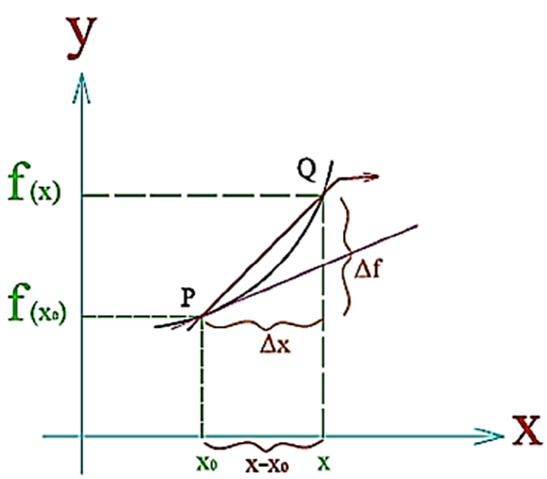
تعریف مشتق



در فصل قبل در مورد حد و پیوستگی تابع بحث شد.

یکی از کاربردهای مهم حد توابع، محاسبهٔ مشتق تابع است. نمودار تابع f را مطابق شکل در نظر می گیریم.

اگر خطی این نمودار را در نقاط P و Q قطع کند شیب این خط را می توان بصورت زیر محاسبه کرد.

$$P(x_\circ, f(x_\circ)) \qquad \Delta f = f(x) - f(x_\circ)$$

$$Q(x, f(x)) \qquad \Delta x = x - x_\circ \to x_\circ + \Delta x = x$$

PQ شیب خط قاطع : $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$

اگر روی نمودارf، نقطه Q به نقطه P نزدیک شود در این صورت نقطه x به سمت $x_\circ$ میل می کند و خط قاطع به خط مماس تبدیل می شود. شیب خط مماس بر منحنی را مشتق تابع f در نقطهٔ $x_\circ$ می‌نامیم و می نویسیم $f'(x_\circ) = \lim\limits_{x \to x_\circ} \dfrac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$

بعبارت دیگر: اگر تابع f در نقطه $x_\circ$ پیوسته بوده و حد کسر بالا $\left(\lim\limits_{x \to x_\circ} \dfrac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}\right)$ موجود و متناهی باشد در این صورت این حد را مشتق تابع f در نقطه $x_\circ$ می نامیم و با $f'(x_\circ)$ نمایش می دهیم.

مشتق تابع f را در نقطه $x_\circ$ به فرم های دیگری هم می توان نوشت:

$$\begin{cases} f'(x_\circ) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x} \\ f'(x_\circ) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h} \end{cases}$$

می توان بجای Δx از متغیر h نیز استفاده کرد:

مثال 1) مشتق تابع های زیر را در نقاط تعیین شده با استفاده از تعریف مشتق محاسبه نمائید.

الف) $f(x)=x^{3}\quad , \quad x=2$

ب) $f(x)=\dfrac{1}{x}\quad , \quad x=-1$

مثال 2) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه ی 9= x بیابید.

مثال 3) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ را در نقطه ی $x=0$ بدست آورید.

مشتق پذیری

تعریف: تابع f را بر بازه (a,b) مشتق پذیر می نامیم هر گاه f در همه نقاط (a,b) مشتق پذیر باشد در این صورت مقدار مشتق به ازای هر x از این بازه بصورت زیر تعریف می شود:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

($f'(x)$ را با نمادهای y', y'_x و یا $\dfrac{dy}{dx}$ نیز نمایش می دهند.)

قضیه: اگر تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد، آنگاه f در x_0 پیوسته است.

اثبات: فرض کنیم تابع f در نقطه ی x_0 دارای مشتق باشد یعنی $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجود و برابر $f'(x_0)$ است.

از طرفی: $$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\times(x-x_0)=f'(x_0)\times 0=0$$

نتیجه می‌گیریم: $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0 \rightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ پس تابع f در نقطه x_0 پیوسته است

روابط بین حد- پیوستگی- مشتق

برای درک بهتر این رابطه می توان حد، پیوستگی و مشتق تابع را به طبقات یک ساختمان تشبیه کرد که طبقه اول آن حد، طبقه دوم پیوستگی و طبقه سوم مشتق می باشد. همان طور که وجود طبقه سوم برای یک ساختمان لزوماً نشان دهنده وجود طبقات اول و دوم است، پس وجود مشتق در یک نقطه هم نشان دهنده وجود حد و پیوستگی در آن نقطه می باشد.

در نتیجه: اگر طبقات پایین وجود نداشته باشند، لزوماً طبقات بالاتر هم موجود نخواهد بود.

تساوی مشتق چپ و راست

همانطور که گفته شد مشتق یک تابع در نقطه $x_.$ زمانی وجود دارد که حد $\lim\limits_{x\to x_.}\dfrac{f(x)-f(x_.)}{x-x_.}$ موجود باشد.

بعبارت دیگر: اگر در تعریف مشتق حدود چپ و راست موجود بوده و با هم برابر باشند، تابع **f** در نقطه $x_.$ مشتق پذیر خواهد بود.

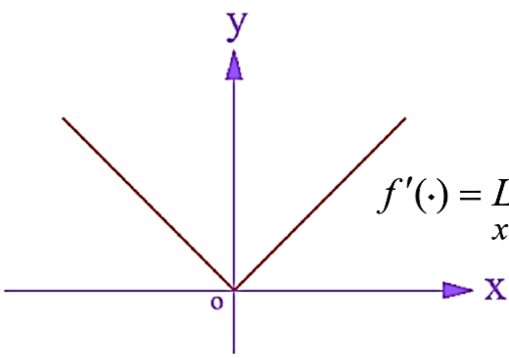
مشتق چپ در نقطه $x_.$: $f'_-(x_.)=\lim\limits_{x\to x_.^-}\dfrac{f(x)-f(x_.)}{x-x_.}$

مشتق راست در نقطه $x_.$: $f'_+(x_.)=\lim\limits_{x\to x_.^+}\dfrac{f(x)-f(x_.)}{x-x_.}$

تابع f در نقطه $x_.$ مشتق پذیر است $\Leftarrow f'_-(x_.)=f'_+(x_.)$ اگر

مثال) در مورد پیوستگی و مشتق پذیری تابع $f(x)=|x|$ در نقطه $x_0=0$ بحث کنید.

حل: با توجه به نمودار، پیوستگی تابع **f** در نقطه $x_0=0$ واضح است.



حال داریم: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

مشتق چپ و راست تابع را در نقطه $x_0=0$ حساب می کنیم.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

پس مشتق چپ و راست تابع **f** در نقطه $x_0=0$ با هم برابر نبوده و تابع در این نقطه مشتق پذیر نمی‌باشد.

نتیجه مهم: پیوستگی تابع **f** در نقطه x_0 شرط لازم برای مشتق پذیری است نه شرط کافی.

یعنی: از پیوسته بودن تابع **f** در نقطه x_0 نمی توان مشتق پذیری آنرا در این نقطه نتیجه گرفت.

(پیوستگی $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ مشتق پذیری)

09144101130

سرعت متوسط- سرعت لحظه‌ای: (معادلهٔ حرکت یک متحرک رابطه ای است بین مکان متحرک و زمان حرکت) اگر مکان متحرک را با x و زمان را با t نمایش دهیم، در این صورت می توان گفت:

سرعت متوسط متحرک، نسب تغییرات مکان به تغییرات زمان است. اگر سرعت متوسط را با $\overline{V}$ نمایش دهیم داریم:

$$\overline{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t)-x(t_{.})}{t-t_{.}}$$

سرعت متحرک در یک لحظه را سرعت لحظه ای نامیده و با V نمایش می دهند. در نتیجه سرعت لحظه ای یک متحرک در لحظهٔ $t=\alpha$، حد سرعت متوسط است وقتی $\Delta t\to ۰$

یعنی:

$$V=\lim_{\Delta t\to .}\overline{V}=\lim_{\Delta t\to .}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{t\to t_{.}}\frac{x(t)-x(t_{.})}{t-t_{.}}$$

مثال) معادله حرکت متحرک بصورت $x=t^{۲}-۲t+۱$ می باشد.

الف) سرعت متوسط متحرک را بین لحظات $t_۲=۳(s),t_۱=۱(s)$ بدست آورید.

ب) سرعت لحظه ای متحرک را در لحظه $t=۳(s)$ بدست آورید.

مشتق دوم: اگر از معادلهٔ مشتق تابع $(y'=f'(x))$ در صورت وجود، دوباره مشتق بگیریم، مشتق دوم تابع بدست می‌آید که معادلهٔ آنرا بصورت $y''=f''(x)$ می نویسند.

نکته: مشتق اول معادله حرکت یک متحرک را سرعت و همچنین مشتق دوم آنرا شتاب متحرک می‌نامند و به ترتیب با $a(t),V(t)$ نشان می‌دهند.

یعنی:

$$S=f(t)\xrightarrow{\text{مشتق}}V(t)=f'(t)\xrightarrow{\text{مشتق}}a(t)=f''(t)$$

09144101130