

تجزیه و تحلیل سیلنال ها و سیستم ها :

بخش های عمده : - تقریب سیلنال

- انواع سیلنال ها

- سیلنال های پیوسته در زمان

- سیلنال های ناپیوسته در زمان

- سیلنال های حقیقی و غیر حقیقی متغیر با زمان

- جمع کانونوس

- تبدیل فوری

- سری فوری

برای یافتن و شناسایی کاربرد سیستم های مختلف می توان قبل آن سیستم را استخراج نمود.

سیستم محرک های از اجهان و اجزاء مختلف می باشد برای رسیدن به هدف و نتیجه ریاضی با هم تامل می نمایند.

هدف از تجزیه و تحلیل سیلنال ها عبارتند از :

1. استخراج روابط بین ورودی و خروجی سیستم ها (التر به صورت روابط ریاضی)

2. شبیه سازی سیستم ها برای کامپیوتر به طوری که بتوان خروجی های مربوط به ورودی های دلفرا را بدست آورد

در نتیجه قبل از ساخته شدن فیزیکی سیستم می توان روش های بهبود آن را بدست آورد.

پس برای تجزیه و تحلیل و شبیه سازی سیستم باید :

1. ابتدا پدیده فیزیکی مورد نظر را به طور کامل شناسایی و کاربرد آن را بفهمیم.

2. روابط فیزیکی و ریاضی صحیح را بین اجزاء مختلف سیستم بدست آوریم.

3. این روابط را بر روی کامپیوتر پیاده سازی نموده و خروجی های مختلف را به ازای ورودی های مختلف بدست آوریم.

4. نظرات اصلاحی برای سیستم را استخراج و تغییرات لازم را برای بهبود آن در آن وارد می کنیم.

سینال و تعریف آن :

سینال یک پدیده ریاضی است که حاوی اطلاعات از یک پدیده فیزیکی می باشد. این سینال حمل است تابعی از چند متغیر مستقل باشد.
در حقیقت سینال نوعی خبر است که اطلاعاتی در مورد پدیده فیزیکی مورد نظر ارائه می کند.
مثل سینال صوت که نوعی اطلاعات شده در هوای اطراف دهان می باشد.

انواع سینال ها :

Deterministic signal

- سینال های معین

Random signal

- سینال های تصادفی

انواع سینال ها :

continuous time signal

- پیوسته در زمان

Discrete time signal

- گسسته در زمان

Digital signals

- رقمی (دیجیتال)

سینال های معین :

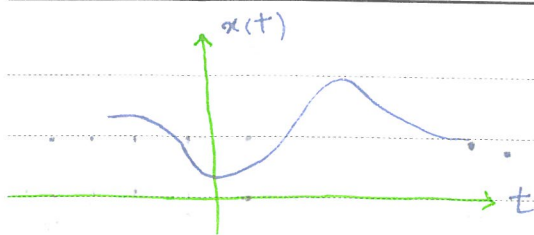
این سینال ها توسط یک رابطه ریاضی یا نمودار و یا یک جدول قابل بیان هستند. مثل رابطه بین نیروی وارده به یک جسم به جرم m و شتاب آن به صورت $F = ma$.

سینال های تصادفی :

این سینال ها با یک رابطه ریاضی قابل بیان نمی باشند در نتیجه برای بیان سینال های تصادفی از توابع احتمال و روش های آماری استفاده می کنیم. مثل پدیده خفیه در سیستم های خنابراهی که خفیه پدیده تصادفی است و با رابطه ریاضی قابل بیان نمی باشد.

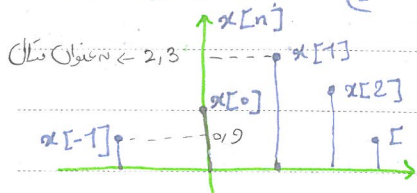
سینال های پیوسته در زمان :

متغیر مستقل این سینال ها، مقادیر پیوسته ای را اتخاذ می کند، متغیر مستقل سینال ها معمولا زمان است و



سیگنال را با $x(t)$ نشان می دهند.
مثلاً سیگنال های صوتی در حوزه سیگنال های پیوسته می باشند.

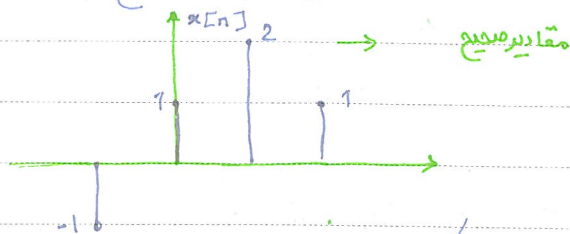
سیگنال های لگسسته زمان:
سیگنال هایی هستند که متغیر مستقل آن ها مقادیر لگسسته ای را اتخاذ می کنند، در این صورت محور افقی یا زمان را با n نشان می دهند. سیگنال را با $x[n]$ نشان می دهند. هر چند زمان های لگسسته می توانند صحیح یا کسری باشند، ولی فاصله ای بین زمان ها باید یکنواخت باشد. در این صورت می توان مقادیر n را به صورت اعداد صحیح، مثبت و منفی فرض نمود.



در این صورت دافنه سیگنال ها $x[0]$ ، $x[1]$ ، ... می توانند مقادیر حقیقی (غیر صحیح) باشند.

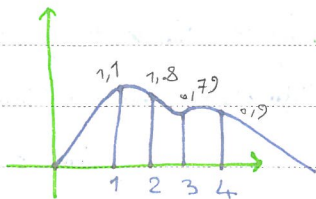
❓ حواص: مقادیر $x[n]$ بین اعداد صحیح n تعریف نشده اند و نباید آن ها را به خطا، صفر، فرض نمود.

سیگنال های دیکتال:
حالت خاصی از سیگنال های لگسسته هستند که دافنه آن ها یعنی $x[0]$ ، $x[1]$ ، ... نیز مقادیری صحیح می باشند.
سیگنال رویه و ولتاژی هم مقدار دافنه می باشد. سیگنال بسته ای می باشد، در حالت کلی اگر سیگنال دارای m سطح لگسسته باشد آن سیگنال را سیگنال M ای ($M = \text{arg}$) نامند.

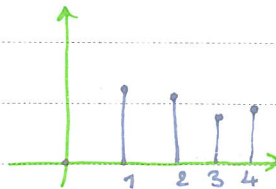


binary: سیگنال دوسطی
ternary: سیگنال سه سطی
 M -ary: سیگنال M سطی

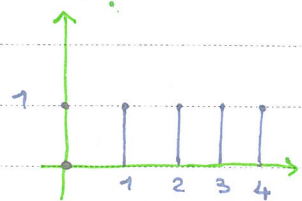
تبدیل سیگنال لگسسته به دیجیتال:
اگر از سیگنال پیوسته در زمان های مختلف $n = 1, 2, \dots$ نمونه گیری نماییم، سیگنال لگسسته بدست می آید.



سینال پیوسته

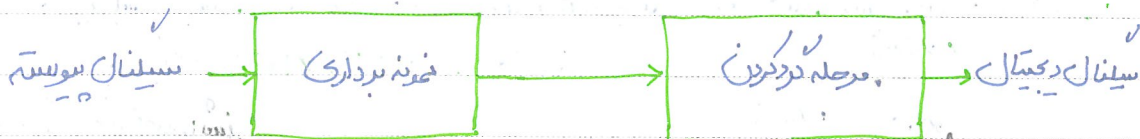


سینال نمونه



سینال دیجیتال

در سطح هر نمونه، رابطه نزدیک ترین سطح معتبر در سینال دیجیتال تبدیل می‌شود. سینال حاصل را، سینال دیجیتال کوانتیزه می‌نامیم.



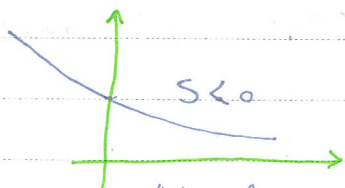
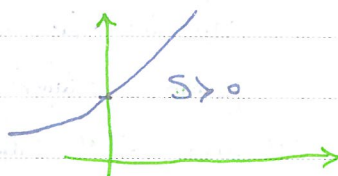
عمل گرد کردن را **Quantizing** یا **rounding** نامیده باشند. ایجاد خطا در سیستم می‌رود، ولی چون می‌خواهیم با کامپیوتر کار کنیم، ناچار به استفاده از آن می‌باشیم.

چند سینال مهم پیوسته در زمان:

1. سینال نمایی منفی:

در مقدار حقیقی باشد، $x(t)$ یا فزاینده است یا کاهنده.

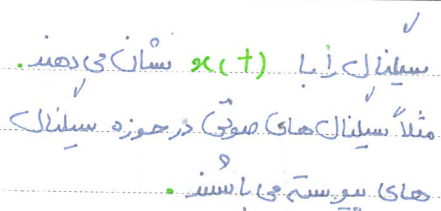
در حالت منفی فاصله $\rightarrow$
 $x(t) = ce^{st}$
عدد حقیقی و ثابت



در s مقداری زوجی باشد، مثلاً $s = j\omega$ در این صورت:

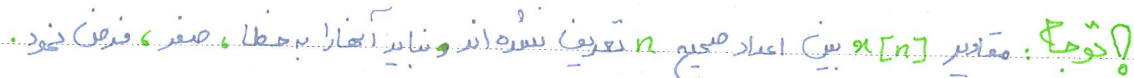
$$\begin{cases} x(t) = ce^{j\omega t} \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_s} \end{cases}$$

سینال $x(t)$ تناوبی با دوره تناوب T_s می‌باشد زیرا:



سینال‌هایی هستند که متغیر مستقل آن‌ها مقادیر سیستمی را آنجا ذخیره کنند. در این صورت محور افقی یا زمان را با n نشان می‌دهند و سینال را با $x[n]$ نشان می‌دهند. هر چند زمان‌های سیستم می‌توانند صحیح نباشند، ولی فاصله‌ی بین زمان‌ها باید یکنواخت باشد. در این صورت می‌توان مقادیر n را به صورت اعداد صحیح، مثبت و منفی فرض کرد.

در این صورت دافعه سینال‌ها $x[0]$ ، $x[1]$ ، و ... می‌توانند مقادیری حقیقی (غیر صحیح) باشند.



حالت خاصی از سیگنال های نسبت به هم هستند و اینها یعنی $x[0]$ و $x[1]$ و ... نیز مقادیری صحیح می باشند.

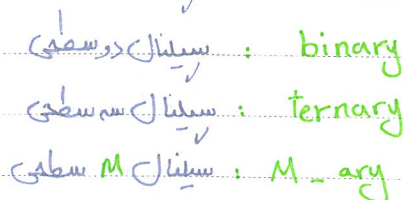
سیگنال بدیهه روند دارای سه مقدار دافنه می باشد را سیگنال

بدیهه ای می نامند. در حالت کلی اگر سیگنال دارای m سطح

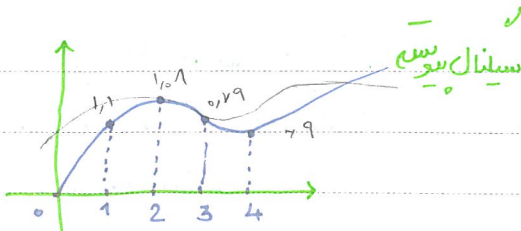
است. با سه آن سیگنال را M تایی (M - تایی)



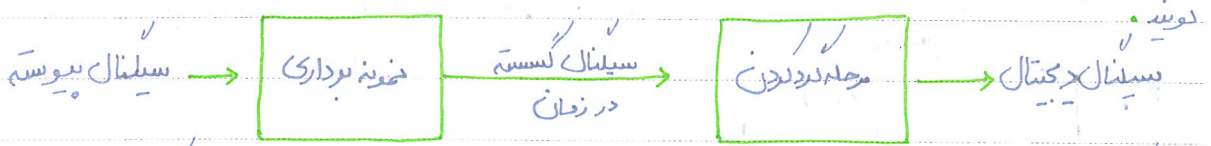
مقادیر صحیح



الدرج n سیلنل پیوسته در زمان های مختلف $n = 1, 2, \dots$ پیوسته نیا اسم، سیلنل (سیستم بدست می آید).



اگر سطح هر نمونه را به نزدیک ترین سطح مقیاس در سیگنال دیجیتال تبدیل کنیم، سیگنال حاصل را، سیگنال دیجیتال



عمل محدود کردن را Quantizing & rounding نامیده بابت ایجاد خطا در سیستم می گردد، ولی چون می خواهیم با کمترین کار کنیم، ناچار به استفاده از آن می باشیم.

چند سیگنال مهم پیوسته در زمان :
1. سیگنال نمایی مختلط :
اگر مقدار σ مثبت باشد، $x(t)$ فزاینده است و یا کاهشدهنده در حالت منفی مختلط :
 $x(t) = Ce^{\sigma t}$ ← عدد حقیقی و ثابت



اگر S مقدار کمتری باشد، مثلاً $S = j\omega_0$ در این صورت

$$x(t) = Ce^{j\omega_0 t}$$

با دوره تناوب T_0

$$x(t) = Ce^{j\omega_0 (t+T_0)} = Ce^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T_0} = Ce^{j\omega_0 t} e^{j2\pi}$$

سیگنال $x(t)$ تفاوتی نمی باشد زیرا :

$$e^{j\omega_0 T_0} = e^{j2\pi} = 1$$

بنابراین :

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

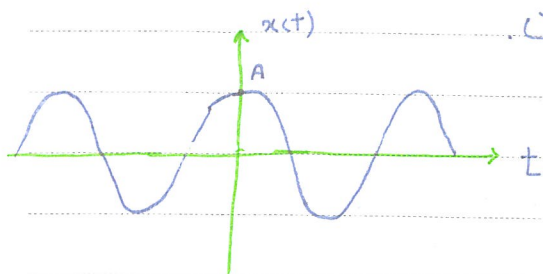
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

↑ فاز
↑ فرکانس زاویه‌ای
↓ دامنه

2. سیگنال سینوسی.

A ، ω_0 و θ هر سه مقداری حقیقی هستند.

این سیگنال نیز متناوب با دوره تناوب اصلی $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ است.



اما از رابطه اولی داریم:

$$\begin{cases} e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t \\ e^{-j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t \end{cases} \Rightarrow \cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{j2}$$

$$A \cos(\omega_0 t + \theta) = A \frac{e^{j(\omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta)}}{2} =$$

پس:

$$\frac{A}{2} \left[e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\theta} + e^{-j\omega_0 t} \cdot e^{-j\theta} \right]$$

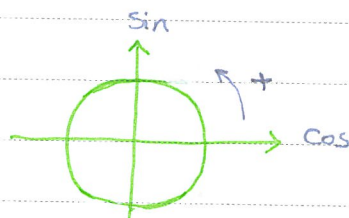
از طرفی:

$$\text{Re} [e^{j\omega_0 t}] = \cos \omega_0 t \Rightarrow \text{Re} [e^{j(\omega_0 t + \theta)}] = \cos(\omega_0 t + \theta)$$

برخی روابط مهم مثلثاتی:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha - 90^\circ)$$

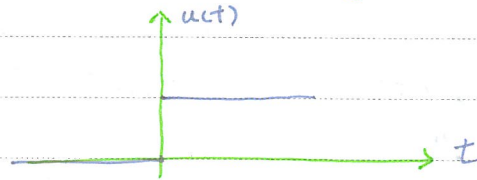
$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \cos(-\alpha) \\ \sin(\alpha) = -\sin(-\alpha) \end{cases}$$



$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

3. سیگنال پله واحد unit step signal

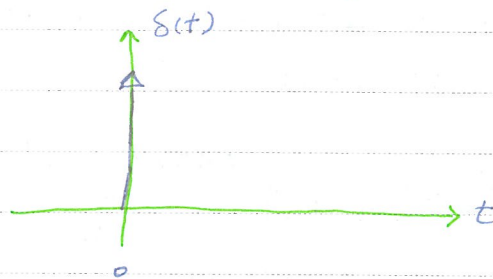
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



علاوه بر این تابع فانتزی دارد. نویسنده خاطرنشان است که در لحظه صفر در رسم می شود و برای مدت طولانی روشن می ماند.

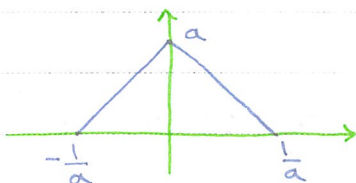
4. سیگنال ضربه واحد unit impulse signal

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 \end{cases}$$

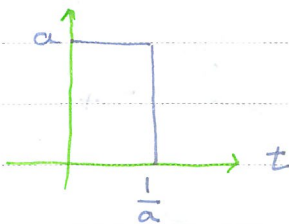


بیان های مختلف تابع ضربه:

الف: تابع ضربه به صورت مثلث زیر و فوقی $a \rightarrow \infty$



$$S \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{a} \times a \right) = 1$$



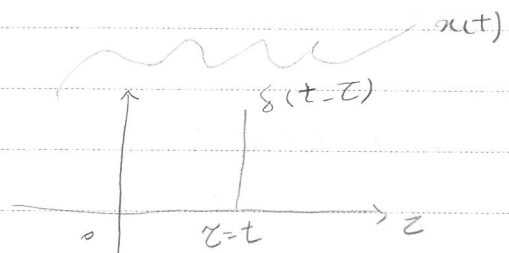
$$S \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \left(a \times \frac{1}{a} \right) = 1$$

ب:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$$

$$x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) d\tau = 1$$



$$x(t) \delta(t-t_0) = x(t_0) \delta(t-t_0)$$

?

0

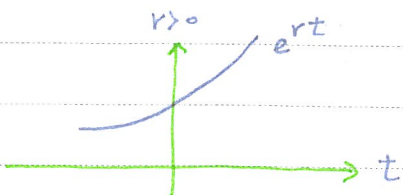
$$x(t) = c e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$$

5. سیگنالهای سینوسی:

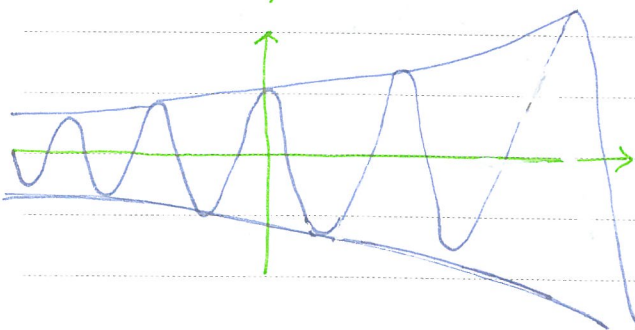
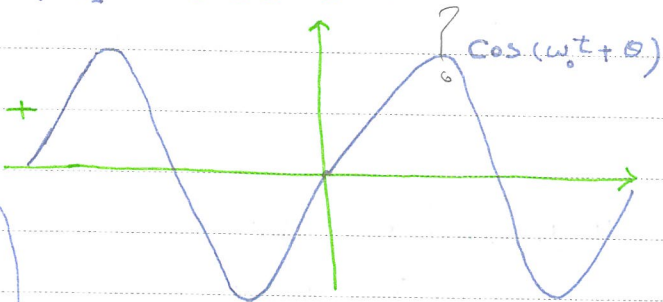
* c, r, ω_0, θ مقادیر ثابت، حقیقی هستند.

$r > 0$

e^{rt}

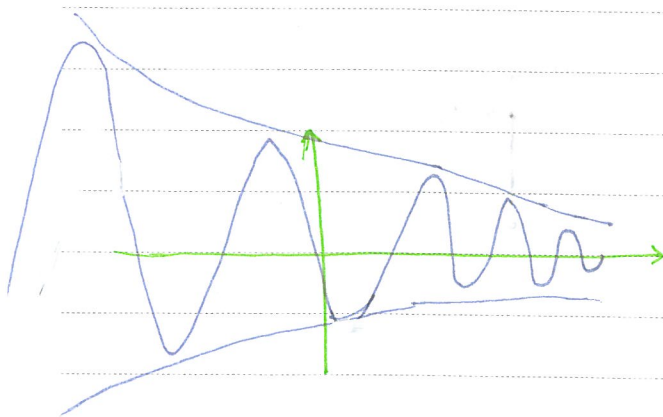
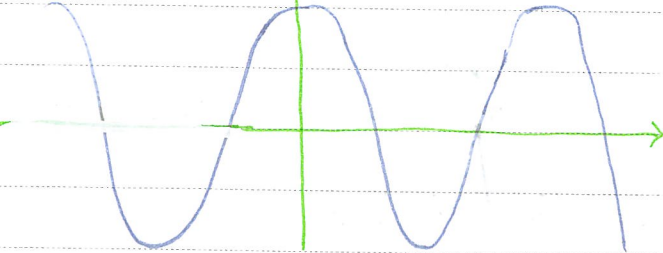
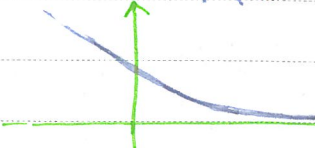


$\cos(\omega_0 t + \theta)$

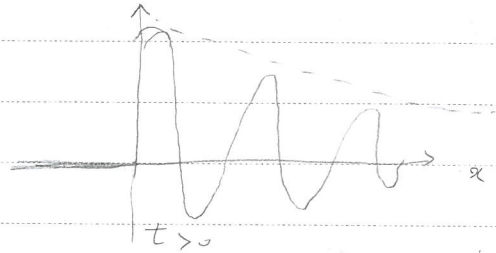


e^{rt}

$r < 0$



$$x(t) = e^{rt} \cos(\omega_0 t + c) u(t)$$



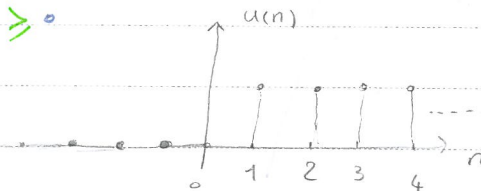
سیگنال های سیستم در زمان:

در این سیگنال ها فرض می کنیم که مقادیر تابع در نقاط صحیح (....., 2 و 1 و 0 و 1 و 2 و 3 و ...) وجود دارند.

1. دنباله یه واحد:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

متغیر مستقل تابع را با n نشان می دهیم.

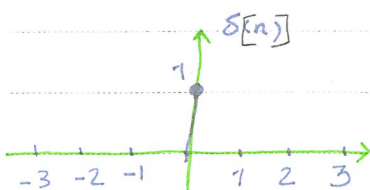


$$u[n] = 1, 1, 1, \dots$$

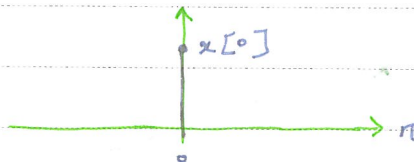
چون دنباله ای از یک ها است به آن دنباله یه واحد می گویند.

2. دنباله فیلد واحد: (تابع ضربه واحد)

تغییر در مقدار دارای مقدار واحد است و با $\delta[n]$ نشان داده می شود.

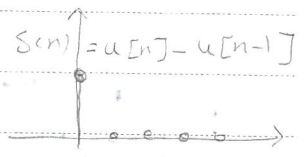
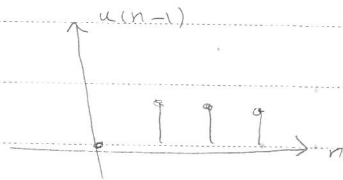
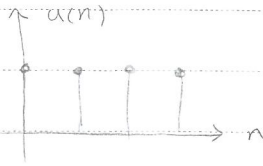


$$x[n] \delta[n] = x[0] \delta[n]$$



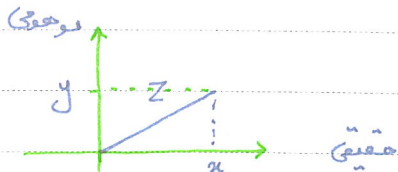
$$\Rightarrow f[n] \cdot \delta[n] = f[0] \delta[n]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



3. دنباله‌های مختلط (مجموعی).

رابطه اصلی اعداد مختلط (مجموعی): $z = x + jy = re^{j\theta}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$



$$j^2 = -1$$

اولی: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

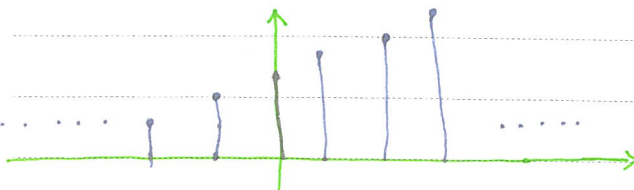
$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \\ \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \end{cases}$$

فاز و زاویه

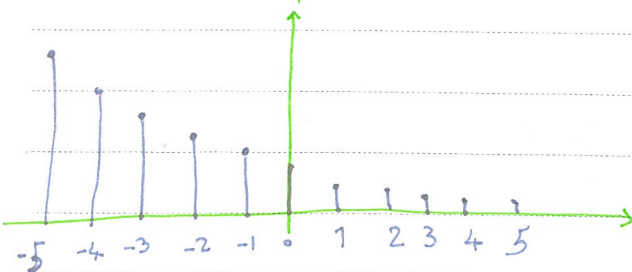
$$x[n] = A z^n$$

در حالت کلی z یک عدد مختلط است: $z_0 = r_0 e^{j\theta_0}$

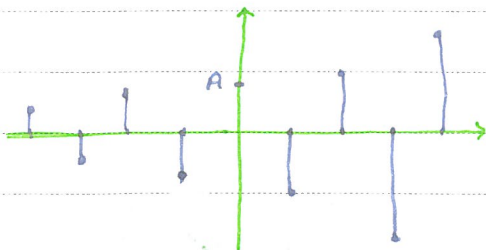
اما در حالت خاص z می‌تواند یک عدد حقیقی باشد. در این حالت اگر $z > 1$ باشد:



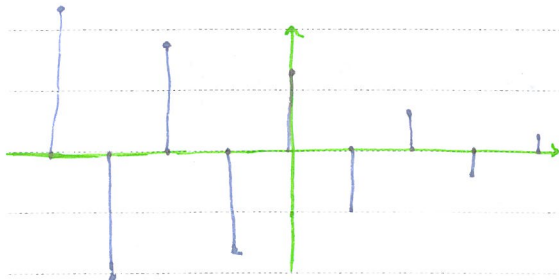
و همچنین اگر $0 < z < 1$:



✓ حقیقی $\rightarrow$ والد $z_0 < 0$ و $|z_0| > 1$ بر حسب زوج و یا فرد بودن n مقدار $x[n]$ مثبت یا منفی می شود و قدر مطلق دایم افزایشی است.



✓ حقیقی $\rightarrow$ والد $z_0 < 0$ و $|z_0| < 1$



✓ حال اگر بجای z_0 مقدار آنرا در تابع قرار دهیم، داریم:

$$x[n] = A r_0^n e^{j n \Omega_0}$$

$$x[n] = A r_0^n [\cos[n \Omega_0] + j \sin[n \Omega_0]]$$

پس $x[n]$ در حالتی که تابع سینوسی با دامنه A و فرکانس زاویه ای Ω_0 و فاز φ می باشد و می توان آنرا بصورت زیر نوشت:

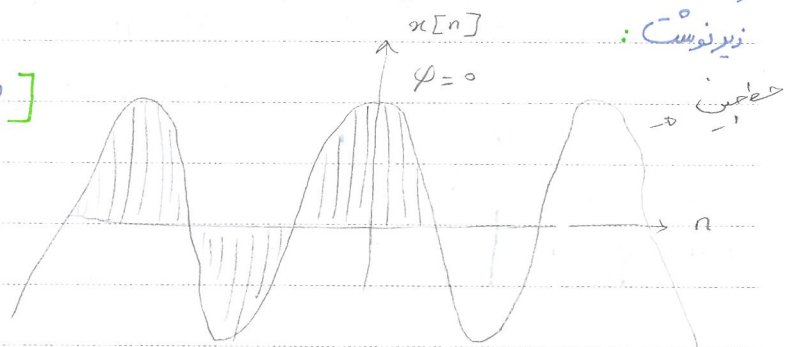
$$x[n] = A \cos[\omega_0 n + \varphi]$$

$$x[0] = A \cos[\varphi]$$

$$x[1] = A \cos[\omega_0 + \varphi]$$

$$x[-1] = A \cos[-\omega_0 + \varphi]$$

⋮
⋮
⋮



تابع $x[n]$ فا در حالتی که متناوب با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ می باشد.

Example: $x[n] = \cos \frac{\pi n}{5} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10 \Rightarrow$ عدد دوری

پس برای تابع فوق $T=10$ (دوره تناوب اصلی) می باشد و $10m$ (m اعداد صحیح) هم می تواند دوره تناوب تابع فوق باشد.

Example: $x[n] = \cos \frac{7\pi n}{36} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{7\pi}{36}} = \frac{72}{7} \Rightarrow$ عدد دوری

Example: $x[n] = \cos \frac{n}{5} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{5}} = 10\pi \Rightarrow$ این عدد دوری نیست
نمایر این $\cos \frac{n}{5}$ تابع متناوب می باشد.

خاصیت دنباله سینوسی و یا در حالت کلی دنباله نمایی: $e^{j\Omega_0 n}$

الف: این دنباله بر حسب Ω_0 متناوب و یا دوره تناوب اصلی 2π است.
 $e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} \stackrel{?}{=} e^{j\Omega_0 n}$

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} \cdot e^{j2\pi n} = e^{j\Omega_0 n}$$

$$e^{j2\pi n} = \cos 2\pi n + j \sin 2\pi n = 1$$

ب. تابع $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ بر حسب n انتزاعی $\frac{2\pi}{\omega_0}$ عددی و یا باشد. تابعی متناوب است: (دوره تناوب N)

$$\begin{cases} e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} & 1 \\ e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} \cdot e^{j\Omega_0 N} & 2 \end{cases}$$

برای سلی 1 و 2 باید $e^{j\Omega_0 N} = 1$ باشد.

$$e^{j\Omega_0 N} = 1 = e^{j2\pi m} = \cos 2\pi m + j \sin 2\pi m$$

$$\Omega_0 N = 2\pi m \Rightarrow \boxed{\frac{N}{m} = \frac{2\pi}{\Omega_0}} \Rightarrow N = \frac{2\pi}{\Omega_0} \times m$$

دوره تناوب اصلی $N = \frac{2\pi}{\Omega_0}$

$$x[n] = \cos 2\pi \frac{6}{30} n$$

Example

$$T_0 = 2\pi \frac{6}{30}$$

$$N = \frac{2\pi}{T_0} \times m = \frac{2\pi}{2\pi \frac{6}{30}} \times m = 5m$$

$$N = 5 \rightarrow \text{دو سیگنال اصلی}$$

تبدیل متغیر مستقل:

$$f: x \rightarrow y$$

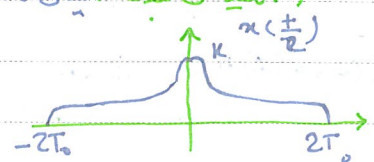
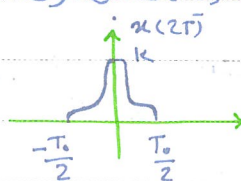
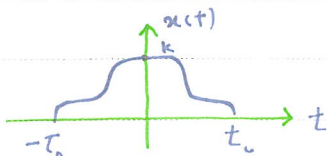
$$x: t \rightarrow x(t) \quad \text{متغیر تابع}$$

$$x: n \rightarrow x[n]$$

تبدیل متغیر مستقل

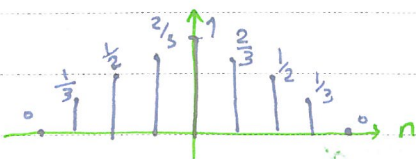
برای متغیرهای پیوسته:

1. مقیاس بندی: یعنی منبسط و یا منقبض کردن سیگنال



توجه: این خاصیت برای دنباله‌های گسسته نیز برقرار است اما $x[\frac{1}{a}n]$ و $x[an]$ وقتی قابل تعریف است که a عددی صحیح باشد. یعنی $x[\sqrt{2}n]$ نیست

Example: $x[\frac{1}{2}n]$ و $x[2n]$ را بدست آوریم اگر $x[n]$ به صورت زیر باشد.



$$n = \dots, 0, 1, 2, 3, 4, -1, -2, -3, \dots, -4$$

$$n = 0 \rightarrow x[2n] = x[0] = 1$$

$$n = 1 \rightarrow x[2n] = x[2] = \frac{1}{5}$$

$$n = 2 \rightarrow x[2n] = x[4] = 0$$

$$n = 3 \rightarrow x[2n] = x[6] = 0$$

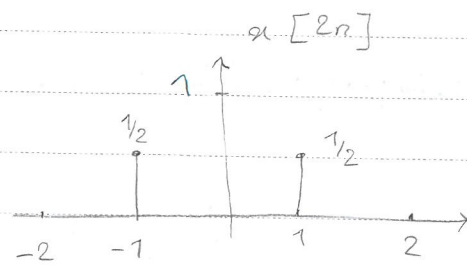
$$n = 4 \rightarrow x[2n] = x[8] = 0$$

$$n = -1 \rightarrow x[2n] = x[-2] = \frac{1}{2}$$

$$n = -2 \rightarrow x[2n] = x[-4] = 0$$

$$n = -3 \rightarrow x[2n] = x[-6] = 0$$

$$n = -4 \rightarrow x[2n] = x[-8] = 0$$



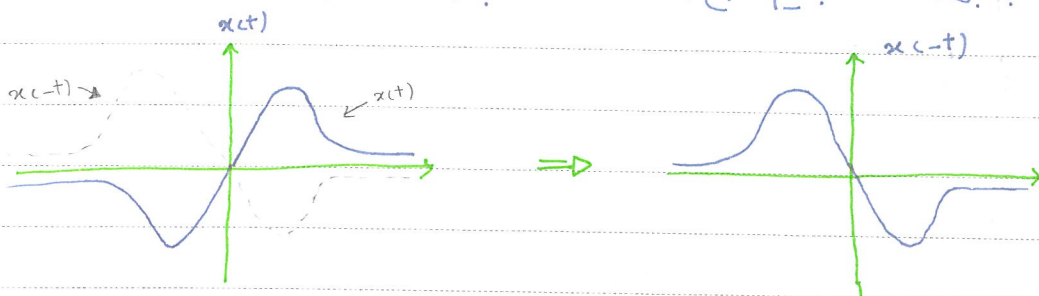
نوعی سیگنال درایع اصلی و محدود دارد $N = 4$ است

زمانی که سیگنال محدود دارد

دوره یایع $x[2n]$ برابر $\frac{4}{2} = 2$ است

انعکاس حول مبدأ

برای تابع $x(t)$ به دنبال $x(-t)$ می باشیم، تابع $x(-t)$ تقارن نسبت به محور عمودی می باشد.

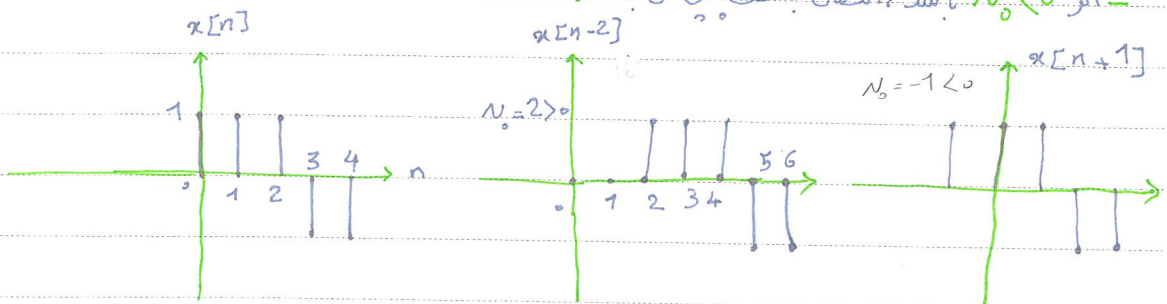


انتقال:

برای دنباله $x[n]$ انتقال یافته آن به اندازه N_0 $x[n - N_0]$ می باشد که دو حالت داریم:

- اگر $N_0 > 0$ باشد انتقال به سمت راست است

- اگر $N_0 < 0$ باشد انتقال به سمت چپ می باشد.

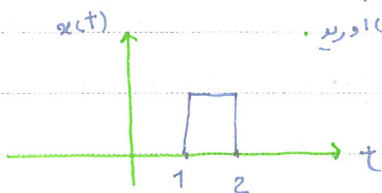


تبدیل متغیر مستقل در حالت کلی:

می‌خواهیم از روی تابع $x(t)$ تابع $x(at+b)$ را بدست آوریم، که a و b مقدار حقیقی و ثابت می‌باشند. این کار به ترتیب در مراحل زیر انجام می‌شود:

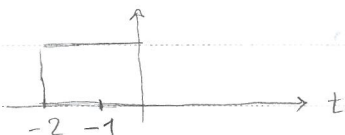
- 1: ابتدا با انتقال $x(t)$ به اندازه b تابع $x(t+b)$ را بدست می‌آوریم.
- 2: تابع حاصله، یعنی $x(t+b)$ را با مقدار a مقیاس بندی می‌کنیم.
 2. الف: اگر $a > 1$ باشد، سیگنال منقبض می‌شود.
 2. ب: اگر $a < 1$ باشد، سیگنال منبسط می‌شود.
 - 3: اگر $a < 0$ باشد، سیگنال حاصله را منعکس می‌کنیم.

Example: اگر $x(t)$ به صورت زیر باشد $x(2t+3)$ و $x(-3t+2)$ را بدست آوریم.

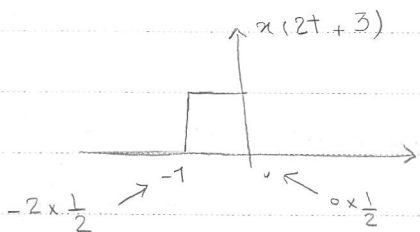


حل: ابتدا $x(2t+3)$ را بدست می‌آوریم.

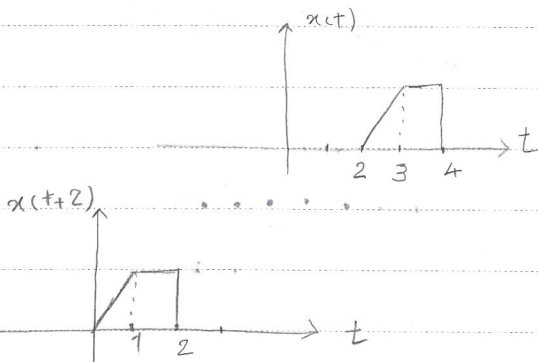
مرحله 1: ابتدا چون $N_0 = -3$ است پس انتقال به سمت چپ صورت می‌گیرد.



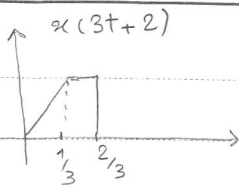
مرحله 2: $a = 2 > 1$



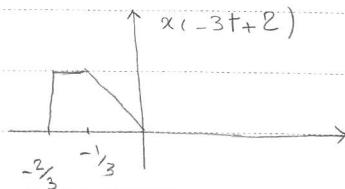
رسم $x(-3t+2)$



مرحله اول: انتقال به سمت چپ به اندازه 2:

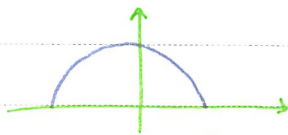


مرحله دوم: مقیاس بندی به اندازه 3



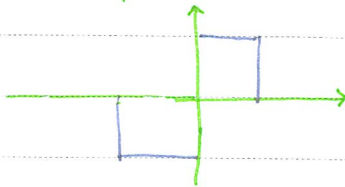
مرحله سوم: انعکاس به دلیل علامت منفی در ضرب t .

چند تعریف مستر-بین سیگنال های لسته و پیوسته:



$$x(t) = x(-t)$$

← سیگنال $x(t)$ است اندر



$$x(t) = -x(-t)$$

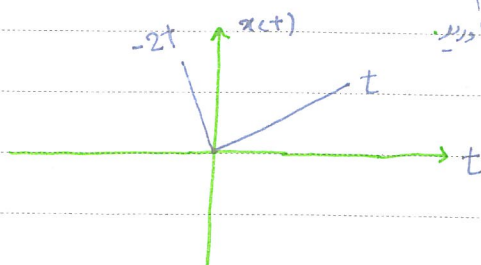
← سیگنال $x(t)$ فرد است اندر :

هر سیگنال دلخواه را می توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت.

$$x(t) \text{ قسمت زوج} = ev[x(t)] = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x(t) \text{ قسمت فرد} = od[x(t)] = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

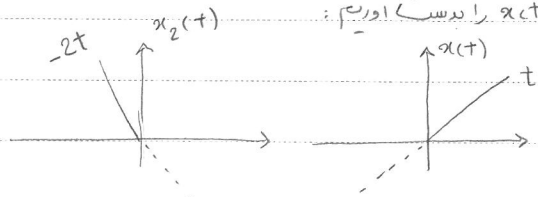
$$x(t) = ev[x(t)] + od[x(t)]$$



Example: قسمت های زوج و فرد سیگنال های زیر را بدست آورید.

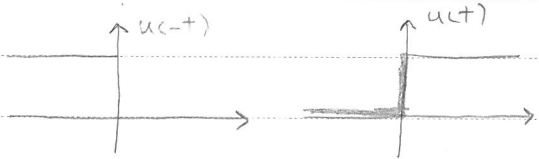
ابتداءً بـ معادلة $x(t)$ ، لا بدسب (أولاً):

$$x(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ -2t & t < 0 \end{cases}$$



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = t u(t) + (-2t) u(-t)$$



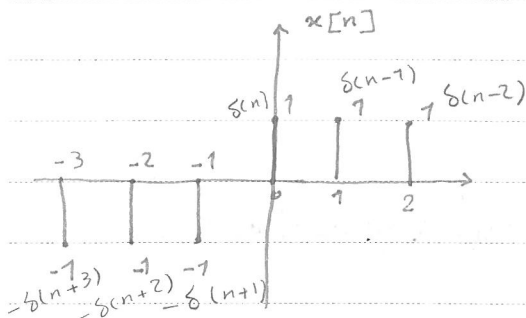
$$ev \{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{t u(t) - 2t u(-t) - t u(-t) + 2t u(t)}{2}$$

$$ev \{x(t)\} = \frac{3t u(t) - 3t u(-t)}{2}$$

$$x_e(t) = \frac{3}{2} (t u(t) - t u(-t))$$

$$od \{x(t)\} = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \Rightarrow x_o(t) = \frac{t u(t) - 2t u(-t) + t u(-t) - 2t u(t)}{2}$$

$$x_o(t) = \frac{-t u(t) - t u(-t)}{2} \Rightarrow x_o(t) = -\frac{t}{2} \underbrace{\{u(t) + u(-t)\}}_1 = -\frac{t}{2}$$



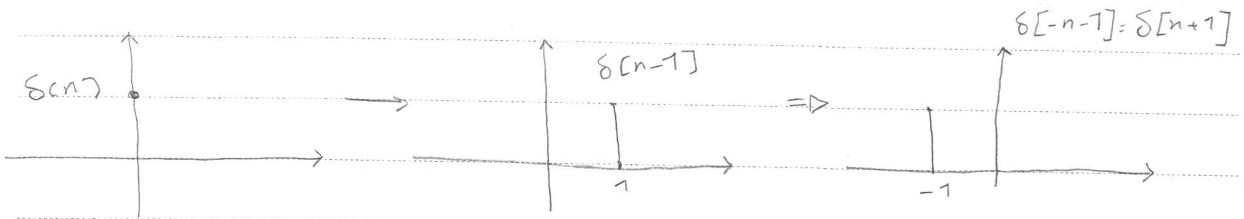
$$x[n] = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) - \delta(n+1) - \delta(n+2) - \delta(n+3)$$

$$x[-n] = \delta[-n] + \delta[-n-1] + \delta[-n-2] - \delta[-n+1] - \delta[-n+2] - \delta[-n+3]$$

$$\leftarrow \delta[n] = \delta[-n] \quad \text{لأن } \delta[n] \text{ زوج، إذن}$$

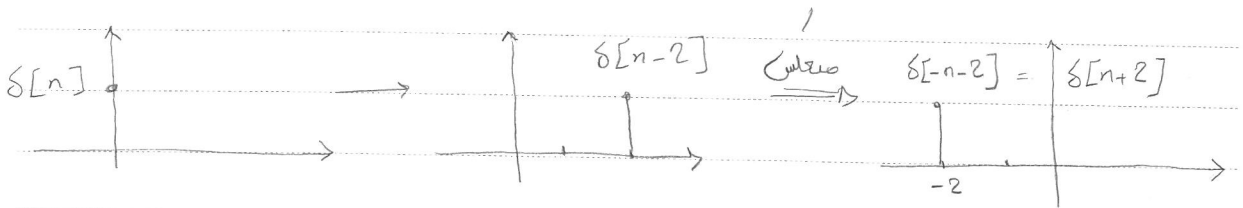
$$\delta[n] = \delta[-n]$$

$$\delta[n-1] = ?$$

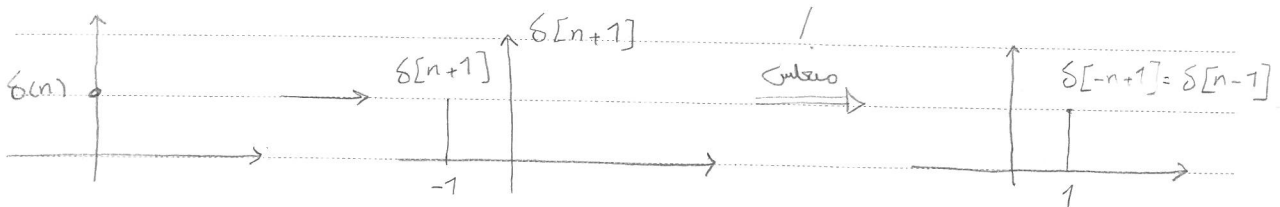


نمایند می توان به جای $\delta[-n-1]$ عبارت $\delta[n+1]$ قرار داده می شود.

$$\delta[-n-2] = ?$$



$$\delta[-n+1] = ?$$



$$\delta[-(n-1)] = \delta[n-1]$$

$$x[-n] = \delta[n] + \delta[n+1] + \delta[n+2] - \delta[n-1] - \delta[n-2] - \delta[n-3]$$

$$x_e(+1) = \frac{1}{2} [-\delta[n-3] - \delta[n+3] + 2\delta[n]]$$

✓ سیگنال متناوب:

✓ سیگنالی که بتوان آنرا به صورت $x(t) = x(t + kT)$ نوشت را، سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی T گویند، که در آن k عددی صحیح است.

✓ Example، دوره تناوب دنباله $x[n] = \cos \Omega_0 n$ را بدست آورید، هرگاه $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$ ، $\Omega_0 = \frac{\pi}{3}$ باشد.

✓ حال: باید $x[n+N] = x[n]$ باشد.

$$x[n+N] = \cos \Omega_0 (n+N) \stackrel{?}{=} \cos \Omega_0 n$$

$$\Omega_0 N = 2k\pi \quad \checkmark$$

$$\cos(\Omega_0 n + \Omega_0 N) = \cos \Omega_0 n$$

✓ چون N باید عددی صحیح با ویژگی $x[n+N] = x[n]$ باشد، رابطه عددی پیدا می‌شود.

$$-\Omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}} \times N = 2k\pi \Rightarrow N = 2\sqrt{2}k$$

✓ که عددی صحیح نیست پس دوره تناوب اصلی به ازای $k=1$ برابر با $N=6$ می‌باشد.

$$-\Omega_0 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \times N = 2k\pi \Rightarrow N = 6k$$

✓ مقدار متوسط یک سیگنال $x(t)$:

✓ مقدار متوسط سیگنال $\langle x(t) \rangle = x(t)$

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \right\}$$

✓ اندر $x(t)$ متناوب نباشد:

✓ وی اندر $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T باشد:

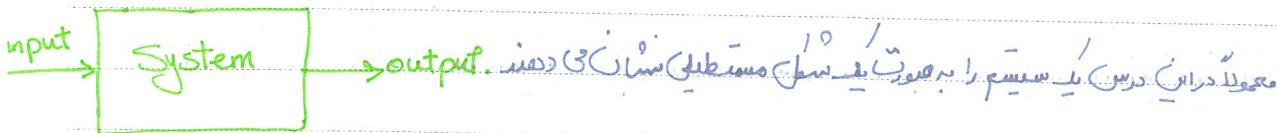
$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

مقدار مؤثر سیگنال : x_{rms}

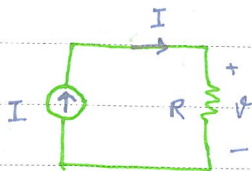
$$x_{rms} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle}$$

سیستم : دو تعریف برای سیستم وجود دارد :

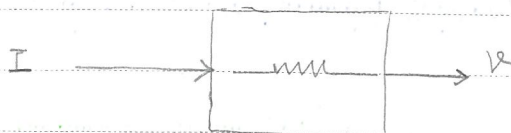
1. فرآیندی که با انجام تغییر و تحول در یک سیگنال
2. به مجموعه‌ای منظم از اجزایی که به کمک یکدیگر هدف مفیدی را برآورده نمایند، سیستم گویند.



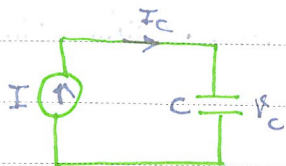
$$V = RI$$



Example : مدار مقاومتی یک سیستم است.

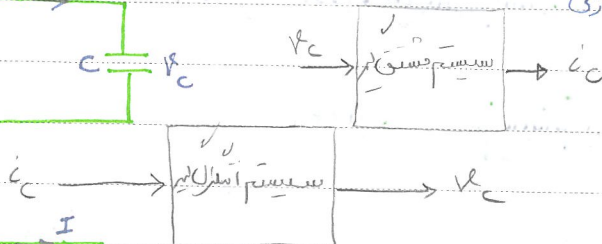


$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

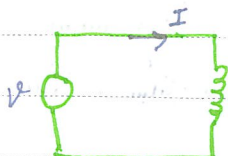


Example : مدار خازنی

$$v_c = \frac{1}{C} \int i_c(t) dt$$

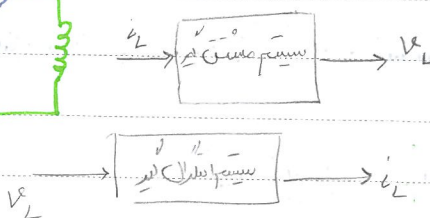


$$v_L = L \frac{di}{dt}$$



Example : مدار سلفی

$$i_L = \frac{1}{L} \int v_L(t) dt$$



در حالت کلی اگر $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی سیستم باشد.



آنرا به شکل مقابل نشان می دهند:

$$y(t) = T[x(t)]$$

که T را تبدیل یا تابع تبدیل سیستم (تابع انتقال سیستم) نامند.

تقسیم بندی سیستم ها، از دو جهت قابل تقسیم هستند:

الف: سیستم های تعیینی،

اگر برای ورودی و خروجی سیستم یک رابطه معین و یکتا وجود داشته باشد سیستم تعیینی است.

$$F = ma$$



ب: سیستم تصادفی.

اگر برای ورودی و خروجی سیستم یک رابطه تصادفی وجود داشته باشد سیستم تصادفی است.

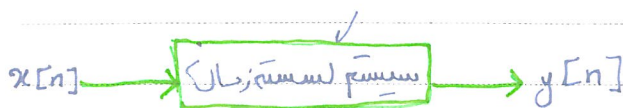
ج: سیستم های پیوسته زمان.

سیستمی است که سیگنال ورودی و خروجی آن هر دو پیوسته باشند.



د: سیستم های گسسته زمان.

سیستمی است که سیگنال های ورودی و خروجی آن هر دو گسسته باشند.



اتصال سیستم‌ها:

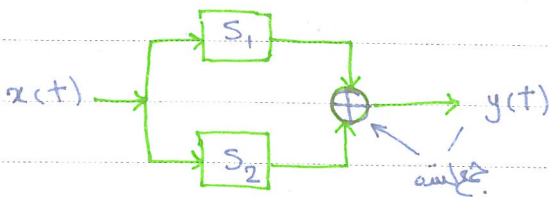
S_2 : سیستم 2

S_1 : سیستم 1

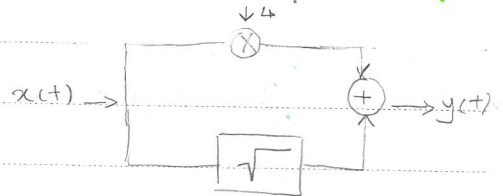
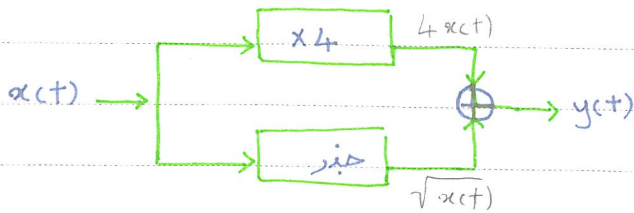
اتصال سری S_1 و S_2 : S_1 و S_2 بصورت متوالی بهم متصل شده‌اند.



اتصال موازی S_1 و S_2 :



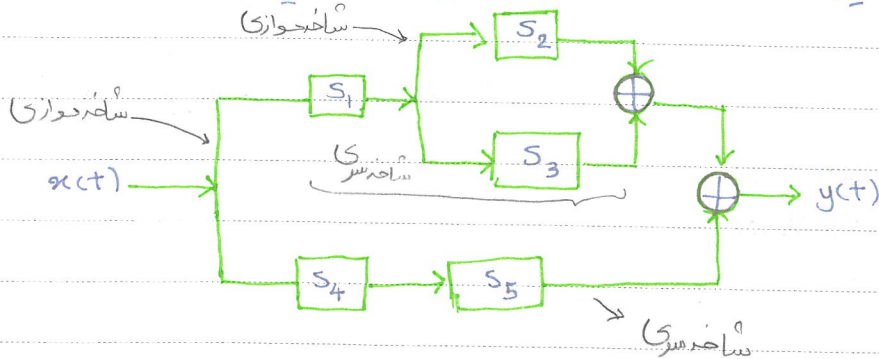
Example: رابطه بدست آمد از شکل زیر را بنویسید.



$$y(t) = 4x(t) + \sqrt{x(t)}$$

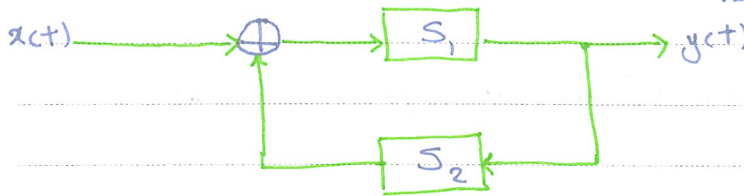
حل:

3. اتصال متوالی: از ترتیب اتصال‌های سری و موازی بدست می‌آید. مثال شکل زیر:

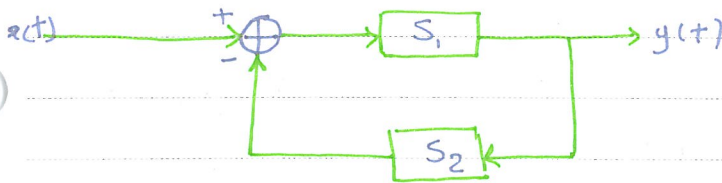


خودارچه‌های / بلوک دیاگرام به سیستم متوالی

4. اتصال فیدبک دار (واپس خور): در این اتصال یک نمونه از سیگنال خروجی برداشته می شود و در ورودی تأیید می شود.
کد دو نوع پس خور منفی و پس خور مثبت داریم:

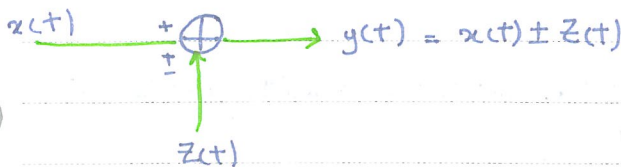
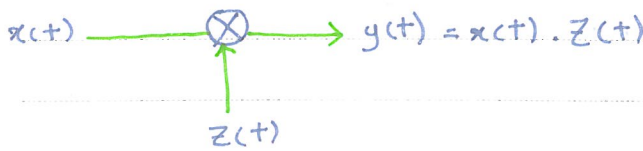


بلوک سیگنال فیدبک منفی ← یک سیستم پایدار

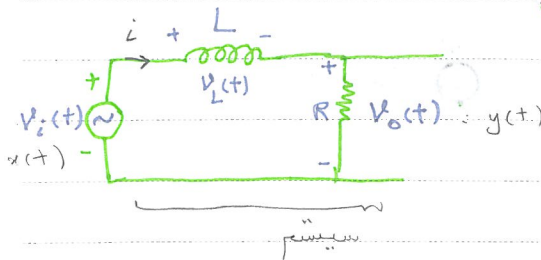


بلوک سیگنال فیدبک مثبت ← یک سیستم ناپایدار

تذکره: از سیگنال های زیر به عنوان فیدبک استفاده و جمع کننده استفاده می شود.



Example: چند مدار جعبه ای معادل مدار زیر را رسم کنید.

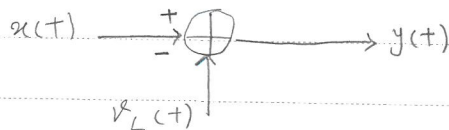


$$KVL: v_i(t) = v_L(t) + v_o(t)$$

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$v_o(t) = v_i(t) - v_L(t)$$

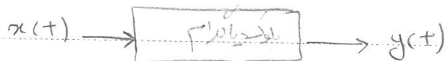
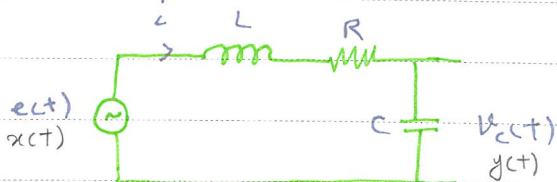
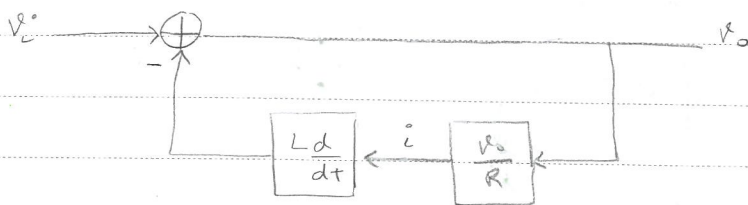
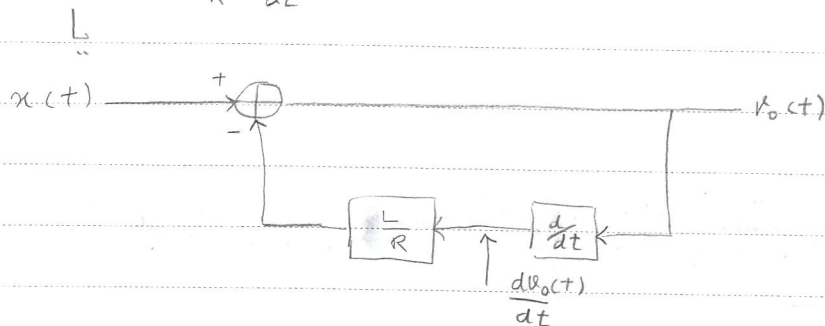
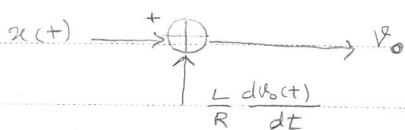
$$\Rightarrow y(t) = x(t) - v_L(t)$$



$v_L(t)$ سینال داخل سیستم است ← باید آنرا جعبه سیال (بجای ورودی) فروزی بوییم.

$$i = \frac{v_o(t)}{R} \Rightarrow v_L = \frac{L}{R} \times \frac{dv_o(t)}{dt}$$

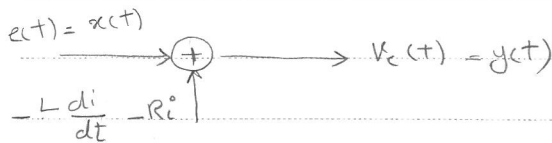
سیگنال v_L را بجای $v_o(t)$ فروزی کنیم.



$$\text{KVL: } e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + v_c(t)$$

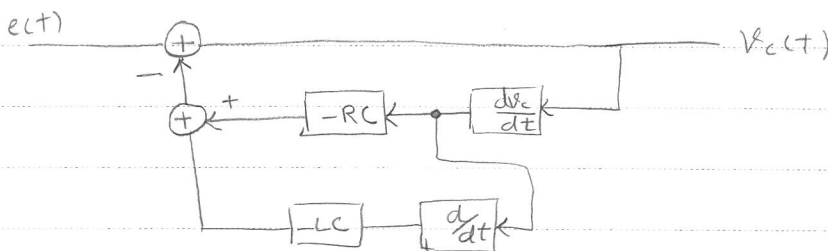
$$v_c = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$e(t) - L \frac{di}{dt} - Ri = v_c(t)$$

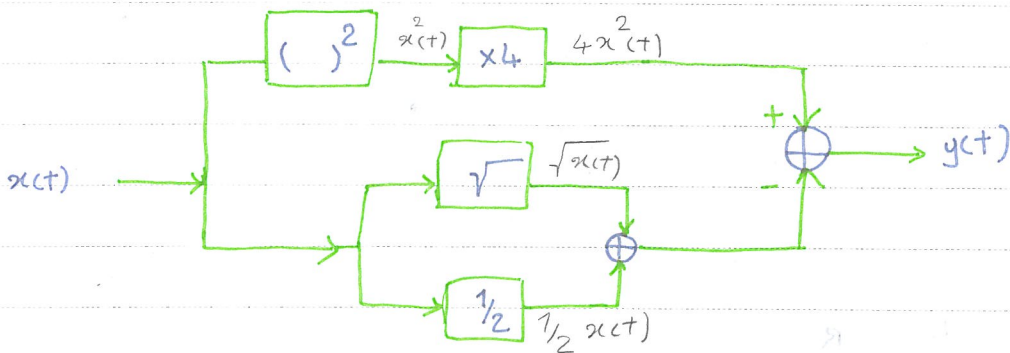


$$i = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$-L \frac{di}{dt} - Ri = -LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} - RC \frac{dv_c}{dt}$$



Example: بلوک دیاگرام سیستم زیر داده شده است. معادله یا ضابطه سیستم را برش آوری.



ابتدا باید خروجی هر شعبه را برش آوریم، سپس عملیات جمع و ضرب را انجام می دهیم.

$$y(t) = 4x^2(t) - \sqrt{x(t)} - \frac{1}{2}x(t)$$

خواص سیستمها:

1. سیستم با حافظه و بدون حافظه: سیستمی را بدون حافظه گویند که خروجی آن در هر لحظه به ورودی آن در همان لحظه (نه قبل و نه بعد) بستگی دارد.

Example: سیستم با حافظه:

$$y[n] = 2 \{ x[n] + x^2[n] \}$$

این سیستم بدون حافظه است.

Example: سیستم با حافظه:

$$y(t) = x(t-1)$$

این سیستم با حافظه است، زیرا خروجی سیستم در هر لحظه t به ورودی آن در یک لحظه قبل از آن وابسته است.

Example: سیستم با حافظه:

$$y(t) = x(t+1)$$

این سیستم با حافظه است، زیرا خروجی آن در لحظه t به ورودی آن در یک لحظه بعد وابسته است. این سیستم را سیستم پیش‌گرفته می‌گویند.

Example: کدام یک از سیستم‌های زیر با حافظه و کدام یک بدون حافظه اند؟

الف: $y(t) = x^2\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow$ با حافظه

بدون حافظه، زیرا خروجی در هر لحظه (t) تنها به ورودی $x(t)$ در همان لحظه (t) وابسته است و $x(t)$ در $\cos^2(t-1)$ وارد نشده است.

ب: $y(t) = x(t) \cdot \cos^2(t-1)$

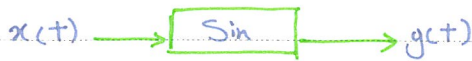
سیستمی با حافظه است زیرا (درینوسم) $y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ خروجی به $x(t+\Delta t)$ وابسته است.

ج: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

سیستمی با حافظه است زیرا خروجی آن به لحظاتی قبل از n نیز وابسته است.

د: $y[n] = \dots + x[-2] + x[-1] + x[0] + \dots + x[n]$

سیستم مستقل از زمان و تابع زمان ✓
سیستمی مستقل از زمان است که ماهیت آن با زمان تغییر نکند.
مثال سیستم به صورت $y(t) = \sin[x(t)]$

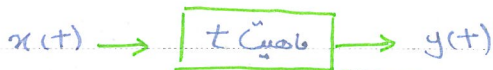


اما سیستمی به صورت $y(t) = (\sin t) x(t)$ تابع زمان است. ✓
در حقیقت ماهیت سیستم وابسته به زمان است.

$$t=1 \rightarrow y(t) = (\sin 1) x(t)$$

$$t=2 \rightarrow y(t) = (\sin 2) x(t)$$

بسیستمی به صورت $y = t x(t)$ وابسته به زمان است.



$$t=1 \rightarrow y(t) = 1 \times x(t)$$

$$t=2 \rightarrow y(t) = 2 \times x(t)$$

عملکرد سیستم وابسته به زمان است.

تفاوت ریاضی سیستم های مستقل از زمان:



$$x(t - t_0) \rightarrow \text{[Block]} \rightarrow y[t - t_0]$$

✓
الر

سیستم مستقل از زمان است.
در حالت لگسست:



$$x[n - n_0] \rightarrow \text{[Block]} \rightarrow y[n - n_0]$$

✓
الر

سیستم مستقل از زمان است.

Example: نشان دهید سیستم ضابطه سیستم $x[n] = n^2 y[n]$ واسطه به زمان است.

$$x[n] \rightarrow \boxed{?} y[n]$$

حل: طبق تعریف نویسیم

$$x[n - n_0] \rightarrow \boxed{?} \rightarrow y[n - n_0]$$

پس می نویسیم:

$$x[n - n_0] \rightarrow y[n] = n^2 x[n - n_0] \quad (1)$$

$$y[n - n_0] = (n - n_0)^2 x[n - n_0] \quad (2)$$

اما از ضابطه سیستم داریم:

اگر (1) - (2) باشد، سیستم مستقل از زمان است.

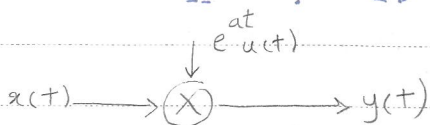
$$n^2 x[n - n_0] \stackrel{?}{=} (n - n_0)^2 x[n - n_0]$$

که دو رابطه بالا توانم نیستیم سیستم واسطه به زمان است.

سیستم پایدار و ناپایدار:

سیستمی پایدار است که پاسخ آن به ورودی با دامنه محدود، یک سیگنال با دامنه محدود باشد. در غیر این صورت ناپایدار است.

Example: سیستمی با ضابطه $y(t) = e^{at} x(t)$ را از لحاظ پایداری بررسی نمایید.



حل: محدود بودن $y(t)$ سیستمی به دو عامل دارد

1) محدود بودن $x(t)$ محدود به طبقه فزونی محدود است

2) محدود بودن $e^{at} u(t)$ ← برای $a > 0$ برای t های بزرگ $e^{at} u(t)$ به سمت ∞ می رود پس در این

حالت سیستم ناپایدار می شود.

برای $a < 0$ برای t های بزرگ $e^{at} u(t)$ از هم محدود می ماند پس در این

حالت سیستم پایدار می باشد.

Example: پایاری سیستم زیر را بررسی نمایید.

$$y[n] = \sum_{k=0}^n x[k]$$

حل: این ورودی محدود و خروجی $x[k] = u[k]$ به سیستم وارد می‌شود. باید بررسی کنیم آیا این نیز محدود است.

$$y[n] = \sum_{k=0}^n u[k]$$

$$y[n] = u[0] + u[1] + u[2] + \dots + u[n-1] + u[n]$$

$$y[n] = n + u[n]$$

پس به ازای ورودی $u[n]$ محدود با رقم n است. به ازای n های خیلی بزرگ خروجی سیستم $y[n]$ بسیار بزرگ و نامحدود گردد. پس این سیستم پایدار است.

سیستم های خطی و غیر خطی:

دو تعریف برای سیستم های خطی وجود دارد و فرقی نمی بینیم که داشته باشیم:

$$x_1(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow y_2(t)$$

دو تعریف زیر را داریم:

الف: سیستم فوق خطی است اگر برای دو مقدار a_1 و a_2 داشته باشیم:

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

ب: سیستم فوق خطی است اگر برای دو مقدار a_1 و a_2 داشته باشیم:

$$a_1 x_1(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow a_1 y_1(t)$$

$$a_2 x_2(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow a_2 y_2(t)$$

$$x_1 + x_2 \rightarrow \boxed{} \rightarrow y_1 + y_2$$

Example: سیستم با رابطه $y(t) = x^2(t)$ را از لحاظ خطی بودن بررسی نمایید.

$$x(t) \rightarrow \boxed{(\cdot)^2} \rightarrow y(t)$$

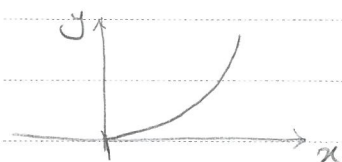
$$x_1(t) \rightarrow \boxed{(\cdot)^2} \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t) \quad \text{حل:}$$

$$x_2(t) \rightarrow \boxed{(\cdot)^2} \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \rightarrow \boxed{(\cdot)^2} \rightarrow \text{خروجی} \quad \text{حال:}$$

$$\text{خروجی} = (a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t))^2 = a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + 2a_1 a_2 x_1 x_2 \quad (1)$$

$$\underbrace{\text{خروجی سیستم}}_{\text{سخت راستی تعریف خطی بودن}} = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 \quad (2)$$



چون $(1) \neq (2)$ است پس سیستم غیر خطی می باشد.

Example: سیستم مشتق گیر را از لحاظ خطی بودن بررسی نمایید.

$$x(t) \rightarrow \boxed{(\cdot)'} \rightarrow y(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{حل}$$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \boxed{(\cdot)'} \rightarrow y_1 = \frac{dx_1}{dt} \\ x_2 \rightarrow \boxed{(\cdot)'} \rightarrow y_2 = \frac{dx_2}{dt} \end{cases}$$

$$a_1 x_1 \rightarrow \boxed{(\cdot)'} \rightarrow y(t) = \frac{d(a_1 x_1)}{dt} = a_1 \frac{dx_1}{dt} = a_1 y_1(t) \quad \text{ارثیاتی:}$$

$$a_2 x_2 \rightarrow \boxed{(\cdot)'} \rightarrow y(t) = \frac{d(a_2 x_2)}{dt} = a_2 \frac{dx_2}{dt} = a_2 y_2(t)$$

$$x_1 + x_2 \rightarrow \boxed{(\)^2} \rightarrow y(t) = \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = y_1 + y_2$$

که هر دو شرط تحریف با برقرار است پس سیستم مستقر است.

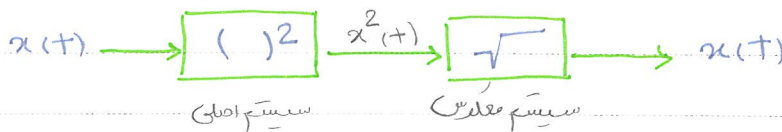
عکس پذیری و سیستم معکوس یا وارون :

سیستم زیر را در نظر بگیرید :

سیستم اصلی $\rightarrow \boxed{A} \rightarrow$
اگر سیستم به نام سیستم معکوس (وارون) به گونه‌ای ساخته شود که به دنبال سیستم اصلی قرار گیرد خروجی (است همان ورودی سیستم اصلی باشد، دو سیستم را معکوس (وارون) هم گویند.



: Example



: Example در سیستم زیر معکوس هم اند.



که خروجی این دو سیستم برای فوژ برابر ورودی آن می باشد.

سیستم علی: سیستمی که خروجی آن در هر لحظه به ورودی در آن لحظه و لحظاتی قبل از آن وابسته باشد.
پس اگر دو ورودی به یک سیستم علی برای لحظاتی $t < t_0$ برابر باشند، خروجی آن سیستم برای $t < t_0$ برای آن دو ورودی مساویند.

$$x_1(t < t_0) = x_2(t < t_0) \Rightarrow y_1(t < t_0) = y_2(t < t_0)$$

Example: سیستم $y(t) = x(t+1)$ سیستم با خاصیت غیر علی است.

مفصل دوم:

LTI: سیستمی که دو خاصیت خطی بودن و مستقل از زمان بودن را داشته باشد، سیستم **Linear time invariant** یا **LTI** گویند. تحلیل این سیستم هم می باشد و همچنین این سیستم ها را می توان با پاسخ ضربه آنها ساخت.

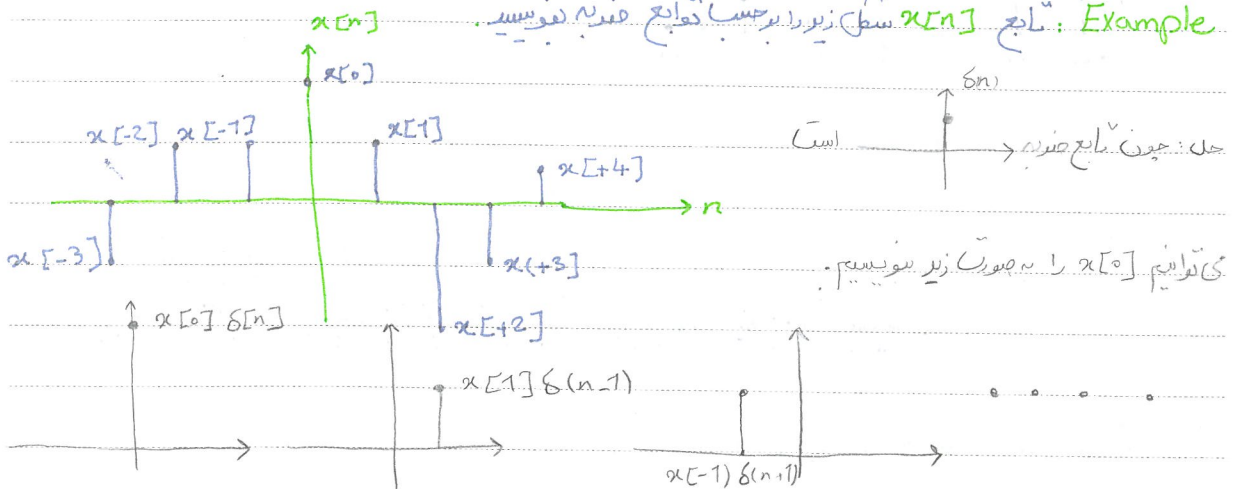
پاسخ ضربه سیستم، پاسخ سیستم است به ازای ورودی $\delta(t)$ به سیستم.



سبب سلیان بر حسب توابع ضربه.

می توانیم هر سیگنالی مثل $x[n]$ را بر حسب توابع ضربه $\delta[n]$ بنویسیم.

Example: تابع $x[n]$ مثل زیر را بر حسب توابع ضربه بنویسید.

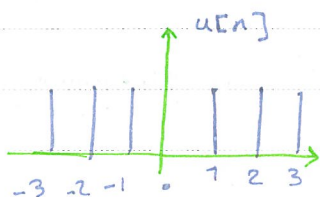


$$\Rightarrow x[n] = x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + x[4]\delta[n-4] \Rightarrow x[n] = \sum_{k=-3}^4 x[k]\delta[n-k]$$

وقتی که $x[n]$ با $-\infty < n < +\infty$ باشد، باز هم می‌توانیم با استفاده از روابط آن را بر حسب توابع ضرب بنویسیم. پس در حالت کلی می‌توان گفت:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

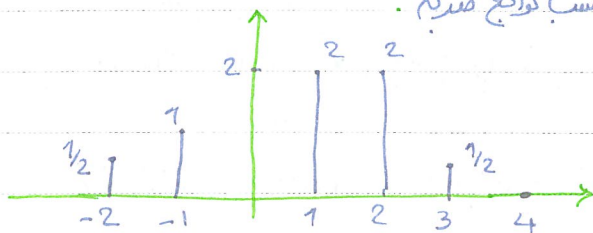
Example: اگر تابع $x[n] = u[n]$ باشد می‌توانیم بنویسیم:



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]\delta[n-k] = 0 + \sum_{k=0}^{\infty} u[k]\delta[n-k]$$

$$x[n] = u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \quad \textcircled{I}$$

Example: مطلوبست بسط دنباله $x[n]$ زیر بر حسب توابع ضرب.



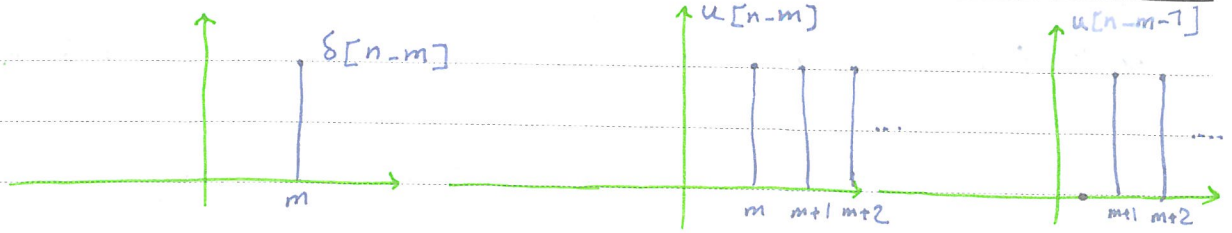
II

$$x[n] = \frac{1}{2}\delta[n+2] + \delta[n+1] + 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n-3]$$

نوشتن تابع ضرب بر حسب تابع پایه.

در رابطه (I) تابع پایه را بر حسب تابع ضرب بدست آوردیم. در اینجا می‌نویسیم:

$$\delta[n-m] = u[n-m] - u[n-m-1]$$

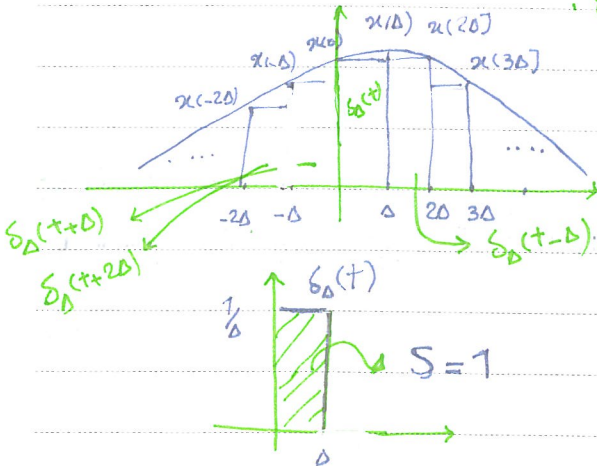


$$\delta[n-2] = u[n-2] - u[n-2-1] = u[n-2] - u[n-3] \quad \leftarrow m=2 \text{ اگر}$$

Example: تابع II را بر حسب $u[n]$ بنویسید.

$$x[n] = \frac{1}{2} \{ u[n+2] - u[n+1] \} + \{ u[n+1] - u[n] \} + 2 \{ u[n] - u[n-1] \} + \dots$$

سبب سیلان پیوسته زمان $x(t)$ بر حسب تابع ضربی $\delta(t)$.



$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \Delta \cdot \delta_{\Delta}(t) = 1 \quad 0 < t < \Delta$$

$$x(t) = \dots x(-2\Delta) \delta_{\Delta}(t+2\Delta) \Delta + x(-\Delta) \delta_{\Delta}(t+\Delta) \Delta + x(0) \delta_{\Delta}(t) \Delta + x(\Delta) \delta_{\Delta}(t-\Delta) \Delta + \dots$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t-k\Delta) \Delta$$

اگر $\Delta \rightarrow 0$ مجموع $\sum$ به $\int$ میل می کند و $k\Delta$ به τ میل می کند و Δ به $d\tau$ تبدیل می شود.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

$$x(t) \delta(t-\tau) = x(\tau) \delta(t-\tau)$$

روش دوم:

از دو طرف رابطه فوق بر حسب τ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

$$x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) d\tau = \text{" " " "}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

جمع‌ناپذیری در سیستم‌های LTI
یک سیستم LTI به صورت زیر در نظر می‌گیریم: این سیستم همان است و آنچه به زمان باشد.

$$\delta[n-0] \rightarrow \boxed{\text{سیستم}} \rightarrow h_0[n]$$

$$\delta[n-k] \rightarrow \boxed{\text{سیستم}} \rightarrow h_k[n]$$

$$x[k] \delta[n-k] \rightarrow \boxed{\text{سیستم}} \rightarrow x[k] h_k[n]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \rightarrow \boxed{\text{سیستم}} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h_k[n]$$

پس پاسخ سیستم خطی به ورودی $x[n]$ در حالت کلی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h_k[n]$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{خفی}} \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h_k[n] \quad \star$$

✓
حال اگر سیستم فوق تغییر ناپذیر با زمان هم باشد

$$h_k[n] = h[n-k]$$

و رابطه $\star$ به صورت زیر تبدیل می شود :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

این رابطه به جمع طیف‌ها برای سیستم‌های LTI معروف است و آن را به صورت زیر می‌نویسند:

$$y[n] = x[n] \star h[n]$$

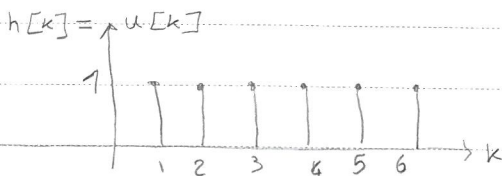
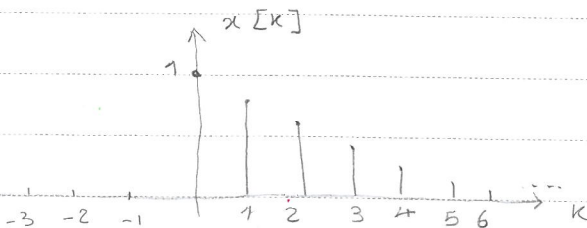
✓
که طیف‌ها $x[n]$ ، $h[n]$ می‌باشد.

پس خروجی یک سیستم LTI برابر است با طیف ورودی با پاسخ ضربه آن سیستم.
پس برای بدست آوردن پاسخ ضربه هر سیستم LTI تنها کافی است پاسخ ضربه آنرا داشته باشیم.

✓
Example، برای یک سیستم LTI پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$ رابطه است و برای پاسخ ضربه سیستم $h[n] = u[n]$ باشد.

✓
حل: بهترین راه برای محاسبه طیف‌ها، روش بارانی می‌باشد. ابتدا می‌نویسیم:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$



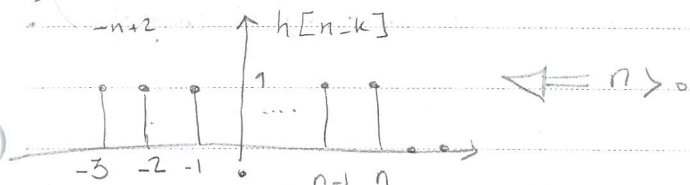
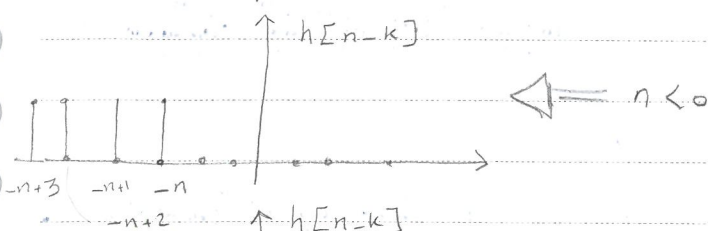
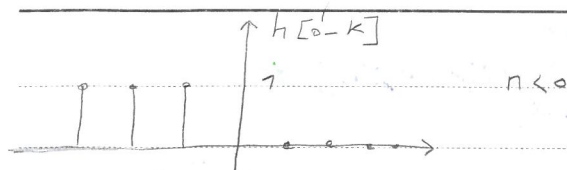
✓
باید $y[n]$ را محاسبه کنیم.
ابتدا $x[k]$ و $h[k]$ را رسم می‌کنیم.
با فرض n داریم به صورت نمایی می‌شود

$$n < 0$$

$$y[n] = \sum x[k] h[n-k] = 0$$

Subject: _____

Date _____



ن. 5 مقدار دارد و از آن به بعد صفر است

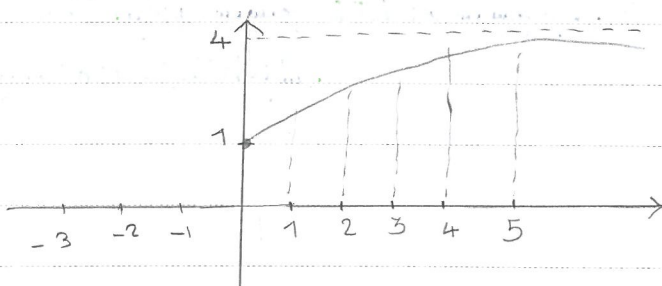
$$y[n] = \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k \underbrace{u[k]}_1 \cdot \underbrace{u[k]}_1$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$\Rightarrow y[n] = 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right] \quad n \geq 0$$

$$\text{OR} \Rightarrow y[n] = 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right] u[n]$$

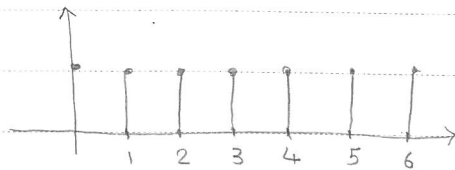
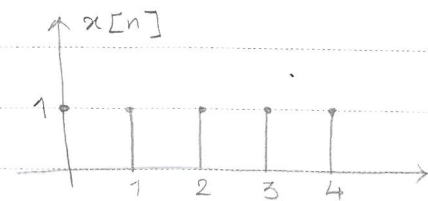


سطح خروجی یک نمای افزایشی می شود

Example: سیستم با ورودی $x[n]$ و پاسخ $h[n]$ داریم. جزئیات زیر را ببینید. (سیستم LTI می باشد)

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$$

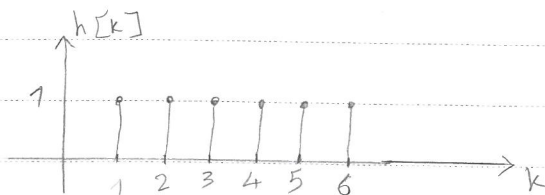
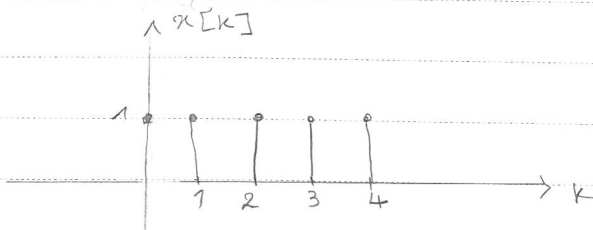
$$h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$$

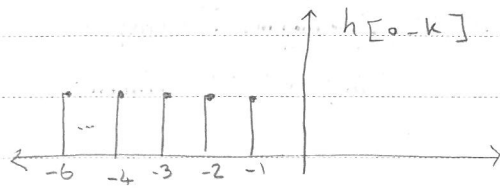


$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] \Rightarrow \text{رابطه حفاظت}$$

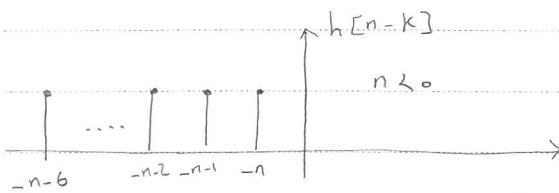
حل: $\Rightarrow$

استخراج دو تابع را به صورت های کسری

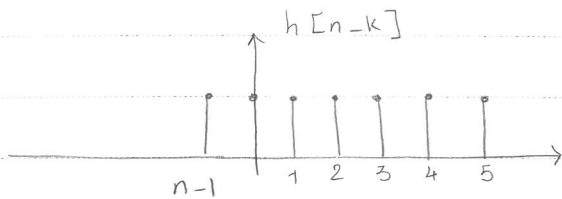
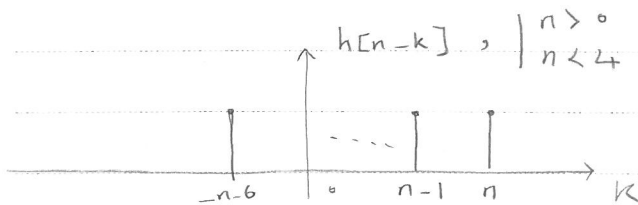




ابتدا $h[-k]$ را بدست می آوریم



$$\begin{cases} n < 0 : y[n] = 0 \\ 0 \leq n < 4 : y[n] = \sum_{k=0}^4 1 = n+1 \\ n \geq 4 : y[n] = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} n > 0 \\ n > 4 \end{cases}$$

$$n < -1$$

جمع حل از روی شتاب خوانده شود.

دُنلوسن:

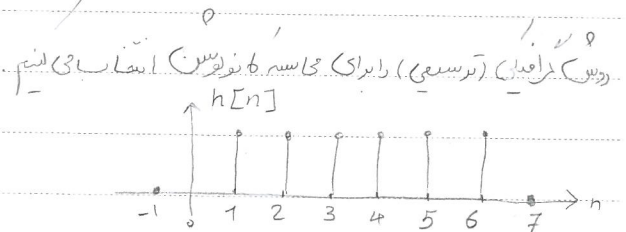
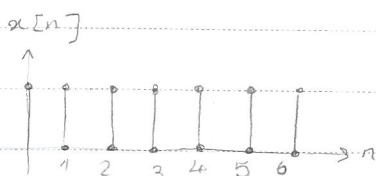
Example. دو سیگنال زیر را با هم دُنلوس کنید.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$$

حل: دُنلوس دُنلوس دو سیگنال به صورت زیر است

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

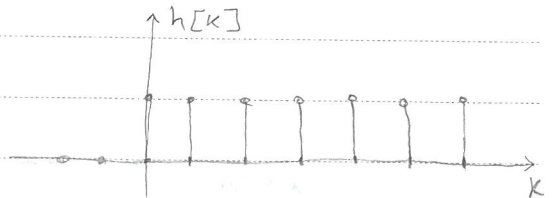
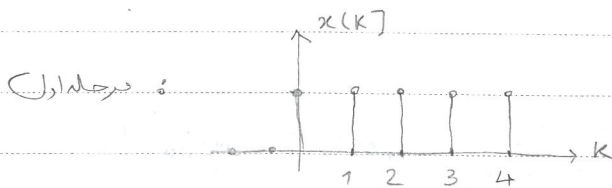


1. ابتدا باید $x[k]$ و $h[k]$ را رسم کنیم (تغییر محور افقی)

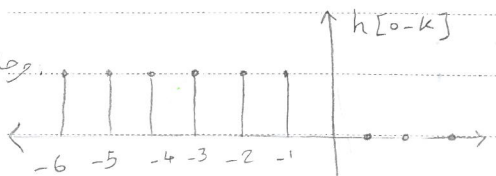
2. سپس $h[0-k]$ را رسم می کنیم (تغییر h نسبت به محور عمودی)

3. $h[n-k]$ را رسم می کنیم (انتقال به سمت چپ و راست h)

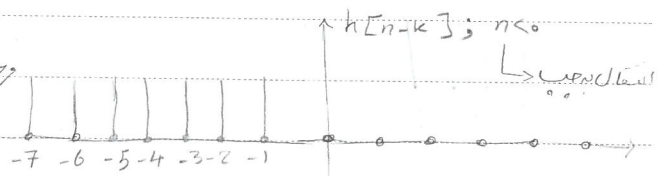
4. حاصل ضرب $\sum$ را در دُنلوس در تمام نقاط n بدست می آوریم.



در محاسبات:

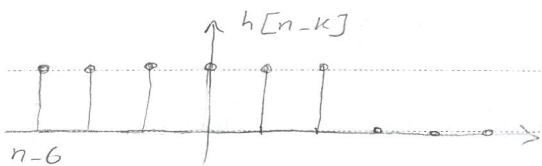


در محاسبات:

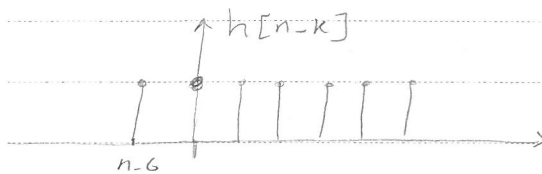


انتقال به چپ

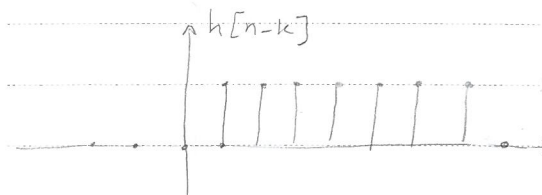
$$n < 0 \rightarrow y[n] = \sum x[k]h[n-k] = 0$$



$$\begin{cases} n \geq 0 \\ n \leq 4 \end{cases} \Rightarrow y[n] = n + 1$$

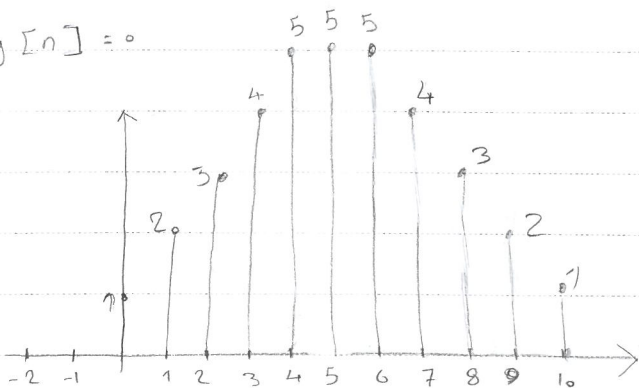


$$\begin{cases} 4 < n \\ n - 6 < 0 \Rightarrow n < 6 \end{cases} \Rightarrow 4 < n < 6 \Rightarrow y[n] = 5$$

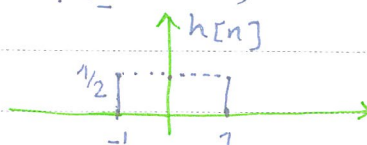
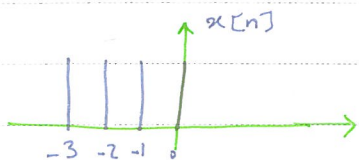


$$\begin{cases} n - 6 \geq 0 \\ n - 6 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \leq n \\ n \leq 10 \end{cases} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=n-6}^4 1 = 4 - [n-6] + 1 = 11 - n$$

$$\begin{cases} n - 6 \geq 4 \Rightarrow n \geq 10 \\ y[n] = 0 \end{cases}$$

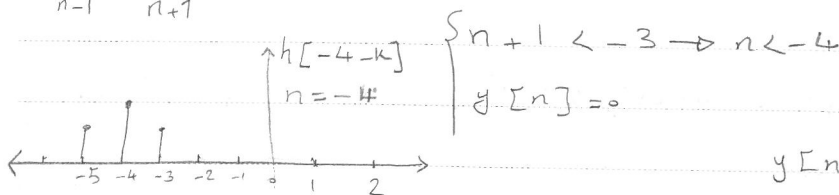
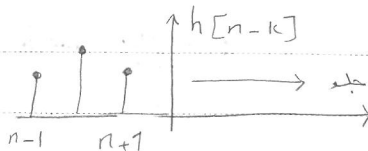
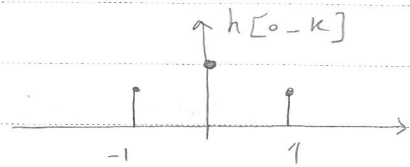
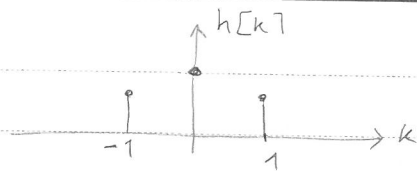
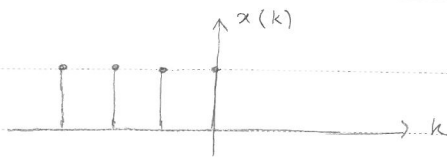


Example: نامزدوست $h[n]$, زیر را ببینید و درید.



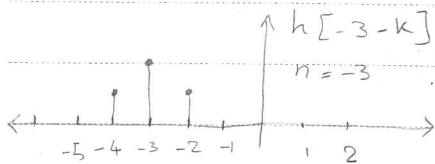
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = ?$$

حل: ابتدا تغییر محورهای دو سیگنال



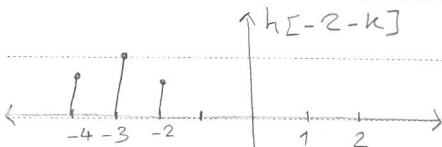
$$y[n] = 0 \quad n < -4$$

قدیم ترین حلوی رویم



$$n = -4$$

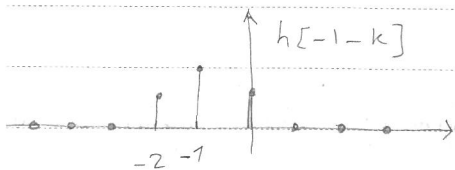
$$y[n] = y[-4] = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



$$n = -3$$

$$y[n] = y[-3] = 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

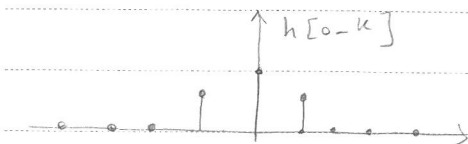
باز هم یک قدم حلوی رویم



$$n = -2$$

$$y[n] = y[-2] = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = 2$$

باز هم یک قدم حلوی رویم



$$n = -1$$

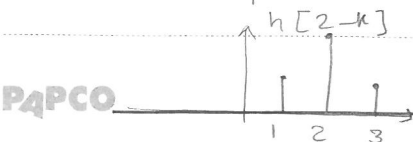
$$y[n] = y[-1] = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} = 2$$

باز هم یک قدم حلوی رویم



$$y[n] = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times 1 = \frac{3}{2} \leftarrow n = 0$$

باز هم یک قدم حلوی رویم



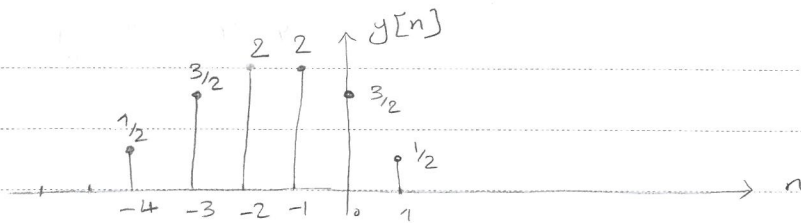
$$y[1] = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leftarrow n = 1$$

" "

$$y[2] = 0 \leftarrow n = 2$$

" "

$$n > 2 \Rightarrow y[2] = 0$$



8
خواص کانولوشن:

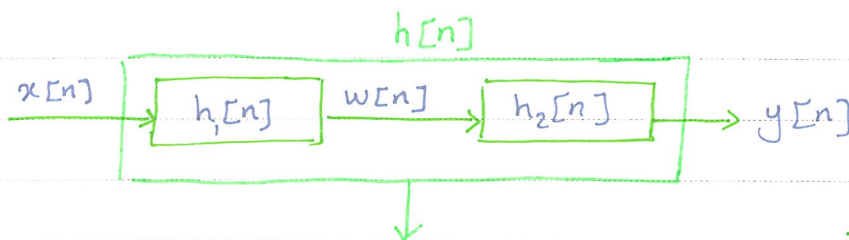
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

1. خاصیت جابجایی:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k]$$

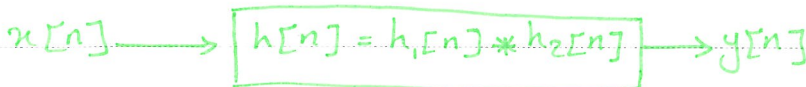
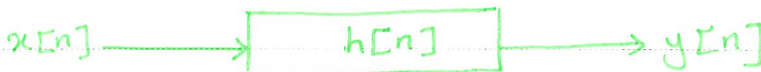
$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

2. شرکت پذیری:



3. سیستم های سری:

سیستم فوق معادل سیستم زیر است:

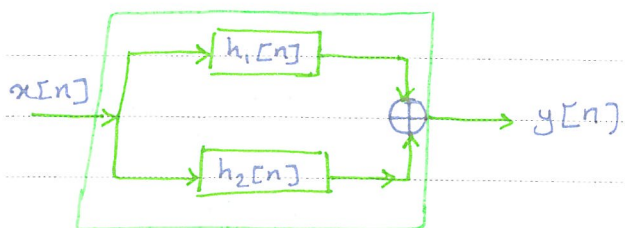


چون دو سیستم سری را می توان با یک سیستم نشان دهیم که تابع تبدیل سیستم جدید برابر است با:

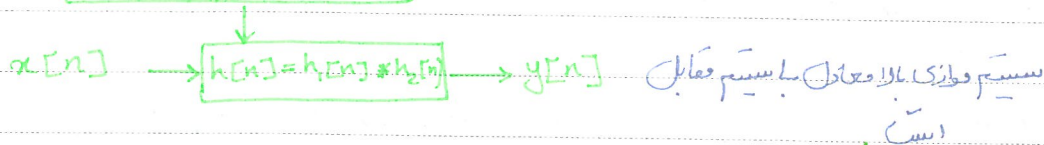
$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

4. خاصیت توزیع پذیری:

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$



5. سیستم‌های موازی

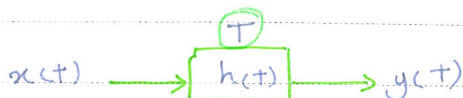


سیستم موازی بالا معادل با سیستم مقابل است.

LTI

۸ تکنولوژی سیستم‌های پیوسته و خطی تغییرناپذیر با زمان

این سیستم با تابع تبدیل $h(t)$ را در نظر بگیرید. اگر ورودی $x(t)$ و خروجی آن باشد داریم:



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

بزرگ

اثبات:

$$y(t) = \mathcal{T} \{ x(t) \}$$

$$\mathcal{T} \{ x(t) \} = \mathcal{T} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \right\}$$

خاصیت خطی بودن سیستم

هم $\mathcal{T}$ و هم انتگرال هر دو توابع خطی هستند پس جایمان عوض کنیم.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T} \{ x(\tau) \delta(t-\tau) \} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau \underbrace{\mathcal{T} \{ \delta(t-\tau) \}}_{h(t-\tau)}$$

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow y(t) = h(t)$$

ست
 $h(t)$ همان پاسخ سیستم به ورودی ضربه است.
 که پاسخ ضربه سیستم نامیده می‌شود.

$$\mathcal{T}\{\delta(t)\} = h(t)$$

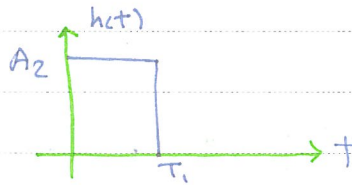
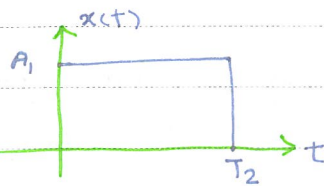
$$\mathcal{T}\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau) **$$

برای سیستم LTI

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

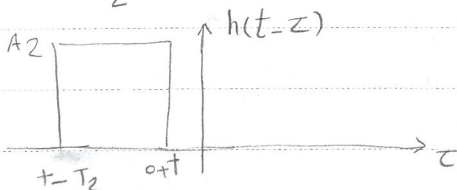
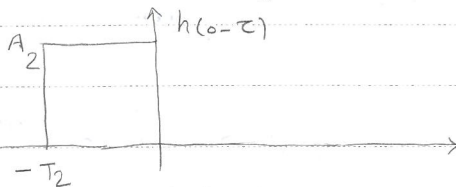
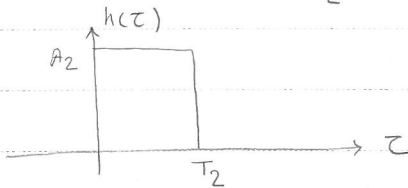
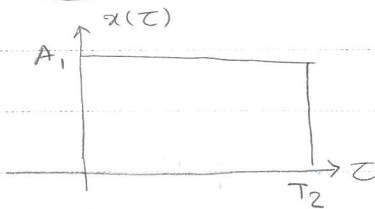
انتگرال کونولوشن

Example: انتگرال کونولوشن سیگنال‌های زیر را بدست آورید. $(T_2 > T_1)$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

حل: روش؟ حالت سیستم است



$$t < 0 \quad y(t) = 0$$

$$t > 0$$

$$\begin{cases} t - T_2 < 0 \\ t < T_2 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \int_{t-T_2}^t A_1 A_2 d\tau = A_1 A_2 t$$

$$\begin{cases} 0 \leq t < T_2 \\ y(t) = A_1 A_2 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \leq T_1 \end{cases}$$

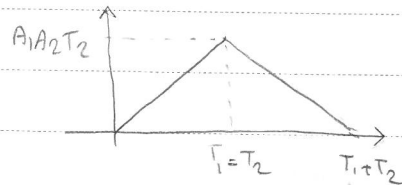
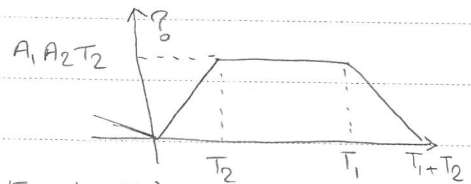
$$\begin{cases} t - T_2 > 0 \\ t > T_2 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \int_{t-T_2}^t A_1 A_2 d\tau = A_1 A_2 (t - t + T_2) = A_1 A_2 T_2$$

$$\begin{cases} T_2 < t \leq T_1 \\ y(t) = A_1 A_2 T_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > T_1 \end{cases}$$

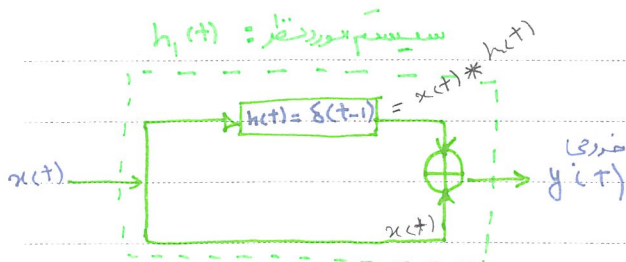
$$\begin{cases} t - T_2 < T_1 \\ t < T_1 + T_2 \end{cases} \Rightarrow T_1 < t < T_1 + T_2$$

$$t < T_1 + T_2 \quad y(t) = \int_{t-T_2}^{T_1} A_1 A_2 d\tau = A_1 A_2 (T_1 - t + T_2)$$



$$t - T_2 > T_1 \Rightarrow t > T_1 + T_2 \Rightarrow y(t) = 0$$

Example: پاسخ ضربه سیستم سلفی زیر را بیابید.



حل: یک پاسخ ضربه سیستم ابتدا باید رابطه بین ورودی و خروجی آن را بیابیم. سپس خروجی رابطه را به ازای ورودی $\delta(t)$ قرار دهیم. پاسخ ضربه را با $h(t)$ نشان می دهیم.

$$h_1(t) = ?$$

یادآوری $x(t) \rightarrow h(t) \rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

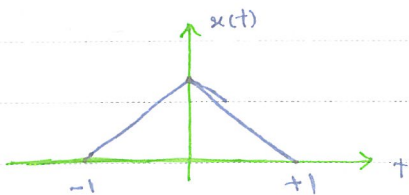
$x(t) = \delta(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow y(t) = h(t)$

ادامه حل: رابطه بین ورودی و خروجی سیستم اول $y(t) = x(t) + x(t) * h(t)$
 $x(t) = \delta(t)$

$$y(t) = \delta(t) + \delta(t) * h(t) = h_1(t)$$

پاسخ ضربه سیستم اول $\Rightarrow h_1(t) = \delta(t) + \delta(t-1)$

Example: مطلوب است خروجی سیستم مثال قبل به ورودی سلفی زیر:



$$y(t) = ?$$

حل: پاسخ ضربه سیستم مثال قبل را به صورت زیر بدست آوریم

$x(t) \rightarrow h_1(t) \rightarrow y(t) = ?$

$$h_1(t) = \delta(t) + \delta(t-1)$$

$$y(t) = x(t) * h_1(t)$$

$$y(t) = x(t) * [\delta(t) + \delta(t-1)]$$

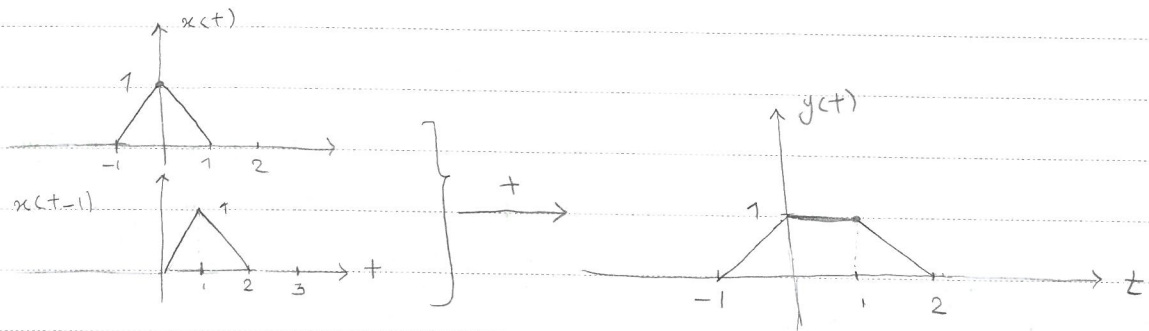
$$y(t) = [x(t) * \delta(t)] + [x(t) * \delta(t-1)]$$

$$y(t) = x(t) + x(t-1)$$

یادآوری

$$\begin{cases} x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t) \\ x(t) * \delta(t) = x(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) \cdot \delta(t-t_0) \neq x(t_0) \delta(t-t_0) \\ x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \end{cases}$$



Example. رابطه بین ورودی و خروجی یک سیستم به صورت $y = x(t-t_0)$ می باشد. مطلوب است سیستم معکوس آن.

آن:

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{سیستم اصلی}} \rightarrow y(t) = x(t-t_0)$$

حل:

سیستم معکوس (سیستم اصلی) سیستم است که خروجی آن را به ورودی تبدیل می کند. $\delta(t)$ پاسخ ضربه سیستم معکوس

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{سیستم اصلی}} \xrightarrow{w(t)} \boxed{\text{سیستم معکوس}} \rightarrow y(t) = x(t)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \boxed{h_1(t)} \rightarrow x(t)$$

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

$$h_1(t) = ?$$

$$w(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow h(t) = \delta(t) * h(t)$$

$$h(t) = x(t-t_0) \Big|_{\substack{\delta(t) \\ x(t) = \delta(t)}} = \delta(t-t_0)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t) * h_1(t)} \rightarrow x(t)$$

$$\delta(t) = h(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * h_1(t)$$

$$\delta(t) = \delta(t - t_0) * h_1(t)$$

$$h_1(t) = \delta(t + t_0)$$

$$\text{پس: } \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t + t_0 - t_0) = \delta(t)$$

تبدیل فوریه پیوسته زمان:

تقسیم بندی سیگنال ها از نظر توان و انرژی:

انرژی سیگنال $x(t)$ طبق تعریف برابر است با:

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{|x(t)|^2}_{\text{انرژی}} dt$$

زمان $\times$ توان = انرژی

$$\text{توان} = \frac{|x(t)|^2}{R}, \quad \text{با فرض } R=1 \text{ می نویسیم}$$

$$\text{انرژی} = \int |x(t)|^2 dt$$

$$\text{توان} = \frac{\text{انرژی}}{\text{زمان}}$$

توان سیگنال $x(t)$ برابر است با:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

سیگنال ها عموماً دو دسته اند:

الف: سیگنال انرژی: سیگنالی است که انرژی آن محدود است

ب: سیگنال توان: سیگنالی است که توان آن محدود است

به طور کلی می توان جدول زیر را رسم نمود:

$P_v = 0$	$E_v < \infty$	سیگنال انرژی
$P_v < \infty$	$E_v \rightarrow \infty$	سیگنال توان

Example: انرژی و توان سیگنال‌های زیر را بیابید:

$$x(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} u(t) dt$$

$$E_v = \int_0^{\infty} A^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = A^2 \left(-\frac{\tau}{2} \right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \bigg|_0^{\infty} \Rightarrow E_v = \frac{A^2 \tau}{2}$$

$$P_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_v = 0$$

$$x(t) = A [u(t) - u(t-\tau)]$$

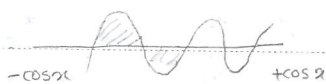
$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 [u(t) - u(t-\tau)] dt$$

$$E_v = \int_0^{\tau} A^2 \times 1 \times dt = A^2 \tau \Rightarrow E_v = A^2 \tau$$

$$P_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_v}{T} = 0$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$



چون $x(t)$ یک سیگنال پیاپی است

$$= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{1 + \cos(2\omega_0 t + \theta)}{2} dt$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{A^2}{2} \times T_0$$

$$\sum_{\text{تمام دورها تناوب}} \frac{A^2 T_0}{2} = \infty$$

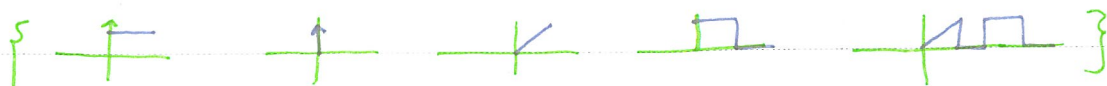
$$E_{\infty} = \infty$$

$$P_{\infty} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{E_{\infty}}{T_0} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{\frac{A^2 T_0}{2}}{T_0} = \frac{A^2}{2} = \text{محدود}$$

Signal space:

فضای سیگنال:

فضای سیگنال مجموعه‌ای از تمام سیگنال‌های موجود مانند سیگنال پلیم، سیگنال ضربی، سیگنال دینامی و ...



ضرب داخلی دو سیگنال:

اگر $v(t)$ و $w(t)$ دو سیگنال انرژی متناوب باشند ضرب داخلی آنها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle v(t), w(t) \rangle = \text{ضرب داخلی دو سیگنال}$$

$$\langle v(t), w(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} v(t) w(t) dt$$

اگر $v(t)$ و $w(t)$ دو سیگنال توان باشند (متناوب یا دوره تناوب T_0)

$$\langle v(t), w(t) \rangle = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} v(t) w^*(t) dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 5 + 2j \rightarrow Z^* = 5 - 2j \\ Z = 2 \rightarrow Z^* = 2 \end{array} \right.$$

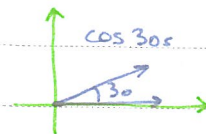
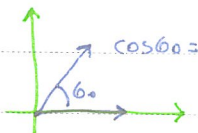
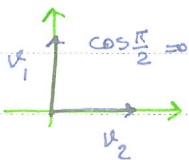
تذکره: اگر ضرب داخلی دو سیگنال $v(t)$ و $w(t)$ صفر باشد آن دو سیگنال را متعامد می‌نامند.

$$\langle v(t), w(t) \rangle = 0$$

Example: $w(t) = \sin \omega t$, $v(t) = \cos \omega t$ based on

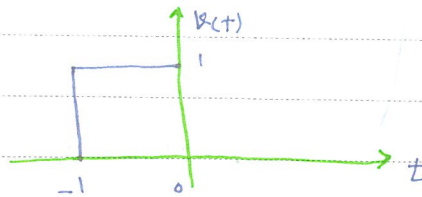
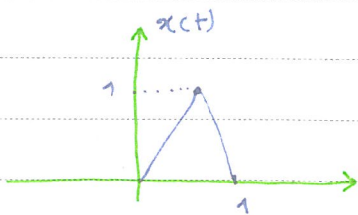
$$\langle v(t), w(t) \rangle = \int_{\text{دوره تناوب}} \sin \omega t \cos \omega t dt = 0$$

پس سینوس و کسینوس دو سیگنال متعام هستند



ضرب داخلی دو سیگنال میزبان شباهت آنها را نشان می دهد. هر چه ضرب داخلی آن ها بزرگتر شود دو سیگنال بیشتر به هم شبیه اند. اگر ضرب داخلی دو سیگنال صفر باشد، آن دو سیگنال متعام هستند و شباهت را ندارند.

Example: ضرب داخلی دو سیگنال مثل زیر را بدست آورید.

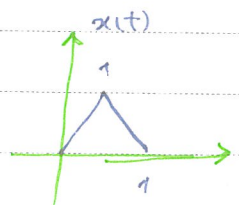
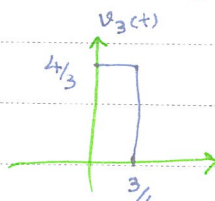
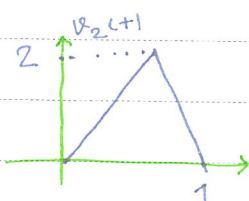
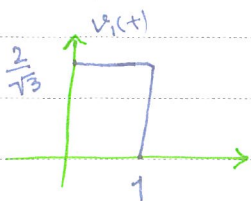


$$\langle x(t), v(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot v(t) dt = \int_{-1}^0 x(t) \cdot v(t) dt + \int_0^1 x(t) \cdot v(t) dt = 0 + 0 = 0$$

$$\langle x(t), v(t) \rangle = 0$$

نتیجه: این سیگنال هایی که از لحاظ زمانی هم پوشانی ندارند به هم عمودند.

Example: شباهت سیگنال $x(t)$ به لدا می باشد از سیگنال های $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ بیشتر است.



حل: استایمید ضرب داخلی $x(t)$ را با سه سیگنال v_1 ، v_2 و v_3 بدست آورد. و نیز مقدار مقدار ضرب داخلی $x(t)$ و $v_1(t)$ را بدست آوریم.

$$\langle x(t), v_1(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) v_1(t) dt = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{3}} x(t) dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 x(t) dt =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.57$$

$$\langle x(t), v_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) v_2(t) dt = \int_0^{1/2} (4t)(2t) dt + \int_{1/2}^1 8(1-t)(1-t) dt = 0$$

$$\langle x(t), v_3(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) v_3(t) dt = \frac{7}{12} = 0.58$$

چون ضرب داخلی $x(t)$ و $v_2(t)$ از یکدیگر بیشتر است پس شباهت $x(t)$ و $v_2(t)$ بیشتر از بقیه سیگنال‌ها است.

انرژی سیگنال: (میانگین انرژی برقرار)

انرژی سیگنال برای دو حالت انجام می‌شود:

الف: سیگنال از نوع انرژی باشد، انرژی سیگنال از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\|v(t)\| = \sqrt{E_v} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt}$$

ب: سیگنال از نوع توان باشد.

$$\|v(t)\| = \sqrt{P_v} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt}$$

در حقیقت انرژی سیگنال:

$$\begin{cases} \|v(t)\| = \sqrt{\langle v(t), v(t) \rangle} \\ |\vec{v}| = \sqrt{v \cdot v} \quad \text{بردار} \end{cases}$$

Example: اندازه سیگنال های $x_1(t) = e^{-at} u(t)$ و $x_2(t) = A \cos \omega_0 t$ را بیابید.

سیگنال $x_1(t)$ از نوع انرژی است زیرا $E_{x_1} < \infty$

$$\|x_1(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_0^{\infty} e^{-2at} dt} = \sqrt{-\frac{1}{2a} e^{-2at} \Big|_0^{\infty}}$$

$$\|x_1(t)\| = \sqrt{\frac{-1}{2a} [0 - 1]} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \Rightarrow \|x_1(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

سیگنال $x_2(t)$ توان است زیرا $P_{x_2} < \infty$. $x_2(t)$ متناوب است پس

$$\|x_2(t)\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_2(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2 \omega_0 t dt} = \sqrt{\frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} dt}$$

$$\|x_2(t)\| = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Example: اندازه سیگنال $x(t) = A e^{j\omega_0 t}$ را بیابید.

حل: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ است. $e^{j\omega_0 t}$ سیگنال متناوب است.

$$E_x = \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 T$$

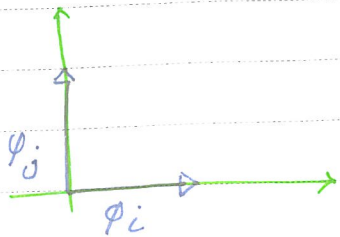
$$\langle x(t), x(t) \rangle = \sqrt{E_x} = \sqrt{A^2 T} = A\sqrt{T}$$

سیگنال $x(t)$ را سیگنال $x(t)$ می نامند، در این صورت می توانیم بنویسیم: $\|x(t)\| = \langle x(t), x(t) \rangle = 1$

$$\|x(t)\| = \langle x(t), x(t) \rangle = 1$$

Orthonormal Signals:

مسئله‌های متعادل شده :



$$\varphi_i \cdot \varphi_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \| \varphi_i \| = 1 \\ \| \varphi_j \| = 1 \end{cases}$$

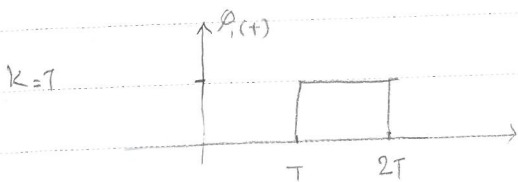
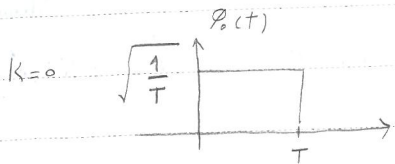
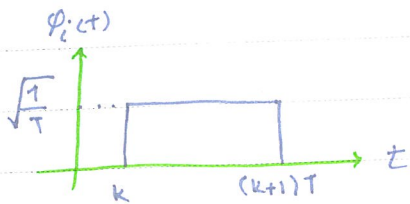
$$\varphi_i \cdot \varphi_j = 0 \quad i \neq j$$

مجموعه سیگنال های $\phi_1(+), \phi_2(+), \dots$ را مجموعه سیگنال های متعامده می نامند. اگرچه آنها دو به دو متعامد باشند. $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$ و علاوه اندازه همه آنها واحد باشد.

$$\| \varphi_1 \| = \| \varphi_2 \| = \| \varphi_3 \| = \dots = 1$$

هر سیلنال را می توان به سیلنال های فضا فضا علیه تعبیه کرد.

Example: نشان دهید سینال‌های زیر، متعادل هستند.



چون همگی از سیگنال‌های پهنای باند محدود در اینجا می‌بینیم بودن یک سیگنال‌ها را می‌توانیم

$$\|\varphi_0\| = \sqrt{|\langle \varphi_0(t), \varphi_0(t) \rangle|}$$

$$\langle \varphi_0(t), \varphi_0(t) \rangle = \int_0^T \varphi_0(t) \cdot \varphi_0(t) dt = \int_0^T \sqrt{\frac{1}{T}} \cdot \sqrt{\frac{1}{T}} dt = \int_0^T \frac{1}{T} dt = \frac{1}{T} \times T = 1$$

$$\|\varphi_0(t)\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\varphi_1(t)\| = \sqrt{|\langle \varphi_1(t), \varphi_1(t) \rangle|}$$

$$\langle \varphi_1(t), \varphi_1(t) \rangle = \int_T^{2T} \sqrt{\frac{1}{T}} \times \sqrt{\frac{1}{T}} dt = \frac{1}{T} (2T - T) = 1$$

$$\|\varphi_1(t)\| = 1$$

به ترتیب تمام $\varphi_k(t)$ دارای انرژی واحد هستند

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

دوره تناوب هر یک $\frac{2\pi}{k\omega_0}$ می‌باشد.

$$\langle \varphi_n(t), \varphi_m(t) \rangle = \langle e^{jn\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt = \text{حل:}$$

$$= \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

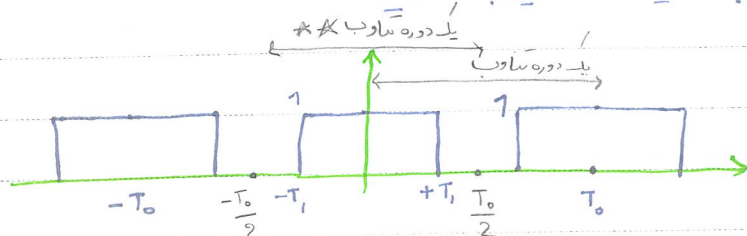
سری فوری.

در سری فوری می خواهیم سیگنال دلتا و متغایب $x(t)$ را به صورت مجموعی ای از سیگنال های مقادیر $\phi_k(t) = e^{j k \omega_0 t}$ بنویسیم. روابط سری فوری و ضرایب سری فوری به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j k \omega_0 t} \\ a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt \end{cases}$$

سری فوری $x(t)$
ضرایب سری فوری

Example: ضرایب سری فوری a_k را برای سیگنال شکل زیر بنویسید.



حل: چون سیگنال فنی متناوب با دوره تناوب T_0 می باشد، می توان سری فوری برای آن نوشت:

(دوره تناوب بر اساس دیرینترین بخش سیگنال می شود)

با دوره تناوب به صورت T_0 باشد:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j k \omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} 1 \times e^{-j k \omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left[\frac{1}{-j k \omega_0} \right] e^{-j k \omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$= -\frac{1}{j k \omega_0 T_0} \left[e^{-j k \omega_0 T_1} - e^{j k \omega_0 T_1} \right] \Rightarrow a_k = \frac{1 \times 2}{k \omega_0 T_0} \cdot \frac{e^{j k \omega_0 T_1} - e^{-j k \omega_0 T_1}}{2 \times j}$$

$$= \frac{2}{k \omega_0 T_0} \sin(k \omega_0 T_1) \Rightarrow a_k = \frac{\sin(k \omega_0 T_1)}{k \pi}$$

یادآوری: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega_0 T_0 = 2\pi$