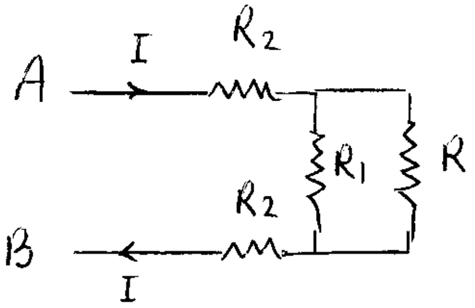
مسئله ۱)



آ)

$$R = 2R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1}$$

$$R^2 - 2R_2R - 2R_1R_2 = 0$$

$$\boxed{R = R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}} \qquad (1)$$

ب)

$$I = \frac{V_0}{R} \quad , \quad V_{A_1B_1} = V_0 - 2R_2 I$$

$$\boxed{V_1 = V_0\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)}$$

پ)

$$V_2 \equiv V_{A_2B_2} = V_1\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right) = V_0\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2$$

$$\boxed{V_n \equiv V_{A_nB_n} = V_0\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^n}$$

ت) توان مصرفی در n امین R_1 را با $P_n^{(R_1)}$ نشان می‌دهیم

$$P_n^{(R_1)} = \frac{V_n^2}{R_1} = \frac{V_0^2}{R_1}\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

و مجموع توان مصرفی در همهٔ R_1 ها:

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(R_1)} = \frac{V_0^2}{R_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

$$= \frac{V_0^2}{R_1}\,\frac{\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2} \qquad (2)$$

با قرار دادن R از معادله (۱) در (۲) و ساده کردن جواب:

$$\boxed{P_1 = \frac{V_0^2\left(R_1 + R_2 - \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}\right)}{2R_1\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}}$$

ث)

توان کل مصرفی در مدار

$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{V_0^2}{R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}$$

پس از ساده کردن y در معادله

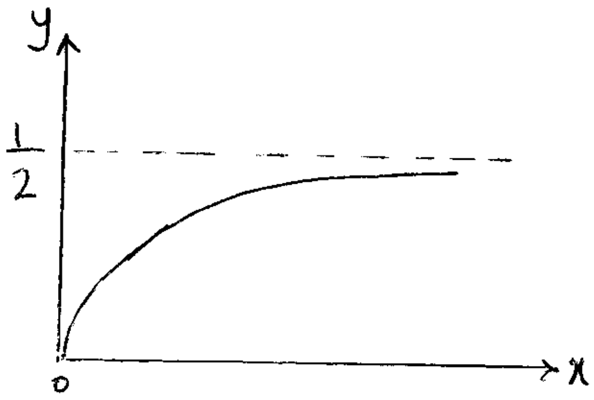
$$y = \frac{P_1}{P}$$

به نتیجه زیر می‌رسیم

$$y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}\right)$$

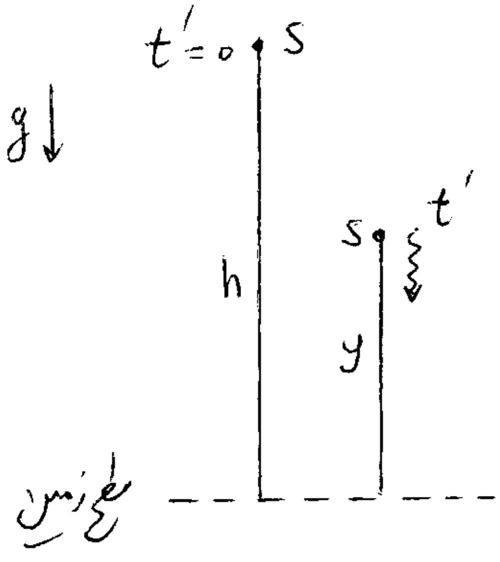
اگر $\frac{R_1}{R_2}$ را x بنامیم $x = \frac{R_1}{R_2}$ و

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right)}$$



مسئله ۲)

آ) چشمه در لحظه $t'=0$ در ارتفاع h از سطح زمین و در لحظه t' در ارتفاع y از سطح زمین است و سرعت آن v_s است



$$v_s = g t' \quad \text{و} \quad y = h - \frac{1}{2} g t'^2$$

صوت در لحظه t' ارسال می‌شود و در لحظه t به گیرنده روی زمین می‌رسد

$$t = t' + \frac{y}{u}$$

از دو معادله اخیر

$$g t'^2 - 2ut' + 2ut - 2h = 0$$

$$\boxed{t' = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 2gh - 2ugt}}{g}}$$

ب)

$$\boxed{v_s(t) = u - \sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}}$$

پ)

$$f(t) = f_s \frac{u}{u - v_s(t)}$$

$$\boxed{f(t) = f_s \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}}}$$

ت) داریم $\frac{1}{f^2(t)} = \frac{1}{f_s^2}\left(1 + \frac{2gh}{u^2} - \frac{2gt}{u}\right)$ در نتیجه

$$\boxed{A = \frac{1}{f_s^2}\left(1 + \frac{2gh}{u^2}\right) \quad , \quad B = -\frac{2g}{u f_s^2}}$$

مسئله ۳)

آ)

$$\boxed{\begin{aligned} D &= (h-y_1)+\pi R+(h-y_4)\\ d &= (y_4-y_2)+\pi r+(y_4-y_3)\end{aligned}}$$

ب)

$$\boxed{\begin{aligned} D &= \left(h-\tfrac{1}{2}a_1t^2-y_{10}\right)+\pi R+\left(h-\tfrac{1}{2}a_4t^2-y_{40}\right)\\ d &= \left(\tfrac{1}{2}a_4t^2+y_{40}-\tfrac{1}{2}a_2t^2-y_{20}\right)+\pi r+\left(\tfrac{1}{2}a_4t^2+y_{40}-\tfrac{1}{2}a_3t^2-y_{30}\right)\end{aligned}}$$

پ) روابط قسمت آ) برای لحظه $t=0$ نیز باید درست باشند یعنی

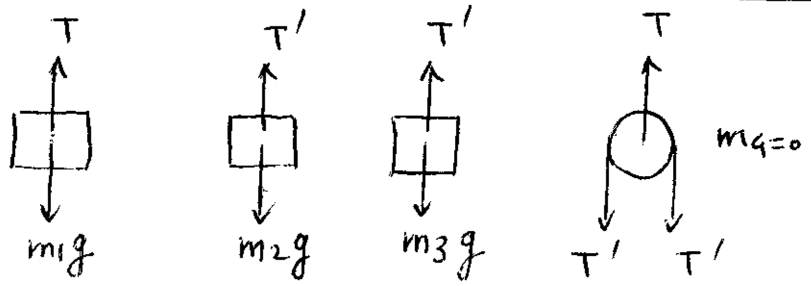
$$D=(h-y_{10})+\pi R+(h-y_{40})$$

$$d=(y_{40}-y_{20})+\pi r+(y_{40}-y_{30})$$

از مقایسه با روابط قسمت ب) باید

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}a_1t^2-\frac{1}{2}a_4t^2=0\\ a_4t^2-\frac{1}{2}a_2t^2-\frac{1}{2}a_3t^2=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}a_1+a_4&=0\\ 2a_4-a_2-a_3&=0\end{aligned}}\Rightarrow -2a_1-a_2-a_3=0 \quad (1)$$

ت) نمودار جسم آزاد



$$\underset{(2)}{T-m_1g=m_1a_1}\ ,\ \underset{(3)}{T'-m_2g=m_2a_2}\ ,\ \underset{(4)}{T'-m_3g=m_3a_3}\ ,\ T-2T'-(0)g=(0)a_4 \Downarrow T'=T/2$$

اگر معادلات (۲) و (۳) و (۴) را به ترتیب در $2m_2m_3$ ، m_1m_3 ، m_1m_2 ضرب و سپس با هم جمع کنیم، با توجه به (۱) خواهیم داشت

$$2m_2m_3(T-m_1g)+m_1m_3\left(\frac{T}{2}-m_2g\right)+m_1m_2\left(\frac{T}{2}-m_3g\right)=0$$

$$\boxed{T=\frac{8m_1m_2m_3g}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}\ ,\quad T'=\frac{T}{2}}$$

با قرار دادن T و T' در معادلات (۲) و (۳) و (۴):

$$a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}\, g \quad , a_4 = -a_1$$

$$a_2 = \frac{3m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}\, g$$

$$a_3 = \frac{3m_1m_2 - m_1m_3 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}\, g$$

ث) برای اینکه $a_2 > 0$ باید

$$\boxed{\frac{3}{m_2} > \frac{1}{m_3} + \frac{4}{m_1}}$$

ج) وقتی $y_{20} = y_{30}$: $y_{20} + \frac{1}{2}(d - \pi r) = y_{40}$

می‌خواهیم $y_2(t) = y_4(t) - r$

$$\frac{1}{2} a_2 t^2 + y_{20} = \frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - r$$

درنتیجه

$$(a_2 - a_4) t^2 = d - r(2+\pi)$$

$$\frac{2(m_1m_3 - m_1m_2)\, g}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}\, t^2 = d - r(2+\pi)$$

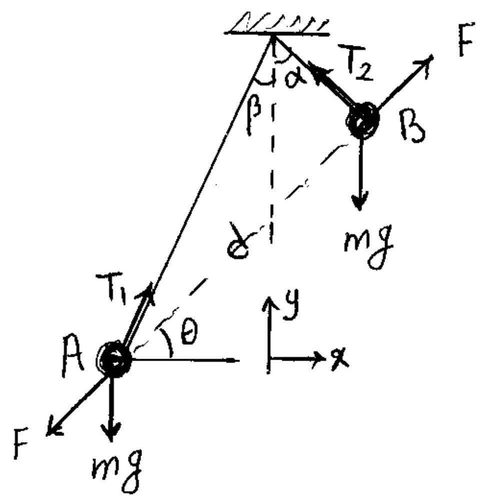
که باید $m_3 > m_2$.

درنتیجه:

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{d - r(2+\pi)}{2g} \; \frac{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}{m_1(m_3 - m_2)}}}$$

مسئله ۴)

آ)



برای جرم m سمت راستی

$$\begin{cases} x: & F\cos\theta - T_2\sin\alpha = 0 & (1) \\ y: & F\sin\theta + T_2\cos\alpha - mg = 0 & (2) \end{cases}$$

برای جرم m سمت چپی

$$\begin{cases} x: & -F\cos\theta + T_1\sin\beta = 0 & (3) \\ y: & -F\sin\theta + T_1\cos\beta - mg = 0 & (4) \end{cases}$$

ب) با قرار دادن T_2 از معادله (۱) در معادله (۲)

$$F\left(\sin\theta + \cos\theta\cot\alpha\right) = mg \qquad (5)$$

و با قرار دادن T_1 از معادله (۳) در معادله (٤)

$$F\left(-\sin\theta + \cos\theta\cot\beta\right) = mg \qquad (6)$$

از تقسیم معادلات (۵) و (۶)

$$\boxed{\tan\theta = \frac{1}{2}\left(\cot\beta - \cot\alpha\right)} \qquad (7)$$

پ)

$$\boxed{\begin{aligned} d\sin\theta &= L_1\cos\beta - L_2\cos\alpha \\ d\cos\theta &= L_1\sin\beta + L_2\sin\alpha \end{aligned}}$$

از تقسیم دو معادله

$$\tan\theta = \frac{L_1\cos\beta - L_2\cos\alpha}{L_1\sin\beta + L_2\sin\alpha} \qquad (8)$$

ت) از مساوی قرار دادن معادلات (۷) و (۸) و پس از ساده کردن

$$\boxed{\sin\beta = \frac{L_2}{L_1}\sin\alpha} \qquad (9)$$

ث) با قرار دادن $\sin\beta$ از معادله (۹) در معادله (۷)

$$\tan\theta = \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1-\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\sin^2\alpha} - \cos\alpha\right) \qquad (۱۰)$$

با حذف F بین دو معادله (۱) و (۲)

$$T_2 = \frac{mg}{\tan\theta\sin\alpha + \cos\alpha} \qquad (۱۱)$$

و با حذف F بین دو معادله (۳) و (۴) و استفاده از معادله (۷)

$$T_1 = \frac{mg}{\tan\theta\sin\alpha + \cos\alpha}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (۱۲)$$

با قرار دادن (۱۰) در (۱۱)

$$\boxed{T_2 = \frac{2mg}{\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1-\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\sin^2\alpha} + \cos\alpha}} \qquad (۱۳)$$

با قرار دادن (۱۰) در (12) و استفاده از معادله (۹)

$$\boxed{T_1 = \frac{2mg\left(\frac{L_1}{L_2}\right)}{\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1-\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\sin^2\alpha} + \cos\alpha}} \qquad (۱۴)$$

ج) به ازای $L_1 = L_2$

$$\boxed{T_1 = T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha}}$$

ح) به ازای $\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $\beta = \frac{\pi}{6}$ از معادله (۹) خواهیم داشت $\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

با قرار دادن $\frac{L_2}{L_1}$ در معادلات (۱۳) و (۱۴) و $\alpha = \frac{\pi}{3}$

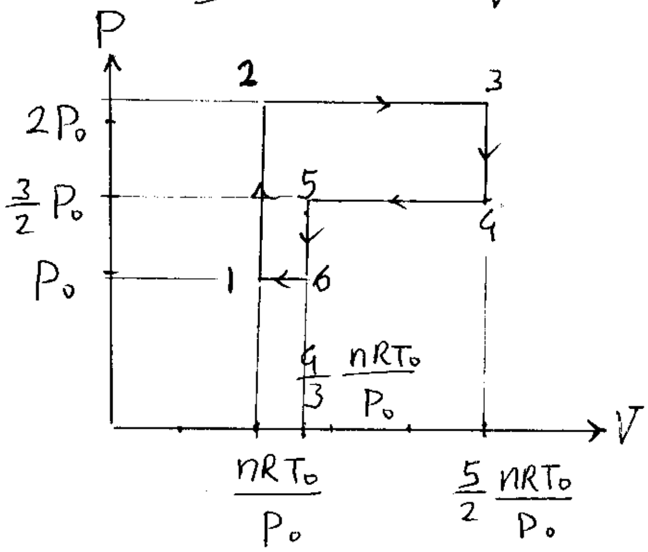
$$T_2 = \frac{2mg}{\sqrt{3-\sin^2\alpha} + \cos\alpha} = \boxed{mg} \quad \text{و} \quad T_1 = \frac{2\sqrt{3}\,mg}{\sqrt{3-\sin^2\alpha} + \cos\alpha} = \boxed{\sqrt{3}\,mg}$$

از معادله (۱۰) به دست می‌آید $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و در نتیجه

$$\boxed{F = T_2 = mg}$$

مسئله ۵)

آ) با توجه به معادله گاز کامل $PV = nRT$ در نمودار P برحسب T شیب (ضریب زاویه)، $\frac{nR}{V}$ است، بنابراین خطوط دارای شیب یکسان هم حجم هستند



نقطه (۱) $\left(P_0 \,,\, \frac{nRT_0}{P_0} \,,\, T_0\right)$

نقطه (۲) $\left(2P_0 \,,\, \frac{nRT_0}{P_0} \,,\, 2T_0\right)$

نقطه (۳) $\left(2P_0 \,,\, \frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} \,,\, 5T_0\right)$

نقطه (۴) $\left(\frac{3}{2}P_0 \,,\, \frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} \,,\, \frac{15}{4}T_0\right)$

نقطه (۵) $\left(\frac{3}{2}P_0 \,,\, \frac{4}{3}\frac{nRT_0}{P_0} \,,\, 2T_0\right)$

نقطه (۶) $\left(P_0 \,,\, \frac{4}{3}\frac{nRT_0}{P_0} \,,\, \frac{4}{3}T_0\right)$

ب) کار چرخه منفی مساحت داخل چرخه، $|W|$ در صفحه $P-V$ است

$$|W|_{\text{چرخه}} = \left(\frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0}\right)\frac{P_0}{2} + \left(\frac{4}{3}\frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0}\right)\frac{P_0}{2}$$

$$\boxed{|W| = \frac{11}{12}nRT_0}$$

W چرخه منفی است.

پ) اگر Q گرمای داده شده به گاز در یک چرخه باشد

در فرآیندهای $1 \to 2$ و $2 \to 3$ گاز از محیط گرما می‌گیرد:

$$Q = Q_{1\to 2} + Q_{2\to 3}$$

اما طبق قانون اول ترمودینامیک

$$U_2 - U_1 = W_{1\to 2} + Q_{1\to 2}$$

$$\frac{3}{2}nR(2T_0) - \frac{3}{2}nRT_0 = 0 + Q_{1\to 2} \Rightarrow Q_{1\to 2} = \frac{3}{2}nRT_0$$

$$U_3 - U_2 = W_{2\to 3} + Q_{2\to 3}$$

$$\frac{3}{2}nR(5T_0) - \frac{3}{2}nR(2T_0) = -(2P_0)\left(\frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0}\right) + Q_{2\to 3}$$

$$Q_{2\to 3} = \frac{15}{2}nRT_0$$

بنابراین

$$Q = \frac{3}{2}nRT_0 + \frac{15}{2}nRT_0$$

$$\boxed{Q = 9nRT_0}$$

ت)

$$\text{بازده} = \frac{|W|_{\text{چرخه}}}{Q_{\text{گرمای داده شده}}} = \frac{11}{12}\,\frac{1}{9} \approx \%10$$

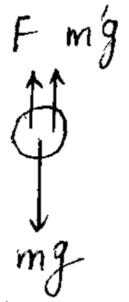
$$\boxed{\text{بازده} = \frac{11}{108} \approx \%10}$$

مسئله ۶)

آ) $\frac{F}{A} = \eta \left|\frac{\Delta u}{\Delta y}\right| \Rightarrow Pa = (\eta\ \text{واحد}) \left(\frac{\frac{m}{s}}{m}\right)$

$$\boxed{(\eta\ \text{واحد}) = Pa \cdot s}$$

ب) بعد از رسیدن به سرعت حد شتاب جسم صفر است، در نتیجه



$$F + m'g - mg = 0 (a)$$

$$6\pi r \eta u_{\text{حد}} + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 0$$

$$\boxed{u_{\text{حد}} = \frac{2}{9}\frac{(\rho - \rho')g}{\eta} r^2}$$

F : نیروی اصطکاک

$m'g$: نیروی شناوری

mg : نیروی گرانش

پ) برای قطره آب به شعاع $r = 0.2\ mm$ که در هوا سقوط می‌کند $\rho' = \rho_a$

$$u_{\text{حد}} = \frac{2}{9}\frac{(\rho_w - \rho_a)g}{\eta} r^2 = \frac{2}{9}\frac{(1000 - 1.2)(9.8)}{1.8 \times 10^{-5}} (2 \times 10^{-4})^2$$

$$\boxed{u_{\text{حد}} = 4.8\ m/s}$$

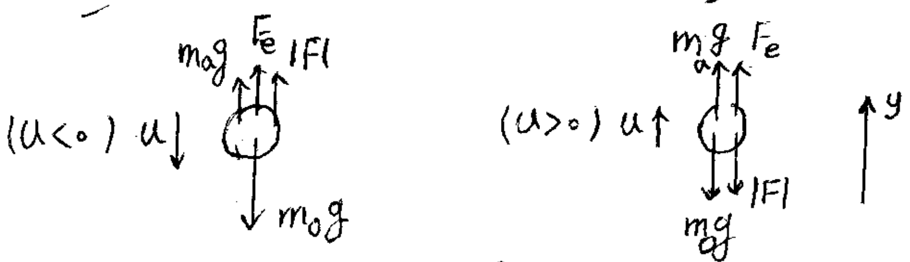
برای ویروس کرونا به شعاع $r = 0.06\ \mu m$

$$\boxed{u_{\text{حد}} = 0.44\ \mu m/s}$$

ت) با توجه به نمودار داده شده در صورت مسئله

در حالت تعلیق که $u = 0$ است، نیروی الکتریکی وارد بر قطره روغن باید به سمت بالا باشد، بنابراین بار الکتریکی قطره منفی است که آن را $-|q|$ می‌گیریم.

نمودار جسم آزاد برای حرکت قطره به سمت بالا و پایین:



در هر دو حالت: $|q|\frac{V}{d} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g - 6\pi \eta r u_{\text{حد}} = 0$

$$\boxed{u_{\text{حد}} = \frac{|q|}{6\pi\eta r}\frac{V}{d} - \frac{2}{9}\frac{(\rho_o - \rho_a)g}{\eta} r^2}$$

از آنجا که $\rho_a \ll \rho_0$ است از ρ_a در مقابل ρ_0 چشم پوشی می‌کنیم. با توجه به نمودار:

به ازای $V=0$ داریم $u_{\text{ص}} = -u_0$ ، در نتیجه

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{9}{2}\,\frac{\eta u_0}{\rho_0 g}}}$$

به ازای $u_{\text{ص}} = 0$ داریم $V = V_0$ ، در نتیجه

$$|q| = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g \frac{d}{V_0}$$

با قرار دادن مقدار r به دست می‌آوریم:

$$\boxed{|q| = \frac{18\pi d}{V_0}\sqrt{\frac{\eta^3 u_0^3}{2\rho_0 g}}}$$

ث) با توجه به نمودار $u_0 = 50\,\mu m/s$ و $V_0 = 195\,V$ ، در نتیجه:

$$r = \sqrt{\frac{9}{2}\frac{\eta u_0}{\rho_0 g}} = 3\sqrt{\frac{(1.8\times10^{-5})(5\times10^{-5})}{(2)(880)(9.8)}} = \frac{(3)(3\times10^{-5})}{4\sqrt{(110)(9.8)}} \approx \frac{9\times10^{-5}}{(4)(33)}$$

$$= \frac{30}{44}\,\mu m \Rightarrow \boxed{r \approx 0.68\,\mu m}$$

$$|q| = \frac{6\pi\eta u_0 d}{V_0} r = \frac{(6)(3.14)(1.8\times10^{-5})(5\times10^{-5})(8\times10^{-3})(30\times10^{-6})}{(195)\times(44)}$$

$$= \frac{(6)(3.14)(9)(20)}{65\times11}\times10^{-19}$$

$$= \left(\frac{54}{11}\right)\left(\frac{6.28}{6.5}\right)\times10^{-19}$$

$$\approx (5)(9.6)\times10^{-19}\,C = 4.8\times10^{-19}\,C$$

$$\boxed{|q| = 4.8\times10^{-19}\,C = 3e}$$