محاسبه اثر خطای قطبی کردن

احسان ابراهیمیان

چکیده

برای این که یک موتور ردیاب بتواند ستارگان آسمان را دنبال کند نیاز به قطبی کردن دقیق محور موتور ردیاب با محور چرخش زمین وجود دارد. اما در عمل هرگز نمی‌توان این کار را کاملا دقیق انجام داد و همیشه خطایی کوچک باقی می‌ماند. در این نوشته کوتاه سعی می‌کنیم به کمک ماتریس‌های دوران مقدار جابه‌جایی ستاره‌ها در میدان دید به دلیل خطای قطبش را محاسبه کنیم. نشان خواهیم داد که مقدار این خطا در t ثانیه معمولا از مرتبه $\epsilon \times \omega t$ که ϵ میزان خطای قطبی کردن و ω سرعت دوران زمین است (واحد زاویه‌ها همگی رادیان هستند). نتیجه نهایی در رابطه (۲۴) دیده می‌شود.

فرض کنید مکان ستارگان روی کره سماوی ثابت (بُعد و میل) با بردار $\mathbf{r}_0$ نشان داده شود. اگر محور دوران (قطب شمال سماوی) را با $\mathbf{p}$ نشان دهیم آنگاه مکان ظاهری ستارگان در حال چرخش را می‌توان با اعمال ماتریس دوران به اندازه ωt حول محور $\mathbf{p}$، یعنی $\hat{R}(\mathbf{p}, \omega t)$، روی بردار $\mathbf{r}_0$ به دست آورد. در این صورت از دید یک ناظر زمینی، مکان ستاره در زمان‌های مختلف به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{r}(t) = \hat{R}(\mathbf{p}, \theta)\mathbf{r}_0; \quad \theta = \omega t \tag{۱}$$

دقت کنید که در اینجا $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ هر دو بردار یکه هستند و اندازه آنها برابر واحد است.

اضافه کردن یک مقر ردیاب برای جبران حرکت زمین در واقع معادل ضرب کردن $\mathbf{r}(t)$ در یک ماتریس دوران جدید، $\hat{R}(\mathbf{n}, \theta')$ است که قطبی کردن دقیق به معنی $\mathbf{n} = \mathbf{p}$ است و کار کردن دقیق موتور به معنی $\theta' = -\theta$ است. بنا بر این بردار مکان نهایی ستاره در دستگاه دنبال‌کننده به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{r}_f = \hat{R}(\mathbf{n}, \theta')\hat{R}(\mathbf{p}, \theta)\mathbf{r}_0 \tag{۲}$$

که در صورت موفقیت در قطبی کردن دقیق و اگر مکان اولیه ستاره در کره سماوی، $\mathbf{r}_0$، ثابت باشد آنگاه بردار $\mathbf{r}_f$ نیز باید ثابت باشد، در واقع شرایط قطبش دقیق به معنی این است که $\hat{R}(\mathbf{n},\theta') = \hat{R}^{-1}(\mathbf{p},\theta)$ که نتیجه می‌دهد $\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_0$ است. اما در واقعیت وضعیت کاملا ایده‌آل نیست و معمولا در جهت $\mathbf{n}$ و سرعت کار موتور خطاهایی وجود دارد که آنها را به صورت زیر کمّی می کنیم:

$$\mathbf{n} = \mathbf{p} + \epsilon \quad ; |\epsilon| \ll 1, \epsilon.\mathbf{p} = 0 \tag{۳}$$
$$\theta' = -\omega t + \mathrm{er(t)} \quad ; |\dot{\mathrm{er}}| \ll \omega, \mathrm{er}(0) = 0$$

در اینجا ϵ خطای قطبی بودن محور ردیاب را نشان می‌دهد و $\mathrm{er(t)}$ نشانگر خطای چرخش موتور تلسکوپ است که فرض می کنیم اثر آن در طول زمان کوچک اما غیر صفر است. دقت کنید که ϵ یک بردار با اندازه کوچک و عمود بر قطب (و در نتیجه جهت آن نشانگر ناحیه‌ای روی استوای سماوی است اما اندازه کوچک آن باعث می‌شود در واقع بیانگر ناحیه طراف قطب شمال سماوی باشد). با فرض غیر صفر بودن خطای قطبی بودن و خطای موتور، ϵ و er، دیگر $\mathbf{r}_f$ دقیقا برابر $\mathbf{r}_0$ نیست و انحراف جزئی به مرور زمان ایجاد می‌شود. اما برای محاسبه اثر این دو باید رابطه‌ی صریحی برای ماتریس دوران داشته باشیم. پس از به دست آوردن رابطه ماتریس دوران می‌توان به راحتی اثر خطای دنبال کردن را محاسبه کرد.

برای یافتن ماتریس دوران دلخواه می‌توان از یک دوران کوچک شروع کرد. فرض کنید زاویه $\delta\alpha$ کوچک است، اگر بردار دلخواه $\mathbf{A}$ را به اندازه $\delta\alpha$ حول $\mathbf{n}$ دوران دهیم برای بردار دوران یافته، $\mathbf{A}'$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \delta\alpha(\mathbf{A} \times \mathbf{n}) \tag{۴}$$

به عبارت دیگر:

$$A'_i = A_i + \delta\alpha\varepsilon_{ijk}A_j n_k \tag{۵}$$

که ε_{ijk} نماد کاملا پادمتقارن لوی چیویتا است و قاعده جمع زنی اندیس‌های هم‌نام در اینجا استفاده شده است. اگر ماتریس‌های $L(i)$ را به صورت زیر تعریف کنیم که در واقع مولدهای دوران هستند:

$$L(i)_{jk} = \varepsilon_{ijk}; \quad \mathbf{n}.\mathbf{L} = n_1 L(1) + n_2 L(2) + n_3 L(3) \tag{۶}$$

آنگاه می‌توان رابطه دوران کوچک را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{I} + \delta\alpha\, \mathbf{n}.\mathbf{L})\mathbf{A} \tag{۷}$$

با پشت سر هم قرار دادن این دوران‌های کوچک می‌توان ماتریس دوران کامل به اندازه زاویه α حول $\mathbf{n}$ را به صورت کامل نوشت:

$$\hat{R}(\mathbf{n},\alpha)=e^{\alpha\mathbf{n}.\mathbf{L}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}(\mathbf{L}.\mathbf{n})^k \tag{۸}$$

با توجه به تعریف L می‌توان توان‌های $\mathbf{n}.\mathbf{L}$ را محاسبه کرد:

$$(\mathbf{n}.\mathbf{L})_{ij}=n_k\varepsilon_{kij} \tag{۹}$$

$$(\mathbf{n}.\mathbf{L})^2_{ij}=n_k\varepsilon_{kil}\varepsilon_{mlj}n_m=n_jn_i-\delta_{ij} \tag{۱۰}$$

$$(\mathbf{n}.\mathbf{L})^3=-\mathbf{n}.\mathbf{L} \tag{۱۱}$$

$$(\mathbf{n}.\mathbf{L})^{2k}=(-1)^k(\delta_{ij}-n_in_j) \tag{۱۲}$$

$$(\mathbf{n}.\mathbf{L})^{2k+1}=(-1)^k(\mathbf{n}.\mathbf{L}) \tag{۱۳}$$

در نتیجه فرم کلی ماتریس دوران به دست می‌آید:

$$\hat{R}(\mathbf{n},\alpha)_{ij}=\delta_{ij}\cos\alpha+(\mathbf{n}.\mathbf{L})_{ij}\sin\alpha+n_in_j(1-\cos\alpha) \tag{۱۴}$$

همچنین مفید است که اثر ماتریس دوران را روی یک بردار دلخواه بنویسیم:

$$\hat{R}(\mathbf{n},\alpha)\mathbf{A}=\mathbf{A}\cos\alpha+(\mathbf{A}\times\mathbf{n})\sin\alpha+\mathbf{n}(\mathbf{n}.\mathbf{A})(1-\cos\alpha) \tag{۱۵}$$

به کمک این روابط تحلیلی به راحتی می‌توان اثر خطای قطبی کردن و خطای دنبال کردن را لحاظ کرد. برای این کار باید ربطه (۲) را ب با استفاده از مفروضات (۳) باز کنیم، ابتدا می‌توان ماتریس $\hat{R}(\mathbf{n},\theta')$ به صورت زیر باز کرد:

$$\hat{R}(\mathbf{n},\theta')\approx\hat{R}(\mathbf{p},-\theta+\mathrm{er})-\epsilon.\mathbf{L}\sin\theta+(\epsilon_\mathrm{i}\mathrm{p_j}+\epsilon_\mathrm{j}\mathrm{p_i})(1-\cos\theta) \tag{۱۶}$$

در اینجا ما اثر خطای دوران موتور را از خطای قطبی به صورت خطی جدا کرده‌ایم و خطای هر دو را تا مرتبه خطی محاسبه خواهیم کرد. حال با باز کردن رابطه (۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_f=&\hat{R}(\mathbf{n},\theta')\hat{R}(\mathbf{p},\theta)\mathbf{r}_0\\ =&\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_0\times\mathbf{p}\sin\mathrm{er}+\\ &(-\epsilon.\mathbf{L}\sin\theta+(\epsilon_ip_j+\epsilon_jp_i)(1-\cos\theta)).(\cos\theta\mathbf{r}_0+(\mathbf{r}_0\times\mathbf{p})\sin\theta+\mathbf{p}(\mathbf{p}.\mathbf{r}_0)(1-\cos\theta))\end{aligned} \tag{۱۷}$$

با تعریف خطای دنبال کردن به صورت $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r_f} - \mathbf{r_0}$ خواهیم داشت:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}\sin(\mathrm{er}) - \epsilon \times \mathbf{r}_0 \sin\theta\cos\theta - (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}) \times \epsilon\sin^2\theta - \mathbf{p} \times \epsilon(\mathbf{p}.\mathbf{r_0})\sin\theta(1-\cos\theta) \tag{۱۸}$$

$$+ (1-\cos(\theta))\Big(\cos\theta(\epsilon(\mathbf{r_0}.\mathbf{p}) + \mathbf{p}(\mathbf{r_0}.\epsilon)) + \mathbf{p}\epsilon.(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{p})\sin\theta + \epsilon(\mathbf{p}.\mathbf{r_0})(1-\cos\theta)\Big)$$

$$= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}\sin(\mathrm{er}) - \epsilon \times \mathbf{r}_0 \sin\theta\cos\theta - \mathbf{p}(\epsilon.\mathbf{r_0})\sin^2\theta - (\mathbf{p} \times \epsilon)(\mathbf{p}.\mathbf{r_0})\sin\theta(1-\cos\theta) \tag{۱۹}$$

$$+ (1-\cos(\theta))\Big(\cos\theta(\mathbf{p}(\mathbf{r_0}.\epsilon)) + \mathbf{p}\epsilon.(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{p})\sin\theta + \epsilon(\mathbf{p}.\mathbf{r_0})\Big)$$

اگر جملات بالا را بر حسب جهت مرتب کنیم خواهیم داشت:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}\sin(\mathrm{er}) + \mathbf{r}_0 \times \epsilon\sin\theta\cos\theta \tag{۲۰}$$

$$+ \mathbf{p}(1-\cos\theta)(-\epsilon.\mathbf{r_0} + \epsilon.(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{p})\sin\theta) \tag{۲۱}$$

$$+ \vec{\epsilon}(1-\cos(\theta))(\mathbf{p}.\mathbf{r_0}) \tag{۲۲}$$

$$- (\mathbf{p} \times \epsilon)(\mathbf{p}.\mathbf{r_0})\sin\theta(1-\cos\theta) \tag{۲۳}$$

برای θهای کوچک خط اول مهمترین مرتبه جمله است و برای ستارگانی که قطبی نیستند جهت آن در راستای شمالی-جنوبی است اما مقدار آن برای ستارگانی که روی استوای سماوی و در راستای جهتی هستند که ϵ نشان می‌دهد، کوچک خواهد بود. برای ستارگان نزدیک قطب، ستارگان در جهت عمود بر خطای قطبی کردن حرکت می‌کنند. جمله خط دوم بیش از همه روی استوای سماوی مهم است و نزدیک قطب سهم تمام جملات آن صفر می‌شود، برعکس آن جمله خط سوم در نزدیکی قطبین اهمیت پیدا می‌کند اما هردوی آنها نسبت به θ مرتبه دو هستند (خط دوم جمله مرتبه ۳ هم دارد). اما خط آخر که جمله مرتبه ۳ است تنها در نزدیکی قطبین اهمیت پیدا می‌کند. با توجه به این که تقریبا همیشه θ ها کوچک هستند می‌توان رابطه خطا را بر حسب مرتبه θ نیز نوشت:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}\sin(\mathrm{er}) + \mathbf{r}_0 \times \epsilon\sin\theta\cos\theta \tag{۲۴}$$

$$+ (1-\cos\theta)\mathbf{r}_0 \times (\epsilon \times \mathbf{p})$$

$$(\epsilon.(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{p})\mathbf{p} - (\mathbf{p} \times \epsilon)(\mathbf{p}.\mathbf{r_0}))\sin\theta(1-\cos\theta)$$

در این حالت دیده می‌شود که جمله مرتبه دو زمانی که روی صفحه تشکیل شده و به وسیله $\mathbf{p}, \epsilon$ قرار داشته باشد بیشترین اثر را دارد و زمانی که نزدیک استوا و عمود بر جهت خطا باشد اثر آن قابل صرف نظر خواهد بود.

با این همه شانس کوچکتر بودن جمله مرتبه اول از جمله مرتبه دوم کم است چرا که جمله مرتبه اول فقط در محدوده‌های کوچکی روی استوای سماوی بسیار کوچک می‌شود. زمانی که ستاره نزدیک قطب قرار داشته باشد اثر جمله خطی بیشینه بوده و ستاره‌ها در جهتی عمود بر جهت خطای قطبش حرکت می‌کنند. خطای دنبال کردن موتور بیش از همه خود را در نزدیکی استوای سماوی نشان می‌دهد و نزدیکی قطبین اثر آن کم و کمتر می‌شود.

با تمام این محاسبات باید توجه داشت که در عکاسی واقعی نجومی تنها دلیل جا به جا شدن ستارگان حرکت زمین به دور خودش نیست، بلکه سهم اثرات جوی نیز مهم می‌شود که تنها راه مطمئن جبران آن استفاده از گایدر مناسب کامپیوتری و آزاد بودن حرکت هر دو محور بُعد و میل است.