



## مسائل ریاضی ۲ (شماره ۲)

۱. طول قوس هریک از منحنی‌های زیر را بدست آورید.

$$r(t) = ti + \frac{1}{4}t^2k \quad 0 < t < 8 \quad (i)$$

$$r(t) = (\cos t, \sin t, 2) \quad 0 \leq t \leq 8\pi \quad (ii)$$

۲. کنج فرنه هریک از منحنی‌های زیر را بدست آورید.

$$r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, \sqrt{5}t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (i)$$

$$C : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = \sqrt{3}y \quad (ii)$$

۳. معادله خط مماس و صفحه مماس و صفحه قائم بر منحنی‌های زیر را در نقطه داده شده را بدست آورید.

$$r(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad X_0 = (-1, 0, \pi) \quad (i)$$

$$x + y + z = 1, \quad x_2 + y_2 + z_2 = 9 \quad X_0 = (1, -2, 2) \quad (ii)$$

۴. ثابت کنید خط مماس بر  $r(t) = (a \cos wt, a \sin wt, bt)$  همواره زاویه ثابت با صفحه  $xy$  می‌سازد.

۵. نشان دهید منحنی زیر مسطح است و انحناى ثابت دارد.

$$r(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3} \cos t) \quad -\pi \leq t \leq \frac{\pi}{3}$$

۶. مرکز انحنای بیضی  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  را بیابید.

۷. ثابت کنید:

$$T' = kN \quad (i)$$

$$N' = -kT + \tau.B \quad (ii)$$

$$B' = -\tau.N \quad (\text{iii})$$

۸. شتاب مماس و قائم منحنی  $r(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2)$  را در لحظه  $t = \pi$  بیابید.

۹. فرمولهای  $k$  و  $\tau$  را ثابت کنید

$$k = \frac{|V \times a|}{|V|^3} \quad (\text{i})$$

$$\tau = \frac{|r' \cdot (r'' \times r''')|}{|r \times a|^2} \quad (\text{ii})$$

۱۰. رویه‌ای بیابید که منحنی  $(t \cos t, t \sin t, t)$  روی آن می‌گیرد.

۱۱. منحنی حاصل از تقاطع رویه‌های  $x^2 + y^2 = 1$  و  $z = x^2$  را بیابید.

۱۲. محل تقاطع منحنی  $(\sin t, \cos t, t)$  و کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$  را بیابید.

۱۳. ثابت کنید

$$\frac{d}{dt}(f(t)r(t)) = f'(t)r(t) + f(t)r'(t)$$

که  $f$  تابع اسکالر و  $r(t)$  تابع پارامتری در  $\mathbb{R}^3$  است.

۱۴. فرض کنید یک منحنی در مختصات قطبی  $r = f(\theta)$  داده شده است انحنا و بردار یک مماس و بردار یک قائم و بردار یک قائم دوم آن را بیابید.

۱۵. انحنا یک منحنی  $y = f(x)$  در صفحه مختصات را محاسبه کنید.

۱۶. دایره بوسان سهمی  $y = x^2$  را در مبدا مختصات بیابید.

۱۷. دایره بوسان بیضی  $9x^2 + 4y^2 = 36$  را در نقاط  $(2, 0)$  و  $(0, 3)$  بیابید.

۱۸. عبارات داده شده را محاسبه کنید

$$\frac{d}{dt}(r_1(t) \cdot (r_2(t) \times r_3(t))) = ? \quad (\text{i})$$

$$\frac{d}{dt}(r_1(t) \times r_2(t)) = ? \quad (\text{ii})$$

۱۹. ثابت کنید اگر  $r(t) \neq 0$

$$\frac{d}{dt}|r(t)| = \frac{1}{|r(t)|} r(t) \cdot r'(t).$$

۲۰. طول منحنی  $r(t) = at^2i + btj + 3 \ln tk$  را  $1 \leq t \leq T$  بر حسب انتگرال معین بیان کنید. اگر  $b^2 = 4ac$  طول قوس  $r(t)$  چقدر است.