به نام او

پاسخ آزمون آزمایشی المپیاد ریاضی، سال دوم و سوم دبیرستان

1. پاسخ $n=9$ است. برای $n=8$ کافیست اعداد 1,3,4,6 را سیاه و اعداد 2,5,7,8 را سفید کنیم، در این صورت هیچ سه عدد همرنگی تشکیل تصاعد حسابی نمی‌دهند.
برای $n=9$ فرض کنید اعداد 1,2,...,9 را طوری رنگ‌آمیزی کرده‌ایم که هیچ سه نقطه همرنگ تشکیل تصاعد حسابی نمی‌دهند. به علت تقارن فرض کنید عدد 5 سیاه باشد. در این صورت اعداد 4,6 حداقل یکی سفید است. اگر 4,6 هر دو سفید باشند در این صورت 2,8 هر دو سیاه خواهند بود که 5 وسط آنها و سیاه است. پس فرض کنید 4 سفید است و 6 سیاه است. در نتیجه 7 باید سفید باشد (5,6,7). پس 1 باید سیاه باشد (1,4,7). پس 9 باید سفید باشد (1,5,9). پس 8 باید سیاه باشد (7,8,9). پس 2 باید سفید باشد (2,5,8). پس 3 باید سیاه باشد (1,2,3). اما در این صورت اعداد 1,3,5 سیاه هستند که تناقض است.

پاسخ آزمون آزمایشی المپیاد ریاضی، سال دوم و سوم دبیرستان

2. خیر. فرض کنید a تا از این اعداد فرد و $14 - a$ تا فرد باشند. در این صورت در بین $a_i + a_j$ها $a(14 - a)$ عدد فرد وجود دارد که طبق نامساوی حسابی هندسی، این عدد کوچکتر یا مساوی 49 است، پس همه اعداد فرد تولید نمی‌شوند.

پاسخ آزمون آزمایشی المپیاد ریاضی، سال دوم و سوم دبیرستان

3. ثابت می‌کنیم نقاط X, Y, R هم‌خطند و به طریق مشابه هم‌خطی X, Y, S هم اثبات می‌شود.
توجه کنید که نقاط X, Y روی دایره‌ای به قطر DM قرار دارند.
در نتیجه: $\angle MXY = \angle MDY = \angle MBD$. از طرفی $\angle RXC = \angle RDC$. پس برای هم‌خطی X, Y, R کافیست ثابت کنیم: $\angle RDC = \angle MBD$، یعنی باید ثابت کنیم که دو خط MB, DR با هم موازیند.
فرض کنید K وسط CD باشد. چون AD بر دایره به قطر CD مماس است و $AR = AD$، پس AR هم بر این دایره مماس است. در نتیجه RD بر AK عمود است.
از طرفی دو مثلث ABD, CAD با هم متشابه هستند و M, K وسط های AD, CD هستند.
پس دو مثلث BMD, AKD هم با هم متشابهند. پس: $\angle BMD = \angle AKD$. پس اگر محل برخورد امتداد BM با AK را T بنامیم آنگاه چهارضلعی $MTKD$ محاطی است، بنابراین $\angle MTK = \angle MDK = 90^0$. پس دو خط MB, AK هم بر یکدیگر عمودند.
پس MB, DR هر دو بر AK عمودند و در نتیجه با هم موازیند و حکم مسئله ثابت شد.

پاسخ آزمون آزمایشی المپیاد ریاضی، سال دوم و سوم دبیرستان

4. برای اثبات توجه کنید که:

$$(3a-(b+c+d))^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow 9a^2-6a(b+c+d)+(b+c+d)^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow 9a^2 \geq 6a(b+c+d)-(b+c+d)^2$$
$$\Rightarrow 9a^2 \geq (b+c+d)(6a-(b+c+d))$$
$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c+d} \geq \frac{6a-(b+c+d)}{9}$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد:

$$\frac{b^2}{c+d+a} \geq \frac{6b-(c+d+a)}{9}$$
$$\frac{c^2}{d+a+b} \geq \frac{6c-(d+a+b)}{9}$$

با جمع کردن سه نامساوی بالا حکم مسئله نتیجه می‌شود.