

فصل اول

معما های الگوریتمی

مسئله ۱ . مذاکره صلح

رابطه بین دو کشور تاراک و روکاتی بر سر ویروسی به نام توسی به شدت تیره شده و جنگ شدیدی بین دو کشور در گرفته است . هر یک از این دو کشور ادعا می کنند که کشور دیگر منشا پخش ویروس بوده است . ویروس توسی ویروسی است که به تازگی کشف شده است و به سرعت انتقال می یابد و در صورتی که فردی به این ویروس مبتلا شود ظرف مدت کوتاهی رنگ پوست تمام بدنش کبود می شود و بعد از مدتی میمیرد . نمایندگان سازمان ملل بعد از مذاکره ی جداگانه با هر یک از دو طرف درگیر جنگ ، پیشنهاد کردند مذاکره ای مستقیم بین آن ها صورت گیرد . قرار است در این جلسه ی مذاکره ، از هر کشور یک نفر به عنوان نماینده و یک نفر به عنوان معاون شرکت کند . از طرف سازمان ملل نیز یک ناظر و یک مترجم در جلسه حضور خواهند داشت .

طبق روال دیپلماتیک چنین جلساتی ، نمایندگان هر دو کشور و معاونین آن ها و همچنین مترجم باید هر یک با ناظر سازمان ملل دست بدهند . همین طور نماینده ی تاراک باید با نماینده روکاتی دست بدهد . معاونین نمایندگان دو کشور نیز باید با یکدیگر دست بدهند ، ولی لزومی ندارد که نماینده هر کشور با معاون نماینده کشور دیگر دست بدهد . مهم ترین مشکل بر سر راه انجام این مذاکرات این است که به دلیل وجود خطر ویروسی شدن ، هیچ کس مایل نیست به طور مستقیم با فرد دیگری دست بدهد .

برای رفع این مشکل سه عدد (دقت کنید ۳ عدد نه ۳ جفت) دست کش تهیه شده است که نمایندگان هنگام دست دادن می توانند از آن ها استفاده کنند . داخل و خارج دست کش ها ممکن است ویروسی شوند ولی هیچ ویروسی از یک طرف دست کش به طرف دیگر آن منتقل نمی شود . اگر هر یک از دو سطح دست کش و دست با هم برخورد کنند ویروس های یکی به دیگری منتقل می شود . از هر دو طرف دست کش ها می توان استفاده کرد یعنی می توان هر دست کش را برگرداند (پشت و رو کرد) و از طرف آستر پوشید . ضمناً دست کش ها آن قدر گشاد هستند که بتوان چند دست کش را روی هم پوشید . برای پوشیدن ، در آوردن و پشت رو کردن دست کش ها از وسیله ی مخصوصی استفاده می شود که به هیچ وجه ویروس ها را منتقل نمی کند .

آیا می توانید ترتیبی برای استفاده از دست کش ها و دست دادن افراد بیان کنید که ویروس از هیچ کس به فرد دیگری منتقل نشود ؟ (تمام افراد ، حتی ناظر سازمان ملل و مترجم امکان ابتلا به ویروس را دارند)

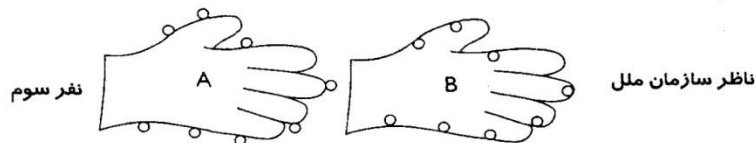
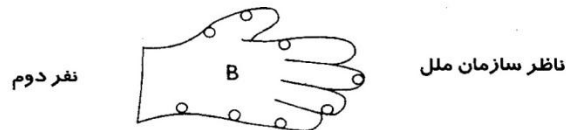
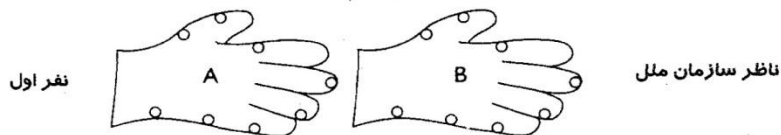
به عنوان مثال ، اگر قرار باشد با دو دست کش A و B سه نفر با ناظر سازمان ملل دست بدهند ، می توان به ترتیب زیر عمل کرد (شکل ۱ را ببینید)

۱ . نفر اول دو دست کش A و B را با هم می پوشد (B روی A) و با ناظر دست می دهد .

۲ . نفر دوم دست کش B را می پوشد و با ناظر دست می دهد .

۳ . نفر سوم آستر B را روی آستر A می پوشد و با ناظر دست می دهد .

به این ترتیب ملاحظه می کنید که هیچ یک از سطوح دست کش ها امکان انتقال ویروس را فراهم نمی کند .



شکل ۱ دست دادن سه نفر با ناظر سازمان ملل فقط با دو دست کش.

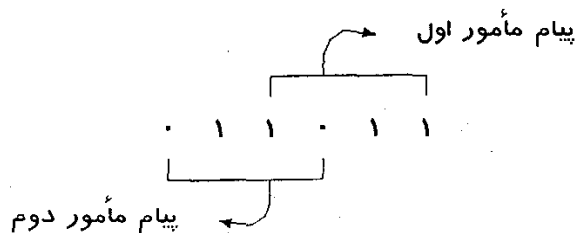
آیا برای مسئله در حالت کلی و با حداقل تعداد دست کش ها راه حلی دارید ؟

مسئله ۲ . موسیقی یا پیام جاسوسی

یک شبکه ی بزرگ جاسوسی از روش خاصی برای فرستادن پیام به ماموران و جاسوسان خود در فاصله های دور استفاده می کند . به این ترتیب که پیام های مورد نظر خود را به صورت دنباله هایی از رقم های ۰ و ۱ رمز گذاری می کند و این دنباله ها را در قالب نت های موسیقی که صدای آن ها کم و زیاد می شود از طریق امواج رادیویی ارسال می کند . ماموران می دانند که کاهش طنین در موسیقی حاوی پیام به معنی صفر و افزایش آن نشانه ی یک است . در این جا حالت خاصی را در نظر می گیریم که در آن هر پیام یک دنباله ی چهار تایی از صفر ها و یک هاست (یک دنباله ی چهار بیتی) .

این شبکه می خواهد برای ۹ نفر از مامورانش پیام بفرستد ، ولی از آن جا که زیاد شدن طول پیام احتمال شناسایی و کشف آن را زیاد می کند ، سعی می شود طول کل پیام ارسالی تا حد ممکن کوتاه باشد . به این دلیل ، در صورت امکان پیام های مورد نظر خود را با هم ترکیب و یک جا ارسال می کنند . مثلاً هرگاه بخواهند پیام ۰۱۱۰ را به یکی از ماموران و پیام ۱۰۱۱ را به مامور دیگری بفرستند ، می توانند آن ها را به صورت ۰۱۱۰۱۱ ترکیب و یک جا ارسال کند . البته در این حالت باید قبل از ارسال این پیام ترکیبی ، به مامور اول اطلاع دهد که از رقم اول شروع به خواندن کند و به مامور دوم هم بگوید که از رقم سوم شروع به خواندن کند (شکل ۲ را ببینید) . برای اطلاع دادن محل شروع پیام هر مامور (شماره رقم آن) هم از نت موسیقی خاصی برای آن مامور استفاده می شود .

۱ . این شبکه می خواهد پیام های ۰۰۰۰ ، ۰۰۱۱ ، ۰۱۰۰ ، ۰۱۱۰ ، ۰۱۱۱ ، ۱۰۱۱ ، ۱۱۰۰ ، ۱۱۰۱ ، ۱۱۱۰ را به مامورانش بفرستد . متخصصین کد گذاری شبکه موفق به یافتن دنباله ای به طول ۱۵ بیت برای ترکیب این ۹ پیام شده اند . آیا شما می توانید دنباله ای به طول ۱۴ یا کم تر بیابید که شامل همه ی این ۹ پیام باشد ؟



شکل ۲. نحوه‌ی ترکیب پیام دو مأمور

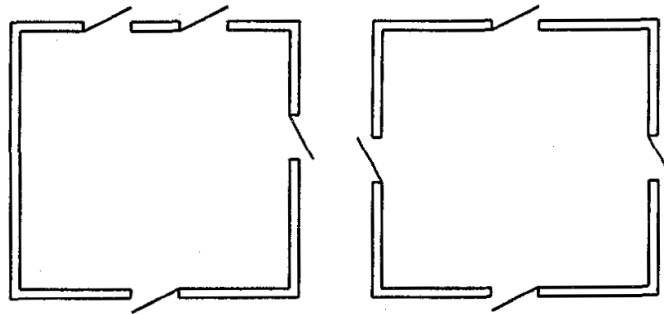
۲. فرض کنید تعداد ماموران این شبکه از ۹ نفر به ۱۴ نفر افزایش پیدا کرده است. آیا می‌توانید دنباله‌ای ۱۹ بیتی پیدا کنید که شامل هر مجموعه‌ی ۱۴ تایی دلخواه از پیام‌های ۴ بیتی باشد؟
۳. آیا می‌توانید یک دنباله‌ی ۱۸ بیتی بیابید که ۱۴ دنباله‌ی ۴ بیتی مشخص، که از قبل به شما داده شده‌اند، زیر دنباله‌های آن باشند؟ به تفاوت سوال و سوال قبل دقت کنید. در سوال قبل دنباله‌ی ۱۹ بیتی باید شامل هر مجموعه دلخواه از دنباله‌های ۴ بیتی باشد ولی در این سوال ۱۴ دنباله داده شده‌اند که دنباله‌ی ۱۸ بیتی باید شامل هر یک از آن‌ها باشد. نشان دهید که بدون توجه به این که ۱۴ دنباله‌ی انتخاب شده، چه دنباله‌هایی هستند می‌توانید دنباله‌ی ۱۸ بیتی مورد نظر را تشکیل دهید.
۴. نشان دهید مجموعه‌هایی از ۱۴ دنباله‌ی ۴ بیتی وجود دارند که هیچ دنباله‌ای به طول ۱۷ بیت یا کم‌تر شامل همه‌ی آن‌ها نیست.

مسئله ۳. معماری نظامی

ارتش از یک معمار خواسته است که یک ساختمان نظامی با مشخصات زیر طراحی کند. این ساختمان باید از ۴۱ اتاق مربع شکل تشکیل شده باشد. برای هر اتاق حداکثر می‌توان ۴ عدد در گذاشت و با توجه به این که نسبت اضلاع هر اتاق به ابعاد در بسیار بزرگ است، می‌توان درها را در هر محل دلخواه به جز گوشه‌های اتاق قرار داد. ضمناً با توجه به مشخصات این ساختمان باید بتوان از هر اتاق با عبور از ۶ در به هر اتاق دیگر رسید. به عبارت دیگر باید بتوان از هر اتاق با عبور از ۵ اتاق به هر اتاق دلخواه رسید و در طول حرکت نباید از هیچ راه رو یا فضای دیگری عبور کرد (شکل ۳).

۱. آیا می توانید به این معمار کمک کنید و ساختمانی با مشخصات بالا طراحی نمایید؟

۲. فرض کنید اتاق های ساختمان به جای مربع به شکل مستطیل باشند به طوری که نسبت طول به عرض هر مستطیل را بتوان هر مقدار دلخواهی گرفت ، ولی تمام مستطیل ها هم اندازه هستند . بقیه مشخصات تغییری نکرده است . در هر اتاق می توان حداکثر ۴ عدد در در محل های دلخواه به جز گوشه ها گذاشت و مستطیل ها را می توان در هر جهتی قرار داد . آیا می توانید ساختمانی با ۵۰ اتاق یا بیش تر طراحی کنید که از هر اتاق بتوان با عبور از حداکثر ۵ اتق دیگر به هر اتاق دلخواه دیگر رسید ؟ ساختمانی با ۶۰ اتاق یا بیشتر چه طور؟ (در صورت عدم موفقیت ، نیازی به اثبات نیست !)



شکل ۳. اتاق های مربع شکل با حداکثر ۴ در. درها را می توان هر جای دلخواه مگر در گوشه ها قرار داد.

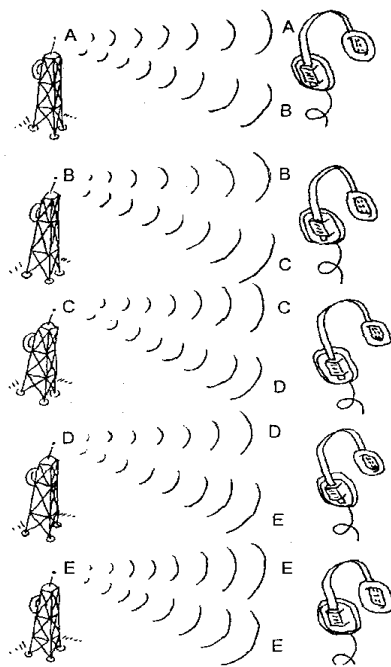
مسئله ۴ . پژوهاک

انتقال امواج رادیویی در خشکی و دریا همیشه یکی از مسائل مهم در امور نظامی بوده و هست . مخصوصا ارتباط بین زیر دریایی ها و ماشین های جنگی مخصوص خشکی ، یکی از مشکلات عمده ی ارتباطات نظامی است . چرا که انعکاس امواج رادیویی در سطح آب دریا باعث ایجاد اختلال در دریافت پیام های رادیویی می شود . سرهنگ ای واز متخصص ارتباطات نظامی، سال گذشته طرح جدیدی پیشنهاد کرد که در آن از پنج تُن صدای مختلف A ، B ، C ، D ، E برای انتقال پیام ها استفاده می شد . مزیت این روش نسبت به انتقال پیام از طریق مورس در این است که امکان انعکاس صدای نقطه و اشتباه گرفتن آن با تیره در این روش وجود ندارد .

این طرح به عنوان یک شیوه ی موفق در بیشتر ابزار های جنگی جای گزین روش های قبلی شد . به نظر می رسید که هیچ مشکل خاصی وجود ندارد ولی چند ماه پیش یکی از زیر دریایی ها پیام $BCCAD$ را که به معنی << همه چیز آرام است >> را به صورت $CCDBE$ دریافت کرد که معنایش << آماده باش کامل برای جنگ >> بود .

بعد از این اشتباه بسیار خطرناک و پس از مواخذه ی شدید ، از سرهنگ ای واز خواسته شد که علت این اشتباه را بیابد و در صورت امکان آن را رفع کند . آزمایش هایی که زیر نظر او انجام شد نشان داد که ممکن است انعکاس امواج از سطح دریا در شرایط خاصی تغییراتی در تُن های فرستاده شده ایجاد مند ، به طوری که تُن A ممکن است به صورت A یا B ، تُن B به صورت B یا C ، تُن C به صورت C یا D ، تُن D به صورت D یا E تُن E فقط به صورت E دریافت می شود (شکل ۴ را ببینید) .

با توجه به این که تعویض سیستم های ارتباطی کل ارتش هزینه ی بسیار زیادی در بر دارد ، سرهنگ ای واز تصمیم گرفت از همان تُن های قبلی استفاده کند با این تفاوت که به جای هر تُن خاص از تُن دیگر یا دنباله ای از تُن ها استفاده شود به طوری که احتمال بروز اختلال از بین برود . ضمناً او دریافت که تُن B بیش تر از سایر تُن ها استفاده می شود . تُن های A ، C و D تقریباً به یک اندازه کاربرد دارند و E کم تر از بقیه به کار می رود



شکل ۴. علایم ارسالی ممکن است اشتباه تفسیر شوند. مثلاً یک بار $BCCAD$ به صورت $CCDBE$ تفسیر شد.

۱. دنباله ای از n ها را پیدا کنید که جای گزین هر n شود (مثلا به جای B از AB استفاده شود) به طوری که احتمال اختلال در پیام ها از بین برود. همچنین متوسط طول پیام ها باید کمینه باشد و از مکث بین n ها استفاده نشود.

۲. تعدادی از زیر دریایی ها در شرایط یکسان خاصی به دلیل پژواک، برخی حروف را دو بار پیاپی دریافت می کنند. آیا می توانید نحوه ی کدگذاری ای پیدا کنید که این مشکل نیز از بین برود؟ این بار نیز باید متوسط طول پیام ها کمینه باشد.