مقدمه

دستگاه‌های دینامیکی، شاخه‌های گسترده‌ای از دانش ریاضی و کاربردهای آن را در برگرفته و به‌عنوان یکی از زمینه‌های فعال و زنده‌ی بین‌رشته‌ای مطرح است. نیوتن بیش از سه قرن پیش بذر این علم را کاشته و امروزه این علم با تلاش دانشمندان بسیاری رشد یافته است. بد نیست بدانیم منظور از یک دستگاه دینامیکی یا یک دستگاه پویا، مجموعه‌ای ازحالت‌ها است که وضعیت آن با گذر زمان و مطابق با قواعد مشخص تغییر می‌کند. در ریاضیات، این نوع دستگاه و توابع معرف آن، به منظور نمایش وابستگی زمانی یک نقطه در فضای هندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از مثال‌های شناخته شده دستگاه‌های دینامیکی می‌توان به حرکت آونگ، جریان آب در لوله و تغییر تعداد آبزیان یک رودخانه اشاره کرد. دستگاه دینامیکی در مقابل دستگاه ایستا قرار دارد. دستگاه مانا یا ایستا، دستگاهی است که خروجی آن به زمان بستگی ندارد. در واقع، خروجی این نوع دستگاه‌ها در هر لحظه از زمان، صرفاً تابعی از مقدار ورودی در آن لحظه است. دستگاه ایستا، به‌عنوان یک دستگاه بدون حافظه در نظر گرفته می‌شود؛ چراکه رفتار آن در گذشته یا آینده، تاثیری بر روی رفتار فعلی آن ندارد. از مثال‌های دستگاه ایستا می‌توان به مجموعه کتاب‌های موجود در یک قفسه، آب پشت سد و وزنه روی ترازو اشاره کرد. تا زمانی که تغییری در پارامترهای ورودی (تعداد کتاب، میزان آب ورودی سد و تغییر وزنه) رخ ندهد، رفتار دستگاه تغییر نمی‌کند. به محض تغییر در پارامترهای ورودی، خروجی دستگاه (وزن تحمل شده توسط قفسه، فشار هیدرواستاتیک پشت سد و عدد ترازو) تغییر خواهد کرد. به‌علاوه، این تغییر ارتباطی با خروجی‌های قبلی ندارد. به‌عنوان مثال، ترازو، فقط وزن جسم روی خود را نمایش می‌دهد. اینکه وزن جسم قبلی چقدر بوده یا وزن جسم بعدی چقدر خواهد بود، هیچ تاثیری بر روی مقدار فعلی نمایش داده شده نخواهد داشت. در صورتی که در دستگاه‌های دینامیکی، اینگونه نیست. به‌عنوان مثال، موقعیت بعدی کره‌ی زمین نسبت به خورشید، به موقعیت فعلی آن وابسته است.

دستگاه‌های دینامیکی، توصیف کننده بسیاری از پدیده‌های اطراف ما هستند و در حقیقت مطالعه‌ی دستگاه‌های دینامیکی شامل مطالعه‌ی مدل‌های ریاضی ارائه شده توسط محققان حوزه‌های مختلف می‌شود و از این‌رو، از اهمیت بالایی در پیشرفت تکنولوژی این حوزه‌ها برخوردار است. امروزه در این شاخه از ریاضی که به‌عنوان دستگاه‌های دینامیکی شناخته شده، تحولات و پیشرفت بسیاری رخ داده است. اوایل دهه‌ی ۱۹۷۰ میلادی ما دسترسی بسیار کمی به رایانه‌ها با سرعت بالا و تصویربرداری رایانه‌ای داشتیم. کلمه‌ی آشوب هیچ گاه در چهارچوب ریاضی استفاده نشده بود و علاقه به نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل و دستگاه‌های دینامیکی به گروه نسبتاً کوچکی از ریاضیدانان محدود بود. این نگرش در طول سه دهه‌ی گذشته به شکل حیرت‌آوری تغییر یافته است. رایانه‌ها همه جا هستند، بسته‌های رایانه‌ای که از آن‌ها می‌توان در تقریب جواب‌های معادله دیفرانسیل استفاده و نتایج را به‌صورت تصویری مشاهده کرد، به‌طور وسیعی در دسترس قرار دارد. در نتیجه تحلیل دستگاه‌های غیرخطی حاصل از معادلات دیفرانسیل و معادلات تفاضلی بسیار بیشتر از آن چه قبلاً وجود داشت، هم اکنون میسر است. کشف دستگاه‌های دینامیکی پیچیده مانند نگاشت نعل اسبی، مدارهای هموکلینیک و دستگاه لورنز و تحلیل‌های آن‌ها، دانشمندان را قانع کرد که حالت‌های پایدار همانند حالت‌های تعادلی و یا جواب‌های تناوبی همواره مهم‌ترین رفتار جواب‌های معادلات دیفرانسیل یا

معادلات تفاضلی نیستند. زیبایی و دسترسی نسبی این پدیده‌های آشوبناک دانشمندان و مهندسین در رشته‌های مختلف را برانگیخت تا با دقت بیشتری به معادلات دیفرانسیل و معادلات تفاضلی مهم در رشته‌های خود بپردازند. امروزه پدیده‌های دینامیکی تقریباً در هر رشته از علم، مانند واکنش نوسانی بلُسف–ژاتبینسکی[1] در شیمی تا مدار آشوبناک چوآ[2] در مهندسی الکترونیک، از حرکات در مکانیک سماوی تا انشعابات در دستگاه‌های زیستی ظاهر می‌شوند.

دستگاه دینامیکی از نظر وابستگی زمانی به دو نوع گسسته و پیوسته تقسیم می‌شود. البته با در نظر گرفتن نوع تابع مورد استفاده برای نمایش تغییرات، این دستگاهها را می‌توان به دو نوع خطی و غیرخطی نیز تقسیم‌بندی کرد. پیش از تعریف دستگاه‌های دینامیکی خطی و غیرخطی، به معرفی دستگاه‌های دینامیکی گسسته و پیوسته می‌پردازیم.

تغییر رفتار دستگاه دینامیکی گسسته، طی گام‌های زمانی مجزا (معمولاً با مقادیر صحیح $n = 0, 1, 2, \cdots, n$) انجام می‌شود. در این نوع دستگاه، فاصله بین گام‌های زمانی قابل توجه است. به این ترتیب می‌توان حالت دستگاه در یک زمان مشخص مانند t را با یک مقدار معین مانند x_n نمایش داد. این دستگاه اطلاعات کمی را در اختیار محققین قرار می‌دهد. با این وجود، عملکرد آن در توصیف بسیاری از پدیده‌ها قابل قبول است. به‌علاوه، آشنایی با دستگاه دینامیکی گسسته برای مطالعه دستگاه‌های دینامیکی غیرخطی ضروری است. در بسیاری از موارد، اصل تکامل زمانی بر اساس تابعی است که حالت دستگاه در یک زمان را به‌عنوان ورودی دریافت کرده و حالت دستگاه در گام بعدی زمان را به‌عنوان خروجی مشخص می‌کند. به این ترتیب، با شروع وضعیت اولیه دستگاه در حالت x_0 در زمان $n = 0$، می‌توان تابعی را برای تعیین حالت $x_1 = f(x_0)$ در زمان $n = 1$، حالت $x_2 = f(x_1)$ در زمان $n = 2$ و تمام حالت‌های بعدی تعریف کرد. در نهایت، مجموعه‌ای از حالت‌های دستگاه دینامیکی (مسیر بین نقاط x_0 تا x_n) به‌دست می‌آید. در این روش، حالت دستگاه در تمام زمان‌ها با توجه به تابع f و حالت اولیه x_0 تعیین می‌شود. به این دستگاه، «دستگاه دینامیکی گسسته[3] می‌گویند. درک رفتار دستگاه‌های دینامیکی گسسته، نیازمند آشنایی معادلات تفاضلی است.

در کنار دستگاه دینامیکی گسسته، دستگاه دینامیکی پیوسته[4] وجود دارد. در این دستگاه، فاصله گام‌های زمانی به قدری کوچک است که می‌توان از آن صرف نظر کرد. به عبارت دیگر، تغییر زمان به صورت پیوسته در نظر گرفته می‌شود. درک رفتار دستگاه‌های پیوسته، نیازمند آشنایی با حسابان و معادلات دیفرانسیل است. معادلات دیفرانسیل، اطلاعات مفید زیادی را برای مدل‌های ساده فراهم می‌کنند. البته با افزایش اجزای مدل، توصیف رفتار دستگاه توسط این معادلات دشوار می‌شود. در دستگاه‌های دینامیکی پیوسته، به دلیل یکپارچه بودن زمان در تکامل زمانی، رفتار دستگاه به آرامی در فضای حالت تغییر می‌کند. با تکامل زمان، حالت $x(t)$ در زمان t را می‌توان به‌عنوان یکی از نقاط گذرا از فضای حالت در نظر گرفت. اصل تکامل زمانی با مشخص کردن سرعت نقطه $x(t)$، نحوه جابجایی آن را مشخص می‌کند. این کار توسط تابع $v(t) = f(x(t))$ انجام می‌گیرد. در این تابع، $v(t)$، سرعت نقطه در زمان t است. به این ترتیب، با شروع در حالت اولیه‌ی $x(0)$ در زمان $t = 0$، مسیر تمام حالت‌های بعدی $x(t)$، یک منحنی گذرنده از فضای حالت خواهد بود.

دستگاه دینامیکی خطی، یکی از انواع دستگاه‌های دینامیکی با توابع خطی است. به‌طور کلی، راه‌حل‌های دقیق، رفتار دستگاه‌های دینامیکی را به‌طور دقیق توصیف نمی‌کنند. با این وجود، مدل‌های دستگاه دینامیکی خطی برای ساده‌سازی مناسب هستند. این دستگاه، یک درک کلی از رفتار کیفی (تقریبی) را فراهم می‌کند. مبنای دستگاه دینامیکی خطی، محاسبه‌ی مقدار متغیرها در نقاط تعادل و تقریب خطی تغییر رفتار دستگاه در فاصله‌ی بین این نقاط است. دستگاه دینامیکی غیرخطی، رابطه‌ی بین ورودی و خروجی را به طور غیرخطی نمایش می‌دهد. به عبارت دیگر، مقادیر هر نقطه در این دستگاه را نمی‌توان با استفاده از درون‌یابی یا بیرون‌یابی مقادیر نقاط کناری بیان کرد. دستگاه‌های غیر

[1] Belousov-Zhabotinsky
[2] Chua
[3] Discrete Dynamical Systems
[4] Continuous Dynamical Systems

خطی، توصیف بهتری از رفتار پدیده‌ها را فراهم می‌کنند. با این وجود، بر خلاف دستگاه‌های خطی، نحوه‌ی تغییرات متغیرهای دستگاه‌های غیر خطی در گذر زمان، پیچیده، غیرقابل پیش‌بینی یا حتی غیر قابل درک به نظر می‌رسند. حل دستگاه‌های دینامیکی غیرخطی دشوار و نیازمند توان محاسباتی بالا است. به همین دلیل، این دستگاهها معمولاً توسط مجموعه‌ای از معادلات خطی و به‌صورت تقریبی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

در این درس، عموماً به مطالعه‌ی دستگاه‌های دینامیکی گسسته می‌پردازیم و کار را با معرفی دستگاه‌های دینامیکی یک بعدی و تحلیل برخی از مثال‌های مقدماتی از آن شروع می‌کنیم.