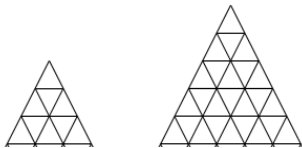


یادداشت جلسه‌ی نخست

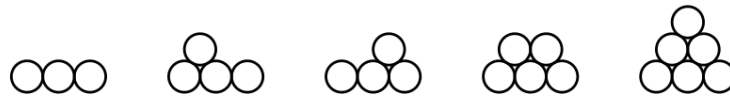
بیشتر کم سن ترها:

صفر) ابر مثلث  $n$  - ام به ترتیب به ازای  $n=3$  و  $n=5$  به صورت زیر است :



تعداد متوازی الاضلاع‌های ابر مثلث  $n$  - ام را به صورت یک فرمول بسته بیابید.

یک)  $n$  توپ کنار هم روی زمین قراره داده شده، می‌توانیم به هر تعداد توپ روی توپ‌های فعلی قرار بدهیم (فراموش نکنید باید توپ‌ها پایدار باشند)،  $C(n)$  را تعداد حالت‌های نهایی ممکن در نظر بگیرید. رابطه‌ای بازگشتی برای محاسبه‌ی تابع  $C(n)$  بیابید. (می‌توانید از نماد  $\sum$  استفاده کنید). حالات ممکن برای  $n=3$  :

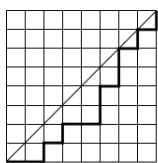


پس داریم  $C(3)=5$  .

دو)

الف - ثابت کنید تعداد پرانتز گذاری‌های صحیح با  $n$  جفت پرانتز برابر با  $C(n)$  در سؤال قبلی است.

ب - ثابت کنید تعداد حالت‌های مثلث بندی یک  $n+2$  ضلعی برابر با  $C(n)$  است. برای مثال حالت‌های مختلف مثلث بندی یک ۵ ضلعی در زیر آمده:



ج - تعداد مسیرهای رویال‌های جدول  $n \times n$  از گوشه‌ی پایین سمت چپ به گوشه‌ی بالا سمت راست را بیابید که فقط به بالا و راست می‌رود و از قطر جدول عبور نمی‌کند. (پاسخ بازگشتی قابل قبول نیست).

سه) ثابت کنید هر گراف با درجه‌ی بیشینه‌ی  $\Delta$  را می‌توان با حداکثر  $\Delta+1$  رنگ جوری رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو راس مجاور هم رنگ نباشند.

چهار) ثابت کنید گراف جایگشت مجموعه‌ای از دوره‌های مجزا از هم است.

**کمترکم سن‌ترها:**

صفر) ثابت کنید در هر دنباله از اعداد حقیقی متمایز به طول  $ab+1$ ، یک زیردنباله صعودی به طول  $a+1$  یا یک زیردنباله‌ی نزولی به طول  $b+1$  وجود دارد.

یک) ثابت کنید به ازای هر  $k$  طبیعی،  $n$  طبیعی‌ایی وجود دارد به طوری که به ازای هر سه جایگشت دلخواه از اعداد  $1$  تا  $n$ ، در دست‌کم دو تا از آن‌ها زیردنباله‌ای یکسان و یکنوا به طول دست‌کم  $k$  وجود دارد.

**دو)**

الف -  $1000000$  بازه روی محور اعداد حقیقی داریم که می‌دانیم هیچ  $100$  تایی از آن‌ها در یک نقطه با هم مشترک نیستند. نشان دهید که می‌توان  $100000$  بازه از آن‌ها انتخاب کرد به طوری که دو به دو مجزا از هم باشند.

ب -  $1000000$  مستطیل با اضلاع موازی با محور مختصات در صفحه داریم. می‌دانیم هیچ  $100$  تایی از آن‌ها در یک نقطه مشترک نیستند. نشان دهید می‌توان  $500$  مستطیل انتخاب کرد به طوری که دو به دو مجزا از هم باشند.