فصل دوم

هندسه تحلیلی و جبرخطی-بخش اول

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۲

AvaEducation16.blog.ir

AvaEducation16@gmail.com

@AvaEducation16

@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی @AvaEducation16 نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - **بسیار ساده** جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
  - **ساده** جهت تثبیت مطالب
  - **متوسط** جهت تمرین بیشتر مطالب
  - **سخت** جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

فهرست مطالب

۱ بردارها ۴

۲ ضرب داخلی ۶
۱.۲ ویژگی‌های ضرب داخلی ۷
۲.۲ تصویر بردار $\vec{u}$ بر $\vec{v}$ ۱۰

۳ ضرب خارجی ۱۳
۱.۳ ویژگی‌های ضرب خارجی ۱۷

۴ روابط ترکیبی ضرب داخلی و خارجی ۱۸

۵ استقلال خطی ۲۴

۶ مقدار ویژه و بردار ویژه ۳۱

۷ معادله خط در فضا ۴۱
۱.۷ فاصله نقطه از یک خط ۴۳
۲.۷ فاصله دو خط متنافر از هم ۴۴

۸ معادله صفحه در فضا ۴۶
۱.۸ فاصله یک نقطه از صفحه ۴۸
۲.۸ فاصله دو صفحه موازی از هم ۵۰
۳.۸ وضعیت نسبی خط و صفحه نسبت به هم ۵۰

۹ تمرین ۵۱

پیشگفتار

این فایل شامل مطالب کلاس ریاضی ۲ دانشگاه است که در ترم‌های گذشته تدریس شده و در سایت teacher16.blog.ir ارائه شده بود. اکنون به جهت استفاده عمومی در دسترس مخاطبان خواهد بود. در انتهای فایل، تمریناتی جهت خود ارزیابی دانشجویان اضافه شده که حل آن‌ها بسیار توصیه می‌گردد. لازم به ذکر است فایل حل تمرینات در زمان مناسب در سایت قرار می‌گیرد. با آرزوی آنکه مطالب ارائه شده برای دانشجویان محترم مفید باشد.

۱ بردارها

پاره‌خط جهت‌داری که از نقطه $O(0,0,0)$ به نقطه $P(x,y,z)$ وصل می‌شود، بردار $\vec{OP}=(x,y,z)$ نامیده می‌شود.

بر حسب بردارهای پایه $\vec{i}=(1,0,0)$، $\vec{j}=(0,1,0)$ و $\vec{k}=(0,0,1)$ می‌توان بردار $\vec{OP}$ را نوشت:

$$\vec{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

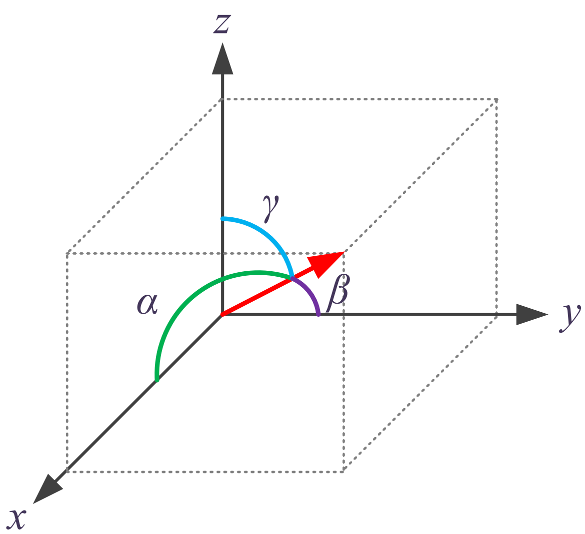
در نتیجه حداقل دو نوع نمایش برای بردار وجود دارد. به عنوان نمونه می‌توان بردار $\vec{u}=(3,-5,4)$ را به صورت $\vec{u}=3\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$ نیز نمایش داد.

طول بردار $\vec{OP}$ برابر است با

$$|\vec{OP}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{۱}$$

با توجه به شکل ۷ زاویه بردار $\vec{OP}$ با محور x، y و z به ترتیب α، β و γ می‌باشد. رابطه‌ای که برای این زوایا تعریف می‌شود به صورت زیر است:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{OP}|},\qquad \cos\beta=\frac{y}{|\vec{OP}|},\qquad \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{OP}|} \tag{۲}$$



شکل ۱: زوایای یک بردار با محورهای مختصات

زوایای α، β و γ زوایای هادی[۱] بردار $\vec{OP}$ نامیده می‌شوند و همواره داریم:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{۳}$$

[۱] Directional

مثال ۱ اگر بردار $\vec{a}$ با محور x دارای زاویه 60 درجه و با محور z دارای زاویه 45 درجه باشد و این بردار در قسمت مثبت محورهای مختصات قرار گرفته باشد، زاویه آن با محور y چقدر خواهد بود؟

پاسخ: بنا بر رابطه (۳۱) خواهیم داشت:

$$\cos^2 60^\circ + \cos^2\beta + \cos^2 45^\circ = 1, \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{2})^2 + \cos^2\beta + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1,$$

$$\Rightarrow \quad \cos\beta = \pm\frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad \beta = 60^\circ$$

در نتیجه زاویه بردار با محور y برابر با 60 درجه خواهد بود.

مثال ۲ زوایای هادی بردار $\vec{u} = (1, 1, 0)$ را بدست آورید.

پاسخ: بنا بر رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$|\vec{OP}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{2}$$

با استفاده از رابطه (۳۰) داریم:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\gamma = \frac{0}{\sqrt{2}}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 45^\circ, \quad \gamma = 90^\circ$$

بردار یکه $\hat{u}$ برداری به طول واحد بوده که در جهت بردار $\vec{u}$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{۴}$$

نکته: بردار $\vec{u}$ موازی و همجهت بردار $\vec{v}$ است در صورتی که ضریب مثبتی از آن باشد:

$$\vec{u} = \lambda\vec{v}, \quad \lambda > 0$$

در صورتی که ضریب منفی از آن باشد، جهت بردار $\vec{u}$ خلاف جهت بردار $\vec{v}$ خواهد بود.

مثال ۳ بردار یکه بردارهای $\vec{u}=(4,-1,-\sqrt{3})$ و $\vec{v}=(-2,1,2)$ را بدست آورید.

پاسخ: باید اندازه این بردارها بدست آیند و سپس بردار بر اندازه آن تقسیم گردد.

$$|\vec{u}|=\sqrt{(4)^2+(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{20}, \quad \Rightarrow \quad \hat{u}=\frac{1}{\sqrt{20}}(4,-1,-\sqrt{3})$$

برای بردار $\vec{v}$ داریم:

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(2)^2}=3, \quad \Rightarrow \quad \hat{v}=\frac{1}{3}(-2,1,2)=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

جمع و تفریق بردارها مانند حالت عددی است که هر بردار با مولفه متناظر خودش جمع یا تفریق می‌شود و نیاز به توضیح اضافه نیست. تقسیم برای بردارها تعریف نمی‌شود. اما دو نوع ضرب برای بردارها تعریف شده است که عبارتند از ضرب داخلی و ضرب خارجی. در ادامه به برخی از ویژگی‌های این دو نوع ضرب و ارتباط آن‌ها با هم و برخی کاربردهای آن می‌پردازیم.

۲ ضرب داخلی

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار باشند که زاویه بین آن‌ها θ است، ضرب داخلی این دو بردار یک اسکالر (عدد) است و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \tag{۵}$$

ضرب داخلی یک نمایش دیگر نیز دارد. با فرض $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ و $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ نمایش دیگر ضرب داخلی به صورت زیر است:

$$\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \tag{۶}$$

مثال ۴ اگر $\vec{u}=(1,\sqrt{3},0)$ و $\vec{v}=(1,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$ باشد، زاویه بین این دو بردار چند درجه است؟

پاسخ: برای حل این سوال باید از هر دو نمایش ضرب داخلی استفاده نمود. ابتدا اندازه دو بردار تعیین می‌شود:

$$|\vec{u}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2 + (0)^2} = 2$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

با استفاده از رابطه (۶) داریم:

$$\vec{u}.\vec{v} = (1)(1) + (\sqrt{3})(\sqrt{3}) + (0)(-2\sqrt{3}) = 4$$

اکنون از رابطه (۵) استفاده می‌کنیم:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta, \quad \Rightarrow \quad 4 = (2)(4)\cos\theta, \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^\circ$$

۱.۲ ویژگی‌های ضرب داخلی

چند ویژگی مهم ضرب داخلی به اختصار بیان می‌شود. با توجه به تعریف ضرب داخلی در روابط (۵) و (۶) می‌توان به سادگی این ویژگی‌ها را اثبات نمود.

- خاصیت جابجایی: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- ضرب عدد در بردار: $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$ که در آن k یک عدد می‌باشد.
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- اگر زاویه بین دو بردار 90° باشد، آنگاه $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- اگر دو بردار با هم موازی باشند، آنگاه $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|$
- برای ضرب داخلی یک بردار در خودش داریم: $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$

مثال ۵ اگر دو بردار $\vec{u} = (1, 4, a)$ و $\vec{v} = (-1, a, 2)$ بر هم عمود باشند، مقدار a چقدر است؟

پاسخ: شرط عمود بودن آن است که ضرب داخلی بین دو بردار برابر با صفر گردد. با تعریف (۶) داریم:

$$\vec{u}.\vec{v} = (1)(-1) + (4)(a) + (a)(2) = 0, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{6}$$

مثال ۶ برای آنکه $\cos\theta$ بین دو بردار $\vec{A} = (2, a, -1)$ و $\vec{B} = (-1, -2, a)$ برابر با $\frac{1}{6}$ باشد، مقدار a چقدر باید باشد؟

پاسخ: ابتدا اندازه‌های دو بردار بدست می‌آیند:

$$|\vec{A}| = \sqrt{a^2 + 5}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{a^2 + 5}$$

با تعریف (۵) داریم:

$$\vec{A}.\vec{B} = \sqrt{a^2 + 5}\sqrt{a^2 + 5}\cos\theta$$

با تعریف (۶) داریم:

$$\vec{A}.\vec{B} = (2)(-1) + (a)(-2) + (-1)(a)$$

مقدار ضرب داخلی با هر دو تعریف باید با هم برابر باشند:

$$\overset{\cos\theta = \frac{1}{6}}{\Rightarrow} -3a - 2 = \frac{a^2 + 5}{6}, \quad \Rightarrow \quad a^2 + 18a + 17 = 0$$

با حل معادله درجه دوم فوق دو جواب برای مقدار a بدست می‌آید که هر دو قابل قبول هستند. چون $\cos\theta$ در یک دوره تناوب دوبار برابر با مقدار $\frac{1}{6}$ خواهد بود. مقادیر مجهول عبارتند از $a = -1, \ -17$.

مثال ۷ اگر داشته باشیم $|\vec{u} - 2\vec{v}| = 4$ و $|\vec{u} + 2\vec{v}| = 3$، در این صورت ضرب داخلی دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ چقدر است؟

پاسخ: با استفاده از ویژگی آخر ذکر شده برای ضرب داخلی داریم:

$$|\vec{u} - 2\vec{v}|^2 = (\vec{u} - 2\vec{v}).(\vec{u} - 2\vec{v})$$

همچنین برای رابطه دوم داریم:

$$|\vec{u} + 2\vec{v}|^2 = (\vec{u} + 2\vec{v}).(\vec{u} + 2\vec{v})$$

با استفاده از ویژگی سوم داریم:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u}-2\vec{v}).(\vec{u}-2\vec{v}) &= \vec{u}.\vec{u}-2\vec{u}.\vec{v}-2\vec{v}.\vec{u}+4\vec{v}.\vec{v} \\
&= |\vec{u}|^2-4(\vec{u}.\vec{v})+4|\vec{v}|^2
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad 16=|\vec{u}-2\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2-4(\vec{u}.\vec{v})+4|\vec{v}|^2 \tag{۷}$$

برای اندازه $|\vec{u}+2\vec{v}|$ داریم:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u}+2\vec{v}).(\vec{u}+2\vec{v}) &= \vec{u}.\vec{u}+2\vec{u}.\vec{v}+2\vec{v}.\vec{u}+4\vec{v}.\vec{v} \\
&= |\vec{u}|^2+4(\vec{u}.\vec{v})+4|\vec{v}|^2
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad 9=|\vec{u}+2\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+4(\vec{u}.\vec{v})+4|\vec{v}|^2 \tag{۸}$$

از تفاضل دو عبارت (۷) و (۸) داریم:

$$16-9=-8(\vec{u}.\vec{v}), \quad \Rightarrow \quad \vec{u}.\vec{v}=-\frac{7}{8}$$

مثال ۸ اگر ضرب داخلی دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر با -1 باشد و داشته باشیم $|2\vec{u}-\vec{v}|=3$، مقدار $|2\vec{u}+\vec{v}|$ را تعیین کنید.

پاسخ:

$$
\begin{aligned}
|2\vec{u}-\vec{v}|^2 &= 9 \\
(2\vec{u}-\vec{v}).(2\vec{u}-\vec{v}) &= 9 \\
4\vec{u}.\vec{u}-4\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{v} &= 9 \\
4|\vec{u}|^2-4\vec{u}.\vec{v}+|\vec{v}|^2 &= 9 \\
4|\vec{u}|^2-4(-1)+|\vec{v}|^2 &= 9 \\
\Rightarrow \quad 4|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2 &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|2\vec{u}+\vec{v}|^2 &= (2\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}+\vec{v}) \\
&= 4\vec{u}.\vec{u} + 4\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{v} \\
&= 4|\vec{u}|^2 + 4\vec{u}.\vec{v} + |\vec{v}|^2 \\
&= 4|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 4\vec{u}.\vec{v} \\
&= (5) + 4(-1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad |2\vec{u}+\vec{v}| = \pm 1$$

از آنجایی که اندازه بردار یک مقدار مثبت است در نتیجه:

$$|2\vec{u}+\vec{v}| = 1$$

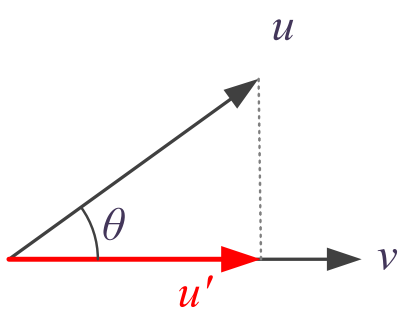
مثال ۹ شرط آنکه دو بردار $\vec{A} = (4, a, b)$ و $\vec{B} = (-1, 1, -1)$ بر هم عمود باشند چیست؟

پاسخ: شرط عمود بودن آن است که ضرب داخلی بین دو بردار برابر با صفر گردد.

$$\vec{A}.\vec{B} = -4 + a - b = 0, \quad \Rightarrow \quad a - b = 4$$

۲.۲ تصویر بردار $\vec{u}$ بر $\vec{v}$

دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ که زاویه بین آن‌ها θ می‌باشد، مفروض است. اگر بردار $\vec{u}$ بر $\vec{v}$ تصویر گردد، برداری ایجاد می‌شود که هم جهت با $\vec{v}$ است و اندازه آن $|\vec{u}|\cos\theta$ می‌باشد. به شکل ۸ توجه شود.



شکل ۲: تصویر نمودن یک بردار بر بردار دیگر

اندازه این بردار

$$|\vec{u'}| = |\vec{u}| \cos\theta$$

است. چون جهت آن در جهت بردار یکه $\hat{v}$ است، در نهایت به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\vec{u'} = (|\vec{u}| \cos\theta)\, \hat{v}$$

از تعریف ضرب داخلی می‌دانیم:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

همچنین از تعریف بردار یکه داریم:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

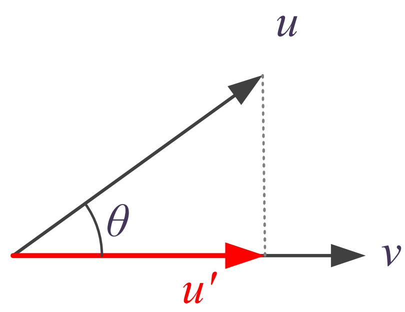
با این توصیفات برای بردار تصویر شده $\vec{u'}$ داریم:

$$\vec{u'} = \left(|\vec{u}|\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{u'} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} \qquad (۹)$$

مثال ۱۰ تصویر بردار $\vec{u} = (-2, 1, 1)$ را بر $\vec{v} = (-1, 0, 3)$ و تصویر بردار $\vec{v}$ را بر $\vec{u}$ بدست آورید.

پاسخ: هدف از ارائه این سوال آن است که بدانیم تصویر بردارها بر بردار دیگری با هم برابر نیستند. به خاطر سپردن رابطه (۹) مشکل است. اگر از شکل استفاده شود بسیار کمک می‌کند. برای حل قسمت اول به شکل زیر توجه کنید:



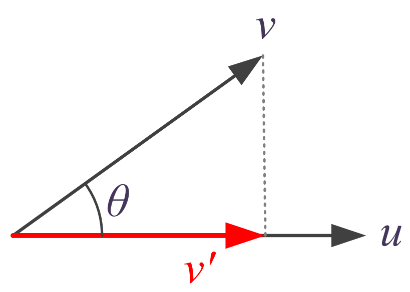
برای تصویر $\vec{u}$ بر $\vec{v}$ داریم:

$$\vec{u'} = |\vec{u}| \cos\theta \hat{v}$$

با جایگذاری $\cos\theta$ و $\hat{v}$ از روابطی که می‌دانیم به رابطه (۹) می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\vec{u'} &= \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} \\ &= \frac{(-2)(-1)+(1)(0)+(1)(3)}{(-1)^2+(0)^2+(3)^2}(-1,0,3) \\ &= \frac{1}{2}(-1,0,3) \\ &= (-\frac{1}{2},0,\frac{3}{2})\end{aligned}$$

حال برای قسمت دوم شکل زیر را فرض می‌کنیم:



$$\vec{v'} = |\vec{v}|\cos\theta\hat{u}$$

با همان استدلال فوق داریم:

$$\vec{v'} = \left(|\vec{v}|\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \vec{v'} &= \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} \\ &= \frac{(-2)(-1)+(1)(0)+(1)(3)}{(-2)^2+(1)^2+(1)^2}(-2,1,1) \\ &= \frac{5}{6}(-2,1,1) \\ &= (-\frac{5}{3},\frac{5}{6},\frac{5}{6})\end{aligned}$$

نکته: ضرب داخلی گاهی اوقات ضرب نقطه‌ای یا Dot product نیز نامیده می‌شود.

مثال ۱۱ تصویر بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}=(-\sqrt{3},\sqrt{2},-2)$ دارای اندازه $\frac{1}{5}$ است. حاصل ضرب داخلی بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بدست آورید.

پاسخ: طبق رابطه زیر، بردار تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ تعریف می‌شود:

$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

اگر اندازه بردارهای دو طرف بدست آید، رابطه زیر منتج خواهد شد:

$$|\vec{a'}|=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}|\vec{b}|=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

با توجه به داده‌های مسئله

$$|\vec{b}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+(-2)^2}=3$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a'}|=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad \Rightarrow \quad \vec{a}.\vec{b}=\frac{3}{5}$$

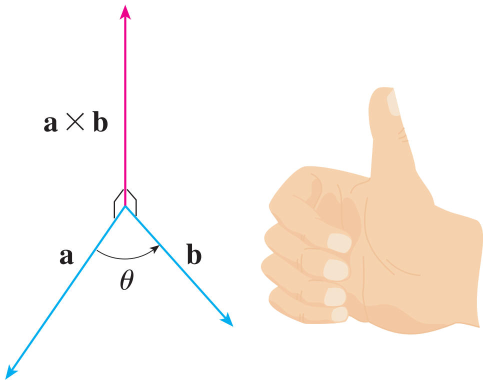
۳ ضرب خارجی

ضرب خارجی دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ که زاویه بین آن دو θ است را با $\vec{u}\times\vec{v}$ نمایش می‌دهیم که خود یک بردار است. جهت آن طبق قانون دست راست تعیین می‌شود و اندازه آن با رابطه زیر بدست می‌آید:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta \tag{۱۰}$$

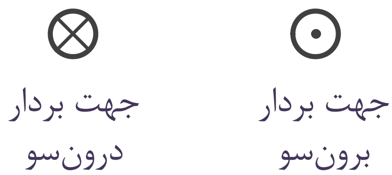
قانون دست راست در ضرب خارجی: برای ضرب خارجی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که به صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ نوشته می‌شود، اگر انگشتان دست راست از بردار $\vec{a}$ به سمت بردار $\vec{b}$ حرکت کنند، انگشت شست جهت بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را نشان می‌دهد. در واقع بردار ایجاد شده از ضرب خارجی، بر هر دو بردار عمود است. به شکل ۹ توجه شود. نکته قابل توجه این است که برای رفتن از یک بردار به بردار دیگر کمترین زاویه ممکن انتخاب می‌شود. مثلاً اگر زاویه بین دو بردار $100°$ باشد، مکمل این زاویه $260°$ است. اما نباید از سمت $260°$ از بردار اول به بردار دوم رسید.

از دبیرستان با برون‌سو یا درون‌سو بودن بردار آشنایی دارید. چون نمی‌توان بردار را روی صفحه به صورت سه بعدی نمایش داده، معمولاً از نمایش برون‌سو یا درون‌سو بودن استفاده می‌شود. اگر جهت یک بردار به سمت بیرون صفحه باشد، آن را برون‌سو و اگر به سمت داخل صفحه باشد آن را درون‌سو می‌نامند. در



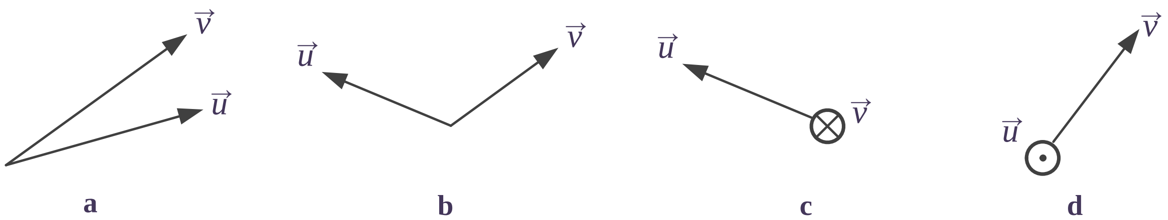
شکل ۳: قانون دست راست در ضرب خارجی دو بردار

شکل ۱۰ دو بردار برون‌سو و درون‌سو نمایش داده شده است.



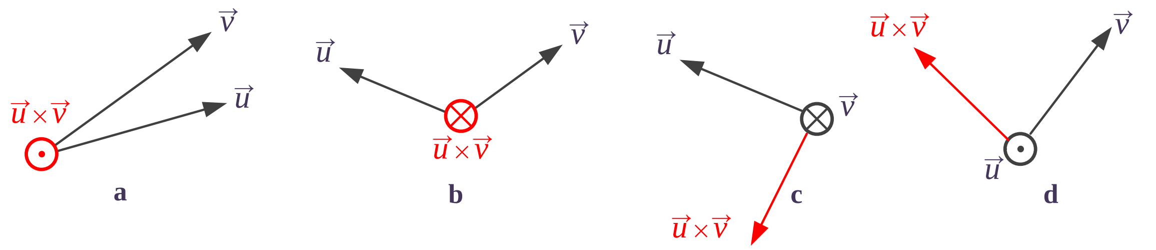
شکل ۴: نمایش بردار درون‌سو یا برون‌سو در صفحه

مثال ۱۲ با توجه به قانون دست راست، جهت ضرب خارجی $\vec{u} \times \vec{v}$ را در شکل‌های زیر تعیین کنید.



پاسخ: با توجه به قانون دست راست در شکل **a** اگر از $\vec{u}$ به سمت $\vec{v}$ حرکت کنیم، جهت انگشت شست به سمت خارج از صفحه خواهد بود. پس بردار ضرب خارجی برون‌سو است. در شکل **b** اگر از $\vec{u}$ به سمت $\vec{v}$ در جهت زاویه کوچکتر حرکت کنیم، جهت انگشت شست به سمت داخل صفحه خواهد بود. پس بردار ضرب خارجی درون‌سو است. در شکل **c** بردار $\vec{v}$ به سمت داخل صفحه است. اگر از $\vec{u}$ به سمت $\vec{v}$ حرکت کنیم، بردار ضرب خارجی تقریباً در جهت جنوب غربی خواهد بود (پایین و چپ!).

در شکل **d** بردار $\vec{u}$ به سمت بیرون صفحه است. اگر از $\vec{u}$ به سمت $\vec{v}$ حرکت کنیم، بردار ضرب خارجی تقریباً در جهت شمال غربی خواهد بود (بالا و چپ). پاسخ ضرب خارجی مربوط به این مثال در شکل زیر نمایش داده شده است.

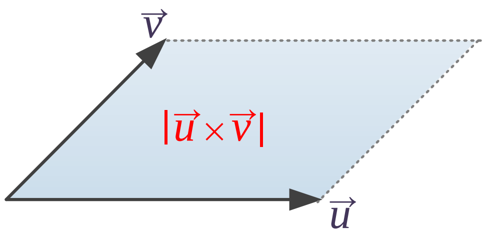


با این مثال می‌توان فهمید که ضرب خارجی خاصیت جابجایی ندارد. اگر به جای $\vec{u}\times\vec{v}$، $\vec{v}\times\vec{u}$ حساب شود، جهت آن برعکس خواهد بود. در مورد این ویژگی بعداً بحث خواهد شد.

نمایش دیگری از ضرب خارجی وجود دارد. اگر فرض شود $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ و $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ آنگاه ضرب خارجی دو بردار به صورت دترمینان زیر نمایش داده می‌شود:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2\ ,\ u_3v_1-u_1v_3\ ,\ u_1v_2-u_2v_1) \qquad (۱۱)$$

یک تعبیر فیزیکی از ضرب خارجی دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مساحت متوازی‌الاضلاعی است که با این دو بردار ساخته می‌شود. در واقع اندازه بردار ضرب خارجی، مساحت این متوازی‌الاضلاع را تعیین می‌کند. در شکل (۵) این مساحت نشان داده شده است.



شکل ۵: اندازه ضرب خارجی بیانگر مساحت تشکیل شده توسط دو بردار

مثال ۱۳ ضرب خارجی دو بردار $\vec{u}=(-3,3,2)$ و $\vec{v}=(-2,0,1)$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-3&3&2\\-2&0&1\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}3&2\\0&1\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}-3&2\\-2&1\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}-3&3\\-2&0\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\Big((1)(3)-(0)(2)\Big)-\hat{j}\Big((1)(-3)-(-2)(2)\Big)+\hat{k}\Big((0)(-3)-(-2)(3)\Big)$$

$$\Rightarrow\quad \vec{u}\times\vec{v}=3\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}=(3,-1,6)$$

مثال ۱۴ مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار $\vec{A}=(1,2,3)$ و $\vec{B}=(4,0,1)$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&2&3\\4&0&1\end{vmatrix}=(2,11,-8)$$

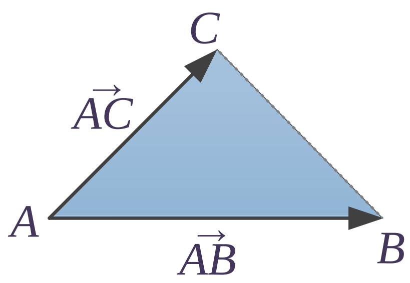
$$\Rightarrow\quad |\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{(2)^2+(11)^2+(-8)^2}=\sqrt{189}$$

مثال ۱۵ اگر سه نقطه $(1,3,-1)$، $(-1,4,-3)$ و $(3,4,-1)$ را به هم متصل کنیم، مساحت ناحیه تشکیل شده چقدر می‌شود؟

پاسخ: با نامگذاری $A=(1,3,-1),\ B=(-1,4,-3),\ C=(3,4,-1)$ داریم:

$$\vec{AB}=(-2,1,-2),\qquad \vec{AC}=(2,1,0)$$

بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ دو ضلع مثلث هستند به صورت شکل زیر: (مثلث تشکیل شده از متصل کردن سه نقطه)



از ضرب خارجی برای تعیین مساحت متوازی‌الاضلاع بین دو بردار استفاده می‌شود:

$$\Rightarrow \quad \vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -2 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=(2,-4,-4)$$

چون صورت سوال مساحت مثلث را خواسته است، نصف مساحت متوازی‌الاضلاع باید لحاظ شود:

$$S=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2+(-4)^2}=3$$

نکته: ضرب خارجی گاهی اوقات ضرب برداری Cross product نیز نامیده می‌شود.

۱.۳ ویژگی‌های ضرب خارجی

برخی از ویژگی‌های ضرب خارجی به شرح زیر است:

- جابجایی همراه با یک منفی $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$
- اگر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ عمود بر هم باشند $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|$

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

- برای سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ قاعده بک-کب یا bac-cab به صورت زیر است:
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$$

۴ روابط ترکیبی ضرب داخلی و خارجی

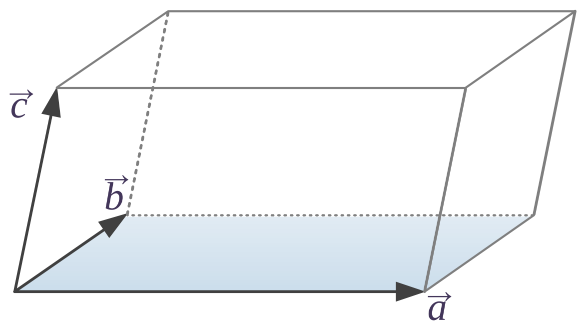
در برخی روابط برداری هم از ضرب داخلی و هم از ضرب خارجی استفاده شده است. یک رابطه مهم برای این منظور

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b}) \tag{۱۲}$$

تعبیر فیزیکی رابطه فوق حجم یک متوازی‌السطوح است که از این سه بردار تشکیل شده است. در حالت کلی داریم:

$$\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{۱۳}$$

در شکل ۶ یک متوازی‌السطوح که توسط سه بردار تشکیل شده نمایش داده شده است. حجم این متوازی‌السطوح با دترمینان (۱۳) تعیین می‌شود.



شکل ۶: تشکیل یک متوازی‌السطوح توسط سه بردار

رابطه بین ضرب داخلی و ضرب خارجی که به توان دوم رسیده‌اند به صورت زیر می‌باشد:

$$(\vec{u}.\vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}||\vec{v}| \tag{۱۴}$$

مثال ۱۶ حجم متوازی‌السطوح تشکیل شده توسط سه بردار $\vec{A}=(2,0,0)$، $\vec{B}=(0,2,0)$ و $\vec{C}=(0,2,2)$ چقدر است؟

پاسخ:

$$Volume=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&2&2\end{vmatrix}=8$$

مثال ۱۷ اگر $\vec{A}=(1,-2,0)$، $\vec{B}=(0,2,-2)$ و $\vec{C}=(1,1,1)$ باشد، حاصل $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ را به دو روش اصلی و قاعده *bac-cab* بدست آورید.

پاسخ: با استفاده از رابطه اصلی:

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\0&2&-2\\1&1&1\end{vmatrix}=4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}=(4,-2,-2)$$

$$\Rightarrow\quad \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&-2&0\\4&-2&-2\end{vmatrix}=4\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}=(4,2,6)$$

روش *bac-cab*:

$$\vec{A}.\vec{C}=-1,\qquad \vec{A}.\vec{B}=-4$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})&=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})\\&=-(0,2,-2)+4(1,1,1)\\&=(4,2,6)\end{aligned}$$

مثال ۱۸ برداری بیابید که عمود بر هر دو بردار $\vec{u}=(-1,0,0)$ و $\vec{v}=(-3,2,1)$ باشد.

پاسخ: دو راه برای حل این مسئله وجود دارد. راه اول آنکه یک بردار $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ تعریف شود و از ضرب داخلی برای بررسی شرط عمود بودن استفاده گردد. در این صورت

$$\vec{u}.\vec{w}=0, \qquad \vec{v}.\vec{w}=0$$

$$\Rightarrow \quad -w_1=0, \qquad -3w_1+2w_2+w_3=0$$

با توجه به معادلات فوق، یک جواب می‌تواند به صورت زیر باشد که هر دو شرط فوق را برآورده می‌کند:

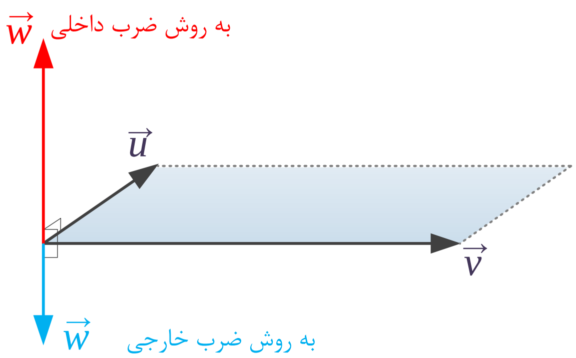
$$\vec{w}=(0,-2,4)$$

این مسئله جواب‌های دیگری هم دارد، اما همه در همین جهت هستند و تنها طول بردار متفاوت است یا در یک منفی ضرب شده‌اند.

در روش دوم از ضرب خارجی استفاده می‌شود. می‌دانیم بردار تولید شده از ضرب خارجی بر هر دو بردار عمود است. در نتیجه می‌توان $\vec{w}$ را از ضرب خارجی بدست آورد.

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}=0\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}=(0,1,-2)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، هر دو بردار تولید شده بر بردارهای داده شده عمود هستند و تنها در یک ضریب -2 متفاوتند. در شکل ؟؟ پاسخ بدست آمده در هر دو روش نمایش داده شده است. (ساختن بردار عمود بر دو بردار به روش ضرب داخلی یا خارجی)



مثال ۱۹ اگر اندازه ضرب داخلی و خارجی دو بردار غیر صفر با هم برابر باشد، زاویه بین آن دو چقدر است؟

پاسخ:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}\times\vec{v}|, \quad \Rightarrow \quad |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta, \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \sin\theta$$

اکنون باید این معادله مثلثاتی حل شود:

$$\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta), \quad \Rightarrow \quad \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \Rightarrow \quad \theta = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

برای یک دوره تناوب $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ پاسخ مسئله است.

مثال ۲۰ اگر اندازه بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ به ترتیب 1 و 5 باشد و مساحت مثلث بین آن‌ها 2 باشد، اندازه بردار $\vec{u}-2\vec{v}$ چقدر است؟

پاسخ: برای یافتن اندازه بردار $\vec{u}-2\vec{v}$ آن اندازه را به توان دو می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} D^2 = |\vec{u}-2\vec{v}|^2 &= (\vec{u}-2\vec{v}).(\vec{u}-2\vec{v}) \\ &= \vec{u}.\vec{u} - 2\vec{u}.\vec{v} - 2\vec{v}.\vec{u} + 4\vec{v}.\vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 + 4|\vec{v}|^2 - 4\vec{u}.\vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 + 4|\vec{v}|^2 - 4|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \end{aligned}$$

در رابطه فوق، مقادیر اندازه بردارها داده شده است، اما مقدار زاویه باید تعیین شود. از صورت مسئله مساحت مثلث بین دو بردار را داریم که نصف مساحت متوازی‌الاضلاع می‌باشد:

$$S = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2}(1)(5)\sin\theta, \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{4}{5}, \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{3}{5}$$

با جایگذاری مقادیر مشخص خواهیم داشت:

$$D^2 = |\vec{u}|^2 + 4|\vec{v}|^2 + 4|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = (1)^2 + 4(5)^2 - 4(1)(5)(\frac{3}{5}) = 89$$

$$\Rightarrow \quad D = \sqrt{89}$$

مثال ۲۱ برای آنکه سه بردار $\vec{a}=(-1,2,3)$، $\vec{b}=(0,-1,1)$ و $\vec{c}=(k,0,1)$ در یک صفحه باشند، مقدار k چقدر باید باشد؟

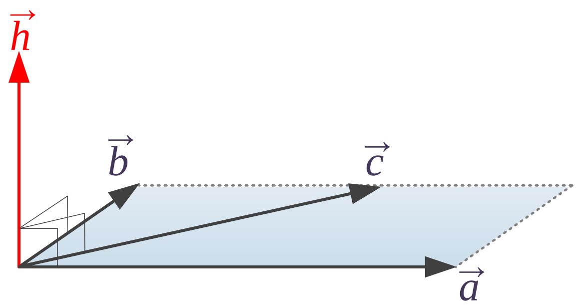
پاسخ: اگر سه بردار در یک صفحه هستند، یعنی ضرب خارجی دو بردار دلخواه از این سه بردار بر صفحه و تمام بردارهای روی آن عمود است. برای یافتن بردار عمود بر صفحه از ضرب خارجی استفاده می‌شود:

$$\vec{h}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=5\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}=(5,1,1)$$

اکنون بردار تولید شده $\vec{h}$ باید بر بردار $\vec{c}$ عمود باشد. شرط عمود بودن این است که ضرب داخلی دو بردار برابر با صفر گردد. در نتیجه

$$\vec{c}.\vec{h}=0, \quad \Rightarrow \quad 5k+1=0, \quad \Rightarrow \quad k=-\frac{1}{5}$$

در شکل زیر قرار گرفتن سه بردار در یک صفحه و تولید بردار ضرب خارجی نشان داده شده است. (هم صفحه بودن سه بردار)



مثال ۲۲ مساحت مثلثی را که رئوس آن در نقاط $P(1,1,-2)$، $Q(2,3,-8)$ و $R(0,1,1)$ قرار دارد، بدست آورید.

پاسخ: مساحت مثلث، نصف مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار است. با توجه به نقاط داده شده می‌توان دو برداری که مثلث را ساخته‌اند تعیین نمود. هر بردار بین دو نقطه از تفاضل مقادیر متناظر تعیین می‌شود.

$$\vec{PQ}=(2,3,-8)-(1,1,-2)=(1,2,-6), \qquad \vec{PR}=(0,1,1)-(1,1,-2)=(-1,0,3)$$

مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار از ضرب خارجی دو بردار بدست می‌آید:

$$\vec{PQ}\times\vec{PR}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 2 & -6\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}=(6,3,2)$$

اندازه این بردار به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Rightarrow \quad |\vec{PQ}\times\vec{PR}|=\sqrt{(6)^2+(3)^2+(2)^2}=\sqrt{49}=7$$

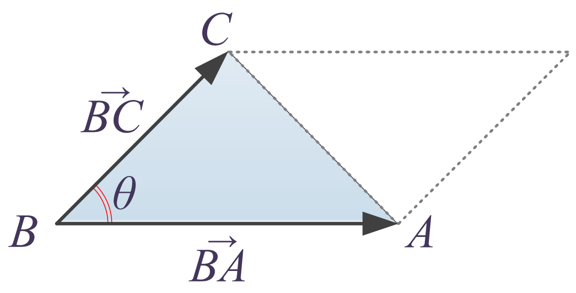
مساحت مثلث بین دو بردار نصف مساحت متوازی‌الاضلاع بین آن‌هاست، در نتیجه

$$\Rightarrow \quad S=\frac{1}{2}|\vec{PQ}\times\vec{PR}|=\frac{7}{2}$$

نکته: موضوع بسیار مهم تمایز بین ضرب داخلی و ضرب خارجی است. با انجام ضرب داخلی یک عدد به وجود می‌آید، درحالیکه در ضرب خارجی یک بردار ایجاد می‌گردد.

مثال ۲۳ اگر مساحت مثلث ABC برابر با $\frac{1}{2}\vec{BA}.\vec{BC}$ باشد، زاویه رأس B چقدر است؟

پاسخ: مثلث ABC در شکل زیر نمایش داده شده است.



مساحت مثلث ABC به صورت نصف مساحت متوازی‌الاضلاع بین دو ضلع $\vec{BA}$ و $\vec{BC}$ است که آن هم برابر است با $\frac{1}{2}|\vec{BA}\times\vec{BC}|$.

$$\frac{1}{2}|\vec{BA}\times\vec{BC}|=\frac{1}{2}\vec{BA}.\vec{BC}$$

$$\frac{1}{2}|\vec{BA}||\vec{BC}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{BA}||\vec{BC}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta=\cos\theta, \quad \Rightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲۴ بردار $\vec{a}=(-1,\alpha,1)$ با محور z در فضا زاویه 45° می‌سازد. اگر $\vec{b}=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},2)$ و زاویه بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با محور zها برابر با θ باشد، مقدار $\cos\theta$ را بدست آورید. (کنکور سراسری ریاضی - ۱۴۰۰)

پاسخ: زاویه هادی بردار $\vec{a}$ با محور z داده شده است.

$$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+\alpha^2+1^2}},\qquad\Rightarrow\qquad \alpha=0$$

بردار $\vec{a}=(-1,0,1)$ بدست آمده است.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-1&0&1\\-\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&2\end{vmatrix}=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$$

$$\Rightarrow\qquad \vec{a}\times\vec{b}=\frac{2}{3}(-1,1,-1)$$

زاویه هادی بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با محور z به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}},\qquad\Rightarrow\qquad \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۵ استقلال خطی

اگر $\vec{u_1}$، $\vec{u_2}$، $\cdots$ و $\vec{u_m}$ بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ باشند، این بردارها را مستقل خطی می‌نامیم هرگاه بتوان از رابطه $c_1\vec{u_1}+c_2\vec{u_2}+\cdots+c_m\vec{u_m}=0$ نتیجه گرفت که $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$ است.

به عبارت دیگر وقتی دسته‌ای از بردارها را مستقل خطی می‌نامیم که نتوان یکی از آن‌ها را از ترکیب خطی بقیه بردارها نوشت. به عنوان مثال به سه بردار زیر که در $\mathbb{R}^4$ هستند دقت کنید:

$$\vec{u_1}=(1,1,-3,2),\qquad \vec{u_2}=(-1,2,2,-3),\qquad \vec{u_3}=(2,-1,-5,5)$$

این سه بردار مستقل خطی نیستند. چون یکی از آن‌ها را می‌توان با دو تای دیگر ایجاد نمود، مثلاً در اینجا بردار $\vec{u_3}$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از دو بردار دیگر نوشت، یعنی $\vec{u_3}=\vec{u_1}-\vec{u_2}$. اینکه چطور این رابطه بدست آمد و چگونه می‌توان به استقلال بردارها رسید در ادامه بحث می‌شود. در ضمن اگر بردارها در یک فضا، مستقل خطی نباشند، وابسته خطی نامیده می‌شوند.

تعریف: حداکثر تعداد بردارهایی که در یک فضا می‌توانند مستقل خطی باشند را بُعد[۲] فضا و بردارهای مستقل مورد نظر را پایه برای آن فضا می‌نامند.

[۲] Dimension

تعریف: اگر $A=\{\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots,\vec{u_k}\}$ مجموعه‌ای از بردارها باشد، فضای ایجاد شده توسط این بردارها span(A) نامیده و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$span(A)=\{c_1\vec{u_1}+c_2\vec{u_2}+\cdots+c_k\vec{u_k}|c_1,c_2,\ldots,c_k\in\mathbb{R}\} \quad (۱۵)$$

نکته: برای تعیین بعد یا بردارهای پایه فضا باید از روش سطری گاوس استفاده نمود.

مثال ۲۵ بعد و بردارهای پایه فضای تولیدشده توسط بردارهای زیر را بیابید.

$$\vec{u_1}=(1,-1,1)$$

$$\vec{u_2}=(-1,0,2)$$

$$\vec{u_3}=(1,2,3)$$

پاسخ: براساس نکته ارائه شده، باید از روش ماتریس حذفی گاوس برای اینکه بردارها مستقلند یا نه استفاده شود. در این مرحله بردارها در یک ماتریس نوشته می‌شوند و با انجام اعمال سطری تلاش می‌شود که این ماتریس تبدیل به بالا مثلثی شود. تعداد سطرهایی که غیر صفر هستند بعد فضا را تعیین می‌کنند و بردارهای غیرصفر باقیمانده از اعمال سطری، بردارهای پایه هستند. ماتریس گاوس این بردارها به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

با انجام اعمال گاوسی:

$$-R_1+R_3\to R_3, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1+R_2\to R_2, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3R_2 + R_3 \to R_3, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس بالا مثلثی تشکیل شده و هیچ سطری صفر نشده است، بنابراین سه بردار مستقل بوده و بعد فضایی که توسط این سه بردار تشکیل می‌شوند برابر با سه است. همچنین بردارهای پایه در این فضا، بردارهای غیرصفر زیر هستند:

$$\vec{u_1} = (1, -1, 1)$$

$$\vec{u_2} = (0, -1, 3)$$

$$\vec{u_3} = (0, 0, 11)$$

مثال ۲۶ بعد و بردارهای پایه فضای تولیدشده توسط بردارهای زیر را بیابید.

$$\vec{u_1} = (1, -1, 1, 2)$$

$$\vec{u_2} = (-1, 1, 1, 0)$$

$$\vec{u_3} = (1, -1, 3, 4)$$

$$\vec{u_4} = (-5, 5, -1, -6)$$

پاسخ: با تشکیل ماتریس گاوس:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

اکنون باید این ماتریس به فرم بالا مثلثی تبدیل شود:

$$5R_1 + R_4 \to R_4, \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-R_1 + R_3 \to R_3, \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_1 + R_2 \to R_2, \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-2R_2 + R_4 \to R_4, \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-R_2 + R_3 \to R_3, \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بیشتر از این نمی‌توان از اعمال سطری گاوسی استفاده کرد. در نهایت دو سطر باقی ماند که غیرصفر است. یعنی این دو سطر مستقل هستند و دو سطری که صفر شدند در حقیقت وابسته بودند. بعد فضا در این مثال دو است و بردارهای پایه (بردارهای غیرصفر اعمال سطری گاوس) به صورت زیر هستند:

$$\vec{u_1} = (1, -1, 1, 2)$$

$$\vec{u_2} = (0, 0, 2, 2)$$

مثال ۲۷ بعد و بردارهای پایه فضای تولیدشده توسط بردارهای زیر را بیابید.

$$\vec{u_1} = (\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1, \frac{1}{3})$$
$$\vec{u_2} = (-1, \frac{4}{3}, 2, -\frac{2}{3})$$
$$\vec{u_3} = (3, -4, -6, 2)$$
$$\vec{u_4} = (-\frac{3}{2}, 2, 3, -1)$$

پاسخ: با تشکیل ماتریس گاوس:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ 3 & -4 & -6 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

اعمال سطری گاوس بر روی این ماتریس انجام می‌شود:

$$3R_1 + R_4 \to R_4, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ 3 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-6R_1 + R_3 \to R_3, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2R_1 + R_2 \to R_2, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بعد فضا یک و بردار پایه آن $\vec{u_1} = (\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1, \frac{1}{3})$ است.

مثال ۲۸ برای آنکه بردارهای زیر وابسته خطی باشند، مجهول a چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

$$\vec{u_1} = (1, 1, 2)$$

$$\vec{u_2} = (a, 1, -1)$$

$$\vec{u_3} = (3, 2a+1, 0)$$

پاسخ: با تشکیل ماتریس گاوس:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 3 & 2a+1 & 0 \end{bmatrix}$$

اعمال سطری گاوس بر روی این ماتریس انجام می‌شود:

$$-3R_1 + R_3 \to R_3, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & 2a-2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$-aR_1 + R_2 \to R_2, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-a & -1-2a \\ 0 & 2a-2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$2R_2 + R_3 \to R_3, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-a & -1-2a \\ 0 & 0 & -4a-8 \end{bmatrix}$$

از این ماتریس مشخص است که اگر سطر آخر صفر باشد، یعنی بردارهای داده شده وابسته خطی هستند.

در نتیجه

$$-4a - 8 = 0, \quad \Rightarrow \quad a = -2$$

اما یک حالت دیگر هم برای این ماتریس متصور است. اگر عنصر $(2,2)$ برابر با صفر باشد، یعنی $1-a=0$، آنگاه $a=1$ خواهد بود و ماتریس گاوس به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}, \quad -4R_2+R_3 \to R_3, \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این یعنی بردارها به ازای $a=1$ نیز وابسته خطی هستند. پس جواب مسئله $a=-2,\ 1$ است.

تعریف: اگر سطرهای یک ماتریس به عنوان بردار در نظر گرفته شوند که یک فضای برداری را تشکیل می‌دهند، آنگاه رتبه[۳] ماتریس تعداد سطرهای مستقل خطی می‌باشد.

نکته: اگر یک ماتریس دارای n سطر و m ستون باشد، رتبه ماتریس همواره کوچکتر یا مساوی $\min(n,m)$ است.

مثال ۲۹ رتبه ماتریس‌های زیر را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

پاسخ: برای ماتریس A داریم:

$$2R_1+R_2 \to R_2, \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

رتبه ماتریس A برابر با تعداد سطرهای غیر صفر است که در اینجا یک می‌باشد.

برای ماتریس B داریم:

$$\begin{array}{l} -2R_1+R_3 \to R_3, \\ 2R_1+R_2 \to R_2, \end{array} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

چون دو سطر غیر صفر وجود دارد، بنابراین رتبه ماتریس برابر با دو می‌باشد.

[۳] rank

لازم به ذکر است برای آنکه ماتریس گاوس به فرم بالا مثلثی باشد، می‌توان جای سطر دوم و سوم را با هم تعویض کرد که البته در اصل موضوع تغییری ایجاد نخواهد نمود. ضمناً محاسبات میانی مربوط به ماتریس گاوس به دلیل سادگی نمایش داده نشده است. همچنین با توجه به نکته ارائه شده در این مثال از قبل می‌دانستیم که

$$rank(A) \leq \min(2,4), \quad \Rightarrow \quad rank(A) \leq 2$$

$$rank(B) \leq \min(3,2), \quad \Rightarrow \quad rank(B) \leq 2$$

البته این نامساوی بیشینه رتبه قابل دسترسی برای یک ماتریس را بیان می‌دارد (رتبه ماتریس حداکثر این عدد است). همان طور که در مثال مشاهده شده

$$rank(A) = 1, \qquad rank(B) = 2$$

۶ مقدار ویژه و بردار ویژه

در یک ماتریس مربعی مانند A، اگر یک بردار مانند v و یک عدد مختلط مانند λ وجود داشته باشد به طوری که $Av = \lambda v$، آنگاه λ مقدار ویژه و v بردار ویژه متناظر با λ نامیده می‌شود.

ذکر چند نکته در مورد مقدار ویژه و بردار ویژه ضروریست:

- برای بدست آوردن مقدار ویژه λ باید معادله $\det(A - \lambda I) = 0$ حل شود.
- اگر دترمینان فوق بسط داده شود، یک معادله بر حسب λ ایجاد می‌گردد که به آن معادله مشخصه ماتریس A می‌گویند.
- حاصلضرب مقادیر ویژه یک ماتریس در هم با دترمینان آن ماتریس برابر است.
- حاصلجمع مقادیر ویژه یک ماتریس با اثر[۴] آن ماتریس برابر است.
- اگر یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، آنگاه هیچ یک از مقادیر ویژه آن صفر نیستند.
- در یک ماتریس بالا یا پایین مثلثی، مقادیر ویژه، عناصر روی قطر اصلی هستند.
- بردار ویژه‌های متناظر با مقدار ویژه‌های متمایز، مستقل خطی هستند.

[۴] trace

- هر ماتریس مربعی در معادله مشخصه خود نیز صدق می‌کند:

$$\det(A-\lambda I)=a_n\lambda^n+\cdots+a_0=0 \qquad \Rightarrow \qquad a_nA^n+\cdots+a_0I=0 \tag{۱۶}$$

این رابطه با نام قضیه کیلی-همیلتون[۵] شهرت دارد.

مثال ۳۰ مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس‌های زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -3 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

پاسخ: برای ماتریس A داریم:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)&=\det(\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\\ &=\det(\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix})\\ &=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 0\\ -1 & 3-\lambda\end{bmatrix}\\ &=(1-\lambda)(3-\lambda)-(0)(-1)\\ &=\lambda^2-4\lambda+3=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda=1,\ 3$$

متناظر با هر مقدار ویژه یک بردار ویژه وجود دارد که به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\lambda=1, \quad \Rightarrow \quad Av=v, \quad \Rightarrow \quad Av-v=0, \quad \Rightarrow \quad (A-I)v=0,$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

[۵] Cayley-Hamilton

از سطر اول عبارت فوق اطلاعات خاصی بدست نمی‌آید، اما از سطر دوم داریم:

$$-v_1 + 2v_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_2$$

فرض می‌شود v_2 یک پارامتر آزاد مانند t باشد، در این صورت بردار ویژه v به صورت زیر قابل نمایش است.

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مقدار t هر عدد غیرصفری می‌تواند باشد، اما ساده‌ترین عدد یک است. در واقع وقتی از t فاکتور گرفته می‌شود، بردار باقیمانده، بردار ویژه محسوب می‌گردد. پس بردار ویژه متناظر با $\lambda = 1$ به صورت $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

برای مقدار ویژه $\lambda = 3$:

$$\lambda = 3, \quad \Rightarrow \quad Av = 3v, \quad \Rightarrow \quad Av - 3v = 0, \quad \Rightarrow \quad (A - 3I)v = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هم از سطر اول و هم از سطر دوم به این نتیجه می‌رسیم که $v_1 = 0$ و v_2 آزاد است و می‌توانیم آن را t در نظر بگیریم. در این صورت بردار ویژه v به صورت زیر قابل نمایش است.

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پس بردار ویژه متناظر با $\lambda = 3$ به صورت $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

برای ماتریس B:

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda I)=&\det(\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\\ =&\det(\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix})\\ =&\det\begin{bmatrix}2-\lambda & -1\\ -4 & 2-\lambda\end{bmatrix}\\ =&(2-\lambda)(2-\lambda)-(-1)(-4)\\ =&\lambda^2-4\lambda=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda=0,\ 4$$

ابتدا بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda=0$ بدست می‌آید:

$$\lambda=0, \quad \Rightarrow \quad Bv=0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

از هر دو سطر رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$2v_1-v_2=0, \qquad v_1=t, \quad \Rightarrow \quad v_2=2t$$

در این صورت بردار ویژه v به صورت زیر قابل نمایش است.

$$v=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\ 2t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

پس بردار ویژه متناظر با $\lambda=0$ به صورت $v=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ می‌باشد.

اکنون بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda=4$ بدست می‌آید:

$$\lambda=0, \quad \Rightarrow \quad Bv=4v, \quad \Rightarrow \quad (B-4I)v=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}-2 & -1\\ -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

از هر دو سطر رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$-2v_1 - v_2 = 0, \qquad v_1 = t, \quad \Rightarrow \quad v_2 = -2t$$

در این صورت بردار ویژه v به صورت زیر قابل نمایش است.

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

پس بردار ویژه متناظر با $\lambda = 4$ به صورت $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

برای ماتریس C داریم:

$$\det(C - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$=(2-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 0, \ -1, \ 2$$

ابتدا بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda = 0$ بدست می‌آید:

$$\lambda = 0, \quad \Rightarrow \quad Cv = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از هر دو سطر اول رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$2v_1 = 0, \quad \Rightarrow \quad v_1 = 0$$

از سطر آخر:

$$-3v_1 - v_3 = 0, \quad \Rightarrow \quad v_3 = 0$$

اما مقدار v_2 آزاد است. در این صورت بردار ویژه v به صورت زیر قابل نمایش است.

$$v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\t\\0\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

پس بردار ویژه متناظر با $\lambda=0$ به صورت $v=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ می‌باشد.

اکنون بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda=-1$ بدست می‌آید:

$$\lambda=-1,\quad\Rightarrow\quad Cv=-v,\quad\Rightarrow\quad (A+I)v=0$$

$$\Rightarrow\quad\left(\begin{bmatrix}2&0&0\\2&0&0\\-3&0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}3&0&0\\2&1&0\\-3&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

از دو سطر اول رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$3v_1=0,\quad 2v_1+v_2=0,\quad\Rightarrow\quad v_1=v_2=0$$

سطر سوم اطلاعات جدیدی نمی‌دهد. پس عضو سوم این بردار آزاد است. در این صورت بردار ویژه v به صورت زیر قابل نمایش است.

$$v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

پس بردار ویژه متناظر با $\lambda=-1$ به صورت $v=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ می‌باشد.

در نهایت بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda=2$ بدست می‌آید:

$$\lambda=2,\quad\Rightarrow\quad Cv=2v,\quad\Rightarrow\quad (A-2I)v=0$$

$$\Rightarrow\quad\left(\begin{bmatrix}2&0&0\\2&0&0\\-3&0&-1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\2&-2&0\\-3&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

سطر اول شامل اطلاعات نیست و نمی‌توان از آن استفاده خاصی کرد. برای سطرهای دوم و سوم داریم:

$$2v_1 - 2v_2 = 0, \quad -3v_1 - 3v_3 = 0, \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1, \quad v_3 = -v_1$$

هر کدام از مجهولات فوق می‌توانند به عنوان پارامتر آزاد t در نظر گرفته شوند. مثلاً فرض می‌شود $v_1 = t$. در نتیجه $v_2 = t$ و $v_3 = -t$. در این صورت بردار ویژه v به صورت زیر قابل نمایش است.

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

پس بردار ویژه متناظر با $\lambda = 2$ به صورت $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

مثال ۳۱ زاویه بین دو بردار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

پاسخ: ابتدا باید مقادیر ویژه این ماتریس تعیین شوند:

$$\det(A - \lambda I) = 0, \qquad \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \lambda - 6 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2,\ -3$$

بردار ویژه متناظر با $\lambda = 2$:

$$(A - 2I)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از هر دو سطر رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$-v_1 + 2v_2 = 0, \qquad v_2 = t, \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2t$$

در این صورت بردار ویژه v به صورت زیر قابل نمایش است.

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پس بردار ویژه متناظر با $\lambda = 2$ به صورت $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

بردار ویژه متناظر با $\lambda = -3$:

$$(A + 3I)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از هر دو سطر رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$4v_1+2v_2=0, \qquad v_1=t, \quad \Rightarrow \quad v_2=-2t$$

در این صورت بردار ویژه v به صورت زیر قابل نمایش است.

$$v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\-2t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

پس بردار ویژه متناظر با $\lambda=-3$ به صورت $v=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ می‌باشد. البته برای آنکه در نامگذاری دچار اشتباه نشویم این بردار ویژه با u نشان داده می‌شود.

$$u=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

اکنون باید زاویه بین دو بردار $v=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ و $u=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ را بدست آوریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{(2)(1)+(1)(-2)}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}\sqrt{(1)^2+(-2)^2}}=0, \quad \Rightarrow \quad \theta=90^\circ$$

مثال ۳۲ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-5&-3\\0&2&1\end{bmatrix}$$

پاسخ: برای مقدار ویژه باید دترمینان زیر برابر با صفر قرار داد شود:

$$\det(A-\lambda I)=0, \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\1&-5-\lambda&-3\\0&2&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad (1-\lambda)\Big((-5-\lambda)(1-\lambda)+6\Big)-(1-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow \quad (1-\lambda)\Big(\lambda^2+4\lambda\Big)=0, \quad \Rightarrow \quad \lambda=0,\ 1,\ -4$$

برای بردار ویژه‌ها این رابطه برقرار است $Av=\lambda v$. بردار ویژه معادل $\lambda=0$ به صورت زیر است:

$$(A-\lambda_1 I)v=0, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}1&1&0\\1&-5&-3\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad v_2=t,\ v_1=-t,\ v_3=-2t$$

با فاکتور گرفتن از t بردار ویژه اول به صورت زیر بدست می‌آید:

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه معادل $\lambda = 1$ به صورت زیر است:

$$(A - \lambda_2 I)v = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 0,\ v_1 = 3t,\ v_3 = t$$

با فاکتور گرفتن از t بردار ویژه دوم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه معادل $\lambda = -4$ به صورت زیر است:

$$(A - \lambda_3 I)v = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = t,\ v_2 = -5t,\ v_3 = 2t$$

با فاکتور گرفتن از t بردار ویژه سوم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مثال ۳۳ مقادیر ویژه ماتریس زیر را تعیین کنید:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

پاسخ: دترمینان زیر برای تعیین مقدار ویژه باید تشکیل شود:

$$\det(A - \lambda I) = 0, \qquad \det\left(\begin{bmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{bmatrix}\right) = (\cos\theta - \lambda)(\cos\theta - \lambda) - (-\sin\theta)(\sin\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$$

در واقع این ماتریس دارای دو مقدار ویژه مختلط می‌باشد.

مثال ۳۴ در یک ماتریس 4×4 اگر سه مقدار ویژه آن با هم برابر باشند و مقدار ویژه چهارم آن -1 باشد، با فرض آنکه دترمینان این ماتریس برابر با 8 است، مجموع عناصر روی قطر اصلی را بدست آورید.

پاسخ: براساس نکات ذکر شده در ابتدای بخش مقادیر ویژه، دترمینان یک ماتریس حاصلضرب مقادیر ویژه ماتریس و حاصلجمع عناصر روی قطر اصلی برابر با مجموع همه مقادیر ویژه است. فرض شود سه مقدار ویژه ماتریس A برابر با λ باشد:

$$\det(A) = \lambda^3(-1) = 8, \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$$

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -2-2-2-1 = -7$$

مثال ۳۵ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $A^6 - 6A^5 + 17A^4 + A - I$ را بدست آورید.

پاسخ: یک روش آن است که شش بار A را در خودش ضرب کنیم و سپس برای جملات دیگر هم این کار را انجام دهیم و نتیجه را با هم جمع کنیم و ... اما هدف این مسئله استفاده از قضیه کیلی-همیلتون است. یک ماتریس در چندجمله‌ای مشخصه خودش صدق می‌کند. برای یافتن چندجمله‌ای مشخصه باید چندجمله‌ای مربوط به مقدار ویژه ساخته شود:

$$\det(A-\lambda I) = 0, \qquad \det(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}) = (3-\lambda)(3-\lambda) - (2)(-4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 6\lambda + 17 = 0, \quad \Rightarrow \quad A^2 - 6A + 17I = 0$$

صورت سوال مقدار زیر را می‌خواهد:

$$A^6 - 6A^5 + 17A^4 + A - I = A^4(A^2 - 6A + 17I) + A - I = A^4(0) + A - I = A - I$$

در نهایت:

$$A^6 - 6A^5 + 17A^4 + A - I = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

۷ معادله خط در فضا

سه نوع توصیف برای معادله یک خط در فضا وجود دارد.

- معادله برداری؛ جهت یا سوی خط با بردار $\vec{v}$ و یکی از نقاط روی خط با $\vec{r_0}$ نمایش داده می‌شود و به ازای پارامتر t:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v} \tag{۱۷}$$

- معادلات پارامتری؛ اگر $\vec{v} = (a, b, c)$ باشد و نقطه $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ روی خط قرار گرفته باشد، آنگاه معادله خط به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \tag{۱۸}$$

لازم به ذکر است که $\vec{v} = (a, b, c)$ گاهی بردار مشخصه یک خط نامیده می‌شود.

- معادلات متقارن؛ اگر هیچکدام از a, b, c صفر نباشد، با حذف پارامتر t بین آن‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{۱۹}$$

و هرگاه یکی از آن‌ها صفر بود مثلاً $c = 0$ معادله خط به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad z = z_0 \tag{۲۰}$$

حالت‌هایی که دو خط در فضا نسبت به هم دارند به سه دسته تقسیم می‌شوند:

- موازی یا منطبق؛ بردار مشخصه آن‌ها ضریبی از هم است و در اثر موازی بودن یا منطبق بودن، یا بدون جواب هستند و یا بی‌نهایت جواب دارند.

- متقاطع؛ تنها در یک نقطه با هم تطابق دارند و آن نقطه تنها جواب مسئله است.

- متنافر؛ نه موازی و نه متقاطع؛ در این صورت هیچ جوابی ندارند.

مثال ۳۶ حالت دو خط زیر در فضا را نسبت به هم تعیین کنید و در صورت وجود جواب، آن را بیابید.

$$\begin{cases} \frac{x}{-2} = \frac{y}{3} = 2z - 1 \\ \frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1}, \quad z = 1 \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا به بردار مشخصه خطوط دقت می‌کنیم. اگر مضربی از هم بودند یا خطوط منطبق‌اند یا موازی. سپس یک نقطه دلخواه از خط بالا را در معادله خط پایین جایگذاری می‌کنیم و اگر برآورده شد، دو خط بر هم منطبق هستند و اگر نشد، فقط موازیند.

اگر مشخصه خطوط مضربی از هم نبودند معادله پارامتری یکی از خط‌ها را نوشته و در دیگری جایگذاری می‌کنیم و در صورت وجود جواب، آن جواب یکتاست و در صورت عدم وجود جواب، دو خط متنافر هستند. در اینجا چون مشخصه دو خط مضربی از هم نیستند، پس یا دو خط متقاطع هستند و یا متنافر که باید بررسی شود. با پارامتری کردن خط اول:

$$\frac{x}{-2}=\frac{y}{3}=2z-1=t, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2t \\ y=3t \\ z=\frac{1}{2}(t+1) \end{cases}$$

اکنون این مقادیر x و y را در معادله خط دوم جایگذاری می‌کنیم و فعلا z را نگه می‌داریم:

$$\frac{-2t+4}{2}=\frac{3t-4}{-1}, \quad \Rightarrow \quad 2t=2, \quad \Rightarrow \quad t=1$$

حال این t را در z که از آن استفاده نکرده بودیم جایگذاری کرده و بررسی می‌کنیم آیا با z در معادله خط دوم برابر است یا نه؟

$$z=\frac{1}{2}(t+1), \quad \overset{t=1}{\Rightarrow} \quad z=1$$

چون هر دو zها از دو خط با هم برابرند پس دو خط متقاطع هستند و این انطباق در نقطه $x=-2$، $y=3$ و $z=1$ اتفاق افتاده است.

مثال ۳۷ حالت دو خط زیر در فضا را نسبت به هم تعیین کنید و در صورت وجود جواب، آن را بیابید.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2} \\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-4} \end{cases}$$

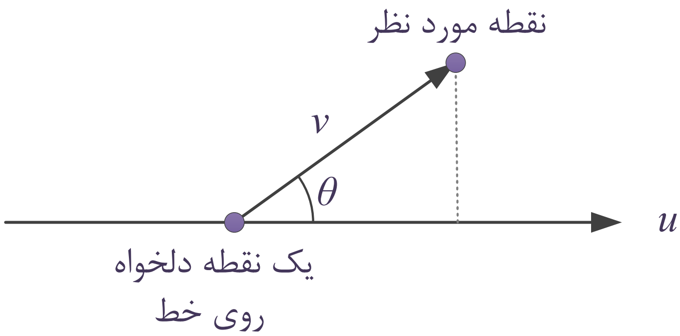
پاسخ: بردار مشخصه خط اول $(-1,-2,2)$ و بردار مشخصه خط دوم $(2,4,-4)$ است. همان طور که مشخص است، این دو بردارها مضربی از هم هستند. پس یا دو خط موازیند یا منطبق. اگر منطبق باشند باید همه نقاط روی یک خط بر خط دیگر هم وجود داشته باشد. به عنوان نمونه بررسی می‌کنیم آیا نقطه $(-1,3,-1)$ که روی خط اول قرار دارد، شرایط معادله خط دوم را برآورده می‌کند یا نه؟ با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\frac{-1-1}{2}\neq\frac{3-2}{4}\neq\frac{-1-3}{-4}$$

پس این دو خط فقط موازیند و منطبق نیستند.

۱.۷ فاصله نقطه از یک خط

دو روش برای تعیین فاصله یک نقطه از یک خط وجود دارد. در روش اول معادله پارامتری خط بر حسب t نوشته می‌شود و فاصله نقطه داده شده از خط به صورت تابعی از t بدست می‌آید. با انجام بهینه‌سازی و محاسبه کمینه تابع، فاصله نقطه از خط تعیین می‌شود. اما در روش دوم از روابط برداری برای یافتن فاصله استفاده می‌شود که محاسبات آن نسبت به روش قبل بسیار ساده‌تر است. در شکل ۷ یک نقطه دلخواه از خط انتخاب می‌شود و به نقطه داده شده متصل می‌شود. در این حالت یک بردار تشکیل می‌شود ($\vec{v}$). همچنین خط مورد نظر نیز با مشخصه برداری خودش ($\vec{u}$) نمایش داده شده است. با توجه به شکل،



شکل ۷: فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه از خط برابر است با

$$D = |\vec{v}| \sin\theta \tag{۲۱}$$

از رابطه ضرب خارجی می‌دانیم:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta \tag{۲۲}$$

با جایگذاری $\sin\theta$ از رابطه فوق:

$$D = |\vec{v}| \sin\theta = |\vec{v}| \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$D = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}|} \tag{۲۳}$$

مثال ۳۸ فاصله نقطه $(2,0,-1)$ را از خط $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ بدست آورید.

پاسخ: یک نقطه دلخواه روی خط، می‌تواند نقطه $(1,-3,-1)$ باشد. بردار $\vec{v}$ به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\vec{v}=(2,0,-1)-(1,-3,-1)=(1,3,0)$$

بردار مشخصه خط به صورت زیر است:

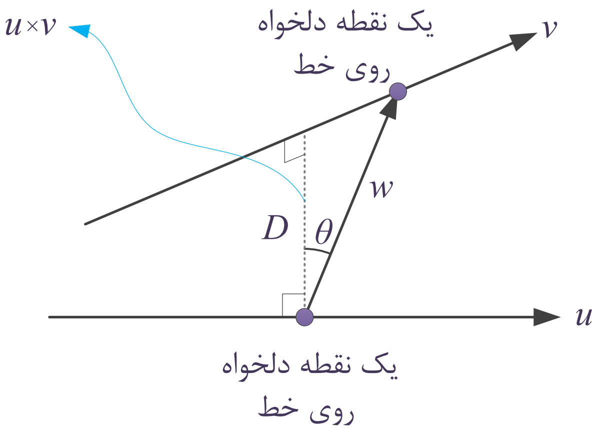
$$\vec{u}=(2,-1,-2)$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(6,-2,7), \quad \Rightarrow \quad |\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(6)^2+(-2)^2+(7)^2}=\sqrt{89}$$

$$\Rightarrow \quad D=\frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{89}}{3}$$

۲.۷ فاصله دو خط متنافر از هم

اگر دو خط متنافر دارای بردار مشخصه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ باشند، ضرب خارجی این دو بردار $(\vec{u}\times\vec{v})$ بر هر دو خط عمود است. مانند حالت قبل البته این بار یک نقطه از هر خط انتخاب نموده و به هم وصل می‌کنیم تا بردار $\vec{w}$ ایجاد شود. با توجه به شکل ۸ کوتاه‌ترین فاصله بین دو خط با D نمایش داده شده است.



شکل ۸: فاصله دو خط متنافر از هم

با توجه به شکل فاصله دو خط از هم برابر است با

$$D = |\vec{w}| \cos\theta \qquad (۲۴)$$

از رابطه ضرب داخلی می‌دانیم:

$$(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w} = |\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos\theta$$

با جایگذاری $\cos\theta$ از رابطه فوق:

$$D = |\vec{w}| \cos\theta = |\vec{w}| \frac{(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}}{|\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}|}$$

$$D = \frac{(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \qquad (۲۵)$$

مثال ۳۹ فاصله دو خط متنافر زیر را از هم بدست بیاورید.

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = 2y + 3 = 3z - 1 \\ \frac{x}{-3} = \frac{y-1}{3} = -z + 1 \end{cases}$$

پاسخ: بردارهای مشخصه این دو خط به صورت زیر هستند:

$$\vec{u} = (2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}), \qquad \vec{v} = (-3, 3, -1)$$

یک نقطه دلخواه روی خط اول $(0, -2, 0)$ و روی خط دوم $(0, 1, 1)$ می‌تواند باشد. بردار $\vec{w}$ به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\vec{w} = (0, 1, 1) - (0, -2, 0) = (0, 3, 1)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1.5, 1, 7.5), \quad \Rightarrow \quad |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-1.5)^2 + (1)^2 + (7.5)^2} = \sqrt{59.5}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w} = 10.5$$

$$\Rightarrow \quad D = \frac{(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{10.5}{\sqrt{59.5}}$$

۸ معادله صفحه در فضا

اگر فرض شود بردارهای $\vec{r_0}$ و $\vec{r}$ روی یک صفحه قرار گرفته باشند، آنگاه بردار $\vec{n}$ بر هر ترکیب خطی از $\vec{r_0}$ و $\vec{r}$ عمود است. یک ترکیب خطی این دو بردار می‌تواند $\vec{r}-\vec{r_0}$ باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{n}.(\vec{r}-\vec{r_0})=0 \tag{۲۶}$$

اگر $\vec{n}=(a,b,c)$، $\vec{r}=(x,y,z)$ و $\vec{r_0}=(x_0,y_0,z_0)$ فرض شود:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \tag{۲۷}$$

رابطه فوق را می‌توان به فرم زیر هم نوشت:

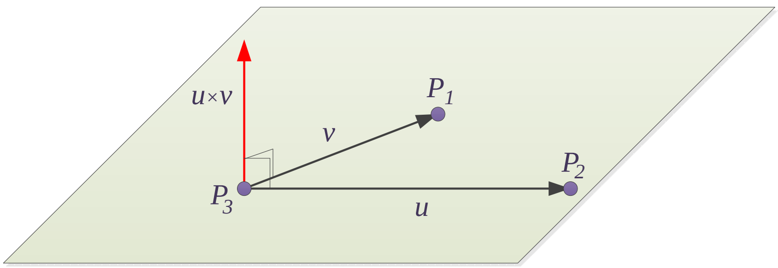
$$ax+by+cz=d \tag{۲۸}$$

نکته: در معادله خط، بردار مشخصه هم‌جهت با راستای خط بود، اما در معادله صفحه، بردار مشخصه عمود بر صفحه است که از آن با نام بردار عمود نیز یاد می‌شود.

مثال ۴۰ معادله صفحه‌ای را که از نقاط زیر عبور می‌کند تعیین کنید.

$$\vec{P_1}=(1,0,1),\quad \vec{P_2}=(-1,2,3),\quad \vec{P_3}=(0,1,-1)$$

پاسخ: با این سه نقطه می‌توان دو بردار در فضا ایجاد نمود. به شکل ۹ توجه شود. بردار عمود بر این دو بردار در جهت ضرب خارجی آن‌هاست و بردار عمود بر صفحه را تعیین می‌کند. بردارهای روی



شکل ۹: بردارهای ساخته شده از نقاط و بردار عمود بر صفحه

صفحه به صورت زیر هستند:

$$\vec{u}=\vec{P_3P_2}=\vec{P_3}-\vec{P_2}=(1,-1,-4),\quad \vec{v}=\vec{P_3P_1}=\vec{P_3}-\vec{P_1}=(-1,1,-2)$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(6,6,0), \quad \Rightarrow \quad a=6,\ b=6,\ c=0$$

معادله صفحه به صورت زیر است:

$$ax+by+cz=d, \quad \Rightarrow \quad 6x+6y=d$$

با جایگذاری یک نقطه مثلاً $\vec{P}_1$ در آن، پارامتر $d=6$ تعیین می‌شود. در نتیجه داریم:

$$6x+6y=6$$

یا با ساده کردن رابطه زیر بدست می‌آید:

$$x+y=1$$

مثال ۴۱ خط $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$، صفحه $x+2y-z=-5$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

پاسخ: معادله پارامتری خط در صفحه جایگذاری می‌شود و بعد از تعیین مقدار t، نقطه مورد نظر بدست می‌آید:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}=t, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=2t+3 \\ y=3t \\ z=-t-1 \end{cases}$$

جایگذاری در معادله صفحه:

$$x+2y-z=-5, \quad \Rightarrow \quad (2t+3)+2(3t)-(-t-1)=-5, \quad \Rightarrow \quad t=-1$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=0 \end{cases}$$

مثال ۴۲ زاویه بین دو صفحه $3x+2y+z=1$ و $-x+y+z=2$ را بدست آورید.

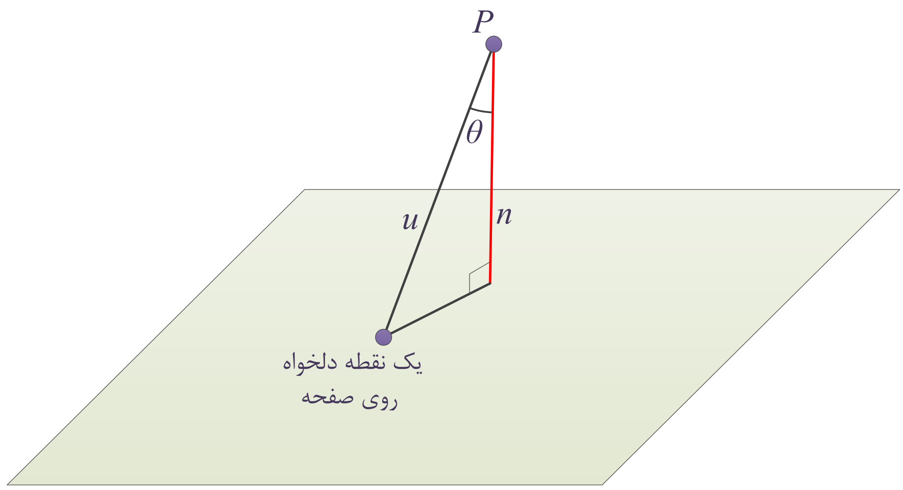
پاسخ: زاویه بین دو صفحه با زاویه بین بردار عمودهای آن‌ها برابرند، در نتیجه کافیست زاویه بین دو بردار عمود بر صفحه را بدست آوریم:

$$\vec{u}=(3,2,1), \qquad \vec{v}=(-1,1,1)$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{3}}=0, \qquad \Rightarrow \qquad \theta=90^\circ$$

۱.۸ فاصله یک نقطه از صفحه

با توجه به شکل ۱۰ اگر نقطه P به یک نقطه دلخواه روی صفحه وصل شود، بردار $\vec{u}$ ایجاد می‌گردد.



شکل ۱۰: فاصله نقطه از صفحه

بردار $\vec{n}$ نشان‌داده شده در شکل، بردار عمود بر صفحه است. فاصله نقطه P از صفحه با رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$D=|\vec{u}|\cos\theta \tag{۲۹}$$

از ضرب داخلی داریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{n}}{|\vec{u}||\vec{n}|}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$D=|\vec{u}|\cos\theta=|\vec{u}|\frac{\vec{u}.\vec{n}}{|\vec{u}||\vec{n}|}$$

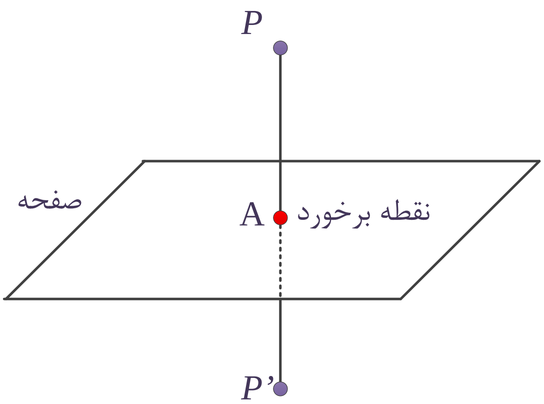
$$D = \frac{\vec{u}.\vec{n}}{|\vec{n}|} \qquad (۳۰)$$

اگر بردار عمود بر صفحه $\vec{n} = (a, b, c)$ و نقطه $\vec{P} = (x_1, y_1, z_1)$ و نقطه روی صفحه (x_0, y_0, z_0) باشد، آنگاه با جایگذاری اینها در رابطه (۳۰)، رابطه دیگری نیز برای D بدست می‌آید که در دبیرستان آموزش داده می‌شد:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (۳۱)$$

مثال ۴۳ قرینه نقطه $(7, -7, -3)$ نسبت به صفحه $2x - 2y - z = 4$ چه نقطه‌ای خواهد بود؟

پاسخ: براساس شکل زیر ابتدا خطی که دارای بردار مشخصه صفحه است و از نقطه داده شده عبور می‌کند را تعیین می‌کنیم. (قرینه نقطه نسبت به صفحه)



$$\frac{x-7}{2} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z+3}{-1}$$

این خط، صفحه مورد نظر را در یک نقطه قطع می‌کند:

$$2x - 2y - z = 4, \quad \Rightarrow \quad 2(2t+7) - 2(-2t-7) - (-t-3) = 4, \quad \Rightarrow \quad t = -3$$

نقطه برخورد $A = (1, -1, 0)$ است. نقطه برخورد بین دو نقطه P و P' قرار گرفته است:

$$A = \frac{P + P'}{2}, \quad \Rightarrow \quad P' = 2A - P = 2(1, -1, 0) - (7, -7, -3) = (-5, 5, 3)$$

۲.۸ فاصله دو صفحه موازی از هم

فرض کنید دو صفحه موازی با روابط زیر موجود هستند:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d_1=0 \\ ax+by+cz+d_2=0 \end{cases}$$

با جایگذاری یک نقطه از صفحه در رابطه (۳۱) داریم:

$$ax_1+by_1+cz_1=-d_1$$

در نتیجه رابطه (۳۱) برای دو صفحه موازی تبدیل به رابطه زیر می‌شود:

$$D=\frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{۳۲}$$

۳.۸ وضعیت نسبی خط و صفحه نسبت به هم

سه حالت برای وضعیت نسبی خط و صفحه وجود دارد.

- خط، صفحه را قطع می‌کند. (جواب یکتا)
- خط موازی صفحه است. (بدون جواب)
- خط منطبق بر صفحه است. (بی‌نهایت جواب)

۹ تمرین

۱. نقاط $P=(-2,4,0)$، $Q=(0,1,2)$ و $R=(2,2,-3)$ مفروضند.

الف- برداری که از اتصال P به Q تولید می‌شود را بدست آورید.

ب- برداری که از اتصال P به R تولید می‌شود را بدست آورید.

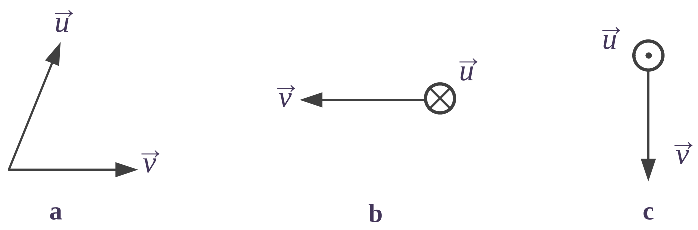
ج- برداری با طول واحد و عمود بر صفحه شامل سه نقطه P، Q و R بدست آورید.

۲. اگر بردار $(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ با فرض $\vec{a}=(-1,\alpha,1)$ و $\vec{b}=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},2)$ موازی بردار $\vec{c}=-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ باشد، مقدار α را تعیین کنید.

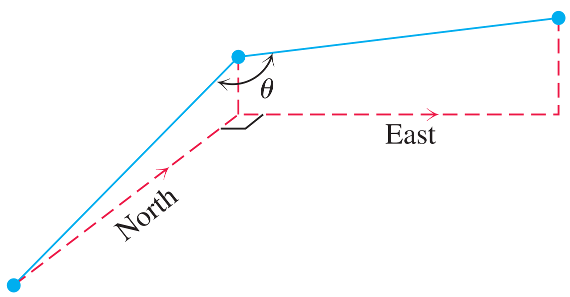
۳. با فرض $|3\vec{u}-2\vec{v}|=7$ و $|3\vec{u}+2\vec{v}|=1$، ضرب داخلی دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را تعیین کنید.

۴. اگر $\vec{v}=\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ و $\vec{v}.\vec{w}=3$ باشد، زاویه بین $\vec{v}$ و $\vec{w}$ را بدست آورید.

۵. جهت بردار $\vec{v}\times\vec{u}$ را در شکل‌های زیر تعیین کنید.



۶. یک مسیر لوله آب از دو قطعه تشکیل شده است که با شیب $18°$ در جهت شمال و $9°$ در جهت شرق نصب شده‌اند. زاویه بین دو قطعه چند درجه است؟



۷. حجم متوازی‌السطوح تشکیل یافته از بردارهای $\vec{a} = (1, 2, \beta)$، $\vec{b} = (-1, 0, \beta)$ و $\vec{c} = (-3, 2, 4)$ برابر با 12 واحد است. مقدار پارامتر β را بدست آورید.

۸. بعد و بردارهای پایه فضای تولیدشده توسط بردارهای زیر را بیابید.

$$\vec{u_1} = (1, -1, 3, 2)$$
$$\vec{u_2} = (1, 1, 5, 1)$$
$$\vec{u_3} = (0, -6, 6, -3)$$
$$\vec{u_4} = (1, -3, 1, 3)$$

۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $A^8 - 6A^7 + 38A^6 + A^3 - 6A^2 + 40A - 3I$ را بدست آورید.

۱۰. اگر بردار $(1, -2, a, b)$، ترکیب خطی از بردارهای $(-2, 0, 1, 1)$ و $(-3, 2, -1, 0)$ باشد، مقدار a و b را بدست آورید.

۱۱. خط $\frac{2z+3}{-1} = \frac{y-2}{4} = \frac{x+2}{3}$ با صفحه $-x + y - 2z = -1$ چه وضعیتی دارد (موازی یا متقاطع یا منطبق)؟ در صورت وجود جواب، آن را بدست اورید.

۱۲. قرینه نقطه $(1, -1, 0)$ نسبت به صفحه $x - y - 3z = 13$ چه نقطه‌ای خواهد بود؟

۱۳. فاصله دو خط متنافر $\frac{z-1}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{x-1}{-2}$ و $y = -4, \ z = -7$ را بدست آورید.

۱۴. معادله صفحه‌ای را که دو خط $x = 0, \ z = 0$ و $\frac{y}{3} = \frac{z-1}{-2}, \ x = 0$ روی آن قرار دارند تعیین کنید.

آنکه می‌تواند، انجام می‌دهد، آنکه نمی‌تواند انتقاد می‌کند.

جرج برنارد شاو