در کتب توپولوژی موجود است)

قضیه: اگر U بازی از $I\!R^n$ بوده و $f : U \to I\!R^n$ پیوسته و یک به یک باشد آنگاه $f(U)$ باز است.

به عبارت دیگر از این قضیه نتیجه می‌شود به ازاء هر باز $V \subset U$، $f(V)$ باز بوده و در نتیجه f^{-1} پیوسته می‌شود، لذا f همئومورفیسم است، و همئومورفیسم‌ها بُعد حوزه تعریف را حفظ می‌کنند. این تمرین را می‌توان با استفاده از گزاره ۳ نیز اثبات نمود.

۵ـ سهمی $P = \{(x,y) \in I\!R^2 | y = x^2\}$ را در نظر می‌گیریم

الف) با ارائه یک کارت کلی و اطلس تک کارتی مربوط به آن، نشان دهید سهمی یک منیفلد توپولوژیک یک بُعدی است. سپس اینکار را توسط یک اطلس ۲ــ کارتی انجام دهید.

ب) نشان دهید که سهمی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر از کلاس C^∞ است.

راهنمایی: توجه نمایید که از تعریف جدید منیفلد مذکور در تمرین (۳) نمی‌توان این موضوع را تحقیق نمود، زیرا نگاشت حقیقی دیفرانسیل‌پذیر روی سهمی تنها پس از اثبات منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بودن سهمی، قابل تعریف است.

ج) بجای سهمی فوق دو پاره خط متقاطع $N = \{(x,y) \in I\!R^2 | y = |x|\}$ را در نظر گرفته به سؤالات زیر با ذکر دلیل پاسخ دهید.

Iـ آیا N منیفلد توپولوژیک است؟

IIـ آیا N با یک اطلس مناسب یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است؟

۶ـ فرض کنیم M یک منیفلد ۲ــبعدی (یک رویه) در $I\!R^3$ باشد.

الف) نشان دهید اشتراک گوی‌های باز $I\!R^3$ با M یک توپولوژی روی M تعریف می‌نماید. این توپولوژی را **توپولوژی القایی**[1] $I\!R^3$ روی M می‌نامیم و با $T_M^{I\!R^3}$ نشان

---

[1] *Invariance of domain*

[1] *Induced Topology (Topologie induit)*

می‌دهیم.

$$\mathcal{T}_M^{I\!R^3} = \{U | U = \mathcal{B} \cap M \text{ و } \mathcal{B} \in \mathcal{T}_{I\!R^3}\}$$

در اینجا $\mathcal{T}_{I\!R^3}$ توپولوژی طبیعی $I\!R^3$ است که از گوی‌های باز به‌دست آمده است.

ب) مثالی از یک رویه بزنید که توپولوژی ذاتی و القایی آن برهم منطبق شوند.

ج) مثالی از یک رویه بزنید که توپولوژی ذاتی و القایی آن برهم منطبق نباشند.

پیوست I: یادآوری چند تعریف و قضیه از آنالیز ریاضی

مقدمه

در این فصل به یادآوری چند تعریف و قضیه در آنالیز ریاضی می‌پردازیم. در این کتاب این قضایا را برای منیفلدها تعمیم داده یا مستقیماً از آنها در اثبات قضایای دیگر و یا در حل مسائل مختلف استفاده خواهیم کرد. البته نگارش این فصل بدان معنی نیست که مقدماتی که برای هندسه لازم است منحصر به چند قضیه و یا چند تعریف است که در اینجا بتوان به آن اشاره کرد. بلکه اطلاعات مورد لزوم آن ناشی از ذوقی است که در اثر تفکر هنگام مشاهده اشیاء هندسی و روابط بین آنها در طی دوران تحصیل برای بیننده ایجاد می شود و او را وادار می‌سازد که با دقت در آنها، و مطالعه کتب مختلف، بینش خود را در این زمینه افزایش دهد. اما از آنجا که دانسته‌های دانشجویان در مقطع کارشناسی در مورد دروس مختلف متفاوت است لازم دیدیم در این فصل چند قضیه از آنالیز را که دانشجویان قبلاً در درس آنالیز III با آن آشنا شده‌اند تکرار نماییم تا ضمن یادآوری مطالب مورد نیاز فصول آینده، خواننده تا اندازه‌ای با روش توسعه و تعمیم در ریاضیات آشنا شود.

یادآوری مطالبی از آنالیز ریاضی

قضیه تابع معکوس، قضیه رتبه و قضیه تابع ضمنی

به اختصار در این بخش به یادآوری چند قضیه اساسی از آنالیز که کاربرد فراوان در هندسه دارند به نامهای قضیه تابع معکوس، قضیه رتبه و قضیه تابع ضمنی می‌پردازیم. اثبات این قضایا در کتب کلاسیک آنالیز موجود است که از آوردن آن در اینجا خودداری می‌شود.

فرض کنیم U بازی از $I\!R^n$ و V بازی از $I\!R^p$ باشد می‌گوییم نگاشت f، $f : U \to V$ در نقطه $x_\circ \in U$ **مشتق‌پذیر** است اگر یک نگاشت خطی مانند

$$(Df)_{x_\circ} : I\!R^n \to I\!R^p$$

موجود باشد بطوریکه

$$\lim_{||\vec{h}|| \to \circ} \frac{f(x_\circ + \vec{h}) - f(x_\circ) - (Df)_{x_\circ}(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \circ$$

براحتی می‌توان نشان داد که اگر $(Df)_{x_\circ}$ موجود باشد مقدار آن بطور یکتا توسط ماتریس زیر معرفی می‌شود.

$$(Df)_{x_\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_\circ}$$

نگاشت $(Df)_{x_\circ}$ را **دیفرانسیل** f در $x_\circ$ می‌نامند، ماتریس آنرا **ماتریس ژاکوبین**[1] f در $x_\circ$ و در حالت $x = p$ دترمینان ماتریس را **ژاکوبین**[2] f در $x_\circ$ می‌گوییم.

---

[1] *Jacobian*

[2] *Jacobian matrice*

در مورد دیفرانسیل توابع مرکب رابطه زیر را داریم که آنرا قاعده زنجیره‌ای می‌نامند.

$$D(fog)_{x_\circ} = (Df)_{g(x_\circ)}(Dg)_{x_\circ}$$

می‌گوییم نگاشت $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ از **کلاس** C^k می‌باشد اگر در تمام نقاط U تمام مشتقات جزئی تا مرتبه kام آن موجود و پیوسته باشند.

بنابر قضیه شوارتز بدون توجه به ترتیب مشتق‌گیری مشتقات جزئی تا مرتبه kام تابع f از کلاس C^k با یکدیگر برابرند. یعنی

$$\frac{\partial^h f}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\cdots\partial x^{i_h}} \qquad h \le k$$

توابعی متقارن نسبت به اندیسهای $i_1, \cdots, i_h$ هستند.

ثابت می‌شود که اگر f از کلاس C^1 باشد آنگاه f دیفرانسیل‌پذیر نیز هست.

تعریف: *اگر U و V بازه‌هایی از $\mathbb{R}^n$ باشند نگاشت $f : U \longrightarrow V$ را یک* **دیفئومورفیسم**[1] *از کلاس C^k گوییم اگر f دو سویی بوده و f و f^{-1} از کلاس C^k باشند.*

اگر f دیفئومورفیسم باشد آنگاه $(Df)_{x_\circ}$ دوسویی است زیرا $(Df \circ Df^{-1})\big|_{f(x_\circ)}$ و $(Df^{-1} \circ Df)\big|_{x_\circ}$ نگاشت همانی هستند. قضیه تابع معکوس عکس این مطلب را بطور موضعی بیان می‌دارد به عبارت دیگر اگر f از کلاس C^k $(1 \le k)$ و $(Df)_{x_\circ}$ دوسویی باشد آنگاه f در یک همسایگی $x_\circ$ دیفئومورفیسم کلاس C^k است.

قضیه تابع معکوس[2]

فرض کنیم U و V بازهایی از $\mathbb{R}^n$ بوده و نگاشت $f : U \longrightarrow V$ از کلاس C^k $(1 \le k)$ باشد. فرض کنیم نقطه‌ای مانند $x_\circ \in U$ موجود باشد بطوریکه

$$\det(Df)_{x_\circ} \neq 0 \qquad \text{(یعنی } (Df)_{x_\circ} \text{ در } x_\circ \text{ دوسویی باشد)}$$

---

[1] *diffeomorphism*

[2] *Inverse function theorem (théorème de fonction inverse)*

آنگاه بازی مانند U' در U شامل $x_\circ$ وجود دارد بطوریکه تحدید $f\Big|_{U'}$ یک دیفئومورفیسم از کلاس C^k روی تصویرش باشد.

به عبارت دیگر این قضیه بیان می‌کند که اگر Df در $x_\circ$ دوسویی باشد آنگاه f روی یک همسایگی از $x_\circ$ دوسویی است. این موضوع در قضیه رتبه به نحو دیگری بیان می‌گردد.

در قضیه رتبه ثابت می‌شود که اگر Df در $x_\circ$ پوششی (یا بطور مشابه یک به یک) باشد آنگاه f روی یک همسایگی $x_\circ$ پوششی (یا بطور مشابه یک به یک) است.

تعریف: *یک دستگاه مختصات موضعی[۱] از کلاس C^k در همسایگی یک نقطه $x_\circ \in I\!R^n$، عبارت است از زوج (ψ, U) که در آن U بازی از $I\!R^n$ شامل $x_\circ$ و ψ یک دیفئومورفیسم C^k از U روی بازی از $I\!R^n$ است.*

بنابراین برای آنکه یک نگاشت دوسویی از کلاس C^k، $\psi : U \longrightarrow V$ یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی نقطه $x_\circ$ تعریف نماید لازم و کافی است که $\det\,(D\psi)_{x_\circ} \neq \circ$.

گاهی اوقات دستگاه **مختصات موضعی** را دستگاه **مختصات منحنی‌الخط**[۲] نیز می‌گویند. (این نامگذاری بدین دلیل است که ψ خطوط $I\!R^n$ را به منحنی‌ها مرتبط می‌سازد).

تعریف: *نگاشت $C^k(k \geq ۱)$ $f : U \subset I\!R^n \longrightarrow V \subset I\!R^{n+p}$ در $x_\circ \in U$ (در اینجا U و V باز هستند) را یک **جادهنده یا ایمرسیون**[۳] از کلاس C^k گوییم اگر $(Df)_{x_\circ}$ یک به یک باشد. (یا بطور معادل اگر رتبه f برابر بعد حوزه تعریف باشد) نگاشت $f : U \subset I\!R^{n+p} \longrightarrow V \subset I\!R^p$ در $x_\circ \in U$ را یک **پوشاننده یا سوبمرسیون**[۴] گوییم اگر $(Df)_{x_\circ}$ پوششی باشد. (یا بطور معادل اگر رتبه f برابر بعد حوزه مقادیر باشد)*

تذکر: *می‌توان نشان داد اگر $f : U \subset I\!R^n \longrightarrow V \subset I\!R^p$ یک جادهنده (یا بطور مشابه*

---

[۱] *local coordinate system (System de Coordonne' local)*

[۲] *Curveline coordinate system*

[۳] *Immersion*

[۴] *submersion*

پوشاننده) در نقطه $x_\circ$ باشد آنگاه در یک همسایگی به‌اندازه کافی کوچک $x_\circ$ نیز جادهنده (یا بطور مشابه پوشاننده) است.

قضیه رتبه در $\mathbb{R}^n$ [1]

الف ـ فرض کنیم $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+p}$ یک جادهنده یا ایمرسیون از کلاس C^k در نقطه $x_\circ \in U$ باشد. آنگاه یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی $f(x_\circ)$ [یعنی یک زوج (V', y) که V' یک همسایگی $f(x_\circ)$ در V و y یک C^k- دیفئومورفیسم از V' روی بازی از $\mathbb{R}^{n+p}$] و یک همسایگی U' از $x_\circ$ وجود دارد بطوریکه $f(U') \subset V'$ و داشته باشیم

$$yof : U' \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$$

$$(x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_n, \cdots, \circ, \cdots, \circ)$$

نتیجه: اگر f در نقطه p جادهنده یا ایمرسیون باشد آنگاه f بطور موضعی یک به یک است (یعنی برای نقطه p یک همسایگی موجود است که f روی آن یک به یک است) (مراجعه شود به شکل ۱.۲۰)

ب ـ فرض کنیم $f : U \subset \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ یک پوشاننده یا سوبمرسیون از کلاس C^k در $x_\circ$ باشد. آنگاه یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی $x_\circ$ [یعنی یک زوج (U', x) که U' یک همسایگی $x_\circ$ در U و x یک دیفئومورفیسم C^k از U' در بازی از $\mathbb{R}^{n+p}$ باشد] وجود دارد بطوریکه

$$fox^{-1} : x(U') \subset \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(x_1, \cdots, x_{n+p}) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_p)$$

نتیجه: اگر f در نقطه p پوشاننده یا سوبمرسیون باشد آنگاه f بطور موضعی پوششی است (یعنی برای نقطه p یک همسایگی U موجود است که $f(U)$ یک همسایگی $f(p)$ را می‌پوشاند) (مراجعه شود به شکل ۱.۲۱)

---

[1] *Rank theorem (Théorème de Rang)*

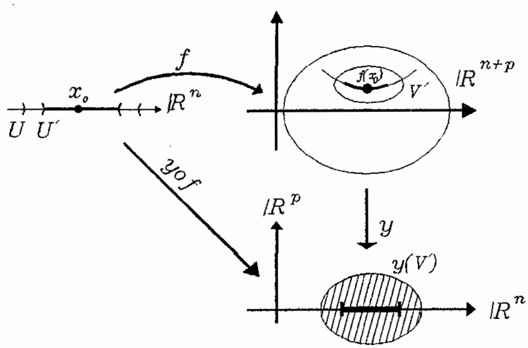
بنابراین قضیه رتبه بیان می‌دارد که پس از یک تغییر مختصات (برای جادهنده در حوزه مقادیر و برای پوشاننده در حوزه تعریف):

الف ـ یک جادهنده یا ایمرسیون بطور موضعی یک به یک است. $U' \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$

$(x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0)$

ب ـ یک پوشاننده یا سوبمرسیون بطور موضعی پوششی است. $x(U') \subset \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$(x_1, \cdots, x_{n+p}) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_p)$

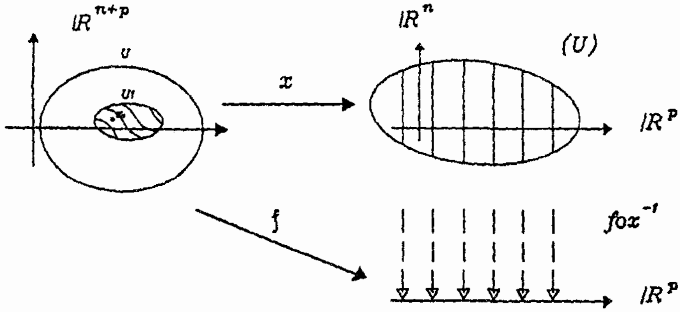


شکل الف ـ f در x_0 جادهنده یا ایمرسیون است

yof یک نگاشت یک به یک کانونی است که بیان کننده جادهنده یا ایمرسیون f در دستگاه مختصات جدید است.

شکل ۱.۲۰:

اثبات قضیه رتبه با استفاده از قضیه تابع معکوس انجام می‌شود که در درس آنالیز III آورده شده است. قضیه تابع معکوس در اثبات قضیه مهم دیگری بنام قضیه توابع ضمنی بکار می‌رود.



شکل ب ـ f در $x_\circ$ سوبمرسیون است

fox^{-1} یک نگاشت پوششی کانونی است که بیان کننده سوبمرسیون f در دستگاه مختصات جدید است.

قضیه تابع ضمنی[1]

فرض کنیم $F : W \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ نگاشتی از کلاس C^k $(k \geq 1)$ بوده بطوریکه به ازاء $W \ni (x_\circ, y_\circ)$ داشته باشیم

$$\begin{cases} F(x_\circ, y_\circ) = \circ \\ det(D_y F)(x_\circ, y_\circ) \neq \circ \end{cases}$$

(در اینجا $D_y F$ ماتریس ژاکوبین مشتقات جزیی F نسبت به متغیرهای y از $\mathbb{R}^q$ است) آنگاه یک همسایگی $x_\circ$ در $\mathbb{R}^p$ مانند U' و یک همسایگی $y_\circ$ در $\mathbb{R}^q$ مانند V' و یک نگاشت رده C^k، f

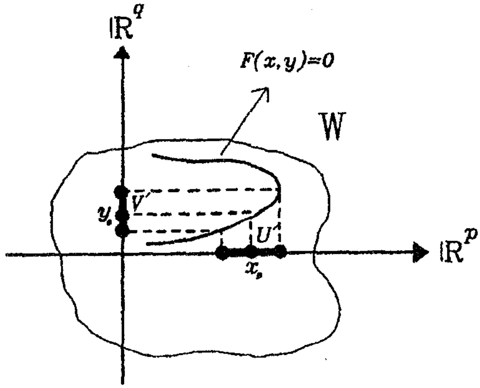
$$f : U' \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow V' \subset \mathbb{R}^q$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

وجود دارد بطوریکه

$$\forall (x,y) \in U' \times V' \quad ، \quad F(x,y) = \circ \Leftrightarrow y = f(x)$$

[1] *Implicit function theorem (Théorème des fonctions implicites)*



شکل ۱.۲۱:

همانطوریکه در شکل مشاهده می‌شود نمودار $F(x,y) = 0$ در حالت کلی تابع نیست اما در همسایگی $U' \times V'$ تابع است.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

فصل ۲: فضای مماس[1]

مقدمه

در فصل دوم به بیان چند مفهوم اساسی در هندسه به نام‌های: بردار مماس، فضای مماس، میدان برداری و نگاشت مماس می‌پردازیم. سپس در ادامه تعاریف دوگان تعاریف قبل را به ترتیب: ۱ـ فرمی، فضای دوگان مماس، میدان ۱ـ فرمی و نگاشت دوگان مماس را بیان نموده مثال‌ها و تمرینات متنوعی ارائه می‌کنیم. در بخش § ۱ با توجه به دو خصوصیت مهم بردارهای مماس در $I\!R^n$ به شرح زیر دو تعریف متفاوت برای بردار مماس در M ارائه می‌کنیم. تعریف اول ناشی از این خاصیت است که یک بردار می‌تواند در یک نقطه بر تعداد بیشماری منحنی مماس باشد. خانواده این منحنی‌ها تشکیل یک کلاس هم‌ارزی می‌دهد. لذا **کلاس هم‌ارزی تعریف شده در یک نقطه p را یک بردار مماس در p می‌نامیم.** تعریف دوم نتیجه خاصیتی است که بردارها به عنوان نگاشت مشتقگیری دارند. در این باب در ریاضیات عمومی با مفهومی به نام مشتق جهت‌دار یا مشتق سویی از یک تابع در جهت یک بردار آشنا گردیده‌ایم. لذا **در تعریف دوم یک بردار به عنوان یک مشتق‌گیری تعریف می‌شود.**

قضیه‌ای نیز در این بخش به اثبات می‌رسانیم که یکسانی تعاریف بالا از آن نتیجه می‌شود

---

[1] $Tangent\ space$

در بخش ۲§ پس از تعریف TM، خانواده فضاهای برداری مماس نشان می‌دهیم که این خانواده یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است.

در بخش ۳§ مشابه دو تعریف ارائه شده برای بردارهای مماس دو تعریف برای میدان‌های برداری ارائه نموده یکسان بودن آن را در یک قضیه به اثبات می‌رسانیم. سپس به تعریف کروشه دو میدان برداری پرداخته آن را در مختصات موضعی محاسبه می‌کنیم.

در بخش ۴§ به تعریف نگاشت مماس پرداخته پس از محاسبه آن در مختصات موضعی تعبیر هندسی آنرا ذکر می‌کنیم.

در بخش‌های ۵§ و ۶§ به ارائه تعاریف دوگان مفاهیم فوق مانند ۱ـ فرمی‌ها، فضای دوگان مماس و نگاشت دوگان پرداخته آنها را به صورت موضعی محاسبه می‌کنیم. به خواننده علاقه‌مند توصیه می‌شود برای درک بهتر این مفاهیم مثالها و تمرینات این بخش را به دقت مورد مطالعه قرار دهد.

در پایان فصل دوّم مطالبی از آنالیز و توپولوژی جهت یادآوری تحت عنوان پیوست I و II آورده شده است که خواننده می‌تواند در صورت لزوم به آنها مراجعه نماید.

پیوست I در مورد اثبات وجود تابعی است که وجود آن روی منیفلدها به ما اجازه می‌دهد که خواص موضعی (یعنی در همسایگی هر نقطه) را به خواص سرتاسری (یعنی در کل منیفلد) تعمیم دهیم.

در پیوست II، در مورد تعریف افراز واحد و اثبات وجود آن بحث می‌شود. در این راستا چند قضیه و تعریف از توپولوژی را یادآوری نموده مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱.۲ § بردار مماس و فضای مماس[۱] بر یک منیفلد

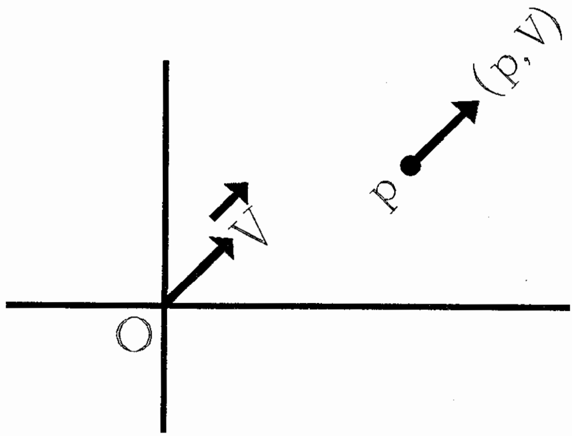
هدف ما در این بخش ارائه یک تعریف برای مفهوم بردار مماس بر منیفلد M در نقطه p است. ابتدا فرض کنیم که $M = I\!R^n$. یادآوری می‌کنیم که یک بردار مماس در نقطه p از

[۱] *Tangent vector (Vecteur tangent)*

$I\!R^n$ عبارت است از زوج (p,V) که p نقطه ابتدای بردار و V جهت و اندازه آن را تعیین می‌نماید.

به این صورت بردارهای "مماس بر $I\!R^n$ " را می‌توان با اعضای $I\!R^n \times I\!R^n$ مشخص نمود.

برای تعمیم این مفهوم روی منیفلد M توجه شما را بدین موضوع جلب می‌کنیم که هر عضو $I\!R^n \times I\!R^n$ را می‌توان به عنوان بردار مماس بر یک منحنی در نظر گرفت.



شکل ۲.۱ : بردار و بردار مماس در $I\!R^n$

جهت روشن شدن این موضوع یادآوری می‌کنیم که معادله یک منحنی در $I\!R^n$ توسط نگاشت $C(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$C:\ I \longrightarrow C(I) \subset I\!R^n$$

$$t \ \mapsto\ (C_۱(t), \cdots, C_n(t))$$

بردار مماس در هر نقطه $C(t_۰) = p$ از این منحنی توسط $۲n-$ تایی (p,V) مشخص می‌گردد که در آن $n-$تایی V به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V = \frac{dC}{dt} = (\frac{dC_۱}{dt}, \cdots, \frac{dC_n}{dt})$$

حال مفهوم بردار مماس بر یک منحنی را با استفاده از کارت‌ها برای منیفلد M به‌صورت زیر بیان می‌کنیم. اگر معادله یک منحنی روی M توسط نگاشت زیر تعریف گردد

$$\begin{aligned} C : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow C(I) \subset M \\ t &\mapsto C(t) \end{aligned}$$

بردار مماس بر منحنی C در نقطه $p = C(t_\circ)$ از M را می‌توان توسط یک $۲n-$ تایی $(x(p), V)$ مشخص نمود که در آن $n-$تایی V به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V = \frac{d(x \circ C)}{dt} = \left(\frac{d(x^۱ \circ C)}{dt}, \dots, \frac{d(x^n \circ C)}{dt} \right) = \left(\frac{dC_i}{dt} \right)$$

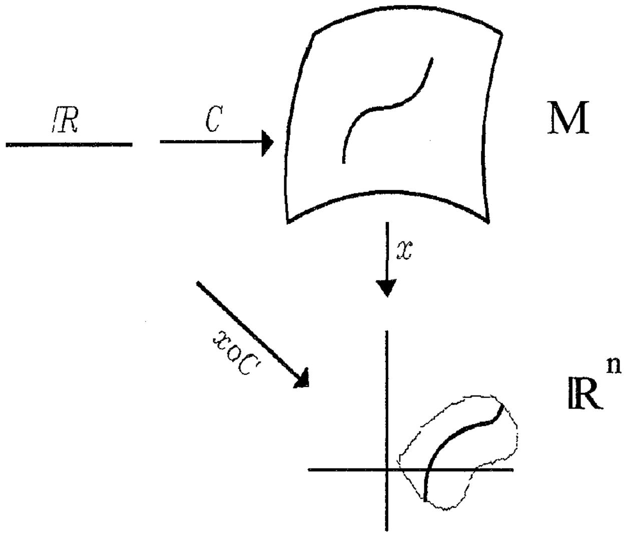
به‌منظور سادگی هرجا احتمال اشتباه نرود (بنابر قرارداد فصل قبل) رابطه اخیر را به‌صورت $V = \dfrac{dC}{dt}$ نیز می‌نویسیم، اگر نگاشت C از کلاس C^k باشد منحنی آنرا از کلاس C^k می‌گوئیم. به شکل ۲.۲ مراجعه شود.

خصوصیت اول بردار مماس

اگر $(p, V) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ آنگاه خانواده‌ای از منحنی‌ها وجود دارد که از نقطه p گذشته و بردار V بردار مماس بر آنها در نقطه p باشد، یعنی خانواده‌ای از توابع از کلاس $C^۱$ که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

بطوریکه

$$\begin{aligned} C : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto C(t) \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{cases} C(t_\circ) &= p \\ \dfrac{dC}{dt}(t_\circ) &= V \end{cases}$$



شکل ۲.۲ : منحنی روی یک منیفلد و تصویر آن روی $\mathbb{R}^n$

بنابراین از این خاصیت به صورت زیر استفاده می‌کنیم .روی مجموعه منحنی‌های از کلاس C^1 در $\mathbb{R}^n$ یک رابطه هم‌ارزی تعریف می‌نمائیم. به شکل ۲.۳ مراجعه شود.

$$C_1 \sim C_2 \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(t_0) & = C_2(t_0) \\ \frac{dC_1}{dt}(t_0) & = \frac{dC_2}{dt}(t_0) \end{cases}$$

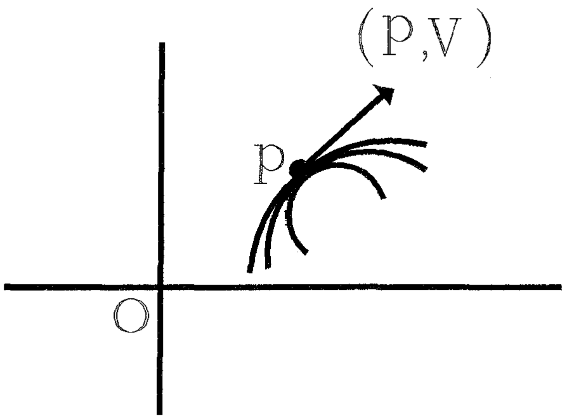
یعنی دو منحنی C_1 وC_2 هم‌ارزند اگر بردار مماس مشترکی در t_0 داشته باشند. حال این تعریف در $\mathbb{R}^n$ را توسط کارت‌ها برای منیفلد M تعمیم می‌دهیم.

تعریف اول بردار مماس

تعریف: فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر و $C:]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ یک منحنی از کلاس C^1 روی M باشد. فرض کنیم (x, U) یک کارت موضعی در همسایگی نقطه

$p = C(\circ)$ باشد رابطه هم ارزی زیر را در نظر می‌گیریم

$$C_1 \sim C_2 \iff \begin{cases} C_1(\circ) = C_2(\circ) = p \\ \text{بطوریکه} \ x \circ C_2, x \circ C_1 \ \text{دارای مشتقات برابر در صفر باشند} \\ \frac{d\, x \circ C_1}{dt}(\circ) = \frac{d\, x \circ C_2}{dt}(\circ) \ \text{یعنی} \end{cases}$$

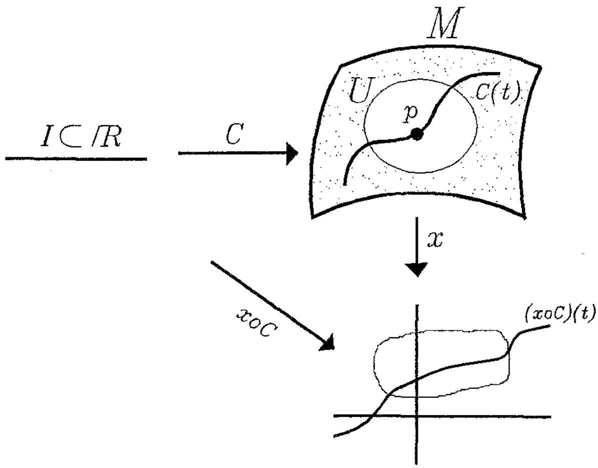


شکل ۲.۳ : کلاس هم‌ارزی منحنی‌های مماس بر بردار مماس در نقطه p

$[C]_p$ کلاس هم ارزی تعریف شده توسط منحنی C را **بردار مماس بر** M در p نامیده و با V_p یا X_p نشان می‌دهیم به عنوان تمرین ثابت کنید که رابطه هم‌ارزی فوق مستقل از انتخاب کارت x است، خانواده تمام بردارهای مماس در p را با T_pM نمایش داده آن را **فضای مماس بر** M **در** p می‌نامیم. ((T_pM) همان فضای خارج قسمت می‌باشد) خواهیم دید که T_pM یک فضای برداری به بعد n روی مجموعه اعداد حقیقی تعریف می‌نماید. $(n = dimM)$ این تعریف از بردار مماس دارای محاسن زیراست. اولا" به طور طبیعی و بر اساس بردار سرعت یک منحنی تعریف شده است ثانیا" اجازه می‌دهد که مفهوم آن رابرای تعریف "جت‌های مرتبه kام"[1] براحتی تعمیم داد. (اگر فرض نمائیم که در رابطه هم ارزی بالا $x \circ C_2, x \circ C_1$ در صفر دارای مشتقات مرتبه kام برابر باشند).

---

[1] $k - order\ jet\ (germe\ d'ordre\ k)$



شکل ۲.۴ : منحنی روی یک منیفلد در مختصات موضعی

با این حال استفاده از تعریف فوق در عمل چندان کار ساده‌ای نیست و از طرفی به راحتی نمی‌توان ثابت نمود که T_pM یک فضای برداری است. لذا به این دلیل تعریف دیگری از بردار مماس که بیشتر جبری است، ارائه می‌دهیم.

خصوصیت دوم بردار مماس

برمی‌گردیم به $I\!R^n$ و فرض می‌کنیم f تابعی حقیقی از کلاس $C^۱$ روی $I\!R^n$ باشد.

$$f : I\!R^n \longrightarrow I\!R$$

$$(x_۱, \cdots, x_n) \longmapsto f(x_۱, \cdots, x_n)$$

اگر $(p, V) \in I\!R^n \times I\!R^n$ یک بردار مماس بر منحنی $C(t)$ در نقطه p باشد که $C(\circ) = p$ آن را با V_p نمایش داده و مشتق جهت دار تابع f در جهت بردار V_p را توسط رابطه زیر تعریف می‌نمائیم :

$$V_p \cdot f = \frac{d(f \circ C)}{dt}\Big|_{t=\circ}$$

به راحتی بنابر قاعده زنجیره‌ای دیده می‌شود که

$$\frac{d(f\circ C(t))}{dt}\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\frac{dC^i}{dt}\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p v^i$$

در اینجا v^i ها مولفه‌های بردار V هستند. بنابراین داریم

$$V_p\cdot f=v^1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_p+\cdots+v^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_p$$

در اینجا بردار V و نقطه p عبارتند از

$$\begin{cases} C(0)=p \\ \dfrac{dC}{dt}(0)=V \end{cases}$$

منحنی C را یک "**منحنی انتگرال** " بردار V_p نیز می‌گویند.

بنابراین $V_p\cdot f$ درحقیقت عبارت است از تغییرات تابع f در طول منحنی انتگرال بردار V_p. این خود به ما نشان می‌دهد که مشتق f در طول یک منحنی تنها به کلاس هم‌ارزی $[C]_p$ بستگی دارد و در نتیجه می‌توان یک رابطه دو سویی بین بردارهای مماس و مشتق جهت‌دار برقرار کرد. به راحتی می‌توان درستی روابط زیر را تحقیق نمود.

الف) $V_p\cdot(f+g)=V_p\cdot f+V_p\cdot g$

ب) $V_p\cdot kf=kV_p\cdot f \qquad k\in\mathbb{R}$

ج) $V_p\cdot(fg)=(V_p\cdot f)g(p)+f(p)V_p\cdot g$

در ادامه خواهیم دید که این سه خاصیت معرف آن است که مشتق جهت دار در خانواده عملگرهایی که آنها را مشتق گیری می‌نامیم، قرار دارد. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم اگر نگاشت D در سه شرط فوق صدق کند آنگاه یک و تنها یک بردار مماس V_p وجود دارد بطوری که $Df=V_p\cdot f$.

فرض کنیم $C^\infty(p)$ جبر توابع C^∞ تعریف شده در یک همسایگی نقطه p از M در مجموعه اعداد حقیقی باشد. ابتدا به تعریف نگاشت مشتق‌گیری می‌پردازیم.

تعریف: یک نگاشت مشتق گیری *یا* اشتقاق[۱] *در نقطه* p *عبارت است از نگاشتی که در شرایط زیر صدق کند*:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_p : C^\infty(p) &\longrightarrow I\!R \\ f &\mapsto \mathcal{D}_p f \end{aligned}$$

بطوریکه

الف) $\mathcal{D}_p(f+g) = \mathcal{D}_p f + \mathcal{D}_p g$

ب) $\mathcal{D}_p(\lambda g) = \lambda \mathcal{D}_p g \qquad \lambda \in I\!R$

ج) $\mathcal{D}_p(fg) = (\mathcal{D}_p f)g(p) + f(p)(\mathcal{D}_p g)$

مجموعه مشتق گیری‌ها در نقطه p *از* M *را با* $\mathcal{D}_p(M)$ *نمایش می‌دهیم.*

نشان خواهیم داد که یک رابطه دوسویی بین T_pM و $\mathcal{D}_p(M)$ وجود دارد به طوری که به هر کلاس هم ارزی $[C]_p$ (به هر بردار مماس در p) یک مشتق‌گیری X_p وابسته می‌نماید.

قضیه: $\mathcal{D}_p(M)$ مجموعه مشتق‌گیری‌ها در نقطه p از منیفلد M را درنظر گرفته و نشان می‌دهیم که یک فضای برداری به بعد $n(n = \dim M)$ است و اگر (x, U) یک کارت موضعی در همسایگی p باشد آنگاه n تایی $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}$ که توسط

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p f = D_i(f \circ x^{-1})_{x(p)}$$

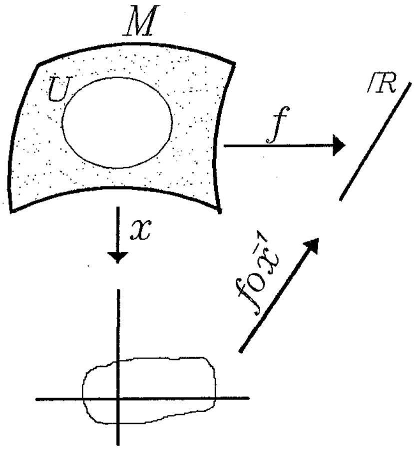
تعریف می‌شود تشکیل یک پایه برای $\mathcal{D}_p(M)$ می‌دهد که آن را پایه طبیعی وابسته به کارت x می‌گوئیم.

اثبات: به راحتی بررسی می‌شود که $\mathcal{D}_p(M)$ یک فضای برداری است. (نگاشت مشتق، خطی است) برای ارائه یک پایه ابتدا لم‌های زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۱: فرض کنیم f تابعی C^∞ باشد که در همسایگی باز و محدب U از صفر روی $I\!R^n$ تعریف شده است و $f(0) = 0$. آنگاه توابعی C^∞ مانند $g_i : U \to I\!R$ $i = 1, \cdots, n$ وجود دارد به طوری که بتوان f را به صورت زیر نوشت.

---

[۱] *Derivation map (Application de dérivation)*



شکل ۲.۵ : تابع حقیقی f روی M

الف) $f(x^1,\cdots,x^n)=\sum_{i=1}^n x^i g_i(x^1,\cdots,x^n) \qquad \forall x\in U$

ب) $g_i(0)=D_i f(0)$

اثبات لم ۱: به ازاء $x\in U$ تابع h_x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. $h_x(t)=f(tx)$

چون U محدب[1] است این تابع در بازه $0\le t\le 1$ تعریف می‌شود. داریم

$$f(x)=f(x)-f(0)=h_x(1)-h_x(0)=\int_0^1 \frac{\partial h_x}{\partial t}dt$$

از طرف دیگر بنابر قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\frac{\partial h_x(t)}{\partial t}=\frac{\partial f(tx)}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x^1}(tx)\underbrace{\frac{\partial (tx^1)}{\partial t}}_{x^1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}(tx)\underbrace{\frac{\partial tx^n}{\partial t}}_{x^n}$$

$$=\sum_{i=1}^n D_i f(tx)\cdot x^i$$

---

[1] مجموعهٔ $U\subset \mathbb{R}^n$ را محدب $(Convex)$ گوئیم اگر $\forall x\ ,\ y\in U\subset \mathbb{R}^n$ و به ازاء $1\le t\le 0$ داشته باشیم $(1-t)y+tx\in U$ در اینجا از محدب بودن U نتیجه می‌گیریم که اگر تابع $f(x)$ برای هر $x\in U$ تعریف شود آنگاه تابع $f(tx)$ نیز برای هر $1\le t\le 0$ و هر $x\in U$ تعریف می‌شود (چون از محدب بودن نتیجه می‌شود $tx\in U$)

از آنجا با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$f(x) = \int_{\circ}^{\text{۱}} \sum_i D_i f(tx) \cdot x^i dt = \sum_i x^i \int_{\circ}^{\text{۱}} D_i f(tx) dt$$

بنابراین کافی است تابع مورد نظر را به صورت $g_i(x) = \int_{\circ}^{\text{۱}} D_i f(tx) dt$ تعریف نمائیم.
شرط ب) از شرط الف) حاصل می‌شود.

لم ۲: اگر (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p باشد آنگاه خانواده n تایی $\{(\frac{\partial}{\partial x^{\text{۱}}})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$ یک پایه برای $\mathcal{D}_p(M)$ تعریف می‌کند.

اثبات لم ۲: ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر $X_p \in \mathcal{D}_p(M)$ برای هر تابع ثابت k داریم $X_p \cdot k = \circ$ زیرا

$$X_p \cdot \text{۱} = X_p \cdot (\text{۱} \times \text{۱}) = (X_p \cdot \text{۱}) \times \text{۱} + \text{۱} \times (X_p \cdot \text{۱}) \Rightarrow X_p \cdot \text{۱} = \circ$$
$$X_p \cdot (k) = k \times (X_p \cdot \text{۱}) = \circ$$

حال فرض کنیم $M = \mathbb{R}^n$ و $p = \circ$ باشد داریم

$$\begin{aligned} X_p \cdot f &= X_p \cdot (f - f(\circ) = X_p \cdot (\sum_i x^i g_i) \\ &= \sum_i ((X_P \cdot x^i) g_i(p) + x^i(p) X_p \cdot g_i) \end{aligned}$$

چون x^i مولفه iام $p = \circ$ است $x^i(p) = \circ$. بنابر ب در لم ۱ داریم:

$$X_p \cdot f = \sum_i (X_p \cdot x^i)(\frac{\partial f}{\partial x^i})_p$$

با فرض $X^i = X_p \cdot x^i$ و چون f دلخواه است داریم

$$X_p = \sum_i X^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$$

این عبارت نشان می‌دهد که خانواده $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}$ اعضای $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ را تولید می‌کند. حال کافی است نشان دهیم که این خانواده مستقل خطی نیز هست. اگر

$$a^{\text{۱}}(\frac{\partial}{\partial x^{\text{۱}}})_p + \cdots + a^n (\frac{\partial}{\partial x^n})_p = \circ$$

با تاثیر روی $x^1, x^2, \cdots, x^n$ داریم

$$a^1 = 0, \cdots, a^n = 0$$

بنابراین مستقل خطی‌اند.

حال می‌توان به راحتی نتیجه بدست آمده روی $\mathbb{R}^n$ رابه کمک یک کارت بر روی منیفلد M انتقال داد. به اینصورت اثبات لم ۲ و اثبات قضیه فوق کامل می‌شود. $\square$

قضیه: نگاشت $\Psi : T_pM \longrightarrow \mathcal{D}_p(M)$ که به هر کلاس هم‌ارزی $[C]_p$ مشتق‌گیری X_p را وابسته می‌کند دو سویی است.

در اینجا

$$X_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

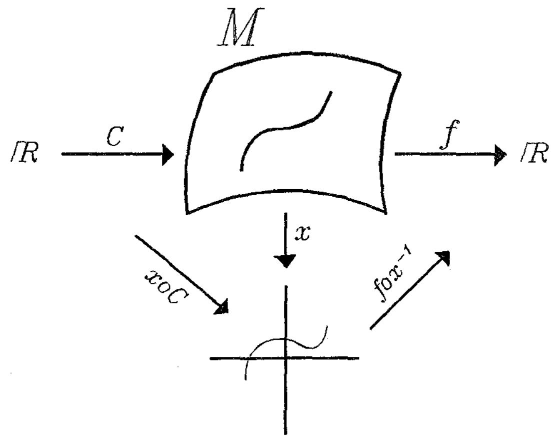
$$f \mapsto \left.\frac{d(f \circ C)}{dt}\right|_{t=0}$$

اثبات : می‌گوئیم Ψ پوششی است زیرا اگر $X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ عضو دلخواهی از $D_p(M)$ باشد آنگاه منحنی C را طوری در نظر می‌گیریم که مولفه‌های بردار مماس برآن در نقطه p برابر مولفه‌های بردار X_p باشد.

$$\left.\frac{d(x \circ C)}{dt}\right|_{t=0} = (X^1, \cdots, X^n) = \sum_i X^i e_i$$

(e_i پایه کانونی) و داریم $\Psi[C] = X_p$

$$\Psi[C] \cdot f = \frac{d}{dt}(f \circ C)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x^i})_p(\frac{dC^i}{dt})_0 = \sum_{i=1}^{n} X^i(\frac{\partial f}{\partial x^i})_p = X_p \cdot f$$



شکل ۲.۶ : اثر تابع f روی منحنی c

حال می‌گوئیم Ψ **یک به یک** است زیرا اگر فرض کنیم $\Psi[C'] = \Psi[C]$ داریم

$$\left.\frac{d(f\circ C)}{dt}\right|_{\circ} = \left.\frac{d(f\circ C')}{dt}\right|_{\circ} \qquad \forall f\in C^{\infty}(p) \;\;,\;\; p = C(\circ) = C'(\circ)$$

تابع مولفه iام یعنی x^i را به جای f در رابطه فوق قرار می‌دهیم

$$x^i \;:\; U \to I\!R$$

$$x^i(p) = p \text{ مولفه } i\text{ام} \Rightarrow x^i\circ C = C^i$$

U همسایگی q می‌باشد لذا داریم $(\frac{dC'^i}{dt})_{\circ} = (\frac{dC^i}{dt})_{\circ}$ یعنی $[C] = [C']$. □

حال می‌توانیم یک بردار مماس را به‌صورت زیر نیز تعریف نمائیم.

تعریف دوم بردار مماس

تعریف: *فرض کنیم p نقطه‌ای از منیفلد M باشد.* **یک بردار مماس بر M در p عبارت** *است از یک مشتق گیری از توابع $C^{\infty}(p)$ در نقطه p.*

اگر (x,U) یک کارت در همسایگی p باشد بردار مماس را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p \qquad (X^i \in I\!R)$$

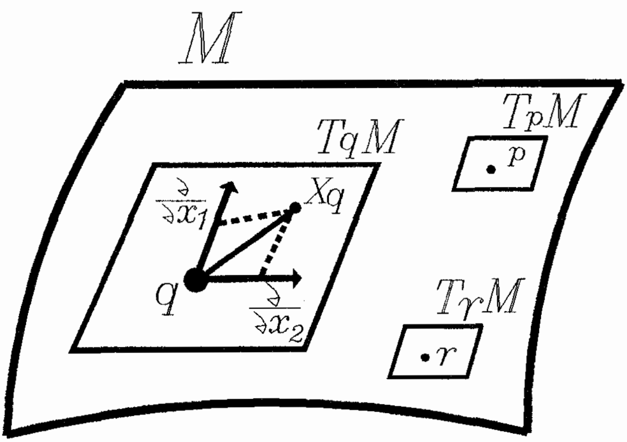
که $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p f = D_i(f \circ x^{-1})_{x(p)}$

تعریف دوم فضای مماس

تعریف: فضای مماس در نقطه p از منیفلد M عبارت است‌از فضای برداری مشتق‌گیری‌ها در نقطه p از $C^\infty(p)$ که‌آن را با $\mathcal{D}_p(M)$ یا T_pM نمایش می‌دهیم.

۲.۲ § منیفلد مماس یا کلاف مماس[1]

فرض می‌کنیم $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ نشان می‌دهیم TM دارای ساختار یک منیفلد است که آن را منیفلد مماس یا **کلاف** مماس می‌نامیم.



شکل ۲.۷ : صفحات مماس و پایه‌های آن در نقاط مختلف

تابع $\pi : TM \longrightarrow M$ را به صورت $\pi : X_p \longrightarrow p$ تعریف می‌کنیم. اگر (x, U) یک کارت موضعی روی M باشد کارت $(\varphi, \overline{U})$ را روی TM به‌صورت زیر در نظر

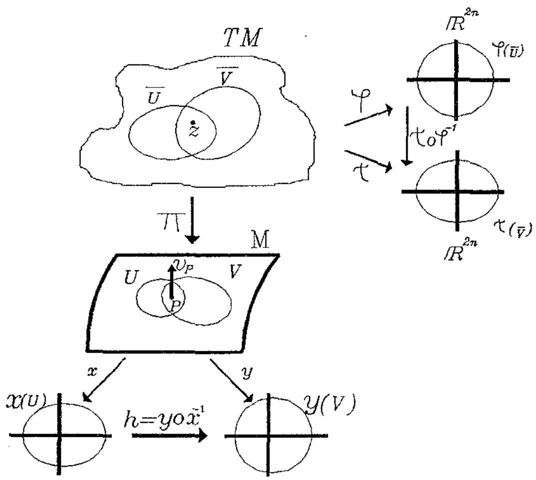
[1] *Tangent bundle (Fibre′ Tangent) or Tangent manifold*

می‌گیریم:

$$\varphi : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad , \quad \overline{U} = \pi^{-1}(U)$$
$$: X_q = \sum a^i (\frac{\partial}{\partial x_i})_q \mapsto (x^1(q), \cdots, x^n(q), a^1, \cdots, a^n)$$

(یعنی مختصات یک بردار X_q عبارت است از مختصات نقطه شروع آن و مولفه‌های X_q نسبت به پایه $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_q\}$)

حال نشان می‌دهیم که TM دارای یک ساختار دیفرانسیل پذیری است که توسط کارت‌های به‌صورت فوق تعریف می‌شود. اگر M از کلاس C^k باشد خواهیم دید TM از کلاس C^{k-1} است. به شکل زیر توجه کنید.



شکل ۲.۸ : کارت‌های منیفلد مماس یا کلاف مماس

فرض کنیم (x, U) و (y, V) دو کارت روی M و $(\varphi, \overline{U})$ و $(\psi, \overline{V})$ کارت‌هایی روی TM باشد که به روش بالا تعریف شده‌اند.

باید نشان دهیم که اگر $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \phi$ دو کارت فوق C^{k-1} مرتبط هستند.نگاشت تغییر

کارت را نوشته رابطه بین مولفه‌های آنرا به دست می‌آوریم.

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(\overline{U}\cap\overline{V})\longrightarrow\psi(\overline{U}\cap\overline{V})$$
$$(\underbrace{x^1(p)\cdots x^n(p)}_{p},\underbrace{a^1,\cdots,a^n}_{v})\longrightarrow(y^1(p)\cdots y^n(p),b^1,\cdots,b^n)$$

بنابراین با توجه به شکل زیر و با فرض $h=y\circ x^{-1}$ رابطه بین مختصات p در دو کارت x و y به‌صورت زیر می‌باشد .

$$y^i(p)=(y\circ x^{-1})^i(x(p))=h^i(x(p))$$

که بنابر فرض چون M از کلاس C^k است h^i دیفئومورفیسم C^k می‌باشد.

حال ببینیم که رابطه بین مولفه‌های یک بردار در نگاشت تغییر کارت فوق به چه صورت است.

فرض کنیم $\vartheta\in T_pM$ در دو دستگاه مختصات (x,U) و (y,V) بردار فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(*)\quad \vartheta=a^1(\frac{\partial}{\partial x^1})_p+\cdots+a^n(\frac{\partial}{\partial x^n})_p=b^1(\frac{\partial}{\partial y^1})_p+\cdots+b^n(\frac{\partial}{\partial y^n})_p$$

برای به دست آوردن رابطه بین a^i و b^i باید رابطه بین $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ و $(\frac{\partial}{\partial y^i})$ را بدست آوریم.
این کار را قبلاً نیز در تمرینات فصل اول انجام داده‌ایم.
اگر $f\in C^\infty(p)$ داریم

$$\begin{aligned}(\frac{\partial f}{\partial x^i})_p&=D_i(f\circ x^{-1})_{x(p)}\\&=D_i[(f\circ y^{-1})\circ(y\circ x^{-1})]_{x(p)}\\&=\sum_{j=1}^{n}D_j(f\circ y^{-1})_{(y\circ x^{-1})(x(p))}D_i(y\circ x^{-1})^j_{x(p)}\\&=\sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial y^j})_p(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_p\end{aligned}$$

در نتیجه $(\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i})$ ماتریس تغییر مختصات یا ژاکوبین نگاشت تغییر کارت است و داریم:

$$\boxed{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p = \sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_p(\frac{\partial}{\partial y^j})_p}$$

اگر این مقدار را در رابطه $(*)$ قرار دهیم:

$$\sum_i a^i(\frac{\partial}{\partial x^i})_p = \sum_j b^j(\frac{\partial}{\partial y^j})_p \iff \sum_{i,j} a^i(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_p(\frac{\partial}{\partial y^j})_p = \sum_j b^j(\frac{\partial}{\partial y^j})_p$$

$$\iff b^j = \sum_i a^i(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_p$$

$$\overset{\text{بنابر تعریف } D_i}{\iff} b^j = \sum_i a^i D_i(y \circ x^{-1})^j_{x(p)}$$

در نتیجه نگاشت تغییر کارت $\psi \circ \varphi^{-1}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\overline{U} \cap \overline{V}) \longrightarrow \psi(\overline{U} \cap \overline{V})$$
$$(x^i(p), a^i) \longrightarrow \left((y \circ x^{-1})^i_{x(p)}, \sum_j a^j D_j(y \circ x^{-1})^i_{x(p)}\right)$$

حال باید نشان دهیم که نگاشت تغییر کارت $\psi \circ \varphi^{-1}$ از کلاس C^{k-1} است. به این صورت یک اطلس $\overline{A}$ روی TM تعریف می‌شود که آنرا اطلس طبیعی وابسته به A اطلس تعریف شده روی M می‌نامیم.

حال اگر ماتریس ژاکوبین $\psi \circ \varphi^{-1}$ را بنویسیم

$$\mathcal{D}(\psi \circ \varphi^{-1}) = \left(\begin{array}{c|c} D_j(y \circ x^{-1})^i & 0 \\ \hline \times & D_j(y \circ x^{-1})^i \end{array}\right)$$

چون $y \circ x^{-1}$ دیفئومورفیسم- C^k است، دترمینان ژاکوبین آن بنابر قضیه تابع معکوس مخالف صفر است لذا $\det D(\psi \circ \varphi^{-1}) = (\det \|D_j(y \circ x^{-1})^i\|)^2 > 0$

و مجدداً بنابر قضیه تابع معکوس نگاشتهای تغییر کارت $\psi\circ\varphi^{-1}$ دیفئومورفیسم می‌باشند و کلاس آنها C^{k-1} است.

تمرین: نشان دهید TM با توپولوژی ذاتی اطلس بالا هاسدورف و دارای پایه شماراست.

راهنمایی: برای هر حوزه دامنه کارت V, U، $\overline{U}\cap\overline{V}=\overline{U\cap V}$ و $\overline{U}$ پایه شمارا دارد.

در نتیجه قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه: فرض کنیم M یک منیفلد از کلاس C^k همراه با اطلس A بوده و $\overline{A}$ اطلس طبیعی وابسته به A روی TM باشد. آنگاه TM یک منیفلد $2n$ بعدی $(n=\dim M)$ از کلاس C^{k-1} است که توسط اطلس $\overline{A}$ تعریف می‌شود.

بعلاوه اگر (x,U) و (y,V) دو کارت روی M باشند بطوریکه $U\cap V\neq\emptyset$ آنگاه نگاشت تغییر کارت‌ها روی TM از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$(x^i(p),a^i)\longrightarrow((y\circ x^{-1})^i_{x(p)},\sum_j a^jD_j(y\circ x^{-1})^i_{x(p)})$$

۳.۲ § میدان برداری[1]

فرض کنیم M یک منیفلد $C^k(k\geq 1)$ باشد.

تعریف اول: *یک میدان برداری از کلاس C^r $(r<k)$ عبارت است از نگاشت X از کلاس C^r که به هر نقطه p از M بردار مماس X_p را وابسته می‌کند.*

یادآوری: اگر $\pi:A\to B$ یک نگاشت پوششی باشد یک **بخش** π عبارت است از نگاشت $f:B\to A$ بطوریکه $\pi\circ f=Id_B$ بنابراین X نگاشتی C^r است به صورت

$$\begin{aligned} X: M &\longrightarrow TM\\ p&\mapsto X_p\end{aligned}$$

است بطوریکه $\pi\circ X=Id_M$

(π عبارت است از نگاشت پوششی طبیعی $TM\to M$ که به هر بردار ابتدای آنرا وابسته می‌کند) X را در این حالت یک **بخش**[2] π نیز می‌گویند.

---

[1] *vector field (champ de vecteur)*

[2] *section*

نماد گذاری: میدان‌های برداری را با X ، Y ، Z ، ... و مقدار آنها در p را با X_p، Y_p، Z_p، ... نشان می‌دهیم که مشابه نمادگذاری استفاده شده برای بردارهای مماس است. M کلاس C^∞ باشد، مجموعه میدان‌های برداری C^∞ روی M را با $\mathcal{X}(M)$ نمایش می‌دهند.
یادآوری: اگر A یک حلقه باشد یک Aـمدول عبارت است از یک مجموعه همراه با یک عمل داخلی که با + نشان داده می‌شود و یک عمل خارجی از اعضای A که در شرایط فضای برداری صدق کند.

$\mathcal{X}(M)$ بطور طبیعی دارای خواص یک $C^\infty(M)$ـ مدول با اعمال زیر است:

$$\begin{aligned} X+Y \; &: M \longrightarrow TM \\ &\quad p \mapsto X_p + Y_p \qquad\qquad X, Y \in \mathcal{X}(M) \\ fX \; &: M \longrightarrow TM \qquad\qquad\quad f \in C^\infty(M) \\ &\quad p \mapsto f(p)X_p \end{aligned}$$

در بخش ۱ § از همین فصل **نگاشت مشتق‌گیری در یک نقطه** p از M را تعریف نمودیم. حال **نگاشت مشتق‌گیری را برای یک همسایگی** U مطرح خواهیم نمود. تفاوت بین مشتق‌گیری در نقطه p یعنی نگاشت:

$$\begin{aligned} X_p : C^\infty(p) &\longrightarrow I\!R \\ f &\mapsto X_p \cdot f \end{aligned}$$

و یک مشتق گیری از M یعنی نگاشت

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\mapsto X \cdot f \end{aligned}$$

در آن است که در حالت اول مقدار مشتق $X_p \cdot f$ در نقطه p محاسبه می‌گردد که در نتیجه عددی است حقیقی اما در مورد دوم مشتق یک تابع در حالت کلی (بدون در نظر گرفتن نقطه) مطرح است که یک تابع روی M است. برای روشن شدن این موضوع مثال مقدماتی زیر را می‌آوریم:

مثال: تابع $\begin{aligned} f : I\!R^2 &\longrightarrow I\!R \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

فرض کنیم میدان برداری $X = (۴x, ۳xy)$ روی $\mathbb{R}^۲$ تعریف شود و p نقطه‌ای به مختصات $(۱, ۲)$ باشد. حال مقادیر $X_p \cdot f$ و $X \cdot f$ را محاسبه می‌نمائیم.

$$X_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto X_p \cdot f$$

$$\begin{aligned} X_p \cdot f &= \sum_{i=۱}^{۲} (X^i)_p (\frac{\partial f}{\partial x^i})_p = (X^۱)_p (\frac{\partial f}{\partial x})_p + (X^۲)_p (\frac{\partial f}{\partial y})_p \\ &= (۴x)_p (۲x)_p + (۳xy)_p (۲y)_p \end{aligned}$$

$$X_p \cdot f = ۴ \times ۲ + ۶ \times ۴ = ۳۲ \in \mathbb{R}$$

اما برای محاسبه Xf خواهیم دید که هر میدان برداری را می‌توان به صورت $X \underset{U}{=} \sum_{i=۱}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ نوشت.

$$X : C^\infty(\mathbb{R}^۲) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^۲)$$

$$f \mapsto X \cdot f$$

$$X \cdot f \underset{U}{=} \sum_{i=۱}^{۲} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = (۴x)(۲x) + (۳xy)(۲y) = ۸x^۲ + ۶xy^۲ \in C^\infty(\mathbb{R}^۲)$$

یادآوری: فرض کنیم K یک میدان باشد. یک Kـ جبر یا یک جبر[۱] روی K عبارت است از یک فضای برداری A روی K همراه با یک نگاشت دو خطی از $A \times A$ در A. به عنوان مثال $C^\infty(M)$ مجموعهٔ توابع حقیقی کلاس C^∞ روی M، یک $\mathbb{R}$ـ جبر می‌باشد. حال در اینجا تعریف نگاشت مشتق‌گیری را می‌آوریم.

تعریف: فرض کنیم A یک Kـ جبر باشد. *یک مشتق‌گیری از A عبارت است از نگاشت* $D : A \longrightarrow A$ *که در شرایط زیر صدق کند*

$$D(a+b) = Da + Db \qquad \forall a, b \in A$$

---

[۱] $K - Algebra$

$$D(ka) = kDa \qquad \forall k \in K$$

$$D(a \cdot b) = Da \cdot b + a \cdot Db$$

نظربه اینکه $C^\infty(M)$ یک $I\!R$_ جبر می‌باشد می‌توان مشتق‌گیری‌های $C^\infty(M)$ رانیز مطالعه نمود. خاصیت اساسی آنها این است که " اپراتورهای موضعی " هستند، این موضوع را بطور دقیق‌تر بشکل زیر بررسی می‌نمائیم.

گزاره: فرض کنیم D یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ ، $f \in C^\infty(M)$ و U بازی از M باشد. اگر $f|_U = \circ$ آنگاه $Df|_U = \circ$

اثبات: فرض کنیم $p \in U$ و $K = \{p\}$ و Ψ یک تابع از $C^\infty(M)$ بطوریکه $\Psi(p) = ۱$ و $supp\Psi \subset U$[1]. قرار می‌دهیم $\varphi = ۱ - \Psi$ داریم $\varphi(p) = \circ$ و $\varphi|_{U^c} = ۱$ و $f = \varphi f$.

بنابراین

$$Df = D(\varphi \cdot f) = D\varphi \cdot f + \varphi \cdot Df$$

که با در نظر گرفتن مقدار آن در نقطه p

$$Df(p) = D\varphi(p) \cdot f(p) + \varphi(p) \cdot Df(p) = \circ$$

زیرا $f(p) = \varphi(p) = \circ$ □

نتیجه ۱ : فرض کنیم $g \in C^\infty(M)$ و f بطوریکه $f|_U = g|_U$ آنگاه

$$Df|_U = Dg|_U$$

اثبات : برای اثبات کافی است گزاره بالا را برای تابع $f - g$ بکار ببریم. □

نتیجه ۲ : فرض کنیم D یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ و U بازی از M باشد. آنگاه بازی

---

[1] $supp\ \Psi = \overline{\{x \in M \mid \Psi(x) \neq \circ\}}$ ثابت می‌شود که چنین تابعی همواره روی M موجود است. مراجعه شود به پیوست I در پایان این فصل

مانند U'، $U' \subset U$ و یک مشتق‌گیری یکتای $D_{U'}$ از $C^\infty(U')$ وجود دارد بطوریکه

$$\forall f \in C^\infty(M) \qquad (Df)|_{U'} = D_{U'}(f|_{U'})$$

توجه: این خاصیت بیانگر آن است که D یک اپراتور موضعی است یعنی عملگری است که عمل آن توسط عملگر $(D_{U'})$ بیان می‌گردد که منحصرا" در روی توابع تعریف شده روی همسایگی U' عمل می‌کند.

اثبات: فرض کنیم $U' \subset U$ بطوریکه $f_{U'} \in C^\infty(U')$. این نگاشت را توسعه داده به‌صورت $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ می‌نویسیم. حال کافی است قرار دهیم

$$(D\tilde{f})|_{U'} = D_{U'}(f|_{U'}) \qquad \square$$

با استفاده از نتیجه ۲ می‌توان گفت این موضوع بستگی به انتخاب $\tilde{f}$ توسیع تابع f ندارد. به این صورت یک مشتق‌گیری D از $C^\infty(M)$ را می‌توان اصطلاحا" " موضعی " نمود یعنی می‌توان یک اپراتوری ساخت که روی توابعی عمل نماید که بطور موضعی (در همسایگی یک نقطه) تعریف شده باشند و بطور کامل D را تعریف نمایند.

قضیه: میدان‌های برداری را می‌توان با مشتق‌گیری‌ها از $C^\infty(M)$ همانند نمود. به عبارت دیگر اگر $X \in \mathcal{X}(M)$ باشد، یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$f \mapsto X \cdot f$$

بطوریکه $$(X \cdot f)(p) = X_p \cdot f$$

اثبات: اگر X به‌صورت فوق تعریف شود به راحتی مشاهده می‌شود که X در شرایط مشتق گیری از $C^\infty(M)$ صدق می‌کند. برعکس اگر D یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ باشد، میدان‌های برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X : M \longrightarrow TM$$
$$p \mapsto X_p$$

بطوریکه

$$\begin{array}{rcl} X_p : C^\infty(p) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & (D\tilde{f})(p) \end{array}$$

در اینجا $\tilde{f}$ توسیع تابع f است که روی یک همسایگی p تعریف شده است. □

بنابر آنچه گفته شد میدان برداری روی M را می‌توان یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ در نظر گرفته ، به‌صورت زیر تعریف نمود.

تعریف دوم: *فرض کنیم M از کلاس C^k باشد.* **یک میدان برداری** *از کلاس C^r $(r \leq k)$ عبارت است از نگاشت X از کلاس C^r*

$$X : C^r(M) \longrightarrow C^{r-1}(M)$$

بطوریکه در سه شرط زیر صدق کند

$$X \cdot (f+g) = X \cdot f + X \cdot g \qquad f, g \in C^\infty(M)$$

$$X \cdot (cf) = cX \cdot f \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$X \cdot (fg) = (X \cdot f)g + f(X \cdot g)$$

میدان‌های برداری C^∞ بطور مشابه روی منیفلدهای C^∞ تعریف می‌شوند. نتیجه ۲ را می‌توان به‌صورت زیر برای میدان‌های برداری بیان نمود.

نتیجه ۳: *فرض کنیم $X \in \mathcal{X}(M)$ و U بازی از M باشد. آنگاه بازی مانند U' از M ، $U' \subset U$ و میدان یکتای $X_{U'} \in \mathcal{X}(U')$ موجود است بطوریکه*

$$X_{U'} \cdot f|_{U'} = (Xf)|_{U'} \qquad \forall f \in C^\infty(M)$$

این نتیجه به ما اجازه می‌دهد که محاسبات میدان‌های برداری را در دستگاه مختصات موضعی انجام دهیم. به عبارت دیگر می‌توانیم به‌صورت زیر میدان‌های برداری را بررسی نمائیم.

اگر (x, U) یک کارت در همسایگی p باشد ، یک میدان برداری X_U روی U را

به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(X_U \cdot f_U)(p) = (Xf)(p) = X_p f = \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f$$

در اینجا a^iها مولفه‌های X_p روی پایه $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ هستند. یعنی

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

با تغییر دادن p ، در یک نقطه دلخواه از U داریم

$$X_U \cdot f_U = \sum_{i=1}^{n} a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} f$$

که $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(U)$ عبارت است از میدان

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \; : \; U \to TU$$

$$p \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

به عبارت دیگر می‌توان یک میدان برداری را به‌صورت زیر نوشت.

$$\boxed{X \underset{U}{=} \sum_i a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}}$$

اغلب اوقات چنانچه احتمال اشتباه نرود از نوشتن U در زیر تساوی خودداری می‌کنیم.

قضیه: اگر $V \in T_pM$ یک بردار مماس در p باشد آنگاه یک میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ وجود دارد بطوریکه

$$X_p = V$$

اثبات: فرض کنیم (x, U) یک کارت موضعی در همسایگی p باشد و

$$V = \sum_i a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

به ازاء هر نقطه $q \in U$ تعریف می‌کنیم

$$V_q = \sum_i a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q$$

فرض کنیم $f \in C^\infty(M)$ بطوریکه $f(p) = ۱$ و $supp\ f \subset U$ (چنین تابعی همواره وجود دارد به پیوست I در پایان این فصل مراجعه شود). برای هر نقطه $m \in M$ تعریف می‌کنیم

$$X_m = \begin{cases} f(m)V_m & m \in U \text{ اگر} \\ ۰ & m \notin U \text{ اگر} \end{cases}$$

□

کروشه لی دو میدان برداری

تعریف: فرض کنیم $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. نگاشت مشتق‌گیری

$$[X,Y] : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

که توسط
$$[X,Y]f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f)$$

*تعریف می‌شود یک میدان برداری است که **کروشه لی** X, Y نامیده می‌شود براحتی می‌توان شرایط میدان برداری (مشتق‌گیری) را برای کروشه تحقیق نموده نشان داد که کروشه دارای خواص زیر نیز هست.*

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$

الف) $[X,Y] = -[Y,X]$

ب) اتحاد ژاکوبی $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = ۰$

ج)
$$\left.\begin{aligned} [X, fY] &= (X \cdot f)Y + f[X,Y] \\ [fX, Y] &= f[X,Y] - (Y \cdot f)X \end{aligned}\right\}$$

(رابطه اخیر از رابطه قبل وخاصیت الف نتیجه می‌شود)

تذکر: $\mathcal{X}(M)$ **یک جبرلی**[1] است. یادآوری می‌کنیم که یک $I\!R$ـجبر را جبر لی گوئیم اگر دارای یک قانون داخلی مانند $[a,b]$ باشد بطوریکه

$$[a,b]=-[b,a]$$

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$$

کروشه لی در مختصات موضعی

اگر (x,U) یک کارت موضعی، $Y \underset{U}{=} \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ و $X \underset{U}{=} \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ بطوریکه $(X^i, Y^i \in C^\infty(U))$ آنگاه براحتی می‌توان نشان داد در مختصات موضعی داریم

$$I \qquad [X,Y] \underset{U}{=} \sum_{i,j}\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

رابطه فوق را می‌توان با استفاده مستقیم از تعریف یا با استفاده از خاصیت $[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}]=0$ و خاصیت ج بدست آورد.

تمرین:

۱ـ نشان دهید کروشه لی دو میدان برداری یک میدان برداری است به عبارت دیگر شرایط میدان برداری یا مشتق‌گیری از M را برای کروشه لی تحقیق نموده ودرستی روابط (الف) و (ب) و (ج) را که پس از تعریف کروشه آورده شده است تحقیق کنید. سپس نشان دهید $X\circ Y$ و $Y\circ X$ میدان برداری نیستند اگرچه تفاضل آنها میدان برداری است.

۲ـ نشان دهید $[X,Y]$ در مختصات موضعی روی منیفلد M از کلاس C^∞ و به بعد n، روی کارت (x,U) توسط رابطه (I) در بالا بیان می‌گردد.

۳ـ یک تابع $f:I\!R^3\to I\!R$ مثال بزنید و مقدار کروشه لی دو میدان برداری X و Y یعنی

---

[1] *Lie algebra (Algebre de Lie)*

$[X,Y]\ f$ را در مختصات موضعی بدست آورید.

۴.۲ § نگاشت مماس[۱]

فرض کنیم $f : M \to N$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^1 باشد. به ازاء هر نقطه p از M نگاشت خطی f_* را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f_*)_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

که $(f_*)_p X_p$ توسط اثر آن روی تابع g به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\boxed{(f_*)_p X_p \cdot g = X_p \cdot (g \circ f)} \qquad g \in C^\infty(f(p))$$

براحتی می‌توان نشان داد که $(f_*)_p X_p$ یک مشتق‌گیری از توابع $C^\infty(f(p))$ می‌باشد. به این‌صورت نگاشت زیر را به صورت نقطه به نقطه تعریف می‌نمائیم.

$$f_* : TM \to TN$$

$$(p, X_p) \to (f(p), (f_*)_p X_p)$$

f_* را **نگاشت مماس** می‌نامند و گاهی اوقات آنرا با Tf،Df یا df نیز نمایش می‌دهند.

چون $(f_*)X_p$ یک بردار در $T_{f(p)}N$ می‌باشد نمودار زیر "جابجایی" است. (یعنی دو ترکیب زیر باهم برابرند) $\pi_N \circ f_* = f \circ \pi_M$

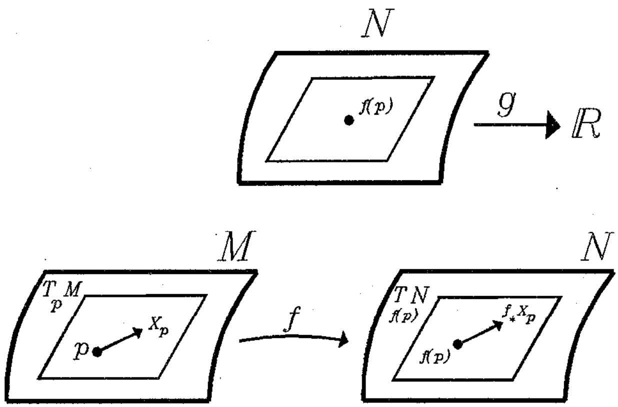
$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{f_*} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

f_* در مختصات موضعی

قضیه: اگر $f : M \to N$ یک نگاشت C^1 باشد فرض کنیم (x,U) و (y,V) دو

---

[۱] Tangent application



شکل ۲.۹ : اثر f و f_* روی M و T_pM و در بالا یک تابع حقیقی روی N

کارت موضعی در همسایگی نقاط p و $f(p)$ باشند. آنگاه ماتریس f_* در پایه‌های $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ، $\frac{\partial}{\partial y_j}$ همان ماتریس ژاکوبین $y \circ f \circ x^{-1}$ نسبت به پایه‌های متعارف است و داریم:

$$(Matrice(f_*)_p)_{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p,(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(p)}} = |(\frac{\partial f^i}{\partial x^j})|_{(p)}$$

با توجه به نمادگذاری بخش قبل $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j} = D_j(y^i \circ f \circ x^{-1})_{x(p)}$

اثبات : فرض کنیم $g \in C^\infty(f(p))$ ماتریس نگاشت خطی f_* را بدست می‌آوریم.

$$[(f_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^j})_p] \cdot g = (\frac{\partial}{\partial x^j})_p(g \circ f) = \sum_i (\frac{\partial g}{\partial y^i})(\frac{\partial f^i}{\partial x^j})_p$$
$$= \sum_i (\frac{\partial f^i}{\partial x^j})_p(\frac{\partial}{\partial y^i})_{f(p)} g$$

از آنجا

$$(f_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^j})_p = \sum_i (\frac{\partial f^i}{\partial x^j})_p(\frac{\partial}{\partial y^i})_{f(p)}$$

که حکم از آن نتیجه می‌شود. □

لم: اگر N, M و P سه منیفلد بوده و $g : M \to N$ و $f : N \to P$ دو تابع

دیفرانسیل‌پذیر باشند آنگاه

$$(f \circ g)_{*x} : T_x M \longrightarrow T_{(f\circ g)(x)} P$$

و داریم

$$(f_*)_{g(x)} \circ (g_*)_x = (f \circ g)_{*x}$$

یعنی

$$\boxed{f_* \circ g_* = (f \circ g)_*}$$

این خاصیت نتیجه می دهد که ماتریس ژاکوبین ترکیب دو تابع برابر است با حاصلضرب ماتریس ژاکوبین‌های آنها. اثبات به عنوان تمرین در خاتمه این بخش به‌عهده خواننده واگذار شده است. [۱]

تعبیر هندسی f_*

فرض کنیم C یک منحنی روی منیفلد M باشد. در اینجا ابتدا به تعبیر هندسی C_* پرداخته خواهیم دید که تصویر این تابع در حقیقت همان بردار مماس بر منحنی C می‌باشد که آن را توسط تصویر C' نیز نمایش می‌دادیم. سپس به تعبیر f_* پرداخته مشاهده خواهیم کرد که این تابع چگونه بر بردارهای مماس M اثر می‌کند.

همانطوریکه قبلا" دیدیم یک بردار مماس در نقطه p از M ممکن است به عنوان یک مشتق‌گیری از توابع $C^\infty(p)$ یا به عنوان یک کلاس هم‌ارزی از منحنی‌ها روی M، که از نقطه p می‌گذرند تعریف شود.

X_p مشتق‌گیری از توابع $C^\infty(p)$است. $\Longleftrightarrow$ $[C]_p$ کلاس هم‌ارزی منحنی‌ها است.

که در آن

$$X_p \cdot f = \frac{d}{dt}(f \circ C)|_{t=0}$$

[۱] با استفاده از تعریف اگر $\varphi \in C^\infty((f\circ g)(x))$ داریم $((f\circ g)_* X_x)\varphi = X_x(\varphi \circ f \circ g)$

هر منحنی C از کلاس $[C]_p$ را یک منحنی انتگرال X_p نامیدیم. بنابراین اگر C یک منحنی باشد

$$C : I =]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow M$$

می‌توان نمودار زیر را که روشنگر تفاوت بین C' و C_* است در نظر گرفت.

$$\begin{array}{ccc} TI & \stackrel{C_*}{\longrightarrow} & TM \\ \frac{d}{dt}\uparrow & \stackrel{C'}{\nearrow} & \downarrow \\ I & \stackrel{C}{\longrightarrow} & M \end{array}$$

در اینجا فرض کرده‌ایم $\frac{d}{dt} \in \mathcal{X}(I)$ ، $C(\circ) = p, f \in C^\infty(M)$
بنابر تعریف C_* داریم

$$(C_*)_\circ \circ (\frac{d}{dt})_\circ \cdot f = (\frac{d}{dt})_{t=\circ} f \circ C = \frac{d(f \circ C)}{dt}|_{t=\circ} = X_p \cdot f$$

همچنین C منحنی انتگرال بردار $C_* \dfrac{d}{dt}$ می‌باشد

$$(C_*)_\circ \circ (\frac{d}{dt})_\circ = X_p$$

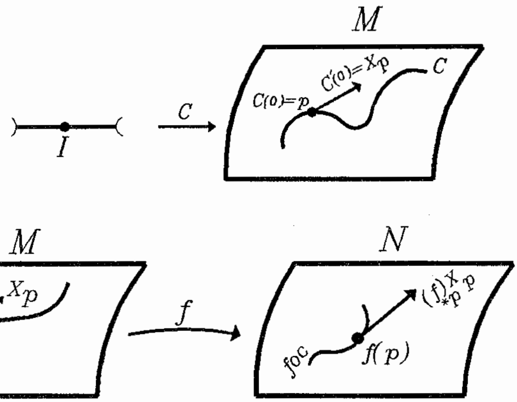
که در ادامه این بخش بردار مماس بر منحنی C در نقطه p را توسط رابطه زیر نشان می‌دهیم.
$C'(\circ) \in T_{C(\circ)}M$

$$\boxed{C'(\circ) = (C_*)_\circ \circ (\frac{d}{dt})_\circ}$$

بنابراین اگر $X_p \in T_pM$، آنگاه منحنی انتگرال آن، منحنی $C : I \to M$ است که در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases} C(\circ) & = p \\ C'(\circ) & = X_p \end{cases}$$

حال فرض کنیم $f : M \to N$، $X_p \in T_pM$ و C یک منحنی انتگرال X_p باشد در اینجا براحتی خواهیم دید که $(f_*)_p$ عبارتست ازنگاشتی که X_p را به بردار مماس بر منحنی $f \circ C$ در نقطه $f(p)$ تبدیل می‌کند.



شکل ۲.۱۰ : اثر f_* روی یک بردار مماس بر M

در حقیقت داریم :

$$(f_*)_pX_p = (f_*)_{C(\circ)} \circ (C_*)_\circ \circ \frac{d}{dt} = (f \circ C)_{*\circ}(\frac{d}{dt})_\circ = (f \circ C)'(\circ)$$

تذکر: می‌دانیم $f_* : TM \to TN$ به‌صورت بالا تعریف می‌شود، اما f_* وجود نگاشتی از $\mathcal{X}(M)$ در $\mathcal{X}(N)$ را ثابت نمی‌کند. برای آنکه بتوان نگاشتی از $\mathcal{X}(M)$ در $\mathcal{X}(N)$ تعریف نمود باید نگاشت f دوسویی باشد (به عبارت دیگر f یک دیفئومورفیسم باشد.)

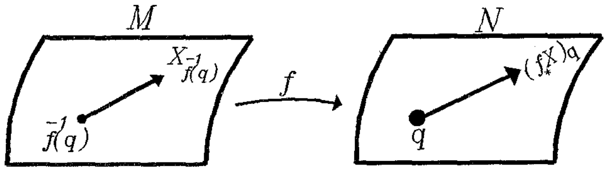
حال فرض کنیم f یک دیفئومورفیسم باشد. $f : M \to N$ و $X \in \mathcal{X}(M)$ آنگاه بطور نقطه به نقطه $(f_*X) \in \mathcal{X}(N)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. اگر q نقطه‌ای از N باشد قرار می‌دهیم.

$$\boxed{(f_*X)_q = (f_*)_{f^{-1}(q)}X_{f^{-1}(q)}}$$

تعریف: می‌گوئیم دو میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ و $Y \in \mathcal{X}(N)$ **هم ارز یا مرتبط-** C^k می‌باشند اگر یک دیفئومورفیسم C^k، $f : M \to N$ موجود باشد بطوریکه :

$$Y = f_* X$$

(تعبیر هندسی رابطه اخیر متعاقباً در بخش ۴ از فصل ۶ آورده خواهد شد.)



شکل ۲.۱۱ : اثر f_* روی یک میدان برداری روی M

تمرین

۱ـ نشان دهید که اگر $f : M \to N$ از کلاس C^1 باشد آنگاه $(f_*)_p X_p$ یک مشتقگیری از توابع $C^\infty(f(p))$ است، به عبارت دیگر $(f_*)_p X_p$ یک بردار مماس روی N می‌باشد.

۲ـ اگر $f : N \to P$ و $g : M \to N$ تعریف شده باشد نشان دهید[1]

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

۳ـ نشان دهید مشتق پذیری یک تابع $f : M \to N$ (وجود یا عدم وجود f_*) به انتخاب کارت‌ها بستگی ندارد (اگر چه مقدار مشتق در کارت‌های مختلف متفاوت باشد مانند مشتق یک تابع در مختصات دکارتی و مشتق همان تابع در مختصات قطبی در صفحه) این موضوع در فصل اول نیز بررسی گردیده بود.

۴ـ نشان دهید اگر $f : M \longrightarrow N$ از کلاس C^k باشد آنگاه f_* از کلاس C^{k-1} است.

۵.۲ § فضای دوگان مماس (فضای کتانژانت)[2]

مقدمه: در این فصل مفاهیم زیر را تعریف کردیم:

---

[1] با استفاده از تعریف اگر $\varphi \in C^\infty((f \circ g)(x))$ داریم $((f \circ g)_{*x} X_x)\varphi = X_x(\varphi \circ f \circ g)$

[2] *Cotangent space (Espace contangent)*

I ـ بردار مماس X_p، II ـ فضای مماس T_pM، III ـ میدان برداری X، IV ـ خانواده میدان‌های برداری $\mathcal{X}(M)$، Vـ نگاشت مماس f_*

حال میخواهیم در ادامه، تعاریف دوگان تعاریف فوق را به ترتیب زیر بیان کنیم:

Iـ ۱ـ فرمی ω_p، IIـ فضای دوگان مماس T_p^*M، IIIـ میدان ۱ـ فرمی ω، IVـ خانواده میدان‌های ۱ـ فرمی $\Omega^1(M)$، Vـ نگاشت دوگان مماس f^*

به ازاء هر نقطه p از M، T_pM یک فضای برداری است که فضای دوگان آنرا با T_p^*M نشان داده آنرا فضای دوگان مماس می‌نامیم. قرار می‌دهیم

$$T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M$$

$T^*(M)$ بطور طبیعی دارای ساختار منیفلد است. فرض کنیم

$$\tilde{\pi} : T^*M \longrightarrow M$$

$$\omega_p \in T_p^*M \;\mapsto\; p$$

فرض کنیم (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p بوده و $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}_{i=1,\dots,n}$ یک پایه برای T_pM باشد آنگاه پایه‌ای برای T_p^*M تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$(\theta^i)_p \text{ پایه دوگان } (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$$

به عبارت دیگر داریم $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p(\theta^j)_p = \delta_i^j$ که در آن δ_i^j دلتای کرونکر است. اگر U^* تصویر معکوس U توسط $\tilde{\pi}$ باشد با توجه به شکل داریم

$$U^* = \tilde{\pi}^{-1}(U) \qquad , \qquad U^* \subset T^*M$$

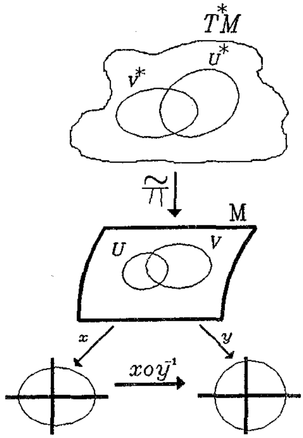
نگاشت $\tilde{\varphi}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{\varphi} : U^* \longrightarrow R^{2n}$$

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} a^i(\theta^i)_p \;\mapsto\; (x^1(p), \cdots, x^n(p), a_1, \cdots, a_n)$$

همانطور که قبلا" نیز مشابه نگاشت فوق رادیده بودیم اگر M از کلاس C^k باشد می‌توان نشان داد که $(U^*, \tilde{\varphi})$ یک اطلس C^{k-1} روی T^*M تعریف می‌کند، که این موضوع به عنوان تمرین واگذار می‌شود. T^*M را **منیفلد کتانژانت** نیز می‌گویند.

نمادگذاری: معمولا" اعضای T_p^*M را با حروف یونانی $\omega, \pi, \alpha, \beta, \cdots$ نشان می‌دهند وآنها را ۱ـ فرمی می‌نامند.



شکل ۲.۱۲ : کارت‌های منیفلد دوگان مماس

مثال: خانواده ۱ـ فرمی‌های روی $I\!R^2$ در مختصات (x, y) در نقطه p را با $T_p^* I\!R^2$ نشان داده به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\omega_p = a_1 dx + a_2 dy \qquad \omega_p \in T_p^* I\!R^2$$

توضیح بیشتر در این زمینه، و دلیل اینکه چرا ۱ـفرمی‌ها به‌صورت فوق نوشته می‌شوند را در ادامه این بخش و در بخش Pـ فرمی‌ها خواهیم آورد.

میدان ۱ـ فرمی‌ها[1]

مشابه تعریف میدان‌های برداری روی یک منیفلد ، میدان ۱ـفرمی ها را تعریف می‌نمائیم.

---

[1] $one\ forms\ fields\ (Champs\ de\ 1-forme)$

تعریف اول: میدان ۱ـفرمی‌ها از کلاس C^k عبارت است از نگاشت C^k زیر

$$\omega : M \longrightarrow T^*M$$

که به هر نقطه p از M یک عضو ω_p از T_p^*M را وابسته می‌کند.
(به عبارت دیگر منظور یک بخش از نگاشت $\tilde{\pi} : T^*M \to M$ می‌باشد.)
نمادگذاری: مجموعه میدان ۱ـفرمی ها از کلاس C^∞ روی منیفلد M را با $\Omega^1(M)$ نمایش می دهیم. $\Omega^1(M)$ با قوانین زیر تشکیل یک $C^\infty(M)-$ مدول می‌دهد.

$$(\omega_1 + \omega_2)_p = (\omega_1)_p + (\omega_2)_p$$

$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p$$

تذکر: *مشابه میدان‌های برداری ثابت می‌شود که اگر $f \in C^\infty(M)$، آنگاه هر میدان ۱ـفرمی را می‌توان با یک $C^\infty(M)$ خطی مانند $\underline{\omega}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود همانند نمود* $\underline{\omega} : \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$

$$\begin{cases} \underline{\omega}(X+Y) &= \underline{\omega}(X) + \underline{\omega}(Y) \\ \underline{\omega}(fX) &= f\underline{\omega}(X) \qquad\qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \forall f \in C^\infty(M) \end{cases}$$

لذا تعریف زیر را که معادل تعریف اول می‌باشد آورده و از این به بعد از این تعریف استفاده می‌نمائیم.
تعریف دوم: *نگاشت ω را یک میدان ۱ـفرمی دیفرانسیل‌پذیر روی M گوئیم اگر $C^\infty(M)$ـخطی باشد، به عبارت دیگر اگر ω در شرایط زیر صدق کند.*

$$\begin{aligned} \omega : \mathcal{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \omega(X+Y) &= \omega(X) + \omega(Y) \qquad\qquad \forall f \in C^\infty(M) \\ \omega(fX) &= f\omega(X) \qquad\qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M) \end{aligned}$$

تذکر: *فرض کنیم $\omega \in \Omega^1(M)$ و U یک همسایگی از M باشد آنگاه مشابه میدان‌های برداری می‌توان نشان داد که یک وتنها یک $\omega_U \in \Omega^1(U)$ وجود دارد، بطوریکه*

$$\omega(X)|_U = \omega_U(X_U)$$

بنابراین کافی است به ازاء هر نقطه p از U تعریف کنیم

$$\begin{aligned}(\omega_U)_p : T_pU &\to \mathbb{R}\\ X_p &\to \omega(X)_{(p)}\end{aligned}$$

مثال : مشتق خارجی یک تابع[۱] فرض کنیم $f \in C^\infty(M)$ باشد. نگاشت df را به اینصورت تعریف می‌کنیم

$$\boxed{(df)(X) = X \cdot f}$$

براحتی می‌توان بررسی نمود که df یک میدان ۱ ـفرمی است.

$$(df)(X+Y) = (X+Y)\cdot f = X\cdot f + Y\cdot f = (df)(X) + (df)(Y)$$

$$(df)(gX) = gX\cdot f = g(X\cdot f) = g(df)(X) \qquad g \in C^\infty(M)$$

مثال: فرض کنیم (x, U) یک کارت موضعی و $\begin{aligned}x^i :\ & U \to \mathbb{R}\\ & p \to x^i(p)\end{aligned}$ نگاشت مولفه iام باشد که به هر نقطه p از U مولفه iام $x(p)$ را وابسته می‌کند می‌خواهیم dx^i را محاسبه کنیم.

$dx^i(X) \underset{U}{=} X\cdot x^i = \sum_j X^j \dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = X^i$ و در حالت خاص داریم:

$$\boxed{dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \underset{U}{=} \delta^i_j}$$

بنابراین نقطه به نقطه روی U داریم

$$\forall p \in U \qquad (dx^i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \delta^i_j$$

تذکر: از این عبارت نتیجه می‌شود که $(dx^i)_p$ پایه دوگان $(\dfrac{\partial}{\partial x^i})_p$ است.

---

[۱] *exterior derivation*

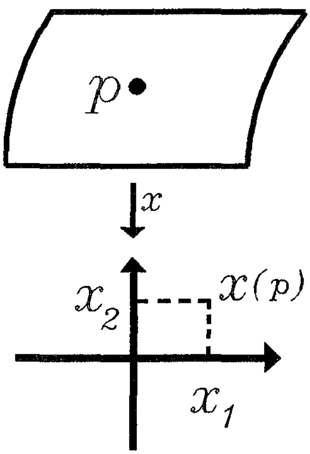
میدان ۱ـفرمی‌ها در مختصات موضعی:

فرض کنیم (x,U) یک کارت موضعی و $\omega \in \Omega^1(M)$ باشد. اگر $X \underset{U}{=} \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ آنگاه

$$\omega(X) \underset{U}{=} \omega\left(\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_i X^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

زیرا ω خطی است. $\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \in C^\infty(U)$ حال قرار می‌دهیم $a_i(x) \underset{U}{=} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ داریم

$$\omega(X) \underset{U}{=} \sum_i a_i(x) X^i(x)$$



شکل ۲.۱۳ : مختصات موضعی نقطه p روی M

چون دیدیم $dx^i(X) = X^i$ بنابراین به ازاء هر X داریم $\omega(X) = \sum_i a^i(x) dx^i(X)$

یا

$$\boxed{\omega \underset{U}{=} \sum_i a_i(x) dx^i}$$

$a_i(x)$ را مولفه‌های میدان ۱ـفرمی ω می‌نامیم. در حالت خاص برای df داریم

$$(df)(X) \underset{U}{=} X \cdot f \underset{U}{=} \sum X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(X)$$

(با توجه به نمادگذاری $\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$)

$$\boxed{df \underset{U}{=} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i}$$

بنابراین df تعمیم دیفرانسیل کل یک تابع روی منیفلدها است که قبلاً در $\mathbb{R}^n$ با مفهوم آن آشنا شده بودیم.

تمرین:

۱ـ نشان دهید T^*M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^{k-1}، به بعد $2n$ است. نگاشت تغییر مختصات را بنویسید و ماتریس ژاکوبین آنرا بدست آورید.

راهنمایی: باید ابتدا رابطه بین ۱ـفرمی ω در دو دستگاه مختصات (x, U) و (y, V) را بدست آورده نشان داد در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$\sum_i a_i dx^i = \sum_j b_j dy^j \Rightarrow b_k = \sum_j a_i \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$$

سپس مشابه قضیه TM کارتها و ماتریس ژاکوبین نگاشت تغییر کارت را بدست آورد.

۲ـ فرض کنید M و N منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر به ابعاد n و m بوده، f نگاشت دیفرانسیل‌پذیر از M در N باشد. دو کارت (x, U) و (y, V) را در همسایگی p و $f(p)$ در نظر گرفته تعریف می‌کنیم:

اگر $f_i = (y \circ f \circ x^{-1})_i$ آنگاه $df = (df_1, \cdots, df_m)$

در اینجا f_iها توابع حقیقی $f_i : x(U) \to I\!R$ می‌باشند که دیفرانسیل خارجی آنها df_i را در بالا تعریف نمودیم.

الف) نشان دهید ماتریس نگاشت خطی df در پایه کانونی همان ماتریس f_* در پایه ایجاد شده توسط کارت‌های $(y,V),(x,U)$ است.

ب) اگر g, f نگاشت‌های دیفرانسیل‌پذیر $g : M \to I\!R$ ،f باشند نشان دهید

$$d(fg) = fdg + gdf$$

ج) نشان دهید با مفروضات (ب) داریم

$$(fg)_* = fg_* + gf_*$$

۶.۲ § نگاشت دوگان یا کتانژانت[۱]

تعریف: *فرض کنیم $f : M \to N$ یک نگاشت از کلاس C^1 باشد به ازاء هر p از M* یک نگاشت خطی به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$(f^*)_p : T^*_{f(p)}N \longrightarrow T^*_p M$$

بطوریکه اگر $\omega \in T^*_{f(p)}N$ داشته باشیم

$$\boxed{((f^*)_p\omega)(X_p) = \omega((f_*)_p X_p)}$$

آنگاه f^* را **نگاشت دوگان** یا **نگاشت کتانژانت** نگاشت f نامیده آنرا **نگاشت عقب‌کش**[۲] نیز می‌گویند. بطور نقطه به نقطه نگاشت f^* را تعریف نمودیم.

Cotangent application[۱]

Pull back[۲]

تذکر: نگاشت f^* که بطور نقطه‌ای تعریف شده است در حالت کلی نگاشتی از T^*N به T^*M نیست مگر آنکه f معکوس‌پذیر باشد.
در حالت کلی f^* عبارت است از نگاشت

$$f^* : \Omega^1(N) \to \Omega^1(M)$$

براحتی می‌توان نشان داد ماتریس f^*p در هر نقطه‌ای در پایه‌ای که از کارت‌ها ایجاد می‌شود عبارت است از ترانهاده ماتریس ژاکوبین f_*p در همان نقطه (نگاشت مماس). گاهی اوقات $f^*\omega$ را تصویر معکوس ω توسط f نیز می‌گویند.

لم ۱: الف) اگر f تابعی از M در N و g تابعی از N در P از کلاس C^1 باشند آنگاه

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

ب) به ازاء هر $g \in C^\infty(N)$

$$f^*dg = d(f^*g)$$

در اینجا فرض شده است

$$f^*g = g \circ f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$$

اثبات بسادگی از تعریف و لم مشابه در ۴§ نتیجه شده و بعنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (به تمرین ۱ در همین بخش مراجعه کنید.)

لم ۲: ماتریس نگاشت خطی f^*p برابر ترانهاده ماتریس f_*p است.

اثبات این لم مشابه اثبات قضیه مربوط به ماتریس f_* است که در بخش قبل دیدیم. (به تمرین ۳ این بخش مراجعه کنید.)

تمرین:

۱ـ لم ۱ در بالا را ثابت کنید.

راهنمایی: (ب) فرض کنید $\omega = dg$ و به ترتیب از تعریف f^*، df، f_* و نمادگذاری $f^*g = g \circ f$ استفاده کنید.

۲ـ فرض کنیم $f : I\!R^{۳} \longrightarrow I\!R^{۲}$ به‌صورت زیر تعریف شود

$$f(x_۱, x_۲, x_۳) = (x_۱ + ۲x_۲, x_۲ + x_۳)$$

میدان برداری $X = \sum_{i=۱}^{۳} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ را در $I\!R^{۳}$ و میدان ۱ـ فرمی $\omega = a^۱ dx_۱ + a^۲ dx_۲$ را در $I\!R^{۲}$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $f^*\omega$ یک میدان ۱ـفرمی روی $I\!R^{۳}$ می‌باشد. مطلوب است محاسبه $(f^*\omega)(X)$.

۳ـ نشان دهید ماتریس $(f^*)_p$ و ماتریس $(f_*)_p$ در پایه‌هایی که توسط کارت‌ها ایجاد می‌شوند ترانهاده یکدیگرند.

۴ـ با استفاده از ماتریس f^* مستقیماً $f^*\omega$ را در تمرین ۲ محاسبه نموده جواب‌ها را مقایسه کنید.

پیوست I: چند تابع دیفرانسیل‌پذیر خاص روی منیفلدها

در این بخش به بررسی توابعی می‌پردازیم که وجود آن روی منیفلدها به ما اجازه می‌دهد خواص موضعی[1] (یعنی در همسایگی هر نقطه) را به خواص سرتاسری[2] (یعنی در کل منیفلد) تعمیم دهیم.

یادآوری می‌کنیم که **محمل**[3] تابع $f : M \to \mathbb{R}$ عبارت است از بستار[4] مجموعه نقاطی که در آن نقاط f مخالف صفر است.

گزاره: اگر M یک منیفلد C^{∞}، U بازی از M و K زیر مجموعه فشرده‌ای از U باشد. آنگاه تابعی مانند $\varphi \in C^{\infty}(M)$ موجود است بطوریکه

$$\varphi \geq 0 \quad , \quad \varphi|_K = 1 \quad , \quad Supp\, \varphi \subset U$$

(لذا $\varphi = 0$ روی مرز U)

اثبات: در اینجا $Supp\ \varphi = \overline{\{p \in M | \varphi(p) \neq 0\}}$. فرض کنیم $p \in K$ و (x, V) یک کارت در همسایگی p باشد بطوریکه $x(p) = 0$ و $\overline{V} \subset U$. تابع $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$

---

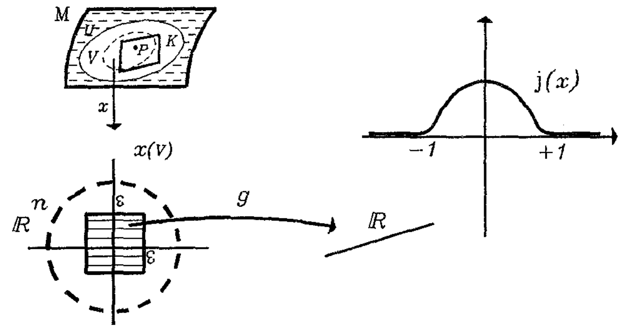
[1] Local

[2] global

[3] Support

[4] Closure

را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



شکل ۲.۱۴: نمودار سمت راست مربوط به $J(x)$ و سمت چپ مربوط به تابع حقیقی g است

در نقاط مربوط به مکعب n بعدی باز $(]-\varepsilon,\varepsilon[)^n$ داریم $g|_{(]-\varepsilon,\varepsilon[)^n} > ۰$ و در نقاط دیگر $g = ۰$ یک چنین تابعی همواره موجود است و می‌توان آنرا به‌صورت زیر ارائه نمود.

$$J(x) = \begin{cases} e^{-((۱/(۱-x)^۲+۱/(۱+x)^۲)} & x \in]-۱,۱[\\ ۰ & x \notin]-۱,۱[\end{cases}$$

در اینجا $J \in C^\infty(I\!R)$. حال برای هر $x = (x_۱, \cdots, x_n)$ قرار می‌دهیم

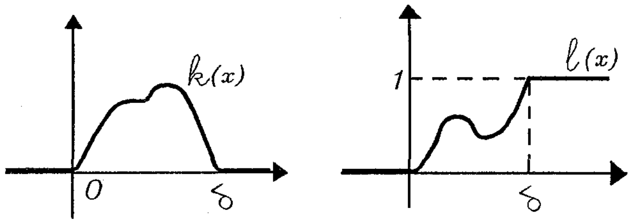
$$g(x) = J(\frac{x_۱}{\varepsilon})J(\frac{x_۲}{\varepsilon})\cdots J(\frac{x_n}{\varepsilon})$$

ε را به‌اندازه کافی کوچک طوری اختیار می‌کنیم که $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset x(V)$. حال تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$\varphi_p = g \circ x \in C^\infty(V)$$

φ_p را می‌توان به صورت صفر به خارج V توسعه داده و لذا می‌توان آنرا به توابع $C^\infty(M)$ توسیع داد. این تابع توسعه یافته را با $\tilde{\varphi}_p \in C^\infty(M)$ نمایش می‌دهیم. به ازاء هر نقطه $p \in K$ به این صورت $\tilde{\varphi}_p$ را می‌سازیم. چون K فشرده است می‌توان آنرا توسط

تعدادی متناهی از کارتها مانند (x_i, V_i) ،$i = ۱, \cdots, m$ پوشانید. فرض کنیم



شکل ۲.۱۵ : تابعی که به جز یک فاصله همه‌جا ثابت است

$$Supp\,\tilde{\varphi} \subset U \quad , \quad \tilde{\varphi} \in C^{\infty}(M) \quad , \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_{p_1} + \cdots + \tilde{\varphi}_{p_m}$$

بعلاوه $\tilde{\varphi}|_K > ۰$، بنابراین عددی مانند $\delta > ۰$ موجود است بطوریکه

$$\tilde{\varphi}|_K \geq \delta$$

حال برای ارائه φ نگاشت ℓ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم $\ell \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$$\ell(x) = \frac{\int_{۰}^{x} k(t)dt}{\int_{۰}^{\delta} k(t)dt}$$

در اینجا $k \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ که همواره $k \geq ۰$ بوده و خارج فاصله $]۰, \delta[$ داریم $k = ۰$

براحتی می‌توان نشان داد که تابع $\varphi = \ell \circ \tilde{\varphi}$ شرایط حکم گزاره را دارد. □

خانواده توابع C^{∞} از M در N را توسط $C^{\infty}(M, N)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت نتیجه زیر را از گزاره بالا خاطرنشان می‌سازیم.

نتیجه: فرض کنیم U بازی از M بوده و $f \in C^{\infty}(U, M')$ آنگاه با تحدید U می‌توان f را به یک تابع C^{∞} روی M توسیع داد. به عبارت دیگر وجود دارد بازی مانند U'، زیر مجموعه U، $U' \subset U$ و تابعی مانند $\tilde{f} \in C^{\infty}(M, M')$ بطوریکه

$$f|_{U'} = \tilde{f}|_{U'}$$

اثبات: در حقیقت چون M موضعاً فشرده می‌باشد، (بنابر قضیه‌ای در بخش توپولوژی منیفلدها هر منیفلد هاسدرف موضعاً فشرده است.)، یک همسایگی فشرده مانند K وجود دارد بطوریکه $K \subset U$. فرض کنیم U' بازی در K باشد. حال تابع φ در گزاره بالا را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\varphi|_{f(k)} = ۱ \quad , \quad Supp\, \varphi \subset \overbrace{f(U)}^{\circ}$$

تابع $f \circ \varphi$ برابر f روی K و بنابراین روی U' می‌باشد و می‌توان آنرا به صورت صفر به خارج U نیز توسعه داد. تابعی که به این صورت توسیع پیدا کرده است تابع مورد نظر می‌باشد. $\square$

تذکر: *در حالت کلی نمی‌توان یک تابع C^∞ را که در یک باز تعریف شده است بطور C^∞ توسعه داد. بعنوان مثال تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ که در فاصله $]۰, ۱[$ از کلاس C^∞ می‌باشد را در نظر بگیرید.*

پیوست II: افراز واحد

مقدمه: در اینجا در مورد تعریف افراز واحد و اثبات وجود آن بحث می‌نمائیم. ابتدا به یادآوری چند تعریف و قضیه از توپولوژی پرداخته سپس با استفاده از آن ثابت می‌کنیم که هر منیفلد M دارای یک افراز واحد است اگر و تنها اگر پیرافشرده باشد. در خاتمه یک مثال مقدماتی نیز آورده شده است.

الف: یادآوری چند تعریف از توپولوژی

تعریف: *یک فضای هاسدرف را* **نرمال**[1] *گوئیم اگر هر زوج از بسته‌های مجزای آنرا بتوان توسط دو باز از یکدیگر جدا نمود.*

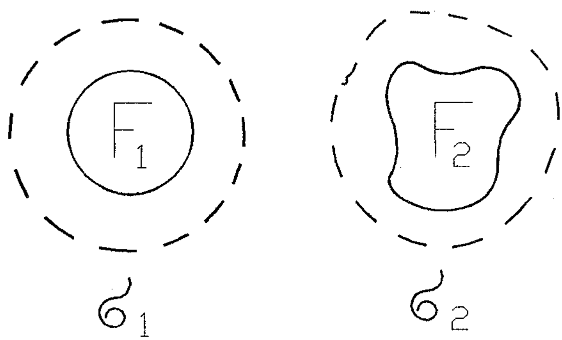
قضیه اوریسون:[2] **فضای توپولوژیک M نرمال است اگر و تنها اگر به ازاء بسته‌های مجزای دلخواه F_1 و F_2 تابع پیوسته‌ای مانند $f : M \to [0, 1]$ موجود باشد به‌طوری‌که**

$$f|_{F_1} = 0 \quad , \quad f|_{F_2} = 1$$

---

[1] *Normal Space*

[2] *Urysohn theorem*



شکل ۲.۱۶ : فضای نرمال

تعریف: یک پوشش فضای توپولوژیک M را **موضعاً متناهی**[۱] گویند، اگر به ازاء هر نقطه آن یک همسایگی آن موجود باشد که فقط تعدادی متناهی از اعضای پوشش را قطع نماید.

تعریف: یک فضای توپولوژیک هاسدرف **راپیرا فشرده**[۲] گوئیم اگر برای هر پوشش باز $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ یک تظریف باز $(V_\beta)|_{\beta\in B}$ موضعاً متناهی موجود باشد که فضا را بپوشاند.
(تظریف یعنی : $\forall\beta \in B, \exists\alpha \in A : V_\beta \subset U_\alpha$)

با استفاده از تعاریف فوق می‌توان لم زیر را ثابت نمود. کاربرد این لم در اثبات وجود افراز واحد در بخش بعد آورده خواهد شد.

لم انقباض[۳]: **فرض کنیم M یک فضای توپولوژیک نرمال و $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ یک پوشش باز موضعاً متناهی آن باشد. می‌توان یک پوشش باز $(U'_\alpha)_{\alpha\in A}$ طوری روی M ساخت که همواره داشته باشیم**

$$\overline{U'}_\alpha \subset U_\alpha$$

قضیه زیر بر این اساس اثبات می‌شود و کاربرد فراوان دارد.

---

۱ $Locally\ finite\ (Locallement\ finie)$

۲ $Paracompact$

۳ $Contraction\ lemma$

قضیه: ۱ـ فضای توپولوژیک M متریک‌پذیر است اگر و تنها اگر موضعاً متریک‌پذیر و پیرافشرده باشد.

۲ـ هر فضای توپولوژیک پیرافشرده، نرمال است.

۳ـ هر فضای توپولوژیک هاسدرف فشرده، پیرافشرده است.

ب: افراز واحد[۱]

افراز واحد عبارت است از خانواده‌ای از توابع که وجود آنها روی یک مجموعه از اهمیت خاصی در هندسه، آنالیز و توپولوژی برخوردار است. در اینجا پس از تعریف افراز واحد برقراری شرایط وجود آنرا روی منیفلدها ثابت می‌نمائیم. سپس با استفاده از این شرایط تعریف ساده‌تری از آن را که اغلب مورد استفاده فیزیکدانان است بیان می‌کنیم.

تعریف اول: *فرض کنیم M یک منیفلد C^k و $R = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ یک پوشش باز M باشد.* **یک افراز واحد از کلاس C^k وابسته به پوشش R** *عبارت است از خانواده‌ای از زوج‌های $(V_\beta, \varphi_\beta)_{\beta \in B}$ که در آن $\{V_\beta\}$ یک تظریف موضعاً متناهی $\{U_\alpha\}$ بوده و φ_β توابعی هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند.*

$$\varphi_\beta : M \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad \varphi_\beta \in C^k(M)$$

$$\forall x \in M, \forall \beta \in B \qquad\qquad 0 \leq \varphi_\beta(x) \leq 1 \tag{I}$$

$$Supp \ \ \varphi_\beta \subset V_\beta \tag{II}$$

$$\forall x \in M \qquad\qquad \sum_{\beta \in B} \varphi_\beta(x) = 1 \tag{III}$$

در این تعریف شرط موضعاً متناهی بودن $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ تضمین کننده وجود تعدادی متناهی جمله در شرط III و در نتیجه متناهی بودن مجموع می‌باشد. از شرط II نتیجه می‌شود اگر $x \notin V_\beta$ آنگاه $\varphi_\beta(x) = 0$.

---

[۱] *Partition of Unity (Partition de l'unite')*

حال اگر فرض کنیم f یک تابع حقیقی روی M باشد، با استفاده از افراز واحد می‌توان آنرا به‌صورت زیر نوشت

$$f \,:\, M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(p)=\sum_{\beta} f(p)\varphi_\beta(p)=\sum_{\beta} f_\beta(p)$$

در اینجا فرض شده است $f_\beta(p)=f(p)\varphi_\beta(p)$

قضیه: فرض کنیم M یک منیفلد پیرافشرده از کلاس C^kباشد. آنگاه برای هر پوشش $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک افراز واحد از کلاس C^k تحت این پوشش وجود دارد.

اثبات: فرض کنیم $x\in M$ و U_{α_x} یک باز از پوشش، شامل x باشد. فرض کنیم K_x یک همسایگی فشرده از x، در U_{α_x} باشد. پوشش زیر را در نظر می‌گیریم

$$R=\{Int \;\; K_x \;\;,\;\; x\in M\}$$

چون M پیرافشرده است، این پوشش دارای یک تظریف موضعاً متناهی $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ می‌باشد. و چون M نرمال است بنابر لم انقباض یک پوشش $\{W_\beta\}_{\beta\in B}$ موجود است بطوریکه

$$\forall\beta\in B\;,\;\overline{W}_\beta\subset V_\beta\subset K$$

(K عبارت است از یک زیر مجموعه فشرده در خانواده R که به β بستگی دارد)

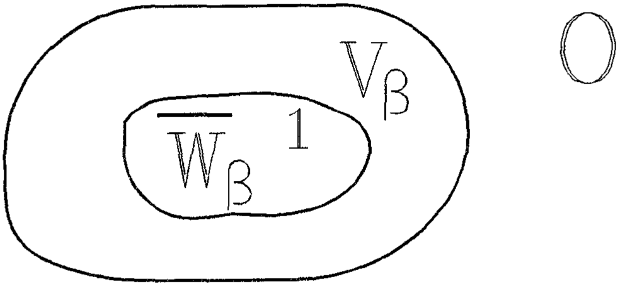
چون $\overline{W}_\beta\subset K$ بنابراین $\overline{W}_\beta$ فشرده است. لذا بنابر گزاره ثابت شده در پیوست I، تابعی مانند ψ_β از کلاس C^k وجود دارد بطوریکه

$$\psi_\beta : M\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x\in M\;,\; ۰\leq \psi_\beta(x)\leq ۱$$

$$\psi_\beta|_{\overline{W}_\beta}=۱$$

$$Supp\Psi_\beta\subset V_\beta$$



شکل ۲.۱۷ : مقدار تابع روی $\overline{W}_\beta$ برابر ۱ و خارج V_β صفر است.

حال تابع $\psi : M \longrightarrow I\!R$ را در نظر می‌گیریم که توسط رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\psi(x) = \sum_{\beta \in B} \psi_\beta(x)$$

چون $\{V_\beta\}$ موضعاً متناهی است مجموع بالا در یک همسایگی هر نقطه به صورت مجموعی متناهی است.

به ازاء هر $x \in M$ داریم $\psi(x) \geq ۱$. قرار می‌دهیم $\varphi_\beta = \dfrac{\psi\beta}{\psi}$، داریم

$$\sum_{\beta \in B} \varphi_\beta(x) = ۱$$

لذا افراز واحد مورد نظر توسط زوج $\{V_\beta, \varphi_\beta\}_{\beta \in B}$ تعریف می‌گردد. □

بنابر قضیه فوق اگر منیفلد M پیرافشرده باشد همیشه افراز واحد در روی آن تعریف می‌گردد. عکس قضیه فوق نیز همواره برقرار است به عبارت دیگر **"منیفلد M دارای یک افراز واحد است اگر و تنها اگر پیرافشرده باشد."** لذا براین اساس با فرض پیرافشرده بودن M می‌توان افراز واحد را به‌صورت زیر نیز تعریف نمود.

مثال: دایره $S^۱$ را در نظر گرفته یک افراز واحد روی آن تعریف و اشاره‌ای به کاربرد آن می‌کنیم. فرض کنیم کارت‌های $(x_۱, U_۱)$ و $(x_۲$ و $U_۲)$ تشکیل یک اطلس روی $S^۱$

بدهند.

$$
\begin{aligned}
x_1 : S^1 &\longrightarrow (0, 2\pi) \qquad\qquad U_1 = S^1 - \{(1,0)\}\\
(\cos\theta, \sin\theta) &\mapsto \theta\\
x_2 : S^1 &\longrightarrow (-\pi, +\pi) \qquad\qquad U_2 = S^1 - \{(-1,0)\}\\
(\cos\theta, \sin\theta) &\mapsto \theta
\end{aligned}
$$

حال توابع φ_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم $\varphi_1(\theta) = \sin^2\theta/2$ و $\varphi_2(\theta) = \cos^2\theta/2$ براحتی مشاهده می‌شود که خانواده $\{\varphi_i(\theta)\}$ در شرایط I ، II و III صدق نموده لذا یک افراز واحد وابسته به پوشش $\{U_i\}$ است.

حال فرض کنیم $f : S^1 \to \mathbb{R}$ به‌صورت $f(\theta) = \cos^2\theta$ تعریف شده باشد همانطور که قبلاً نیز اشاره نمودیم، این تابع را می‌توان به‌صورت $f = \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2$ نیز نوشت

$$f(\theta) = \sin^2\theta/2\cos^2\theta + \cos^2\theta/2\cos^2\theta$$

نظر به اینکه افراز واحد در نظریه انتگرال گیری اهمیت اساسی دارد در اینجا اشاره‌ای به کاربرد افراز واحد در محاسبه انتگرال ساده زیر می‌نمائیم

$$\int_{S^1} f(\theta)d\theta = \int_{S^1}\cos^2\theta d\theta = \int_{S^1}(\sin^2\theta/2\cos^2\theta + \cos^2\theta/2\cos^2\theta)d\theta$$

با توجه به ناحیه‌ای که φ_1 و φ_2 ناصفر هستند داریم

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi}\sin^2\theta/2\cos^2\theta d\theta + \int_{-\pi}^{+\pi}\cos^2\theta/2\cos^2\theta d\theta\\
&= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi
\end{aligned}
$$

(البته می‌توانستیم مستقیماً نیز $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \pi$ را محاسبه نمائیم ولی منظور ما استفاده از افراز واحد بود) کاربردهای اساسی از افراز واحد را در فصول بعد خواهیم دید.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

فصل ۳: زیرمنیفلدها[1]

مقدمه

در فصول قبل به تفصیل با خصوصیات توپولوژیکی و دیفرانسیل‌پذیری منیفلدها آشنا شدیم طبیعی است که این خواص را برای زیر مجموعه‌هایی از منیفلدها نیز مورد مطالعه قرار دهیم. در این راستا مطالعه توپولوژی این زیرمجموعه‌ها، که از اهمیت اساسی برخوردار بوده، مبنایی است برای تعریف این زیرمجموعه‌ها که آنها را زیرمنیفلد می‌نامیم.

در این فصل ابتدا در بخش ۱§ به تعریف نگاشت جادهنده یا ایمرسیون پرداخته قضیه رتبه روی منیفلدها را با استفاده از قضیه رتبه در $I\!R^n$ (این قضیه در پیوست فصل یک آورده شده است) اثبات می‌نماییم. در بخش‌های ۲§ و ۳§ به بررسی خواص عمومی جادهنده یا ایمرسیون پرداخته مثال‌های متنوعی از آن می‌آوریم سپس با استفاده از این نگاشت تعریف زیرمنیفلد جادهنده عنوان شده مثال‌های متنوعی ارائه می‌شود.

در بخش ۴§ با بررسی توپولوژی ذاتی و توپولوژی القایی زیرمنیفلد جادهنده، به بررسی مشکلات موجود در تعریف زیرمنیفلد جادهنده پرداخته بررسی می‌کنیم که تحت چه شرایطی دیفرانسیل‌پذیری یک تابع روی یک منیفلد برای زیرمنیفلدهای آن نیز قابل تعمیم است. نتیجه

---

[1] $submanifolds\ (sous - varie'te')$

این مطالعات ارائه تعریف زیرمنیفلد نشاننده است که با افزودن شرط انطباق توپولوژی ذاتی و توپولوژی القایی صورت می‌گیرد. در بخش §۵ با استفاده از یک قضیه روش ساخت زیر منیفلدهای نشاننده را بیان می‌نمائیم. تمرینات بخش‌های گذشته پس از درک مثال‌های مذکور در هر بخش، براحتی قابل حل بوده تفکر در آنها به خوانندگان توصیه می‌گردد. در بخش §۶ خواص عمومی پوشاننده را مطالعه می‌کنیم.

بخش §۷ به تعریف زیرفضای مماس بر یک زیرمنیفلد اختصاص دارد. نظر به اینکه حذف این بخش لطمه‌ای به پیوستگی مطالب در فصول آینده نمی‌زند به خواننده مبتدی توصیه می‌گردد این بخش را در نگرش‌های بعدی خود مورد مطالعه قرار دهد.

پیوست I در پایان این فصل مربوط به منیفلدهای خارج قسمتی است که در اینجا بطور مبسوطی مورد مطالعه قرار گرفته است. نظر به اینکه وسعت مطالب مذکور در این بخش می‌تواند موجب پراکندگی آموخته‌های خوانندگانی گردد که برای اوّلین‌بار با مفهوم منیفلدها آشنا می‌شوند این مبحث را به‌عنوان پیوست فصل سوم آورده‌ایم.

۱.۳ § جادهنده یا ایمرسیون وقضیه رتبه روی منیفلدها

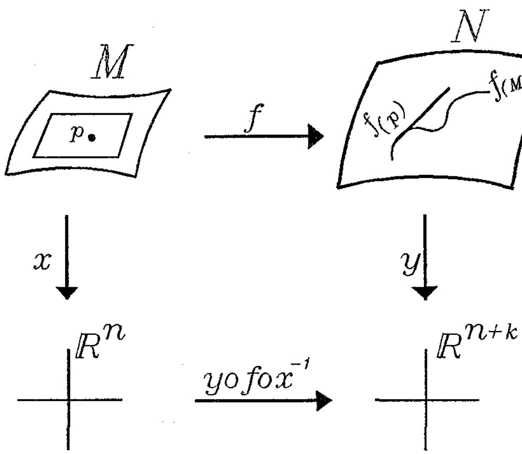
فرض کنیم f یک نگاشت از کلاس C^1 بین دو منیفلد M و N باشد، خانواده این توابع را با $C^1(M,N)$ نمایش می‌دهیم. گوئیم رتبه f در نقطه p برابر r است و می‌نویسیم $(rkf)_p = r$ اگر رتبه نگاشت خطی f_* در p برابر r باشد.

$$(f_*)_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N \qquad\qquad f \in C^1(M,N)$$

(به‌عبارت دیگر اگر بعد فضای تصویر f_* برابر r باشد). اگر رتبه f در نقطه p برابر $\dim M$ باشد $(f_*)_p$ یک به یک بوده و $\dim M \le \dim N$. اگر رتبه f در p برابر $\dim N$ باشد $(f_*)_p$ پوششی بوده و $\dim M \ge \dim N$. فرض کنیم (x,U) و (y,V) دو کارت در همسایگی p و $f(p)$ باشند داریم

$$(rkf)_p = rk\left\|\frac{\partial y^i \circ f \circ x^{-1}}{\partial x^j}\right\|_{x(p)}$$

که برای سادگی آنرا با $rk\left\|\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}\right\|_p$ نیز نمایش می‌دهیم



شکل ۳.۱: نگاشت جادهنده یا ایمرسیون

یادآوری می‌کنیم که رتبه f با استفاده از کارت‌های موضعی محاسبه می‌شود اما تعریفی که در بالا آورده شد یک تعریف ذاتی بود، (یعنی بدون کمک وانتخاب کارت‌ها بیان شد) در نتیجه رتبه f به انتخاب کارت بستگی ندارد.

تعریف: فرض کنیم f نگاشتی از M در N باشد گوئیم f **در** p **یک جادهنده یا ایمرسیون**[۱] است اگر رتبه f در p برابر بعد حوزه تعریف f باشد. در این‌صورت $f : M^n \to N^{n+k}$ و داریم $(rkf)_p = n \quad f \in C^1(M, N)$

گوئیم f **در** نقطه p **یک پوشاننده یا سوبمرسیون**[۲] است اگر رتبه f در p برابر بعد حوزه مقادیر f باشد.

در اینصورت $f : M^{n+k} \to N^n$ و داریم $(rkf)_p = n$

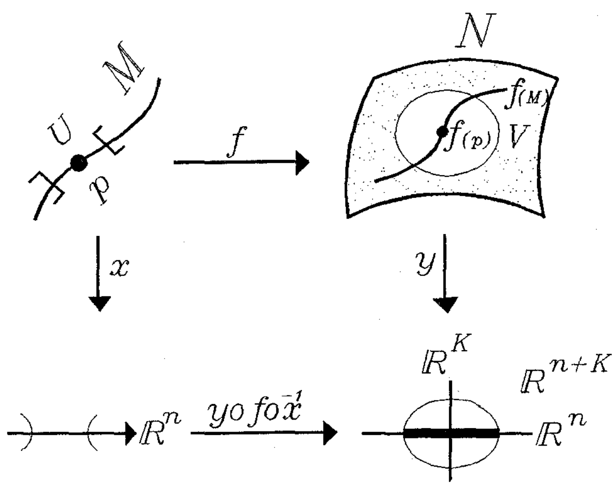
f **را جادهنده (یا بطور مشابه پوشاننده)** گوئیم اگر در تمام نقاط p از M جادهنده (یا بطور

---

[۱] *Immersion*

[۲] *Submersion*

مشابه پوشاننده) باشد. حال به سادگی می توانیم قضیه رتبه برای نگاشت‌های بین فضاهای $I\!R^n$ و $I\!R^m$ را به نگاشت‌های بین منیفلدها تعمیم دهیم. مسئله دیگری که در اینجا از اهمیت خاصی برخوردار است روش تعمیم قضیه‌ها از فضای اقلیدسی به روی منیفلدها با استفاده از کارت‌ها است که در اثبات قضیه رتبه با آن آشنا می‌شویم.



شکل ۳.۲: f در p جادهنده است

قضیه رتبه روی منیفلدها[۱]

الف) فرض کنیم رتبه نگاشت $f : M^n \to N^{n+k}$ در نقطه p برابر n باشد. (f در نقطه p ایمرسیون یا جادهنده باشد) آنگاه برای هر کارت موضعی (x, U) در همسایگی p و یک کارت‌موضعی (y, V) در همسایگی $f(p)$ وجود دارد بطوریکه داشته باشیم

$$y \circ f \circ x^{-1} : (a_1 \cdots, a_n) \mapsto (a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots, 0)$$

در نتیجه اگر f_* در هر نقطه p یک به یک باشد f بطور موضعی یک به یک است،

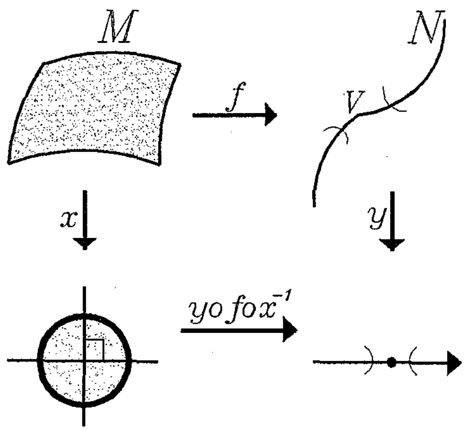
ب) فرض کنیم رتبه نگاشت $f : M^{n+k} \to N^n$ در نقطه p برابر n باشد.

---

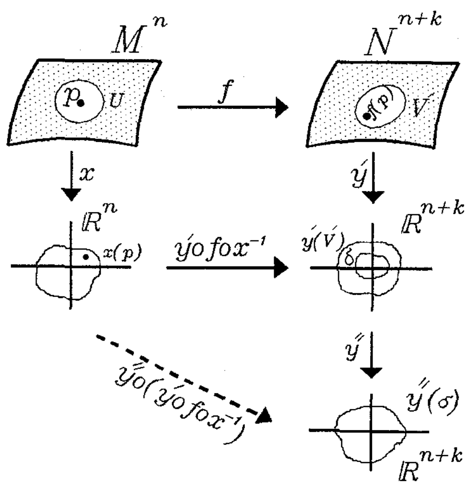
[۱] rank theorem

f در نقطه p سوبمرسیون یا پوشاننده باشد) آنگاه برای هر کارت موضعی (y, V) در همسایگی $f(p)$ یک کارت موضعی (x, U) در همسایگی p وجود دارد بطوریکه داشته باشیم
$$y \circ f \circ x^{-1} : (a_1, \cdots, a_n, \cdots a_{n+k}) \mapsto (a_1, \cdots, a_n)$$

در نتیجه اگر f_* در هر نقطه p پوششی باشد f بطور موضعی پوششی است، (یعنی برای هر نقطه p یک همسایگی U موجود است که $f(U)$ یک همسایگی $f(p)$ را می‌پوشاند)



شکل ۳.۳: f در p پوشاننده است



شکل ۳.۴: کارت تغییر مختصات

اثبات : الف) فرض کنیم رتبه $f : M^n \to N^{n+k}$ در p برابر n باشد. اگر (x, U) و (y', V') دو کارت در همسایگی p و $f(p)$باشند با توجه به شکل ۳.۴ داریم

$$y' \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset I\!R^n \to y'(V') \subset I\!R^{n+k}$$

و $rk(y' \circ f \circ x^{-1})_{x(p)} = n$ بنابر بخش الف از قضیه رتبه روی $I\!R^n$ یک کارت تغییر مختصات روی $y'(V')$ یعنی بازی مانند σ، $\sigma \subset y'(V')$ و یک دیفئومورفیسم y'' وجود دارد

$$y'' : \sigma \to y''(\sigma) \subset I\!R^{n+k}$$

بطوریکه $y'' \circ y' \circ f \circ x^{-1}$ یعنی نگاشت زیر یک به یک باشد.

$$(a_1, \cdots, a_n) \to (a_1, \cdots a_n, 0, \cdots, 0)$$

بنابراین می‌توان گفت برای هر کارت (x, U) در همسایگی p یک کارت (y, V) در همسایگی $f(p)$ وجود دارد $(V = y'^{-1}(\sigma)$ بطوریکه در این مختصات $y = y'' \circ y')$، f بطور موضعی بصورت زیر نوشته شود

$$y \circ f \circ x^{-1} : (a_1, \cdots, a_n) \longrightarrow (a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots, 0)$$

در نتیجه f بطور موضعی یک به یک است.

ب) فرض کنیم رتبه $f : M^{n+k} \longrightarrow N^n$ در p برابرn باشد. اگر (x', U') و (y, V) کارت‌های موضعی حول p و $f(p)$ باشند داریم

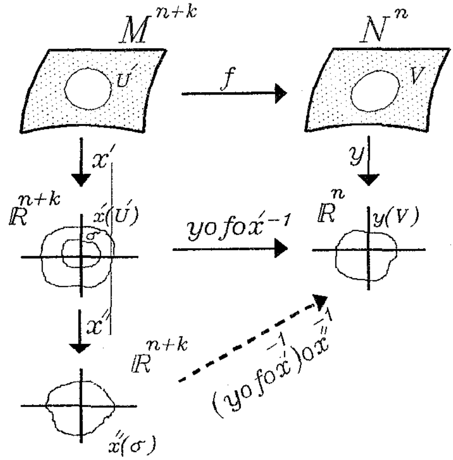
$$y \circ f \circ x'^{-1} : x'(U') \subset I\!R^{n+k} \longrightarrow y(V) \subset I\!R^n$$

و رتبه $rk(y \circ f \circ x'^{-1})_p = n$ بنابر بخش ب از قضیه رتبه روی $I\!R^n$ یک کارت تغییر مختصات روی $x'(U')$ یعنی بازی مانند σ، $\sigma \subset x'(U')$ و یک دیفئومورفیسم x'' وجود دارد

$$x'' : \sigma \longrightarrow x''(\sigma) \subset I\!R^{n+k}$$

بطوریکه نگاشت $(y \circ f \circ x'^{-1}) \circ x''^{-1}$ بصورت زیر نوشته می‌شود

$$(a_1, \cdots, a_n, \cdots, a_{n+k}) \longrightarrow (a_1, \cdots, a_n)$$



شکل ۳.۵ : کارت تغییر مختصات

بنابراین به ازاء هر کارت (y,V) در همسایگی $f(p)$ یک کارت موضعی (x,U) در همسایگی p وجود دارد $(x = x'' \circ x', U = x'^{-1}(\sigma))$ بطوریکه در این مختصات موضعی f بصورت زیر نوشته شود

$$y \circ f \circ x^{-1} : (a_1, \cdots, a_n, \cdots, a_{n+k}) \longrightarrow (a_1, \cdots, a_n)$$

در نتیجه f بطور موضعی پوششی است. □

۲.۳ § خواص عمومی جادهنده یا ایمرسیون

بنابر قضیه رتبه هر جادهنده در مختصات موضعی بصورت زیر نوشته می‌شود

$$y \circ f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$$

$$(a_1, \cdots, a_n) \to (a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots, 0)$$

در این صورت f **بطور موضعی یک به یک** است، (یعنی در یک همسایگی هرنقطه یک به یک است) اما جادهنده‌ها الزاماً "بطور سرتاسری[1] (درکل حوزه تعریف) یک به یک نیستند

[1] globally

بعنوان مثال نگاشت

$$f : I\!R \to I\!R^{۲}$$
$$\theta \to (\cos\theta, \sin\theta)$$

یک جادهنده است زیرا $(۰,۰) \neq f'(\theta)$، $\forall\theta$ و $rk\ f = ۱$ این نگاشت بطور موضعی یک به یک است اما بطور سرتاسری یک به یک نیست.

از طرف دیگر یک نگاشت یک به یک (حتی بطور سرتاسری یک به یک) الزاماً یک جادهنده نیست. بعنوان مثال نگاشت زیر یک به یک و بطور سرتاسری یک به یک می‌باشد اما در تمام نقاط جادهنده نیست..

$$f : I\!R \longrightarrow I\!R$$
$$x \mapsto x^{۳}$$

رتبه f در نقطه صفربرابر صفر است $rk(f_*)_{۰} = ۰$ زیرا $f'(۰) = ۰$

مثال برای جادهنده:

۱ـ نگاشت f که تصویرآن دایره $S^{۱}$ است جادهنده می‌باشد.

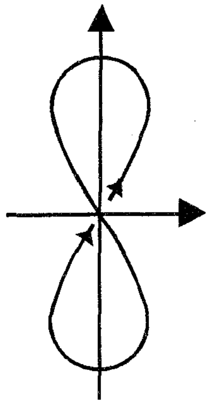
$$f : I\!R \longrightarrow I\!R^{۲} \qquad f : \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$$

۲ـفرض کنیم $H = \{(x,y) \in I\!R^{۲} | x = \sin ۲\theta, y = \sin\theta\}$ قبلاً دیدیم توسط یک کارت، اطلس آن مشخص می‌شود. (هشت لاتین)

$$x : H \longrightarrow I\!R$$
$$(\sin ۲\theta, \sin\theta) \mapsto \theta \qquad\qquad ۰ < \theta < ۲\pi$$

x یک به یک است وتصویر آن بازه ای از $I\!R$ است. با استفاده از اطلس طبیعی $I\!R^{۲}$ نگاشت یک به یک زیر را داریم

$$J : H \longrightarrow I\!R^{۲}$$
$$p = x^{-۱}(\theta) \mapsto (\sin ۲\theta, \sin\theta)$$



شکل ۳.۶: هشت لاتین تصویر یک نگاشت جادهنده است

که جادهنده است زیرا داریم

$$rk(J_*) = rk(J \circ x^{-۱}) = rk\begin{pmatrix} ۲\cos ۲\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = ۱$$

$$\begin{array}{lcl} H & \xrightarrow{J} & J(H) \subset I\!R^{۲} \\ x \downarrow & \nearrow J \circ x^{-۱} & \\ I\!R & & \end{array}$$

۳ـ فرض کنیم تابع $f : I\!R \to I\!R^{۱}$ به‌صورت زیر تعریف شود $f(t) = (a\cos t, a\sin t, t)$ آنگاه f یک جادهنده بوده نمودار آن منحنی مارپیچ است. زیرا

$$rkf = rk|| -a\sin t, a\cos t, ۱|| = ۱$$

۴ـ نشان دهید نگاشت $f : (x,y) \to (x, y, x^{۲}+y^{۲})$، یک جادهنده است. (تصویر این نگاشت سهمی‌گون $z = x^{۲} + y^{۲}$ در $I\!R^{۳}$ است.) اما نگاشت $(x,y) \longrightarrow (x, y, \sqrt{x^{۲}+y^{۲}})$ جادهنده (در تمام نقاط) نیست. (تصویر آن نیم مخروط $z = \sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ است.)

۵ـ به راحتی می‌توان درستی قضیه رتبه را برای نگاشت $f : t \to (t, t^{۲})$ بررسی نمود.

۳.۳ زیرمنیفلد جادهنده[1]

تعریف: فرض کنیم M و N دو منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بوده و $N \subset M$ باشد. گوئیم N یک زیرمنیفلد جادهنده از M است اگر نگاشت شمول طبیعی
$$\begin{aligned} J : N &\longrightarrow M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$
جادهنده باشد.

مثال ۱: در فصل یک دیدیم که $S^{۱}$ منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است. یکی از کارتهای $S^{۱}$ را به‌صورت زیر تعریف نمودیم

$$\begin{aligned} x : S^{۱} - \{(۱,\circ)\} &\longrightarrow I\!R \\ (\cos\theta, \sin\theta) &\mapsto \theta \qquad\qquad \circ < \theta < ۲\pi \end{aligned}$$

حال برای آنکه نشان دهیم $S^{۱}$ زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^{۲}$ است نگاشت شمول طبیعی زیر را در نظر گرفته نشان می‌دهیم یک جادهنده است.

$$\begin{aligned} J : S^{۱} &\to I\!R^{۲} \\ p = x^{-۱}(\theta) &\to (\cos\theta, \sin\theta) \end{aligned}$$

برای آنکه J جادهنده باشد باید رتبه $J \circ x^{-۱}$ در تمام نقاط $S^{۱}$ برابر یک باشد.

$$\begin{array}{ccc} S^{۱} & \xrightarrow{J} & J(S) \subset I\!R^{۲} \\ x \downarrow & \nearrow & J \circ x^{-۱} \\ I\!R & & \end{array}$$

$$rk(J) = rk(J \circ x^{-۱}) = rk\|-\sin\theta, \cos\theta\| = ۱$$

مثال ۲: هشت لاتین $H = \{(x,y) | x = \sin ۲\theta, y = \sin\theta\}$ یک زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^{۲}$ است. ابتدا نشان می‌دهیم که H منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است. قبلاً دیدیم $x : (\sin ۲\theta, \sin\theta) \to \theta$ با فرض $\circ < \theta < ۲\pi$ یک کارت کلی روی H تعریف می‌کند.

---

[1] *Immersed Submanifold*, *(Sous − variété immergée)*

کارت دیگری روی H به‌صورت $x' : (\sin ۲\theta, \sin\theta) \to \theta$ با فرض $۰ < \theta < \pi$ تعریف می‌کنیم. نگاشت تغییر کارت عبارت است از

$$\begin{aligned} x' \circ x^{-۱} :]۰, ۲\pi[&\to]۰, \pi[\\ \theta &\to \theta/۲ \end{aligned}$$

لذا $x' \circ x^{-۱}$ و $x \circ x'^{-۱}$ از کلاس C^∞ می‌باشند و خانواده آنها تشکیل یک اطلس C^∞ روی M می‌دهد. حال مشابه مثال بالا ثابت می‌شود که H یک زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^۲$ است.

مثال ۳: در مثال ۹ از بخش ۲§ در فصل اول دیدیم که $S^۲$ با شش کارت یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است. در اینجا نشان می‌دهیم که $S^۲$ زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^۳$ است.

$$\begin{aligned} x : \quad & S^۲_+ \to I\!R^۲ \\ & (x,y,z) \to (x,y) \end{aligned} \qquad\qquad z = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$$

حال نگاشت شمول طبیعی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{array}{l} S^۲ \xrightarrow{J} I\!R^۳ \\ x \downarrow \nearrow J \circ x^{-۱} \\ I\!R^۲ \end{array}$$

$$J \circ x^{-۱} : (x,y) \to (x,y,z)$$

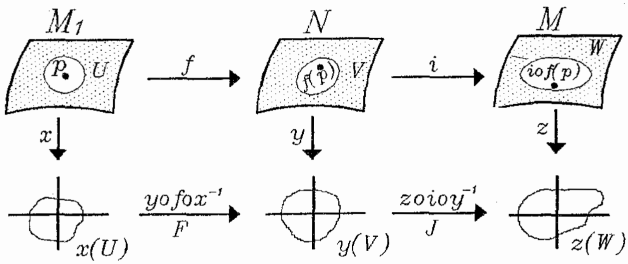
$$rk(J) = rk(J \circ x^{-۱}) = rk \left\| \begin{matrix} ۱ & ۰ & \dfrac{-x}{\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}} \\ ۰ & ۱ & \dfrac{-y}{\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}} \end{matrix} \right\| = ۲$$

زیرا در کارت $S^۲_+$ همواره $x^۲ + y^۲ < ۱$.

قضیه: **فرض کنیم i یک نگاشت جادهنده، f یک نگاشت پیوسته و $i \circ f$ دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه f دیفرانسیل پذیر است.** $M_۱^m \xrightarrow{f} N^n \xrightarrow{i} M^{n+k}$

بعبارت دیگر اگر $\left\{ \begin{array}{ll} i & \text{جادهنده} \\ f & \text{پیوسته} \\ i \circ f & \text{دیفرانسیل پذیر} \end{array} \right. \Rightarrow f$ دیفرانسیل پذیر است

اثبات: فرض کنیم $p \in M_1$ باشد. کارت هایی در همسایگی p، $f(p)$ و $i \circ f(p)$ به ترتیب (x, U)، (y, V) و (z, W) با توجه به شکل زیر طوری انتخاب می‌کنیم که برای کارت‌های z, y با توجه به قضیه رتبه داشته باشیم



شکل ۳.۷: ترکیب دو تابع و نگاشت‌های تغییر کارت

$$J : (a_1, \cdots, a_n) \to (a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots, 0)$$

چون f پیوسته است با فرض $J = z \circ i \circ y^{-1}$ و $F = y \circ f \circ x^{-1}$، F و $J \circ F$ نیز پیوسته می باشند بنابراین $U^1 = (J \circ F)^{-1}(z(W))$ باز است. با جایگذاری U^1 بجای $x(U)$ می توان بطور موضعی نوشت

$$U^1 \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{F} V^1 \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{J} W^1 \subset \mathbb{R}^{n+k}$$

$$(b_1, \cdots, b_m) \xrightarrow{F} (F^1(b), \cdots, F^n(b))$$

$$(a_1, \cdots, a_n) \xrightarrow{J} (a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots, 0)$$

به این صورت داریم

$$J \circ F(b_1, \cdots, b_m) = (F^1(b), \cdots, F^n(b), 0, \cdots, 0)$$

چون $J \circ F$ دیفرانسیل پذیر است F^iها دیفرانسیل پذیر می‌باشند ولذا F و درنتیجه f دیفرانسیل پذیر است □

در قضیه فوق شرایط جادهنده بودن i و پیوستگی f الزامی است. برای روشن شدن این

موضوع به مثال نقض زیر توجه فرمائید.

مثال نقض:

الف) اگر i یک جادهنده *نباشد*. فرض کنیم f به‌صورت زیر تعریف شود

$$\begin{array}{ccc} I\!R \xrightarrow{f} & I\!R & \xrightarrow{i} I\!R \\ t \rightarrow & \sqrt[۳]{t} & \\ & r & \rightarrow r^{۳} \end{array}$$

f پیوسته است $i \circ f = Id$. دیفرانسیل پذیر است اما f دیفرانسیل پذیر نیست.

ب) اگر f پیوسته *نباشد*. فرض کنیم f به‌صورت زیر تعریف شود.

$$\begin{array}{ccc} S^{۱} \xrightarrow{f} & I\!R & \xrightarrow{i} S^{۱} \\ (\sin t, \cos t) \xrightarrow{f} & t & \\ \circ \leq t \leq ۲\pi, & r & \xrightarrow{i} (\sin r, \cos r) \end{array}$$

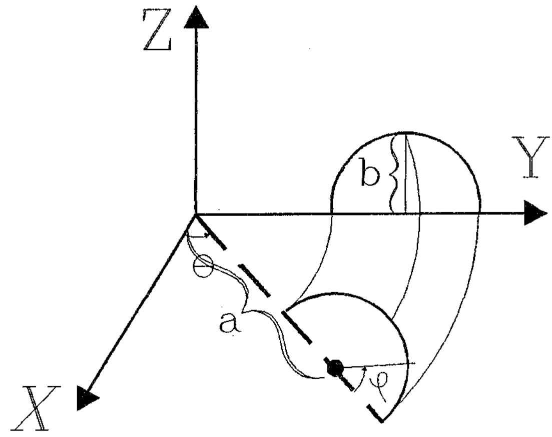
در اینجا $i \circ f$ دیفرانسیل پذیر است. i یک جادهنده است اما f پیوسته نبوده ولذا دیفرانسیل پذیر نمی باشد.

تمرین

۱ـ چنبره‌ای را که از دوران دایره ای به شعاع b حول دایره ای به شعاع a بدست می‌آید در نظر می‌گیریم. معادله چنبره فوق به‌صورت زیر نوشته می شود. (چرا؟)

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos\varphi)\cos\theta \\ y &= (a + b\cos\varphi)\sin\theta \qquad\qquad a > b > \cdot \\ z &= b\sin\varphi \end{aligned}$$

در فصل اول با استفاده از اطلس حاصلضربی دیدیم چنبره T یک منیلفد ۲− بعدی است. نشان دهید چنبره یک زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^{۳}$ است. به شکل صفحه بعد مراجعه کنید.



شکل ۳.۸ : نمودار چنبره حاصل از دوران یک دایره حول محور Zها

۲ـ نشان دهید هر رویه دیفرانسیل پذیر منتظم در $I\!R^۳$ که توسط تابع دیفرانسیل‌پذیر $z = f(x, y)$ تعریف شود یک زیرمنیفلد جادهنده است.

۴.۳ § نشاننده وزیرمنیفلدها [1]

فرض کنیم N یک زیرمنیفلد جادهنده M باشد. N یک زیر مجموعه از M است و می‌توان روی آن یک توپولوژی که توسط بازهای M تعریف می شود القاء نمود. (بازهای این توپولوژی القایی عبارتند از اشتراک بازهای M با N). این توپولوژی روی N را **توپولوژی القایی**[2] یا **توپولوژی زیرمجموعه‌ای**[3] می‌نامیم. در حالت کلی این توپولوژی القایی روی N با توپولوژی ذاتی که با توجه به حوزه تعریف کارت ها روی N تعریف می‌شود متفاوت است.

مثال: باز می‌گردیم به مثال هشت لاتین همراه با توپولوژی که توسط حوزه تعریف اطلس زیر تعریف می‌شود این اطلس شامل یک کارت کلی است.

$$\begin{aligned} x : H &\longrightarrow]۰, ۲\pi[\\ (\sin ۲\theta, \sin\theta) &\mapsto \theta \end{aligned}$$

---

[1] *Imbedding & Submanifolds (Plongement & sous − varie'te')*

[2] *Induit topology (Topologie induite)*

[3] *Subset topology (Topologie de sous − espace)*

چون فقط یک کارت موجود است و x یک همئومورفیسم برای توپولوژی اطلس (توپولوژی ذاتی) است H, $]0, 2\pi[$ همئومورف هستند پس H با توپولوژی ذاتی غیرفشرده است.

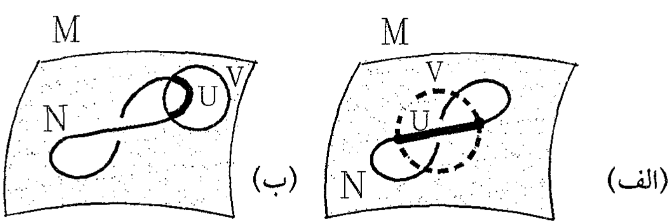
اما از طرف دیگر اگر توپولوژی القایی $I\!R^2$ روی H تعریف شود، H بسته می‌باشد، زیرا اگر فرض کنیم $f : I\!R^2 \to I\!R$ به‌صورت $f : (x, y) \to y^4 - y^2 + \frac{1}{4}x^2$ تعریف شود براحتی می‌توان بررسی نمود که نمودار معادله $y^4 - y^2 + \frac{1}{4}x^2 = 0$ هشت لاتین است لذا داریم $H = f^{-1}(0)$. چون f پیوسته است H بسته می‌باشد و چون H کراندار نیز هست فشرده می‌باشد.

بنابراین توپولوژی تعریف شده توسط اطلس (توپولوژی ذاتی) بر توپولوژی القاء شده توسط $I\!R^2$ منطبق نمی‌شود.

مثال دیگری می‌آوریم تا تفاوت این دو توپولوژی روشن‌تر گردد. به نمودار زیر توجه کنید اگر N عبارت باشد از یک هشت که بر روی رویه M قرار دارد می‌توان تفاوت دو توپولوژی روی N را با تفاوت تعریف باز روی هر یک از این دو توپولوژی سنجید.

در شکل (الف) U یک باز برای توپولوژی اطلس N است اما یک باز برای توپولوژی القایی N نیست. زیرا $U \neq V \cap N$.

در شکل (ب) U بازی است برای هر دو توپولوژی روی N زیرا $U = V \cap N$



شکل ۳.۹ : تفاوت دو توپولوژی با تعریف دو باز متفاوت روی آنها

گزاره: فرض کنیم $M \supset N$ یک زیرمنیفلد جا دهنده از M باشد. آنگاه توپولوژی اطلس‌ها روی N یعنی T_N ظریف‌تر است از توپولوژی القایی توسط M که آنرا با T_N^M نشان می‌دهیم.

به عبارت دیگر

$$\mathcal{T}_N^M \subset \mathcal{T}_N$$

اثبات: فرض کنیم V بازی از $\mathcal{T}_M$ و $U = V \cap N$ بازی از $\mathcal{T}_N^M$ باشد کافی است نشان دهیم $U \in \tau_N$. اگر J نگاشت شمول طبیعی باشد $J : N \to M$، J برای توپولوژی اطلس (ذاتی) $\mathcal{T}_N$ و $\mathcal{T}_M$ پیوسته است (زیرا J یک جادهنده است و جادهنده دیفرانسیل‌پذیر است برای توپولوژی اطلسهای M و N) بنابراین

$$U = V \cap N = J^{-1}(V)$$

یک باز $\mathcal{T}_N$ نیز می باشد وحکم ثابت می شود. □

در حالتی که این دو توپولوژی بر یکدیگر منطبق گردند مفهوم زیرمنیفلد به دست می آید که به شکل زیر آن را تعریف می‌نمائیم.

تعریف: *فرض کنیم M یک منیفلد باشد. یک زیرمنیفلد جادهنده N را* **زیرمنیفلد**[1] *M گوئیم اگر توپولوژی اطلس (ذاتی) N بر توپولوژی القایی توسط M روی N منطبق باشد.*

اگر یک زیرمنیفلد جادهنده فشرده باشد آنگاه بنابر قضیه زیر یک زیرمنیفلد است.

قضیه: هر زیرمنیفلد جادهنده فشرده (برای توپولوژی اطلس) یک زیرمنیفلد است.

اثبات: برای آنکه توپولوژی اطلس N بر توپولوژی القایی توسط M روی N منطبق باشد لازم و کافی است که نگاشت زیر همئومورفیسم باشد.

$$\overline{J} : (N, \tau_N) \longrightarrow (J(N)\ ,\ \tau_N^M)$$

در اینجا J نگاشت شمول طبیعی زیر است. (J یک به یک است و هکذا $\overline{J}$)

$$J : (N, \tau_N) \longrightarrow (M, \tau_M)$$

براساس قضیه زیر در توپولوژی عمومی پیوستگی J پیوستگی $\overline{J}$ را ایجاب می‌کند.

---

[1] $Submanifold(Sous - Varie'te')$

(**قضیه**: اگر T, S دو فضای توپولوژیک بوده و $f : S \longrightarrow T$ پیوسته باشد آنگاه تابع $\overline{f} : S \longrightarrow f(S)$ نسبت به توپولوژی القایی روی $f(S)$، پیوسته است)

چون N فشرده است $\overline{J}$ براساس قضیه زیر در توپولوژی عمومی[1] همئومورفیسم بوده، اثبات قضیه کامل می‌شود. (**قضیه**: اگر f یک تابع پیوسته و دوسویی از فضای توپولوژیک فشرده S در فضای هوسدورف T باشد آنگاه f یک همئومورفیسم است) $\square$

تفاوت بین تعریف زیرمنیفلد جادهنده و زیرمنیفلد، ما را به تعریف نگاشت نشاننده راهنمایی می‌کند.

تعریف: *فرض کنیم M و N دو منیفلد باشند نگاشت $f : N \rightarrow M$ را یک* **نشاننده**[2] *یا* **ایمبدینگ** *گوئیم اگر*

- *f جادهنده (ایمرسیون) باشد*
- *f یک به یک باشد*
- *$f(N)$ یک زیرمنیفلد M باشد.*

(به عبارت دیگر نگاشت f روی تصویرش یک همئومورفیسم باشد)

بنابه‌این تعریف، تصویر هر نگاشت نشاننده یک زیرمنیفلد بوده و اصطلاحاً می‌گوئیم $f(N)$ در M **نشانده**[3] شده است و گاهی اوقات آنرا **زیرمنیفلد نشانده**[4] نیز می‌گویند.

لازم به یاد آوری است که شرط سوم در تعریف فوق ضروری است. به عبارت دیگر یک به یک بودن یک جادهنده یا ایمرسیون برای آنکه نشاننده باشد کافی نیست و ممکن است تصویر یک جادهنده یا ایمرسیون یک به یک، زیرمنیفلد نباشد. به عنوان مثال به تمرین ۳ در همین بخش مراجعه فرمائید.

توجه: اهمیت زیرمنیفلدها و ترجیح آن نسبت به زیرمنیفلدهای جادهنده ناشی از خاصیتی

---

[1] به عنوان مثال به کتاب توپولوژی مقدماتی نوشته *Gemignani* صفحه ۱۵۹ مراجعه نمائید.

[2] *Imbedding (Plongement)*

[3] *Imbedded (Plonge')*

[4] *Imbedded Submanifold (sous − varie'te' plonge'e)*

است که در اینجا به شرح آن می‌پردازیم.

قضیه‌ای در توپولوژی داریم که بنابرآن اگر S و T دو فضای توپولوژیک بوده و $f : S \to T$ پیوسته باشد آنگاه $\overline{f} : S \to f(S)$ برای توپولوژی القایی روی $f(S)$ نیز پیوسته است. در بازسازی این قضیه برای منیفلدها نمی‌توان "پیوستگی " را به "دیفرانسیل‌پذیری" تعمیم داد. به عبارت دیگر اگر $f : N \to M$ دیفرانسیل‌پذیر باشد و $f(N)$ یک زیرمنیفلد جادهنده باشد آنگاه ممکن است نگاشت $\overline{f} : N \to f(N)$ دیفرانسیل‌پذیر نباشد.

یادآوری: وقتی می‌گوئیم نگاشت $f : M \longrightarrow N$ پیوسته و یا دیفرانسیل‌پذیر است و اشاره‌ای به توپولوژی M و N نمی‌کنیم منظور ما پیوستگی و یا دیفرانسیل‌پذیری f نسبت به توپولوژی اطلسهای M و N است.

به عنوان مثال فرض کنید $f : I\!R^۲ \to I\!R^۲$ با ضابطه $f(x, y) = (۲xy, y)$ تعریف شود در اینصورت f دیفرانسیل پذیر است. زیرا f_* ژاکوبین آن همه جاتعریف می‌شود. اما ممکن است f با همین ضابطه روی زیر مجموعه‌هایی از $I\!R^۲$ دیفرانسیل پذیرنباشد. اگر فرض کنیم $f : S^۱ \subset I\!R^۲ \to f(S^۱) \subset I\!R^۲$ با ضابطه $f(x, y) = (۲xy, y)$ داریم $f : (\cos\theta, \sin\theta) \to (۲\sin\theta\cos\theta, \sin\theta)$ همانطور که قبلاً دیدیم $(\sin ۲\theta, \sin\theta)$ مشخص کننده هشت لاتین یا H می‌باشد بنابراین

$$f(S^۱) = H$$

لذا نگاشت $\overline{f} : S^۱ \to H$ برای توپولوژی القایی روی H پیوسته می‌باشد، (بنابر قضیه فوق‌الذکر در توپولوژی) اما $\overline{f}$ برای توپولوژی اطلس H پیوسته نمی‌باشد (چون دیدیم H با این توپولوژی فشرده نیست ولی $S^۱$ فشرده است). بنابراین نگاشت $\overline{f}$ به عنوان نگاشت بین دو منیفلد، دیفرانسیل پذیر نیست.

اما اگر $f(N)$ یک زیرمنیفلد باشد، $\overline{f}$ نه تنها پیوسته است (بنابر قضیه فوق‌الذکر در توپولوژی) بلکه دیفرانسیل‌پذیر نیز هست. اثبات این موضوع در قضیه زیر که قضیه اصلی این بخش می‌باشد آورده شده است.

قضیه: **اگر $f : N \to M$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر بوده و $f(N)$ یک زیرمنیفلد باشد**

آنگاه
$$\begin{aligned}\overline{f} : N &\longrightarrow f(N)\\ x &\mapsto f(x)\end{aligned}$$
دیفرانسیل‌پذیر است.

اثبات: نگاشت f را به‌صورت $J \circ \overline{f} = f$ در نظر می‌گیریم. $\underbrace{N \xrightarrow{\overline{f}} f(N) \xrightarrow{J} M}_{J\circ\overline{f}=f}$ چون f پیوسته است $\overline{f}$ نیز به شرط آنکه روی $f(N)$ توپولوژی القایی در نظر گرفته شود بنابر قضیه فوق‌الذکر در توپولوژی پیوسته است اما از طرف دیگر چون $f(N)$ زیرمنیفلد است توپولوژی القایی و توپولوژی اطلس بر یکدیگر منطبق می‌باشند. لذا $\overline{f}$ بعنوان نگاشت بین دو منیفلد، پیوسته می‌باشد. حال بنابر قضیه مذکور در بخش ۳§ از همین فصل f دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد. $\square$

در خاتمه یادآور می‌شویم که هر منیفلد دیفرانسیل‌پذیر n بعدی را می‌توان به عنوان یک زیرمنیفلد $I\!R^N$ (N باندازه کافی بزرگ) در نظر گرفت. به عنوان مثال قضایای زیر را ذکر می‌نماییم.

قضیه ناش:[1] **هر منیفلد nبعدی M را می‌توان در یک فضای $I\!R^N$** (برای N به اندازه کافی بزرگ) نشاند (به عبارت دیگر M با زیرمنیفلدی از $I\!R^N$ دیفئومورف است.)

قضیه ویتنی:[2] **هر منیفلد n بعدی M را می‌توان در فضای $I\!R^{۲n}$ نشاند.**

اگر منیفلد M فشرده باشد مسئله به شکل ساده‌تری قابل حل است که به عنوان مثال می‌توان به کتاب $Spivak, I$ صفحه ۷۰ مراجعه نمود.

تمرین:

۱ـ دیدیم نگاشت $f : \theta \to (\cos\theta, \sin\theta)$ با فرض $\theta \in [۰, ۲\pi]$ یک جادهنده است. آیا f در این فاصله نشاننده است؟

۲ـ آیا نگاشت $f : t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ با فرض $t \in I\!R$ نشاننده است؟

۳ـ نگاشت $f : I\!R \to N \subset I\!R^۲$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

---

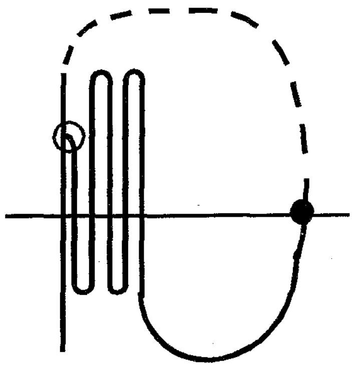
[1] *Nash theorem J. Nash : Ann · Math* · ۶۳(۱۹۵۶), ۲۰ − ۳۶

[2] *Withney theorem : Ann · Math* · ۴۵(۱۹۴۴), ۲۲۰ − ۲۴۶

$$f(t) = \begin{cases} (\frac{۲}{t}, \sin \frac{\pi}{۲} t) & ۲ \leq t \leq \infty \\ \text{منحنی منظم واصل به دو منحنی} & -۲ < t < ۲ \\ (۰, t + ۳) & -\infty < t \leq -۲ \end{cases}$$

N تصویر این نگاشت همانطور که در نمودار زیر مشخص شده است از دو منحنی تشکیل گردیده است. تابع f در فاصله $-۲ < t < ۲$ به این صورت تعریف شده است که دو منحنی راتوسط یک منحنی منظم به یکدیگر متصل می‌نماید. به این صورت یک جادهنده از تمام $I\!R$ در $R^۲$ تعریف می‌کنیم.

نشان دهید f یک جادهنده یک به یک می‌باشد اما نمی‌تواند یک همئومورفیسم باشد و لذا تصویر آن یک زیرمنیفلد نیست.



شکل ۳.۱۰: یک منحنی با توپولوژی ذاتی و القایی متفاوت

۴ـ رویه‌ای در $I\!R^۳$ مثال بزنید که زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^۳$ باشد اما زیرمنیفلد (نشاننده) $I\!R^۳$ نباشد.

راهنمایی: می‌توانید از تمرین ۳ نیز استفاده کنید.

۵ـ اگر توپولوژی منیفلد M هاسدرف باشد آنگاه توپولوژی هر زیرمنیفلد جادهنده آن نیز هاسدرف است.

۶ـ نشان دهید زیر فضای برداری از هر فضای برداری متناهی‌البعد یک زیر منیفلد نشاننده

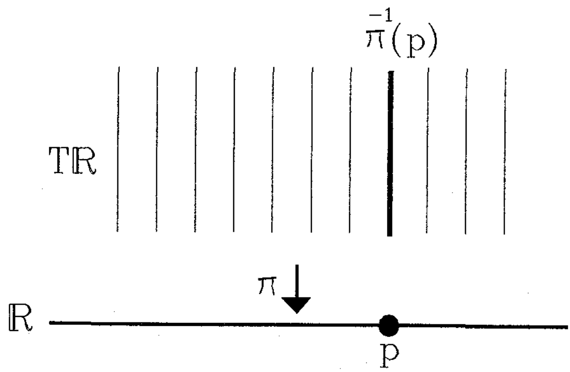
آن است.

۵.۳ § روش ساخت زیرمنیفلدها

در این بخش به اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که توسط آن می‌توان روش ساده‌ای جهت ساخت زیرمنیفلدها ارائه نمود.

تعریف: نگاشت $f : M \longrightarrow N$ را در نظر می‌گیریم. اگر $p \in N$ باشد زیر مجموعهٔ $f^{-1}(p) \subset M$ را یک تار روی p[1] می‌نامیم.

مثال: اگر $\pi : TM \longrightarrow M$ نگاشت تصویر باشد. تار روی p نسبت به نگاشت π عبارت است از T_pM. به عنوان مثال اگر فرض کنیم $M = I\!R$، $\pi : TI\!R \to I\!R$ و $TI\!R \simeq I\!R \times I\!R$ آنگاه به ازاء هر نقطه p از $I\!R$، $\pi^{-1}(p)$ تار روی p است.



شکل ۳.۱۱: مجموعه تارها روی فضای مماس

قضیه: فرض کنیم نگاشت $f : M^{n+k} \to N^k$ یک پوشاننده یا سوبمرسیون باشد.

اگر $n = 0$، هر تار مجموعه‌ای است که تمام نقاط آن تنها هستند.

اگر $n \geq 1$، هر تار یک زیرمنیفلد از M به بعد n است.

اثبات: اگر $n = 0$، f یک دیفئومورفیسم موضعی است و برای $\forall m \in M$ یک همسایگی U شامل m وجود دارد بطوریکه $f|_U$ دوسویی باشد. بنابراین تنها اشتراک U و تار تحت

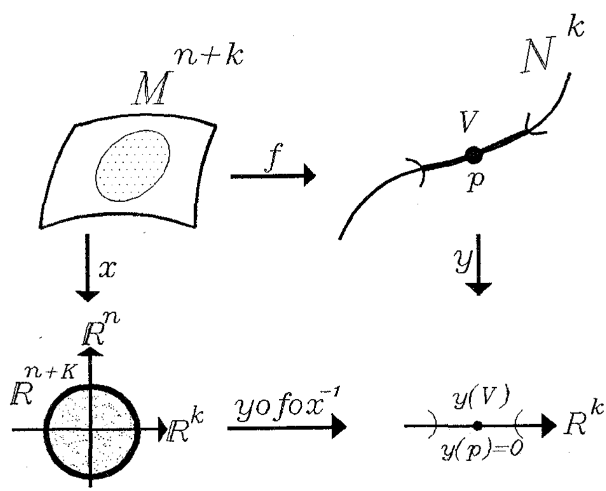
---

[1] *fiber over − p (fibre au − dessus de p)*

m در نقطه m می‌باشد.

(چون اگر $x \neq m$ و $x \in U \cap f^{-1}(m) \Leftarrow x, m \in U$ و $f(x) = f(m)$ که تناقض است با دوسویی بودن f) بنابراین نقاط تار تنها می‌باشند.

اگر $n \geq 1$ و $p \in N$، یک ساختار زیرمنیفلد روی $S = f^{-1}(p)$ به شرح زیر تعریف می‌کنیم. کارت‌های موضعی (x, U) و (y, V) را به شرط $y(p) = 0$، با توجه به پوشاننده بودن f انتخاب می‌نمائیم.



شکل ۳.۱۲:

داریم

$$y \circ f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$$

$$(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+n}) \to (a_1, \cdots, a_k)$$

اگر $m \in S \cap U$ و $m = x^{-1}(a_1, \cdots, a_{n+k})$ داریم $f(m) = p$ لذا داریم $y \circ f(m) = y(p) = 0$ بنابراین

$$0 = y \circ f(m) = (y \circ f \circ x^{-1})(a_1, \cdots, a_{n+k}) = (a_1, \cdots, a_k)$$

در نتیجه نقاط $S \cap U$ در مختصات موضعی عبارتند از $(0, \cdots, 0, a_{k+1}, \cdots, a_{k+n})$.

ساختار منیفلد روی S را توسط کارت $(\overline{x}, \overline{U})$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم $\overline{U} = S \cap U$

$$\overline{x} : \overline{U} \to I\!R^n$$

$$x(m) = (\circ, \cdots, \circ, a_{k+1}, \cdots, a_{k+n}) \to (a_{k+1}, \cdots, a_{k+n}) \qquad m \in \overline{U}$$

براحتی می‌توان نشان داد که این کارت‌ها تشکیل یک اطلس C^∞ می‌دهند و توپولوژی وابسته به این اطلس همان توپولوژی القایی M است. از طرف دیگر نگاشت یک به یک کانونی $J : S \to M$ در این کارت‌ها به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(x \circ J \circ \overline{x}^{-1})(b_1, \cdots, b_n) = (\circ, \cdots, \circ, b_1, \cdots, b_n)$$

J بنابراین یک جادهنده و در نتیجه یک نشاننده است چون S دارای توپولوژی القایی است، بنابراین S یک زیرمنیفلد می باشد. $\square$

نتیجه ۱: *فرض کنیم $f : M^{n+k} \to N^k$ $\quad n \geq 1$ نگاشتی از کلاس C^∞ باشد اگر در تمام نقاط یک تار S داشته باشیم $rkf = k$ آنگاه S یک زیرمنیفلد M به بعد n است.*

نتیجه ۲ : (روش ساخت زیرمنیفلدهایی که توسط معادلات تعریف می‌شوند.)

فرض کنیم $f : M^n \to I\!R^k$ و $(n > k)$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر باشد قرار می‌دهیم $N = \{p \in M | f(p) = \circ\}$. اگر $N \neq \phi$ و $rkf|_N = k$ آنگاه N یک زیر منیفلد M به بعد $n - k$ است.

مثال ۱: هر رویه دیفرانسیل‌پذیر (منیفلد دوبعدی) در $I\!R^3$ که بتوان آنرا توسط یک تابع دیفرانسیل‌پذیر مانند $f(x, y, z) = \circ$ بیان نمود یک زیرمنیفلد $I\!R^3$ است. به عبارت دیگر فرض کنیم $f(x, y, z) = \circ$ معادله رویه‌ای در $I\!R^3$ باشد به طوریکه نگاشت $f : I\!R^3 \to I\!R$، $(x, y, z) \to f(x, y, z)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته‌ای باشد که همگی باهم صفر نباشند.

چون $(\circ, \circ, \circ) \neq (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = f_*$ و $rkf = 1$ بنابراین f یک پوشاننده است و لذا مجموعه نقاط $f(x, y, z) = \circ$ تشکیل یک زیرمنیفلد دوبعدی از $I\!R^3$ می‌دهد.

مثال ۲: کره S^n، $S^n = \{x \in I\!R^{n+1} | x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ یک منیفلد nبعدی است. زیرا اگر فرض کنیم

$$f : I\!R^{n+1} \to I\!R$$

$$(x_1, \cdots, x_{n+1}) \to x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1$$

آنگاه $S^n = \{x \in I\!R^{n+1} | f(x) = 0\}$ و $rkf = 1$ و بنابرنتیجه ۲، S^n زیرمنیفلدی از $I\!R^{n+1}$ به بعد $(n+1) - 1$ می‌باشد که در نتیجه یک منیفلد n بعدی است.

مثال ۳: یک کاربرد دیگر از نتیجه بالا را می‌توان در $O(n)$ **گروه تبدیلات خطی متعامد**[1] روی $I\!R^n$ مشاهده کرد. $O(n)$ گروه ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی است که در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$O(n) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R) |\ AA^t = I\}$$

در اینجا I ماتریس همانی فرض شده است. می‌خواهیم نشان دهیم که $O(n)$ یک زیرمنیفلد $\mathcal{M}_{n\times n}(I\!R)$ مجموعهٔ ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ است. برای اینکار باید نگاشت پوشاننده f را طوری تعریف کنیم که خصوصیات مورد نظر را داشته باشد یعنی $O(n) = f^{-1}(0)$. ابتدا یادآوری می‌کنیم که به ازاء هر ماتریس دلخواه A ماتریس حاصلضرب AA^t متقارن است زیرا با ترانهاده خود برابر است. فضای برداری ماتریس‌های متقارن $n \times n$ را توسط $Sym(n)$ نمایش می‌دهیم. فضای برداری $Sym(n)$ زیرمنیفلد $\mathcal{M}_{n\times n}$ به بعد $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

نگاشت f را به صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$$f :\ \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R) \longrightarrow Sym(n)$$

که $f(A) = AA^t - I$ آنگاه $O(n) = f^{-1}(0)$. حال مشتق f در نقطه ماتریس A را محاسبه نموده نشان می‌دهیم که نگاشت f یک سوبمرسیون یا پوشاننده در نقاط $O(n)$ است. به ازاء $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$، داریم

$$\begin{aligned} df_A(B) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(A+sB) - f(A)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{(A+sB)(A+sB)^t - I - (AA^t - I)}{s} \end{aligned}$$

---

[1] Orthogonal group (groupe orthogonal)

$$= \lim_{s\to \circ} \frac{AA^t + sBA^t + sAB^t + s^{۲}BB^t - AA^t}{s}$$
$$= \lim_{s\to \circ}(BA^t + AB^t + sBB^t) = BA^t + AB^t$$

برای آنکه f در نقاط $O(n)$ پوشاننده یا سوبمرسیون باشد باید نشان دهیم نگاشت مشتق df_A در هر نقطه ماتریس A، $A \in f^{-۱}(\circ) = O(n)$ پوشش است.

$$df_A : T_A\mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow T_{f(A)}Sym(n)$$

با یکی گرفتن $\mathcal{M}_{n\times n}$ و $Sym(n)$ با فضای اقلیدسی داریم: $T_A\mathcal{M}_{n\times n} = \mathcal{M}_{n\times n}$ و $T_{f(A)}Sym(n) = Sym(n)$. برای آنکه به ازاء هر $A \in O(n)$ نگاشت df_A پوششی باشد نشان می‌دهیم به ازاء هر $C \in Sym(n)$ ماتریسی مانند $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ موجود است بطوریکه $df_A(B) = C$ به عبارت دیگر مقدار B را از معادله $BA^t + AB^t = C$ به دست می‌آوریم.

چون C متقارن است می‌توان نوشت $C = \frac{۱}{۲}C + \frac{۱}{۲}C^t$ لذا می‌توان از معادله $BA^t = \frac{۱}{۲}C$ جواب B را با ضرب A از راست به دست آورد. حال می‌گوییم $B = \frac{۱}{۲}CA$ جواب معادله است، زیرا

$$df_A(B) = (\frac{۱}{۲}CA)A^t + A(\frac{۱}{۲}CA)^t = \frac{۱}{۲}C(AA^t) + \frac{۱}{۲}(AA^t)C^t$$
$$= \frac{۱}{۲}C + \frac{۱}{۲}C^t = C$$

بنابراین نگاشت df_A پوششی بوده، f در نقاط $O(n)$ پوشاننده یا سوبمرسیون می‌شود. و در نتیجه بنابر قضیه بالا $O(n) = f^{-۱}(\circ)$ یک زیرمنیفلد دیفرانسیل‌پذیر از $\mathcal{M}_{n\times n}$ است که بُعد آن از تفاضل بعد $\mathcal{M}_{n\times n}$ و بعد $Sym(n)$ به دست می‌آید.

$$\dim O(n) = n^{۲} - \frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

تمرین:

۱ـ رویه‌های $z = x^{۲} + y^{۲}$ (سهمیگون) و $z = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ (نیم مخروط) را در $I\!R^{۳}$

در نظر گرفته بررسی کنید در کدام یک از تعاریف زیر صدق می‌کنند.

الف) منیفلد توپولوژیک

ب) منیفلد دیفرانسیل‌پذیر

ج) زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^{3}$

د) زیرمنیفلد $I\!R^{3}$

۲ـ هذلولیگون[1] H_c^n در $I\!R^{n+1}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H_c^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in I\!R^{n+1} | x_1^2 - x_2^2 \cdots - x_{n+1}^2 = c\}$$

سه حالت برای عدد حقیقی c در نظر می‌گیریم.($c > 0$ ، $c = 0$ ، $c < 0$)

تعیین کنید در کدام یک از حالات فوق H_c^n زیرمنیفلد $I\!R^{n+1}$ است، و بعد آنرا مشخص نموده، در سه حالت فوق مکان نقاط H_c^n در $I\!R^{3}$ را رسم نمایید.

۳ـ گروه ماتریس‌های متعامد خاص[2] $n \times n$ را به‌صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$$SO(n) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R) | det\ A = 1\ ,\ AA^t = Id\}$$

نشان دهید $SO(n)$ یک زیرمنیفلد $\mathcal{M}_{n\times n}(I\!R) \simeq I\!R^{n^2}$ به بعد $\dfrac{n(n-1)}{2}$ است.

راهنمایی: در حقیقت $GL^+(n, R) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R) | \det\ A > 0\}$ را در نظر گرفته با استفاده از نگاشت دترمینان نشان دهید زیرمجموعهٔ بازی از $\mathcal{M}_{n\times n}$ است. سپس f را به‌صورت زیر تعریف نموده نشان دهید یک سوبمرسیون یا پوشاننده است و $SO(n) = f^{-1}(0)$.

$$f : GL^+(n, I\!R) \to Sym(n)$$

$$f : A \to AA^t - Id$$

در اینجا $Sym(n)$ مجموعه ماتریسهای متقارن $n \times n$ حقیقی است که ابتدا باید نشان داد

---

[1] *Hyperboloid*

[2] *Special Orthogonal group*

به ازاء $A \in GL^+(n, I\!R)$ دیفرانسیل df_A در H به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$df_A(H) = AH^t + HA^t$$

۴ـ یک گروه G را که یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر نیز باشد یک **گروه لی**[۱] گوئیم اگر نگاشت‌های زیر (با عمل گروه) نگاشت‌های دیفرانسیل‌پذیر بین دو منیفلد باشند.

$$\begin{array}{ll} G \times G \longrightarrow G & \qquad G \longrightarrow G \\ (A, B) \mapsto AB & \qquad A \mapsto A^{-1} \end{array}$$

به عنوان مثال $I\!R^n$ با عمل جمع دو بردار و صفحه اعداد مختلط بدون مبدأ با عمل ضرب، گروههای لی هستند.

ثابت کنید $O(n)$ با عمل ضرب ماتریسها یک گروه لی است.

۶.۳ § خواص عمومی پوشاننده یا سوبمرسیون

در این بخش به بیان چند گزاره در مورد نگاشت پوشاننده می‌پردازیم که در بخش‌های بعد مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

همانطوریکه دیدیم از قضیه رتبه نتیجه می‌شود که اگر $f : M^{n+k} \longrightarrow N^n$ یک پوشاننده (یا سوبمرسیون) باشد آنگاه برای هرکارت (y, V) روی N یک کارت (x, U) روی M موجود است به طوریکه

$$\begin{array}{rl} yofox^{-1} : & x(U) \subset I\!R^n \times I\!R^k \longrightarrow I\!R^n \\ & (a, b) \mapsto a \end{array}$$

این کارت‌ها را **کارت‌های وابسته به پوشاننده (یا سوبمرسیون)** می‌نامیم.

از قضیه رتبه همچنین نتیجه می‌شود که هر پوشاننده بطور موضعی پوششی است.

گزاره ۱: فرض کنیم $f : M^{n+k} \longrightarrow N^n$ یک پوشاننده باشد. اگر $\varphi : N^n \longrightarrow M_1^p$

---

[۱] *Lie group (groupe de Lie)*

نگاشتی باشد که ترکیب آن با f یعنی $\varphi o f$ دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه φ دیفرانسیل‌پذیر است.

به عبارت دیگر:

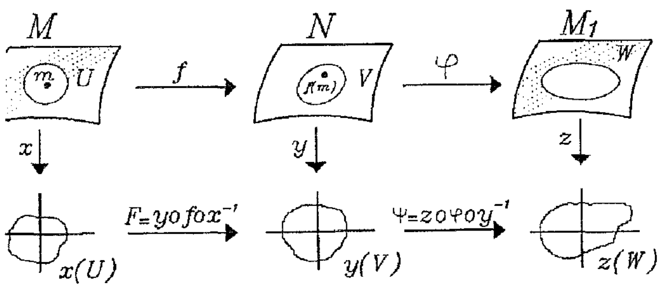
$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ پوشاننده} \\ \varphi o f \text{ دیفرانسیل‌پذیر} \end{array}\right. \Rightarrow \varphi \text{دیفرانسیل پذیر}$$

اثبات: کارت‌های وابسته به پوشاننده یا سوبمرسیون را در همسایگی m و $f(m)$ بترتیب (x, U) و (y, V) در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که (z, W) نیز کارتی در همسایگی $(\varphi o f)(m)$ باشد داریم

$$F = yofox^{-1} : I\!R^n \times I\!R^k \longrightarrow I\!R^n$$
$$(a, b) \mapsto a$$

اگر فرض کنیم $J = \psi o F$ داریم:

$$J(a, b) = \psi o F(a, b) = \psi(a)$$



شکل ۳.۱۳: ترکیب دو تابع

بنابر فرض J دیفرانسیل‌پذیر است لذا ψ دیفرانسیل‌پذیر بوده بنابر تعریف φ دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد. □

فرض کنیم $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت دلخواه باشد. می‌گوئیم نگاشت $g : N \longrightarrow M$

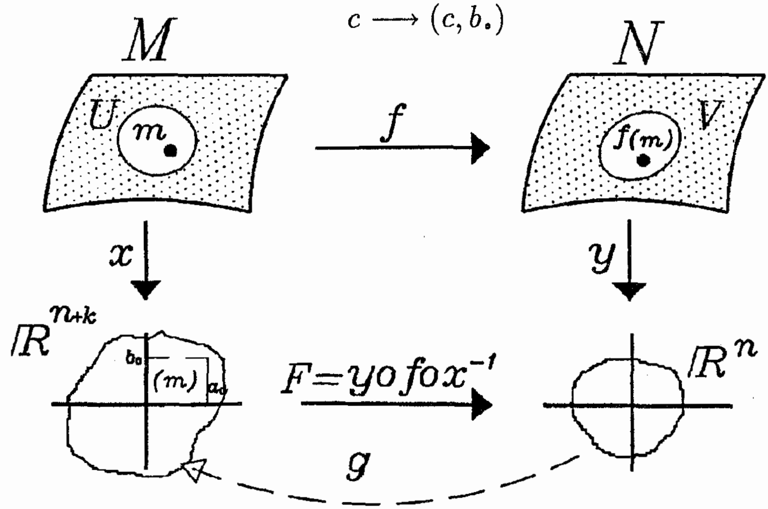
یک بخش[۱] f است اگر $fog = Id_N$ نگاشت همانی روی N باشد، نگاشت g را یک بخش موضعی[۲] f گوئیم اگر فقط روی ناحیه‌ای از N تعریف شود.

گزاره ۲: نگاشت دیفرانسیل‌پذیر $f : M^{n+k} \longrightarrow N^n$ یک پوشاننده (یا سوبمرسیون) است اگر و تنها اگر در هر نقطه m از حوزه تعریف f یک بخش موضعی دیفرانسیل‌پذیر موجود باشد که در یک همسایگی $f(m)$ تعریف شود.

اثبات: فرض کنیم $f : M^{n+k} \longrightarrow N^n$ یک پوشاننده باشد. کارت‌های وابسته به پوشاننده را در همسایگی m و $f(m)$ با (x,U) و (y,V) نشان می‌دهیم. فرض کنیم $x(m) = (a_\circ, b_\circ)$ حال نگاشت g را در نظر می‌گیریم

$$g : I\!R^n \longrightarrow I\!R^{n+k}$$

$$c \longrightarrow (c, b_\circ)$$



شکل ۳.۱۴:

واضح است که g یک بخش $F = yofox^{-1}$ است زیرا از $F(a,b) = a$ نتیجه

---

[۱] section

[۲] local section

می‌شود

$$(Fog)(c) = F(c, b_\circ) = c$$

لذا $S = x^{-1}ogoy$ یک بخش موضعی دیفرانسیل‌پذیر f است.

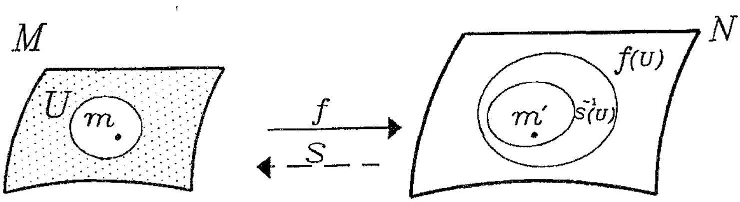
برعکس فرض کنیم در هر نقطه m از حوزه تعریف f یک بخش موضعی دیفرانسیل‌پذیر S در یک همسایگی V از $f(m)$ تعریف شود. روی همسایگی V داریم $foS = Id$ لذا اگر $v \in T_{f(m)}V$

$$f_* oS_*(v) = f_*(S_*(v)) = v$$

بنابراین $f_* oS_* = Id$ که از آن نتیجه می‌شود f_* پوششی است. در نتیجه f یک پوشاننده است.

گزاره ۳: هر پوشاننده (یا سوبمرسیون) یک نگاشت باز است.

اثبات: فرض کنیم $f : M \longrightarrow N$ یک پوشاننده و U بازی از M باشد. اگر $m' \in f(U)$ نقطه $m \in U$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(m) = m'$ همچنین بخش موضعی دیفرانسیل‌پذیر S را در همسایگی m' طوری اختیار می‌کنیم که $S(m') = m$. (بنابر گزاره ۲ چنین بخش موضعی وجود دارد.)



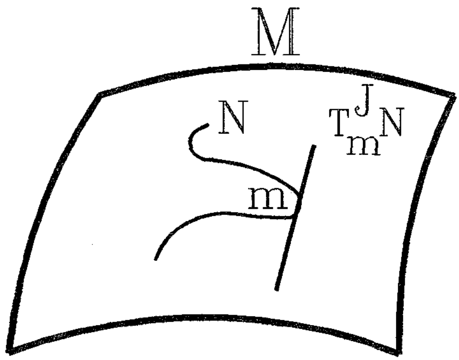
شکل ۳.۱۵:

چون S پیوسته است $S^{-1}(U)$ باز است. از طرف دیگر $f(m) \in S^{-1}(U)$ زیرا S یک بخش در همسایگی $f(m)$ است. لذا $m' \in S^{-1}(U)$ و $S^{-1}(U)$ در داخل $f(U)$ قرار دارد. (چون از $U \subset f^{-1}of(U)$ نتیجه می‌شود $(S^{-1}(U) \subset \underbrace{S^{-1}of^{-1}}_{Id} of(U))$.

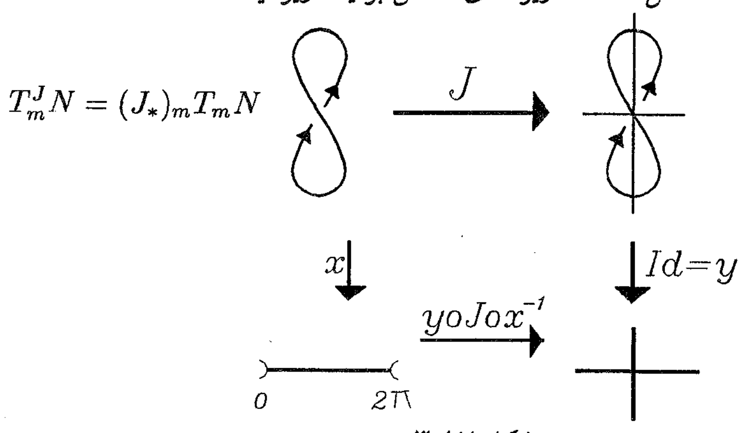
در نتیجه ثابت شد که به ازاء هر $m' \in f(U)$ یک همسایگی باز $S^{-1}(U)$ شامل m' وجود دارد بطوریکه $S^{-1}(U) \subset f(U)$ لذا بنابر تعریف $f(U)$ باز است. بنابراین f یک نگاشت باز است. $\square$

۷.۳ § زیر فضای مماس بر یک زیرمنیفلد جادهنده

تعریف: *فرض کنیم $N \subset M$ یک زیرمنیفلد جادهنده و $J : N \to M$ نگاشت شمول طبیعی باشد.* **زیرفضائی از TM که در نقطه $m \in N$ بر N مماس باشد را توسط تصویر نگاشت** $(J_*)_m$ *تعریف نموده $(J_*)_m : T_mN \to T_mM$ آنرا به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم*



شکل ۳.۱۶: زیرفضای مماس بر یک زیرمنیفلد

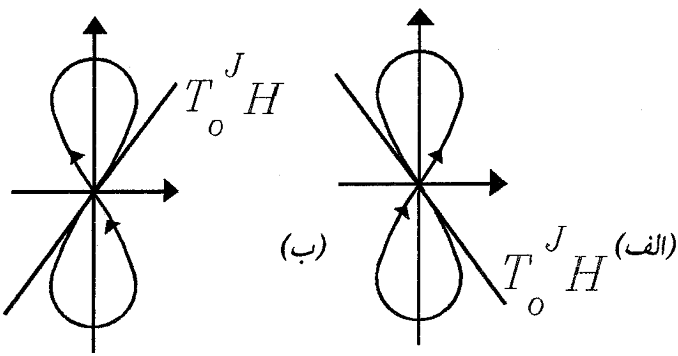


شکل ۳.۱۷ :

چون J یک جادهنده یا ایمرسیون است $T_m^J N$ یک زیر فضای $n = dimN$ بعدی از $T_m M$ می‌باشد.

مثال: فرض کنیم $H \subset I\!R^{۲}$ هشت لاتین باشد که توسط کارت $\theta \rightarrow (\sin ۲\theta, \sin\theta) \qquad x : H \rightarrow]\circ, ۲\pi[$ تعریف شده است. J نگاشت شمول طبیعی است حال به محاسبه $T_\circ^J$ می‌پردازیم. $(\circ,\circ) = \circ$ نقطه صفر توسط $\theta = \pi$ بدست می‌آید. داریم

$$(J_*)_\circ = (id \circ J \circ x^{-۱})_{*\theta=\pi} = (۲\cos ۲\theta, \cos\theta)_{\theta=\pi} = (۲, -۱)$$



شکل ۳.۱۸:

$$(J_*)_\circ \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = ۲\left(\frac{\partial}{\partial x^{۱}}\right)_\circ - \left(\frac{\partial}{\partial x^{۲}}\right)_\circ = V \Rightarrow T_\circ^j H = I\!RV$$

به شکل فوق (الف) توجه فرمائید

از طرف دیگر اگر H را توسط کارت زیر تعریف نمائیم

$$x : H \longrightarrow]-\pi, \pi[$$
$$(\sin ۲\theta, \sin\theta) \longrightarrow \theta$$

مرکز $(\circ,\circ) = \circ$ توسط $\theta = \circ$ بدست می‌آید. به روش فوق می توان $(J_*)_\circ$ را محاسبه نمود

$$(J_*)_\circ = (id \circ J \circ x^{-1})_{*\theta=\circ} = (۲, ۱) = W \Rightarrow T_\circ^j H = IRW$$

به شکل فوق (ب) توجه فرمایید

گزاره ۱: فرض کنیم $f : M_۱ \longrightarrow M_۲$ نگاشت دیفرانسیل‌پذیر بوده و $N_۱$ و $N_۲$ دو زیرمنیفلد جادهنده در $M_۱$ و $M_۲$ باشند بطوریکه $f(N_۱) \subset N_۲$ آنگاه اگر نگاشت $f_۱ = f|_{N۱}$ دیفرانسیل پذیر باشد داریم

$$f_* T^{J_۱} N_۱ \subset T^{J_۲} N_۲$$

(در اینجا $J_i : N_i \to M_i$ نگاشت شمول طبیعی می باشد)

اثبات: در حقیقت چون $f(N_۱) \subset N_۲$ داریم $f \circ J_۱ = J_۲ \circ f_۱$ با درنظر گرفتن نگاشت مماس داریم $f_* \circ (J_۱)_* = (J_۲)_* \circ (f_۱)_*$ لذا اثر f_* روی تصویر $(J_۱)_*$ عبارت است از

$$f_*(Im(J_۱)_*) \subset Im(J_۲)_*$$

$$f_* T^{J_۱} N_۱ \subset T^{J_۲} N_۲ \qquad \square$$

تذکر: این گزاره در حالتی که $f_۱$ دیفرانسیل پذیر نباشد برقرار نیست.

مثال نقض: نگاشت $f : IR^۲ \to IR^۲$ با فرض $f = Id$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $N_۱$ و $N_۲$ هشت لاتین H با دو ساختار دیفرانسیل‌پذیری تعریف شده در بالا باشند داریم

$$V \in T_\circ^{J_۱} H, f_* V = V \notin T_\circ^{J_۲} H$$

دلیل این موضوع مشتق پذیر نبودن نگاشت $Id|_H$ است.

قضیه: فرض کنیم $f : M^{n+k} \to N^k$ و $n \geq ۱$ باشد و $rk_\circ(f_*)_m$ در تمام نقاط یک تار S برابر k باشد. آنگاه زیرفضای $T_m M$، مماس بر S[۱] در نقطه m عبارت است از

---

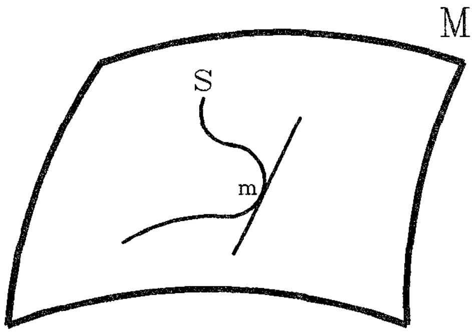
[۱] لذا S در اینجا یک زیرمنیفلد است.

$\ker(f_*)_m$

اثبات: فرض کنیم $J : S \to M$ نگاشت شمول طبیعی باشد. اگر S تار تحت p باشد $(S = f^{-1}(p))$ داریم

$$(f \circ J)(x)(x) = p \qquad \forall x \in S$$

بنابراین نگاشت $f \circ J$ ثابت بوده و در نتیجه $f_* \circ J_* = 0$. به عبارت دیگر تصویر $ImJ_* \subset \ker f_*$ در نتیجه



شکل ۳.۱۹:

$$J_*(T_m S) \subset \ker(f_*)_m$$

از طرف دیگر چون f یک پوشاننده یا سوبمرسیون است بُعد هسته آن برابر است با

$$\dim(\ker f_*) = (n+k) - rkf_* = n + k - k = n$$

چون J یک جادهنده است داریم:

$$\dim J_*(T_m S) = \dim(T_m S) = n \Rightarrow J_*(T_m S) = Ker(f_*)_m$$

□

پیوست I: منیفلدهای خارج قسمتی

مقدمه: منیفلدهای خارج قسمتی بخش عمده‌ای از مطالعات هندسه را خصوصاً در شاخه هندسه جبری به خود اختصاص داده‌اند اما از آنجا که گستردگی و تنوع مطالب در آن ممکن است باعث پراکندگی آموخته‌های دانشجویانی گردد که برای اولین بار با مفهوم منیفلدها آشنا می‌شوند این مبحث در پیوست فصل سوم آورده شده است تا خوانندگان علاقه‌مند پس از تسلط کافی به مفاهیم اساسی منیفلدها به مطالعه آن بپردازند.

در بخش اول مفاهیم مقدماتی توپولوژی خارج قسمتی با ذکر چند مثال به عنوان یادآوری عنوان می‌شود تا خوانندگانی که این مقدمات را فراموش کرده‌اند نیازی به مراجعه به مراجع دیگر نداشته باشند. بخش دوم که بخش اصلی این مبحث است به تعریف منیفلد خارج قسمتی با ذکر چند مثال اختصاص دارد. در بخش سوم روش ساخت این منیفلدها را با استفاده از عمل گروه بیان می‌کنیم. در قسمت الف ابتدا تعاریف مقدماتی را با ذکر چند مثال آورده نشان می‌دهیم که بطور طبیعی می‌توان هر گروه را که روی یک منیفلد M عمل می‌کند با یک گروه که بطور موثر روی M عمل می‌کند تعویض نمود. در قسمت ب پس از تعریف گروه تبدیلات ناپیوسته ثابت می‌کنیم که اگر G بطور آزاد و ناپیوسته روی M عمل کند آنگاه

---

[1] $quotient\ manifold\ (Varie'te'\ quotient)$

مجموعه خارج قسمتی M/G دارای ساختار منیفلد خارج قسمتی است.

۸.۳ § یادآوری توپولوژی خارج قسمتی

اگر M یک مجموعهٔ دلخواه و R یک رابطه هم‌ارزی روی آن باشد، آنگاه R، مجموعه M را به کلاس‌های هم‌ارزی تقسیم‌بندی یا افراز می‌نماید. مجموعه کلاس‌های هم ارزی روی M را توسط M/R نمایش داده آنرا **مجموعه خارج قسمتی**[۱] می‌نامیم. اگر M دارای یک توپولوژی نیز باشد این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان با استفاده از این توپولوژی بطور طبیعی یک توپولوژی روی M/R تعریف کرد. جواب این سؤال به شرح زیر مثبت است.

ابتدا یادآوری می‌کنیم که یک نگاشت طبیعی f از M در M/R وجود دارد که توسط رابطه $f(x) = \overline{x}$ که در آن $\overline{x}$ کلاس هم‌ارزی x است، تعریف می‌شود.

$$f : M \longrightarrow M/R$$

$$x \mapsto \overline{x} = \{y \in M | xRy\}$$

اگر M یک فضای توپولوژیک باشد طبیعی است که یک توپولوژی روی M/R جستجو کنیم که f نسبت به آن پیوسته باشد. می‌دانیم که f پیوسته است اگر و تنها اگر به ازاء هر مجموعهٔ باز U از M/R، $f^{-1}(U)$ باز باشد. حال با استفاده از این خاصیت یک توپولوژی روی M/R تعریف می‌کنیم. زیرمجموعهٔ U از M/R را باز می‌نامیم اگر $f^{-1}(U)$ در M باز باشد. به راحتی ثابت می‌شود که با این عمل یک توپولوژی روی M/R تعریف می‌شود، این توپولوژی را **توپولوژی خارج قسمتی**[۲] و M/R را **فضای خارج قسمتی**[۳] می‌نامیم.

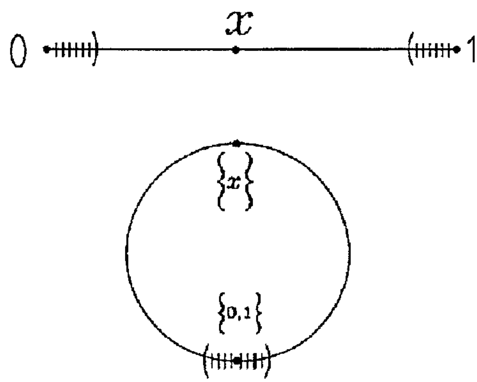
---

[۱] *quotient set (Espace quotient)*

[۲] *quotient topology*

[۳] *quotient space*

مثال ۱: فاصله بسته $[۰, ۱]$ را همراه با توپولوژی عادی آن در نظر گرفته سپس رابطه هم‌ارزی روی این فاصله را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم ۰ با ۱ هم‌ارز باشد و هر عدد دیگر در فاصله $(۰, ۱)$ با خودش هم‌ارز باشد آنگاه کلاس‌های هم‌ارزی عبارتند از $\{۰, ۱\}$ و $\{x\}$ به ازاء $x \in (۰, ۱)$. با یکی قرار دادن ۱،۰ یک دایره به دست می‌آید. لذا فضای خارج قسمتی $[۰, ۱]/R$ یک دایره است.

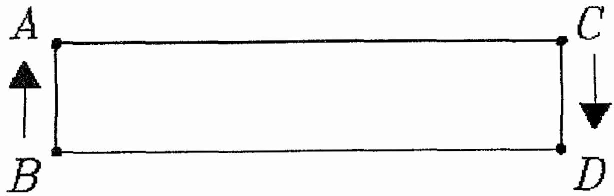


شکل ۳.۲۰: با تعریف یک رابطه هم‌ارزی روی $[۰, ۱]$ یک دایره حاصل می‌شود

با یکی قرار دادن نقاط ابتدا و انتهای یک فاصله فضای توپولوژیکی جدیدی حاصل می‌شود که یک منحنی ساده و بسته بوده و توپولوژی آن توپولوژی خارج قسمتی است. اینجا تابع پیوسته f به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f : [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]/R = S^۱$$
$$\theta \longrightarrow (\cos ۲\pi\theta \ , \ \sin ۲\pi\theta)$$

مثال ۲: یک نوار مستطیل شکل در نظر گرفته و یک رابطه هم‌ارزی روی آن به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم



شکل ۳.۲۱: رابطه هم‌ارزی روی نوار

نقاط روی لبه چپ با لبه راست پس از تغییر جهت هم‌ارز باشند و هر نقطه دیگر مستطیل که در روی این دو خط نیست با خودش هم‌ارز باشد. لذا نقطه A با D و نقطه B با C هم‌ارز می‌شود.

با استفاده از این رابطه هم‌ارزی و یکی قرار دادن لبه‌های چپ و راست پس از تغییر جهت یک فضای خارج قسمتی حاصل می‌شود که آن را **نوار موبیوس**[1] می‌نامند.

شکل ۳.۲۲: فضای خارج‌قسمتی

مثال ۳: کره S^2 را در نظر گرفته روی آن یک رابطه هم‌ارزی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. هر نقطه $x \in S^2$ را با نقطه متقاطر آن $-x \in S^2$ هم‌ارز قرار می‌دهیم. با استفاده از این رابطه هم‌ارزی یک فضای خارج قسمتی تولید می‌شود که آن را **صفحه تصویری**[2] نامیده با $\mathbb{P}^2$ نمایش می‌دهیم اعضای $\mathbb{P}^2$ عبارتند از مجموعه‌های $\{x, -x\}$ به ازاء $x \in S^2$ که آن را توسط کلاس هم‌ارزی $\overline{x}$ نشان می‌دهیم. نگاشت پیوسته f عبارتست از

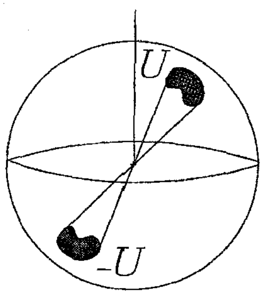
$$f:\ S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$x \longrightarrow \overline{x}$$

[1] $Mobius\ bonde$ برای توضیحات بیشتر در مورد نوار موبیوس به بخش ۵.۵ از فصل پنجم مراجعه نمائید.

[2] $projective\ plane$

بازهای $I\!P^{\text{۲}}$ عبارتند از تصاویر بازهای $S^{\text{۲}}$ توسط f لذا اگر V یک باز $S^{\text{۲}}$ باشد آنگاه $U = f(V)$ یک باز $I\!P^{\text{۲}}$ است. بنابراین تعریف باز در $S^{\text{۲}}$ و $I\!P^{\text{۲}}$ به یک نحو است، با این تفاوت که در $I\!P^{\text{۲}}$ اگر x متعلق به U باشد آنگاه $-x$ نیز به U تعلق دارد.



شکل ۳.۲۳: رابطه هم‌ارزی روی کره

مثال ۴: فرض کنیم M یک مجموعه دلخواه و (M', τ') یک فضای توپولوژیک و g یک تابع از M به M' ($g : M \longrightarrow M'$) باشد. یک توپولوژی روی M تعریف می‌نمائیم که نسبت به آن g پیوسته باشد چون g در این توپولوژی پیوسته فرض شده است کافی است بازهای $V \in M$ را تصویر معکوس بازهای $U \in M'$ توسط g انتخاب نمائیم یعنی $V = g^{-\text{۱}}(U)$ لذا خانواده بازهای M یک توپولوژی روی آن تعریف می‌نماید.

یک رابطه هم‌ارزی روی M تعریف می‌کنیم. می‌گوئیم xRx' اگر $g(x) = g(x')$ برای هر x و x' در M. اگر $\overline{x}$ کلاس هم‌ارزی x باشد آنگاه یک تابع طبیعی از M/R در M' موجود است که توسط $\overline{g}(\overline{x}) = g(x)$ تعریف می‌شود

$$\overline{g} : M/R \longrightarrow M'$$

$$\overline{x} \longrightarrow \overline{g}(\overline{x}) = g(x)$$

تابع $\overline{g}$ خوش تعریف است چون اگر $\overline{x} = \overline{x'}$ آنگاه

$$\overline{g}(\overline{x}) = g(x) = g(x') = \overline{g}(\overline{x'})$$

فرض کنیم f نگاشت پیوسته $f : M \longrightarrow M/R$ باشد. آنگاه اگر g پوششی بوده و M/R دارای توپولوژی خارج قسمتی τ'' باشد، براحتی ثابت می‌کنیم $\overline{g}$ **یک همئومورفیسم** از $(M/R, \tau'')$ بروی (M', τ') است. ابتدا می‌گوئیم $\overline{g}$ پوششی است چون g پوششی فرض شده است. حال فرض کنیم $\overline{g}(\overline{x}_1) = \overline{g}(\overline{x}_2)$ از آن نتیجه می‌گیریم،

$g(x_1) = g(x_2)$ لذا x_1 و x_2 هم‌ارز شده داریم $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$ بنابراین $\overline{g}$ یک به یک و در نتیجه دوسویی است. کافی است نشان دهیم $\overline{g}$ و $\overline{g}^{-1}$ پیوسته هستند که اینکار با استفاده از تابع f براحتی قابل انجام است، اما چون کاربردی در اینجا ندارد از آوردن جزئیات آن خودداری می‌شود.

۹.۳ منیفلد خارج قسمتی

در اینجا با استفاده از مقدماتی که در بخش قبل آورده شد منیفلد خارج قسمتی را تعریف نموده با استفاده از مطالب مشروحه در بخش ۶.۳ خواص مهم آنرا بررسی و اثبات می‌نمائیم.

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر، R یک رابطه هم‌ارزی و M/R مجموعهٔ کلاس‌های هم‌ارزی روی M باشد. همچنین فرض کنیم نگاشت زیر

$$q : M \longrightarrow M/R$$

$$x \longrightarrow \overline{x}$$

نگاشت پوششی باشد. حال می‌توانیم منیفلد خارج قسمتی را به شرح زیر تعریف نموده ثابت کنیم که توپولوژی که توسط اطلس‌ها (ذاتی) روی آن تعریف می‌شود همان توپولوژی خارج قسمتی است.

تعریف: *اگر M/R دارای ساختار یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بوده و نگاشت q یک پوشاننده (یا سوبمرسیون) باشد آنگاه M/R را یک* **منیفلد خارج قسمتی**[1] *می‌گوییم.*

[1] *quotient mainfold (variété quotient)*

مثال ۱: فرض کنیم $g : M \longrightarrow M'$ پوشاننده باشد. رابطه هم‌ارزی R روی M را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

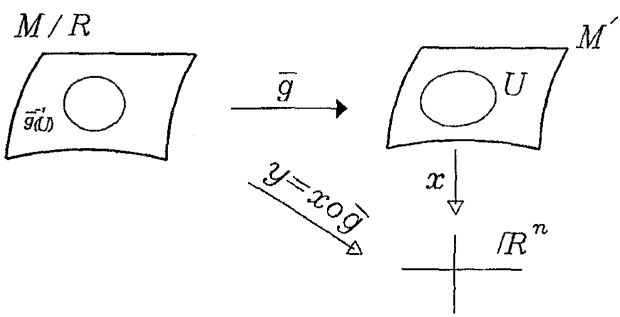
$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow g(x_1) = g(x_2)$$

نگاشت $\overline{g}$ را مشابه مثال ۴ در بخش قبل به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\overline{g} : M/R \longrightarrow M'$$
$$\overline{x} \longrightarrow g(x)$$

دیدیم که $\overline{g}$ دوسویی است. با استفاده از $\overline{g}$ ساختار M' را به روی M/R منتقل می‌کنیم. مطابق شکل زیر اگر (x, U) یک کارت روی M' باشد کارت $(xo\overline{g}, \overline{g}^{-1}(U))$ را روی M/R در نظر می‌گیریم.

در این صورت $\overline{g}$ تعویض اطلس می‌نماید و بنابر قضیه مذکور در بخش §۳ از فصل یک $\overline{g}$ یک دیفئومورفیسم (برای توپولوژی‌های ذاتی) است.



شکل ۳.۲۴: منیفلد خارج قسمتی

حال می‌گوئیم M/R با این ساختار یک منیفلد خارج قسمتی است. بنابر تعریف کافی است نشان دهیم نگاشت $q = \overline{g}^{-1} o g$ از M در M/R پوشاننده است. می‌دانیم بنابر فرض g

پوشاننده بوده و $\overline{g}$ دیفئومورفیسم است بنابراین ترکیب آنها یک پوشاننده می‌باشد.

تذکر: اعضای یک منیفلد خارج قسمتی (یعنی کلاس‌های هم‌ارزی) همگی فقط از نقاط تنها و یا از زیرمنیفلدهای M (با ابعاد مساوی) تشکیل شده‌اند. (بنابر قضیه‌ای که در بخش روش ساخت زیرمنیفلدها در این فصل بیان نمودیم.)

در گزاره زیر نشان می‌دهیم که توپولوژی که در مثال بالا روی M/R تعریف شد توپولوژی خارج قسمتی است که در حقیقت مجوزی است جهت استفاده از نام منیفلد خارج قسمتی برای M/R.

گزاره ۱: اگر M/R یک منیفلد خارج قسمتی باشد آنگاه توپولوژی (ذاتی) M/R توپولوژی خارج قسمتی است.

اثبات: چون نگاشت پوشاننده (یا سوبمرسیون) $q : M \longrightarrow M/R$ دیفرانسیل‌پذیر است، لذا پیوسته است. از گزاره ۳ در بخش ۶/۳§ نتیجه می‌گیریم که q باز نیز هست. بنابر آنچه در ابتدای بخش ۸/۳§ یادآوری شد نگاشت q توپولوژی خارج قسمتی روی M/R تعریف می‌نماید. این توپولوژی بر توپولوژی ذاتی M/R (که در مثال قبل تعریف شد) منطبق است. □

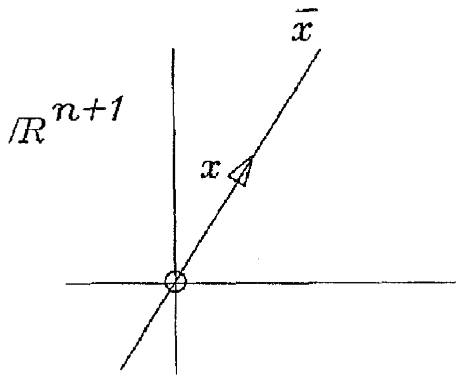
لازم به یادآوری است که روی هر مجموعهٔ خارج قسمتی الزاماً ساختار یک منیفلد خارج قسمتی تعریف نمی‌شود. به مثال زیر که مؤید این واقعیت است توجه فرمائید.

مثال ۲: فرض کنیم R یک رابطه هم‌ارزی روی $I\!R^{n+1}$ بوده که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$xRy \Leftrightarrow \exists a \in I\!R - \{0\} : \ x = ay$$

$\overline{x}$ کلاس هم‌ارزی x (با فرض $x \neq 0$) عبارت است از خط برداری تولید شده توسط x که شامل مبدأ مختصات نیست. کلاس هم‌ارزی مبدأ عبارت است از $\overline{o} = \{0\}$ حال می‌گوئیم $I\!R^{n+1}/R$ نمی‌تواند یک منیفلد خارج قسمتی باشد، زیرا کلاس‌های هم‌ارزی فقط از نقاط تنها و یا فقط از زیرمنیفلدهای متساوی البعد تشکیل نشده‌اند و بنابر تذکر بالا $I\!R^{n+1}/R$

یک منیفلد خارج قسمتی نیست.



شکل ۳.۲۵ : کلاس هم‌ارزی

منیفلد تصویری حقیقی[۱]

مثال ۳: اگر از $I\!R^{n+1}$ مبدأ را حذف نمائیم آنگاه $I\!R^{n+1} - \{0\}$ با رابطه هم‌ارزی زیر یک منیفلد خارج قسمتی است که آن را **منیفلد تصویری حقیقی** نامیده با $P^n I\!R$ نمایش می‌دهیم. در اینجا نشان می‌دهیم که روی $P^n I\!R = (I\!R^{n+1} - \{0\})/R$ ساختار یک منیفلد n بعدی وجود دارد.

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists a \in I\!R - \{0\} : x = ay$$

در اینجا $x, y \in I\!R^{n+1}$. رابطه اخیر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$(y_1, \cdots, y_{n+1}) \sim a(y_1, \cdots, y_{n+1}) = (ay_1, \cdots, ay_{n+1})$$

$P^n I\!R$ را می‌توان مشابه مثال ۲ با مجموعه خطوط گذرنده از مبدا در $I\!R^{n+1}$ همانند در نظر گرفت. در اینجا اعضای $P^n I\!R$ یعنی کلاس‌های هم‌ارزی را با $[y_1, \cdots, y_{n+1}]$ نمایش

---

[۱] projective manifold (real) (varie'te' projective)

داده‌ایم. لذا با فرض $y_i \neq 0$ داریم

$$[y_1, \cdots, y_{n+1}] = [\frac{y_1}{y_i}, \cdots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, 1, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \cdots, \frac{y_{n+1}}{y_i}]$$

برای تعریف کارت‌های موضعی روی $P^n\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌های $U_1, \cdots, U_{n+1}$ را از آن به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$U_i = \{[y_1, \cdots, y_{n+1}] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R} | y_i \neq 0\}$$

U_i در اینجا مجموعهٔ خطوطی است از $\mathbb{R}^{n+1}$ که از مبدأ می‌گذرند و به صفحه $y_i = 0$ تعلق ندارند. حال نگاشت دو سویی $x_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $(1 \leq i \leq n+1)$

$$x_i([y_1, \cdots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \cdots, y_{n+1}]) = (\frac{y_1}{y_i}, \cdots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \cdots, \frac{y_{n+1}}{y_i})$$

چون $x_i(U_i) = \mathbb{R}^n$ باز است و $\cup U_i = P^n\mathbb{R}$ بنابراین (x_i, U_i) خانواده کارت‌ها روی $P^n\mathbb{R}$ هستند. حال نشان می‌دهیم که به ازاء هر i و j نگاشت تغییر کارت دیفرانسیل‌پذیر است.

$$x_j o x_i^{-1} : x_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow x_j(U_i \cap U_j)$$

به ازاء $i < j$ داریم

$$\begin{aligned}
x_j o x_i^{-1}(y_1, \cdots, y_n) &= x_j(y_i[y_1, \cdots, y_{i-1}\ ,\ 1\ ,\ y_i, \cdots, y_n]) \\
&= x_j[(y_1, \cdots, y_{i-1}, 1, y_i, \cdots, y_n]) \\
&= (\frac{y_1}{y_j}, \cdots, \frac{y_{j-1}}{y_j}\ ,\ \frac{y_{j+1}}{y_j}, \cdots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \cdots, \frac{y_n}{y_j})
\end{aligned}$$

این نگاشت دیفرانسیل‌پذیر است. چون حالت $i > j$ مشابه حالت قبل و حالت $i = j$ بدیهی است لذا مجموعه کارت‌های (x_i, U_i) تشکیل یک ساختار منیفلد دیفرانسیل‌پذیر n

بعدی روی $P^n I\!R$ می‌دهند.

۱۰.۳ § روش ساخت منیفلدهای خارج قسمتی

الف) گروه تبدیلات[1]

تعریف: فرض کنیم G یک گروه و M یک منیفلد باشد. گوئیم G **یک گروه تبدیلات** M است یا G روی M **عمل**[2] می‌کند اگر نگاشتی مانند φ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند.

$$\varphi : G \times M \longrightarrow M$$

I) **به ازاء هر $g \in G$ نگاشت φ_g که به‌صورت زیر تعریف می‌شود یک دیفئومورفیسم باشد.**

$$\varphi_g : M \longrightarrow M$$
$$m \mapsto \varphi(g, m)$$

II) اگر $g, h \in G$ آنگاه

$$\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{g \cdot h}$$

تذکر: اگر e عضو خنثی G باشد داریم $\varphi_e = Id$ زیرا

$$\varphi_e = \varphi_e \circ \varphi_e \circ \varphi_e^{-1} = \varphi_{e^2} \circ \varphi_e^{-1} = \varphi_e \circ \varphi_e^{-1} = Id$$

از طرفی دیگر $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ زیرا

$$Id = \varphi_e = \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}}$$

تعریف: گوئیم G **بطور مؤثر**[3] روی M عمل می‌کند اگر e تنها عضو G باشد بطوریکه $\varphi_e = Id$ به عبارت دیگر اگر به‌ازاء هر نقطه m،

---

[1] *Transformations group*

[2] G *act on* M (G *agir on* M)

[3] *Act effectively* (*Agir effectivement*)

$$\forall m \in M \quad , \quad \varphi_g(m) = m \ \Rightarrow g = e$$

گوئیم G **بطور آزاد**[1] روی M عمل می‌کند اگر e تنها عضو G باشد که دارای نقطه ثابت است. یعنی اگر به‌ازاء یک نقطه m،

$$\exists m \in M \quad , \quad \varphi_g(m) = m \Rightarrow g = e$$

به عبارت دیگر تنها دیفئومورفیسم φ_g که دارای نقاط ثابت باشد نگاشت همانی است. در این صورت گاهی می‌گوئیم G **بدون نقطه ثابت** عمل می‌کند.)

واضح است که: اگر G بطور آزاد عمل کند آنگاه G بطور مؤثر عمل می‌کند.

مثال ۱: فرض کنیم $G = SO(۲, I\!R)$ گروه ماتریس‌های متعامد ۲ × ۲ با دترمینان یک[2] باشد. از نظر هندسی G گروه دوران حول مبدأ مختصات است. G بطور موثر روی $M = I\!R^{۲}$ عمل می‌کند.

$$G \times I\!R^{۲} \longrightarrow I\!R^{۲}$$

$$(A, x) \longrightarrow Ax$$

G بطور موثر عمل می‌کند اما بطور آزاد عمل نمی‌کند زیرا مبدأ مختصات توسط دوران ثابت است.

$$\forall \ A \in G \quad A_{\circ} = \circ$$

مثال ۲: فرض کنیم $G = GL(n, I\!R)$ گروه خطی ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی با دترمینان مخالف صفر[3] بوده و $M = \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R)$ مجموعهٔ ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم که G یک گروه تبدیلات است که روی M عمل می‌کند. سپس بررسی می‌کنیم که آیا G بطور موثر روی M عمل می‌کند؟

---

[1] *Act freely (Agir librement)*

[2] *Special Orthogonal group*

[3] *General Linear group*

نشان می‌دهیم G توسط نگاشت φ به‌صورت زیر روی M عمل می‌کند.

$$\varphi : G \times \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R)$$
$$(P, B) \longrightarrow PBP^{-1}$$

I) ابتدا نشان می‌دهیم $\varphi_p : M \longrightarrow M$ دیفرانسیل‌پذیر و دوسویی است.

$$\begin{aligned}
\varphi_P(B) &= PBP^{-1} \\
d(\varphi_P)_A(B) &= \lim_{s\to 0} \frac{\varphi_P(A+sB) - \varphi_P(A)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{P(A+sB)P^{-1} - PAP^{-1}}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{PAP^{-1} + sPBP^{-1} - PAP^{-1}}{s} = PBP^{-1}
\end{aligned}$$

در نتیجه φ_P دیفرانسیل‌پذیر[1] بوده چون $\varphi_P^{-1} = \varphi_{P^{-1}}$ عکس آن نیز دیفرانسیل‌پذیر است.

φ_P یک به یک است زیرا

$$\varphi_P(B) = \varphi_P(B') \Rightarrow PBP^{-1} = PB'P^{-1} \Rightarrow B = B'$$

φ_P پوششی است زیرا به ازاء هر $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R)$ ماتریس B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow \varphi_p(B) = PP^{-1}APP^{-1} = A$$

II) اگر $P, Q \in G$ آنگاه

$$\begin{aligned}
\varphi_Q \circ \varphi_P(A) &= \varphi_Q(PAP^{-1}) = QPAP^{-1}Q^{-1} = QPA(QP)^{-1} \\
&= \varphi_{QP}(A)
\end{aligned}$$

[1] به طور کلی هر نگاشت خطی بین فضاهای برداری با بعد متناهی دیفرانسیل‌پذیر است و دیفرانسیل آن در هر نقطه برابر خود نگاشت است. به [۲۷] مراجعه شود.

G یک گروه تبدیلات روی M است که بطور موثر روی M عمل نمی‌کند زیرا $\varphi_{-I} = Id$

تذکر: حال نشان می‌دهیم که هر گروه تبدیلات روی M را می‌توان بطور طبیعی با یک گروه تبدیلات که بطور موثر روی M عمل می‌کند تعویض نمود.

مجموعه عناصر $k \in G$ بطوریکه $\varphi_k = Id$ را با K نمایش می‌دهیم.

$$K = \{k \in G | \varphi_k = Id\}$$

براحتی مشاهده می‌شود که K یک زیرگروه G است. اگر $k \in K$ و $g \in G$ باشد داریم

$$\varphi_{gkg^{-1}} = \varphi_g \circ \varphi_k \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_g \circ (\varphi_g)^{-1} = Id$$

بنابراین $gkg^{-1} \in K$ لذا K یک زیر گروه نرمال G است.

گزاره ۱: اگر G روی M عمل کند آنگاه گروه خارج قسمتی G/K بطور موثر روی M عمل می‌کند.

اثبات: با استفاده از نمادگذاری بالا فرض کنیم $g \in G$، $k \in K$ و M و $m \in M$ و $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ یک نگاشت باشد. داریم

$$\varphi(gk, m) = \varphi_{gk}(m) = \varphi_g(m) = \varphi(g, m)$$

حال نگاشت $\overline{\varphi}$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\overline{\varphi} : G/K \times M \longrightarrow M$$

$$(gK, m) \mapsto \varphi(g, m)$$

لذا نگاشت $\overline{\varphi}_{gK}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\overline{\varphi}_{gK} : M \longrightarrow M$$

$$m \mapsto \varphi_g(m)$$

تعریف این نگاشت مشابه تعریف نگاشت φ_g است $\overline{\varphi}_{gK}(m) = \varphi_g(m)$ لذا براحتی می‌توان مشاهده کرد که توسط نگاشت $\overline{\varphi}$ گروه G/K بطور موثر روی M عمل می‌کند.□

تذکر: عمل G گروه تبدیلات روی M را می‌توان به‌صورت دیگری نیز بیان نمود. می‌گوئیم G از چپ روی M عمل می‌کند[۱] و بجای $\varphi_g(m)$ می‌نویسیم gm لذا رابطه II در تعریف با فرض $g, h \in G$ و $m \in M$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$g(hm) = (gh)m$$

از محاسن بیان جدید آن است که می‌توان آنرا برای عمل راست به‌صورت زیر تعریف کرد. گوئیم G از راست روی M عمل می‌کند[۲] اگر این عمل توسط نگاشت زیر تعریف شود بطوریکه

$$\varphi : M \times G \longrightarrow M$$

$(I)'$ نگاشت $\varphi_g : m \longrightarrow \varphi(m, g)$ دیفئومورفیسم باشد.

$(II)'$ اگر $g, h \in G$ آنگاه $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{hg}$.

گاهی اوقات بجای $\varphi_g(m)$ از نماد $m \cdot g$ استفاده می‌کنیم. در این صورت رابطه $(II)'$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(m \cdot h) \cdot g = m \cdot (hg)$$

مثال ۳: گروه جمعی اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از نگاشت

$$\varphi : \mathbb{R}^{۲} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^{۲}$$
$$((x_۱, x_۲), n) \longrightarrow (x_۱ + n, x_۲)$$

نشان می‌دهیم $\mathbb{Z}$ از راست یا چپ روی $\mathbb{R}^{۲}$ عمل می‌کند. شرایط I و II را تحقیق می‌کنیم. واضح است که φ_n دیفرانسیل‌پذیر است.

---

[۱] *act on the left (agir à gauche)*

[۲] *act on the right (agir à droite)*

$$\varphi_n(x_1, x_2) = (x_1 + n, x_2)$$

از طرفی چون $Id = \varphi_0 = \varphi_n \circ \varphi_{-n}$ داریم. $\varphi_n^{-1} = \varphi_{-n}$ لذا φ_n^{-1} نیز دیفرانسیل‌پذیر است. φ_n یک به یک و پوششی است بنابراین شرط I برقرار است. حال می‌گوئیم $\forall m, n \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_m \circ \varphi_n(x_1, x_2) = \varphi_m(x_1 + n, x_2) = (x_1 + n + m, x_2) = \varphi_{n+m}(x_1, x_2)$$

لذا شرط II نیز برقرار است.

حال می‌گوئیم $\mathbb{Z}$ بطور آزاد روی $\mathbb{R}^2$ عمل می‌کند زیرا اگر نقطه‌ای مانند (x_1, x_2) از $\mathbb{R}^2$ موجود باشد بطوریکه $\varphi_n(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ از آن نتیجه می‌شود که عضو n عضو خنثی نسبت به عمل جمع است. در حقیقت

$$\varphi_n(x_1, x_2) = (x_1 + n, x_2) = (x_1, x_2) \Rightarrow n = 0$$

بنابراین عضو خنثی در $\mathbb{Z}$ تنها نگاشتی است که دارای نقاط ثابت است.

تمرین ۱: فرض کنیم $Sym(n, \mathbb{R})$ فضای برداری ماتریس‌های $n \times n$ متقارن حقیقی[1] باشد.

الف ـ نشان دهید که $Sym(n, \mathbb{R})$ یک زیرمنیفلد جادهنده $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ است.

راهنمایی: یک کارت کلی طوری در نظر می‌گیریم که درایه‌های هر ماتریس متقارن را به درایه‌های روی قطر و بالای قطر ببرد. تعداد این درایه‌ها $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} + n$ است.

$$x : Sym(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$

$$x : ||a_{ij}|| \longrightarrow (a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, a_{33}, \cdots, a_{3n}, \cdots a_{nn})$$

سپس بنابر تعریف زیرمنیفلد جادهنده کافی است با استفاده از تعریف کارت x نشان دهید نگاشت شمول طبیعی $J : Sym(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ جادهنده است. این تمرین را می‌توان با استفاده از تمرین ۶ بخش ۴.۳ نیز حل نمود.

ب ـ نشان دهید که گروه خطی ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی $GL(n, \mathbb{R})$ توسط نگاشت

---

[1] *Symetric group*

زیر یک گروه تبدیلات روی $Sym(n, I\!R)$ است.

$$\varphi : GL(n, I\!R) \times Sym(n, I\!R) \longrightarrow Sym(n, I\!R)$$
$$(T, A) \longrightarrow TAT^t$$

ج ـ نشان دهید $GL(n, I\!R)$ به‌طور موثر روی $Sym(n, I\!R)$ عمل نمی‌کند.

ب) ساخت منیفلد خارج قسمتی توسط عمل یک گروه

فرض کنیم G یک گروه تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کند.

$$\varphi : G \times M \longrightarrow M$$
$$(g, m) \mapsto \varphi_g(m)$$

در این قسمت از نماد $g \cdot m$ بجای $\varphi_g(m)$ استفاده می‌کنیم $g \cdot m = \varphi_g(m)$. یک رابطه هم‌ارزی روی M به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall m_۱, m_۲ \in M \quad , \quad m_۱ \sim m_۲ \Leftrightarrow \exists g \in G : \quad m_۲ = g \cdot m_۱$$

مجموعه خارج قسمتی را توسط M/G نمایش می‌دهیم. این مجموعه خارج قسمتی الزاماً یک منیفلد خارج قسمتی نیست.

مثال ۴: $I\!R^* = I\!R - \{۰\}$ توسط نگاشت زیر روی $I\!R^{n+۱}$ عمل می‌کند

$$I\!R^* \times I\!R^{n+۱} \longrightarrow I\!R^{n+۱}$$
$$(a, x) \mapsto ax$$

همانطوریکه در مثال ۲ از بخش قبل دیدیم $I\!R^{n+۱}/I\!R^*$ دارای ساختار منیفلد خارج قسمتی نیست.

حال می‌خواهیم ببینیم تحت چه شرایطی M/G دارای ساختار منیفلد خارج قسمتی است. فرض کنیم G بطور آزاد روی M عمل کند (یعنی بدون نقطه ثابت) و M/G یک منیفلد خارج قسمتی باشد. در این صورت $q : M \longrightarrow M/G$ یک پوشاننده یا سوبمرسیون است. اگر M و M/G دارای ابعاد برابر باشند، q یک دیفئومورفیسم موضعی است. به عبارت دیگر:

به ازاء هر $m \in M$ وجود دارد یک همسایگی U شامل m بطوریکه $q|_U$ دو سویی باشد. چون G بطور آزاد روی M عمل می‌کند بسادگی می‌توان نشان داد که اگر $g \neq e$ آنگاه $U \cap gU = \phi$. در حقیقت اگر $x \in U \cap gU$ داریم $x \in U$ و $x = gy$ بطوریکه $y \in U$ یعنی $\overline{x} = \overline{y}$ یا $q(x) = q(y)$. چون $q|_U$ دو سویی است از آن نتیجه می‌شود $x = y$ لذا $gx = x$ و x نقطه ثابت است و در نتیجه چون G بطور آزاد عمل می‌کند $g = e$ بنابراین اگر $g \neq e$ فرض شود آنگاه $U \cap gU$ تهی خواهد بود. (یادآوری می‌کنیم که دو سویی بودن $q|_U$ به این معنی است که کلاس‌های هم‌ارزی در U مجموعه‌های تک عضوی هستند.)

بحث فوق ما را به ارائه تعریف زیر رهنمون می‌سازد.

تعریف: فرض کنیم گروه تبدیلات G روی M عمل کند. گوئیم G **بطور ناپیوسته**[1] عمل می‌کند اگر به ازاء هر $m \in M$ یک همسایگی U از m وجود داشته باشد بطوریکه

$$\forall g \neq e \qquad U \cap gU = \phi$$

تذکر ۱: اگر G بطور ناپیوسته عمل کند آنگاه بطور آزاد عمل می‌کند.

تذکر ۲: همانطوریکه در بالا اشاره شد اگر G بدون نقطه ثابت (بطور آزاد) روی M عمل کند و M/G یک منیفلد خارج قسمتی باشد بطوریکه بعد M/G با بعد M برابر شود آنگاه G بطور ناپیوسته عمل می‌کند.

---

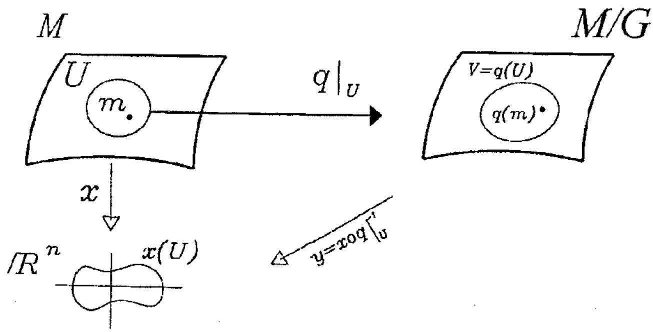
[1] *discontinuous*

عکس این موضوع نیز صحت دارد که در قضیه زیر ثابت می‌شود.

قضیه ۱: اگر گروه تبدیلات G بطور آزاد (بدون نقطه ثابت) و ناپیوسته روی M عمل کند آنگاه مجموعه خارج قسمتی M/G دارای ساختار یک منیفلد خارج قسمتی است که بعد آن برابر بعد M است.

اثبات: اگر عمل G ناپیوسته باشد به ازاء هر $m \in M$ یک همسایگی U از M موجود است بطوریکه $q|_U : M \longrightarrow M/G$ یک به یک باشد زیرا به ازاء هر $g \neq e$، U در رابطه $U \cap gU = \phi$ صدق می‌کند و اگر فرض کنیم $x, y \in U$ و $q(x) = q(y)$ از آن نتیجه می‌شود که $\overline{y} = \overline{x}$ و چون اعضای این کلاس‌ها تک عضوی هستند داریم $x = y$.

حال فرض کنیم $m \in M$ و U به‌صورت بالا تعریف شده و دامنه کارت (x, U) باشد.



شکل ۳.۲۶

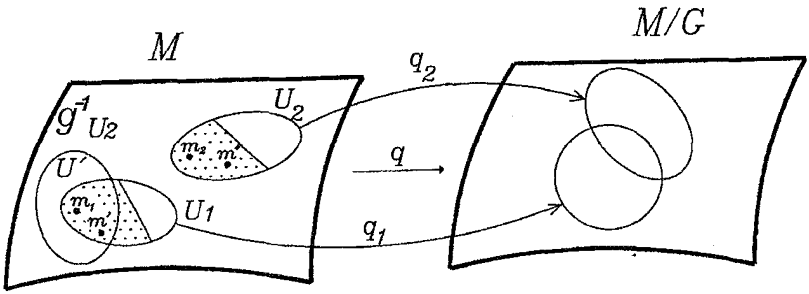
حال یک کارت روی M/G در همسایگی $q(m)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $y = xoq|_U^{-1}$ و $V = q(U)$ نشان می‌دهیم که کارت‌های (y, V) یک اطلس C^∞ روی M/G تعریف می‌کنند.

واضح است که حوزه تعریف این کارت‌ها M/G را می‌پوشاند. فرض کنیم (y_1, V_1) و (y_2, V_2) دو کارت روی M/G با فرض $V_1 \cap V_2 \neq \phi$ باشند. فرض کنیم m_1 و m_2 دو نقطه از M بوده که بترتیب در کارت‌های (x_1, U_1) و (x_2, U_2) قرار داشته باشند. برای

اختصار فرض کنیم $q_۱ = q|_{U_۱}$ و $q_۲ = q|_{U_۲}$. باید نشان دهیم که نگاشت تغییر کارت

$$y_۲ \circ y_۱^{-۱} = x_۲ \circ q_۲^{-۱} \circ q_۱ \circ x_۱^{-۱}$$

دیفرانسیل‌پذیر است. (با توجه به شکل) کافی است نشان دهیم $q_۲^{-۱} \circ q_۱$ دیفرانسیل‌پذیر است.



شکل ۳.۲۷

فرض کنیم $m_۱$ در حوزه تعریف $q_۲^{-۱} \circ q_۱$ قرار داشته باشد به عبارت دیگر $m_۱ \in q_۱^{-۱}(V_۱ \cap V_۲)$ نشان می‌دهیم که $q_۲^{-۱} \circ q_۱$ در نقطه $m_۱$ دیفرانسیل‌پذیر است.

فرض کنیم $m_۲ = q_۲^{-۱} \circ q_۱(m_۱) \in U_۲$ چون $m_۱$ و $m_۲$ هم‌ارز هستند به عبارت دیگر چون $q(m_۱) = q(m_۲)$ عضوی مانند $g \in G$ وجود دارد بطوریکه $m_۲ = gm_۱$ از آن نتیجه می‌گیریم که

$$U' = U_۱ \cap g^{-۱}U_۲$$

بازی از M شامل $m_۱$ است. باید ثابت کنیم که تحدید $q_۲^{-۱} \circ q_۱$ به U' دیفرانسیل‌پذیر است (از این موضوع در حالت خاص نتیجه می‌گیریم $q_۲^{-۱} \circ q_۱$ در $m_۱$ دیفرانسیل‌پذیر است)

فرض کنیم $m' \in U' = U_۱ \cap g^{-۱}U_۲$ نقطه دلخواهی از U' باشد و همچنین $m'' = q_۲^{-۱} \circ q_۱(m')$ چون $m' \in g^{-۱}U_۲$ داریم $gm' \in U_۲$ از طرف دیگر m' و

gm' در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند بنابراین $q(m') = q(gm')$. از اینکه $m' \in U_۱$ و $gm' \in U_۲$ بنابر تعریف $q_۱$ و $q_۲$ داریم $q_۱(m') = q_۲(gm')$

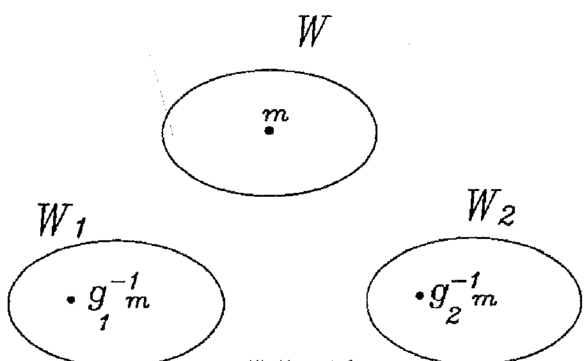
$$q_۲^{-۱} \circ q_۱(m') = gm'$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $q_۲^{-۱} o q_۱$ روی U' بر نگاشت $\varphi_g(m) = gm$ منطبق می‌شود لذا روی U' و علی‌الخصوص در نقطه $m_۱$ مشتق‌پذیر است. □ در اینجا باید توجه داشت که اگر منیفلد M هاسدرف باشد الزاماً منیفلد خارج‌قسمتی M/G هاسدرف نیست[۱]، امّا اگر گروه G متناهی بوده و بطور آزاد عمل کند M/G نیز هاسدرف خواهد بود. (تمرین ۴ را ببینید)

گزاره ۲: اگر M یک منیفلد هاسدرف بوده و G یک گروه متناهی باشد که بطور آزاد (بدون نقطه ثابت) روی M عمل می‌کند، آنگاه G بطور ناپیوسته عمل می‌کند و در نتیجه M/G یک منیفلد خارج قسمتی است که بعد آن برابر بعد M است.

اثبات: فرض کنیم $G = \{g_۱, \cdots, g_k, e\}$ چون M هاسدرف بوده و برای هر $m \in M$ یک همسایگی باز W از m و همچنین بازهای W_i شامل $g_i^{-۱}m$ موجودند بطوریکه

$$W \cap (\cup_{i=۱}^{k} W_i) = \phi$$



شکل ۳.۲۸

[۱] برای مثال نقض می‌توانید به [۶] مثال ۶.۳.۲ مراجعه کنید.

داریم $m \in W$ و $m \notin g_i\overline{W}$ زیرا اگر $m \in g_i\overline{W}$ آنگاه $g_i^{-1}m \in \overline{W}$ که یک تناقض است. در اینجا منظور ما از $\mathcal{C}W$ مکمل W است.

بنابراین به ازاء هر $i = 1, \cdots, k$ داریم $m \in W \cap \mathcal{C}g_i\overline{W}$ حال فرض کنیم

$$U = W \cap \mathcal{C}g_1\overline{W}_1 \cap \mathcal{C}g_2\overline{W}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{C}g_k\overline{W}$$

U باز است و $U \cap g_iU = \phi \quad \forall i = 1, \cdots, k$ زیرا

$$\begin{aligned} U \cap g_iU &= (W \cap \mathcal{C}g_1\overline{W} \cap \cdots \cap \mathcal{C}g_i\overline{W} \cdots \cap \mathcal{C}g_k\overline{W}) \cap (g_iW \cap \cdots) \\ &= (\mathcal{C}g_i\overline{W} \cap g_iW) \cap \cdots \end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathcal{C}g_i\overline{W} \cap g_iW \subset (\mathcal{C}_{g_i}W) \cap g_iW = \phi$$

از آنجا $U \cap g_iU = \phi$ لذا بنابر تعریف گروه G بطور ناپیوسته عمل می‌کند. از قضیه قبل نتیجه می‌شود که M/G یک منیفلد خارج قسمتی است که بعد آن برابر بعد منیفلد M است. □

مثال ۵: نشان می‌دهیم اگر $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح باشد آنگاه $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ یک منیفلد خارج قسمتی ۲ بعدی است.

در مثال ۳ از همین بخش دیدیم که $\mathbb{Z}$ با استفاده از نگاشت زیر بطور آزاد روی $\mathbb{R}^2$ عمل می‌کند.

$$\varphi_n(x_1, x_2) = (x_1 + n, x_2)$$

حال می‌گوئیم که $\mathbb{Z}$ بطور ناپیوسته عمل می‌کند زیرا اگر همسایگی U از نقطه $m = (x_1, x_2)$ در $\mathbb{R}^2$ را باندازه کافی کوچک اختیار کنیم آنگاه

$$U \cap \varphi_n(U) = \phi$$

(زیرا در حقیقت φ_n هر نقطه (x_1, x_2) را به اندازه لااقل یک واحد در جهت محور x_1 به جلو منتقل می‌کند بنابراین اگر شعاع همسایگی U را باندازه کافی کوچک اختیار کنیم $U \cap \varphi_n(U) = \phi$)

لذا $\mathbb{Z}$ بطور ناپیوسته عمل می‌کند. حال از قضیه ۱ نتیجه می‌گیریم $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ یک منیفلد خارج قسمتی با بعد ۲ است.

تمرین :

۲ـ نشان دهید $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ یک منیفلد خارج قسمتی با بعد یک است.

راهنمایی: ثابت کنید $\mathbb{Z}$ گروه جمعی اعداد صحیح با استفاده از تابع زیر بطور آزاد و ناپیوسته روی $\mathbb{R}$ عمل می‌کند. سپس از قضیه ۱ استفاده کنید.

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, n) \longrightarrow t + n$$

۳ـ فرض کنیم روی $\mathbb{Z}$ گروه جمعی اعداد صحیح تابع φ به‌صورت زیر تعریف شود

$$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(m, n, t) \longrightarrow t + m\alpha + n\beta$$

که در آن α و β اعداد حقیقی ناصفری هستند که خارج قسمت آنها عددی گنگ است.

الف ـ نشان دهید φ مشخص کننده عمل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ روی $\mathbb{R}$ بعنوان یک گروه تبدیلات است.

ب ـ نشان دهید φ آزاد است.

ج ـ نشان دهید φ بطور ناپیوسته عمل نمی‌کند.

۴ـ دیدیم اگر یک گروه متناهی بطور آزاد روی منیفلد هاسدرف M عمل کند آنگاه بطور ناپیوسته نیز عمل می‌کند. ثابت کنید در این حالت منیفلد خارج قسمتی نیز هاسدرف است.

* * * * * * * *