«هو»

آنالیز ترکیبی = ترکیبیات = چگونه بدون شمارش بشماریم.

- اصل ضرب
- اصل جمع
- جایگشت
- ترتیب
- ترکیب

**اصل ضرب: و**

کت ۱، کت ۲، کت ۳ — پیراهن ۱، پیراهن ۲، پیراهن ۳

$۳ \times ۳ = ۹$

تهران $A \xrightarrow{۳} B$ (قم) $\xrightarrow{۲} C$ کاشان

$۳ \times ۲ = ۶$

**اصل جمع: یا** ← اگر از تهران به قم از راه ۱ ببریم ۲ راه داریم یا اگر از راه ۲ ببریم ۲ راه داریم تا به کاشان برسیم و اگر از راه ۳ ببریم ۲ راه داریم ⇐ $۲+۲+۲=۶$

① ۳ دانش آموز سال اول و ۴ دانش آموز سال دوم به تصادف در یک ردیف قرار می گیرند تعداد حالاتی که نفر وسطی، دانش آموز سال اول باشد چقدر است؟

ابتدا از خانه شرط شروع می کنیم.

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ $\Longrightarrow ۶! \times ۳$

۶ ۵ ۴ ۳حالت ۳ ۲ ۱

② سوال کنکور داخل ۹۰ - چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد متمایز (متفاوت) بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد.

اعداد فرد: ۱ ۳ ۵ ۷ ۹

○ ○ ○ ○ $\longrightarrow ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۹۶$

۴حالت ۴ ۳ ۲

③ به چند طریق می توان با ارقام ۳، ۶، ۴ و ۷ و ۱ یک عدد چهار رقمی (بدون تکرار) ساخت به طوری که همواره شامل رقم ۶ باشد.

روش اول: (۶) ← ○ ○ ○ ؛ ۴حالت ۳ ۲

$۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۹۶$

روش دوم: متمم گیری:

⑤ ④ ③ ② $\longrightarrow$ ۱۲۰ حالت

④ ③ ② ① $\longrightarrow$ ۲۴ حالت

$۱۲۰ - ۲۴ = ۹۶$

نکته: فاکتوریل: (!)

$\square ! = \square \times (\square - 1) \times \dots 1$

$۶! : ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \longrightarrow ۷۲۰$

$۵! : ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \longrightarrow ۱۲۰$

$۴! : ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \longrightarrow ۲۴$

$۳! : ۳ \times ۲ \times ۱ \longrightarrow ۶$

$۲! : ۲ \times ۱ \longrightarrow ۲$

$۱! : ۱ \longrightarrow ۱$

$۰! : ۱$

$$\frac{۸!}{۵!\,۳!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times \cancel{۵!}}{\cancel{۵!} \times ۶} = ۵۶$$

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \times \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1$$

$$\frac{۳! + ۲!}{۳!} = \frac{۶+۲}{۶} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

جایگشت، جای گشتن: به طور قرار گرفتن n شی متمایز کنار یکدیگر را جایگشت آن n شی گویند و برابر است با $n!$

مهربان ← م - ه - ر - ب - ا - ن ← $6!$

راد ← ر - ا - د ← $3!$

$ABC \xrightarrow{\text{۳ شی متمایز}} 3! = 6$

حالات $\underset{1}{\mathrm{Q}}\ \underset{2}{\mathrm{Q}}\ \underset{3}{\mathrm{Q}} \rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ حالات

جایگشت با تکرار: زادان ← $\frac{5!}{2!}$

مسلمانان ← م - س - ل - م - ا - ن - ا - ن $= \frac{8 \times 7!}{8} = 7!$ ; $\frac{8!}{2! \times 2! \times 2!}$

جایگشت به صورت دسته بندی:

$A, B, C, D, E \rightarrow 5! = 120$

A (B C) D E ← ابتدا داخل بسته را نمی‌توانیم ببینیم و بعد از نوشتن تعداد داخل بسته را می‌بینیم.

$4! \times 2!$

A (BC) (DE)

$3! \times 2! \times 2!$

ترتیب: تعداد انتخاب r شی از میان n شی و چیدمان آن r شی.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب: تعداد انتخاب r شی از میان n شی.

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$C(8,3) = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!}}{\cancel{5!} \times \cancel{3!}} = 56$$

$$\binom{10}{2} = \frac{9 \times \overset{5}{\cancel{10}}}{1 \times \cancel{2}} = 45$$

$$\binom{8}{3} = \frac{\cancel{6} \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 56$$

$$\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = \frac{10}{1} = 10$$

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$$

① دانش آموزی باید از میان ۱۰ سوال که پاسخ به ۳ تای اول آنها اجباری است به ۸ سوال پاسخ دهد، به چند روش این کار انجام می‌پذیرد.

س۱ س۲ س۳ س۴ س۵ س۶ س۷ س۸ س۹ س۱۰

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \times 7}{1 \times \cancel{2}} = 21$$

② در کیسه‌ای ۵ مهره قرمز و ۴ مهره سبز قرار دارد چند مدل سه تایی می‌توان از کیسه خارج نمود.

۳ سبز + ۳ قرمز + ۲ قرمز و ۱ سبز + ۲ سبز و ۱ قرمز

$$\binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{5}{1}\binom{4}{2} + \binom{4}{1}\binom{5}{2} = 84$$

$$4 + 10 + 40 + 30$$

$\longrightarrow 4 + 5 = 9$ مهره $\Rightarrow \binom{9}{3} = \frac{7 \times \overset{4}{\cancel{8}} \times \overset{3}{\cancel{9}}}{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3}} = 12 \times 7 = 84$ حالت

③ (سراسری خارج ۹۰) از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی به چند طریق می‌توان ۳ نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به طوری که حداقل دو نفر از آنها دانش‌آموز تجربی باشند. حداقل = لااقل = کم‌کم

حداکثر = بیش‌تر بیش‌تر

حداقل ۲ تجربی : ۲ تجربی + ۳ تجربی

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{2}\binom{3}{1} = 10 + 30 = 40$$

④ ۳ توپ سبز متمایز و ۶ توپ قرمز یکسان را به چند طریق می‌توان در یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ دو توپ سبز کنار هم نباشند.

۳ توپ سبز متمایز

تعداد جابجایی توپ قرمز یکسان تاثیری در جواب ندارد!!

$$\binom{7}{3} \times 3! \times 1$$

V•V•V•V•V•V•V

احتمال = اندازه‌گیری شانس

نظری = فقط یک بار

تجربی = چندین بار = تخمین شانس = تخمین احتمال

فراوانی نسبی

$0 \leq P(A) \leq 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{فضای تصادفی}}{\text{فضای نمونه‌ای}} = \frac{\text{حالت مطلوب}}{\text{کل حالات}}$$

نکته: فضای نمونه‌ای
- گسسته ←
  - هم‌شانس
  - غیرهم‌شانس
- پیوسته

۲ مهره همزمان → $n(S)$: $\binom{5}{2} = \frac{4\times 5}{1\times 2} = 10$

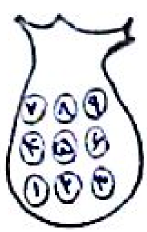
۲ مهره متوالی بدون جایگزینی → $\binom{5}{1}\binom{4}{1} = 20$

" " " " با " → $\binom{5}{1}\binom{5}{1} = 25$

$n(S)$ = کل حالات
- سکه = $2^n$
- تاس = $6^n$
- انتخاب مهره از کیسه = $C(n,2) = \binom{n}{2}$ ←

$n$ = تعداد پرتاب

① از کیسه‌ای شامل ۹ مهره متمایز یک مهره به تصادف اختیار می‌کنیم و بدون آنکه رویت شود کنار می‌گذاریم و سپس مهره‌ی دیگری به تصادف خارج می‌کنیم. تعداد فضای نمونه‌ای را برای مهره‌ی دوم خارج شده حساب کنید.



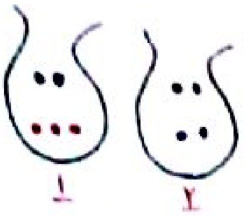
$\cancel{n(S)=8}$

$n(S)=9$ ✓

★ دزد آمد و هیچی نبرد!!!

★ بدون آنکه رویت شود = شانس انتخاب تغییر نمی‌کند

④ از دو ظرف زیر ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم فضای نمونه‌ای آن کدام است.




روش ۱ → $\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{2}\binom{4}{1}+\binom{4}{2}\binom{5}{1}=84$

$\underset{10}{\phantom{x}}\quad \underset{4}{\phantom{x}}\quad \underset{40}{\phantom{x}}\quad \underset{30}{\phantom{x}}$

روش ۲ → $\binom{9}{3}=84$

اگر ظرف ۱ و ۲ را یک ظرف فرض کرده و ۳ مهره را از داخل ۹ مهره خارج می‌کنیم

③ ظرفی ۴ مهره زرد و ۹ مهره سفید است از این ظرف مهره‌ای
- خارج می‌کنیم.
- به تصادف خارج می‌کنیم.

$n(S)=\{$ زرد ، سفید $\}=$ ۲ حالت

به تصادف ← $n(S)=\binom{13}{1}=13$ حالت

$n(S)=\square,\ \square \to 36$ حالت / $6^n=6^2=36$ حالت

۶ حالت

* دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

عدد دوم (پرتاب دوم) < عدد اول (پرتاب اول) → $\frac{15}{36}$

〃 〃 〃 < 〃 〃 〃 → $\frac{15}{36}$

〃 〃 〃 = 〃 〃 〃 → $\frac{6}{36}$

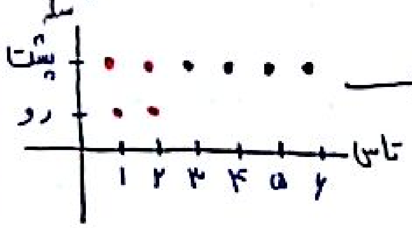
مجموع اعداد در پرتاب ۲ تاس: ۲, ..... , ۱۲

مجموع اعداد در پرتاب ۲ تاس →

| ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | *۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |

① یک سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه تاس کمتر از ۳ بیاید یا سکه رو نیاید چقدر است؟

$n(S)=2\times 6=12$ حالت



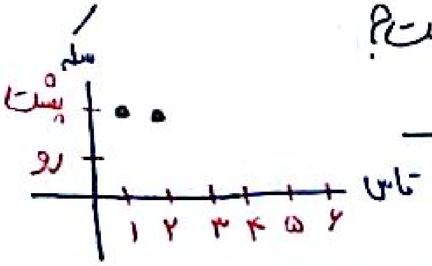

→ $P(A)=\frac{8}{12}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\frac{4}{12}+\frac{6}{12}-\frac{2}{12}=\frac{8}{12}$

② در سوال قبلی (↑) ← احتمال اینکه تاس کمتر از ۳ و سکه رو نیاید چقدر است؟

$n(S)=12$ حالت




→ $P(A\cap B)=\frac{2}{12}$

⑩ در پرتاب تصادفی ۴ تاس ، احتمال اینکه اعداد ظاهرشده پس از مرتب شدن متوالی باشند چقدر است؟

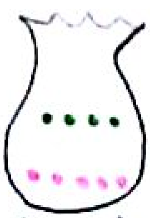
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۴! |
|---|---|---|---|---|
| ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۴! |
| ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۴! |

$$P(A)=\frac{3\times 4!}{6\times 6\times 6\times 6}$$

- سوال های کیسه و مهره
  - باهم و بدون جایگذاری
  - بطور متوالی و بدون جایگذاری
  - بطور متوالی و با جایگذاری

① از کیسه‌ای که درون آن ۴ مهره‌ی سبز و ۵ مهره‌ی صورتی وجود دارد به تصادف ۲ مهره باهم و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم مطلوب است احتمال اینکه:

$$P(A)=\frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}}=\frac{}{\binom{9}{2}}=\frac{}{36}$$



۱) یکی صورتی و یکی سبز: $\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}=20}{36}=\frac{20}{36}$

۲) هر دو سبز: $\frac{\binom{4}{2}}{36}=\frac{6}{36}$

۳) هر دو صورتی: $\frac{\binom{5}{2}}{36}=\frac{10}{36}$

۴) هر دو همرنگ: یعنی ← هر ۲ تا صورتی یا هر ۲ تا سبز

$$\frac{\binom{4}{2}+\binom{5}{2}}{36}=\frac{16}{36}$$

۵) حداقل یکی سبز: یعنی ← ۱ سبز یا ۲ سبز

کم کم ۱ سبز

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}+\binom{4}{2}}{36}=\frac{26}{36}$$

۶) حداقل یکی صورتی: یعنی ← ۱ صورتی یا ۲ صورتی

کم کم ۱ صورتی

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}+\binom{5}{2}}{36}=\frac{30}{36}$$

۷) حداکثر ۱ سبز:

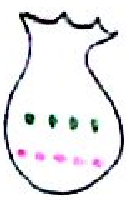
زیاد زیاد ۱ سبز

یعنی: ۱ سبز + ۰ سبز

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}+\binom{5}{2}}{36}=\frac{30}{36}$$

② از کیسه‌ای که درون آن ۴ مهره‌ی سبز و ۵ مهره‌ی صورتی وجود دارد ۲ مهره متوالی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم مطلوب است احتمال اینکه:

$$P(A)=\frac{}{\binom{9}{1}\binom{8}{1}}=\frac{}{72}$$



۱) اولی سبز و دومی صورتی ← $\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{72}=\frac{20}{72}$

۲) یکی سبز و یکی صورتی ← $\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}\times 2!}{72}=\frac{40}{72}$ جایگشت

یعنی اولی سبز دومی صورتی یا اولی صورتی دومی سبز

۳) هر دو سبز ← $\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{72}=\frac{12}{72}$

۴) هر دو صورتی ← $\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{72}=\frac{20}{72}$

۵) هر دو همرنگ ← هر ۲ صورتی یا هر ۲ سبز ⇐ $\frac{32}{72}=\frac{\overset{20}{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}+\overset{12}{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}}{72}$

۶) لااقل یکی سبز ← ۱ سبز یا ۲ سبز

یعنی ← کم کم ۱ سبز

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{4}{1}\binom{5}{1}\times 2!}{72}=\frac{52}{72}$$

۷) لااقل یکی صورتی ← $\left[+\binom{4}{1}\binom{5}{1}\right]$ ← $\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}+\binom{5}{1}\binom{4}{1}\times 2!}{72}$

یعنی ← کم کم ۱ صورتی

۱ صورتی + ۲ صورتی

۸) حداکثر یکی سبز ← $\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}+\binom{4}{1}\binom{5}{1}\times 2!}{72}$ ۵ $\frac{40}{72}$

یعنی زیاد زیاد ۱ سبز

۱ سبز + ۰ سبز

۹) دومی سبز ← ص ۶ $\left(\frac{4}{9}\right)$

۱۰) دومی صورتی ← ص ۶ $\left(\frac{5}{9}\right)$

۹) دومی سبز = اولی سبز و دومی سبز + اولی صورتی و دومی سبز.

روش ①:

$$P(A)=\frac{\overset{12}{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}+\overset{20}{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}}{\binom{9}{1}\binom{8}{1}}=\frac{32}{72}=\frac{4}{9}$$

* روش ②: دزد آمد و چیزی نبرد!! ← $\frac{\overset{\text{تعداد مهره‌های سبز در کیسه}}{4}}{\underset{\text{تعداد کل مهره‌ها}}{9}}$

۱۰) دومی صورتی: اولی صورتی و دومی صورتی + اولی سبز و دومی صورتی

روش ①:

$$P(A)=\frac{\overset{20}{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}+\overset{20}{\binom{4}{1}\binom{5}{1}}}{\binom{9}{1}\binom{8}{1}}=\frac{40}{72}=\frac{5}{9}$$

روش ②: دزد آمد و چیزی نبرد!! ← $\frac{\overset{\text{تعداد مهره‌های صورتی در کیسه}}{5}}{\underset{\text{تعداد کل مهره‌ها}}{9}}$

③ از کیسه‌ای که درون آن ۴ مهره‌ی سبز و ۵ مهره‌ی صورتی قرار دارد ۲ مهره متوالی و با جایگذاری بیرون داریم مطلوب است احتمال اینکه:

$$P(A)=\frac{}{\binom{9}{1}\binom{9}{1}}=\frac{}{81}$$

۱) اولی سبز و دومی صورتی ← $\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{81}=\frac{20}{81}$

۲) یکی سبز و یکی صورتی ← $\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}\times 2!}{81}=\frac{40}{81}$

۳) هر دو سبز ← $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{81}=\frac{16}{81}$

۴) هر دو صورتی ← $\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{81}=\frac{25}{81}$

۵) هر دو همرنگ ← هر دو سبز یا هر دو صورتی ← $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}+\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{81}=\frac{41}{81}$

۶) لااقل یکی سبز ← ۱ سبز + ۲ سبز ← $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}+\binom{4}{1}\binom{5}{1}\times 2!}{81}=\frac{}{81}$

۷) لااقل یکی صورتی ← ۱ صورتی + ۲ صورتی ← $\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}+\binom{5}{1}\binom{4}{1}\times 2!}{81}=\frac{65}{81}$

۸) حداکثر یکی سبز ← ۱ سبز + ۰ سبز ← $\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}+\binom{4}{1}\binom{5}{1}\times 2!}{81}=\frac{65}{81}$

۹) دومی سبز ← دزد آمد و چیزی نبرد!! ← $\frac{4}{9}$

۱۰) دومی صورتی ← دزد آمد و چیزی نبرد!! ← $\frac{5}{9}$

A C S

A

$A \cap A' = \varnothing$
$A \cup A' = S$ → $\begin{cases} n(A') = n(S) - n(A) \\ \boxed{P(A') = 1 - P(A)} \end{cases}$

- احتمال متمم ←

- چند نکته‌ی مهم در احتمال

① احتمال آنکه در پرتاب ۳ سکه حداقل یک سکه رو بیاید چقدر است؟

حداقل یکی رو بیاید = ۱ رو + ۲ رو + ۳ رو

متمم ← اصلاً رو نیاید = پشت بیاید → $P(A') = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ → $P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

② در تجربه تصادفی پرتاب غیر هم زمان دو تاس موقعی مجاز به پرتاب تاس دوم هستیم که اولین تاس عددی غیر اول بیاید احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده ناکمتر از ۵ باشد چقدر است؟

یعنی که بزرگتر و مساوی ۵

۱، ۴، ۶

$P(A') = \frac{3}{3 \times 6} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

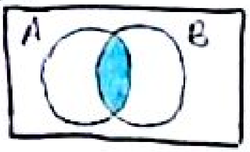
$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(۱،۱) (۱،۲) (۱،۳) (۱،۴) (۱،۵) (۱،۶)
(۴،۱) (۴،۲) (۴،۳) (۴،۴) (۴،۵) (۴،۶)
(۶،۱) (۶،۲) (۶،۳) (۶،۴) (۶،۵) (۶،۶)

چند نکته‌ی مهم در احتمال:

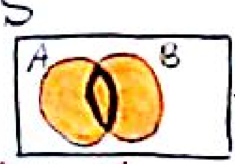
۱) اشتراک دو پیشامد

اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند آنگاه اشتراک آنها را با نماد $A \cap B$ نمایش می‌دهیم.




تعبیر $A \cap B$ ← هم پیشامد A و هم پیشامد B.

۲) اجتماع دو پیشامد




اصل شمول و عدم شمول

اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند آنگاه اجتماع آنها را با نماد $A \cup B$ نمایش می‌دهیم.

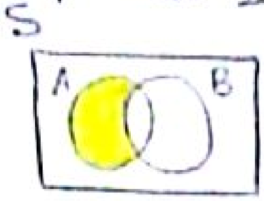
تعبیر $A \cup B$ ← پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو پیشامد.

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۳) تفاضل دو پیشامد

اگر $A$ و $B$ دو پیشامد در فضای نمونه‌ای $S$ باشند آنگاه تفاضل $B$ از $A$ را با نماد $A-B$ نمایش می‌دهیم




⑥ تعبیر $A-B$ ← پیشامد $A$ رخ دهد ولی پیشامد $B$ رخ ندهد

$$n(A-B) = n(A) - n(A\cap B) \xrightarrow{\div n(S)} \begin{cases} P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) \\ P(A-B) = P(A\cup B) - P(B) \end{cases}$$

① عددی را به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰ انتخاب می‌کنیم مطلوب است احتمال آنکه این عدد بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد.

$n(S)=300$

نکته باحال: به طور کلی تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی $n$ که بر $a$ بخش‌پذیرند برابر است با $\left[\frac{n}{a}\right]$

$$P(A\cup B) = \underbrace{P(A)}_{\text{۲ بخش‌پذیر}} + \underbrace{P(B)}_{\text{۳ بخش‌پذیر}} - \underbrace{P(A\cap B)}_{\text{۶ بخش‌پذیر}}$$

$\left[\frac{300}{2}\right]=150$ , $\left[\frac{300}{3}\right]$ , $\left[\frac{300}{6}\right]$

$$\frac{150}{300} + \frac{100}{300} - \frac{50}{300} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$

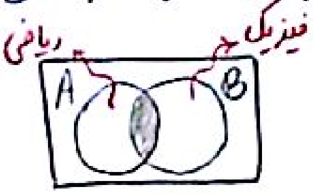
۴) دو قانون مهم (دمورگان)

1) $A - B = A\cap B'$

2) $\begin{cases} (A\cap B)' = A'\cup B' \\ (A\cup B)' = A'\cap B' \end{cases}$ در متمم کردن: اجتماع ⇄ اشتراک

② احتمال آنکه شخصی در ریاضی قبول شود ۰/۴ و در فیزیک قبول شود ۰/۵ و در ریاضی یا فیزیک قبول شود ۰/۷ است مطلوب است احتمال اینکه این شخص:

۱) هم در ریاضی و هم در فیزیک قبول شود.




$P(A) = 0/4$

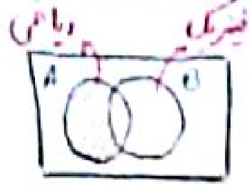
$P(B) = 0/5$

$P(A\cup B) = 0/7$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$0/7 = 0/4 + 0/5 - P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = 0/9 - 0/7 = 0/2$$

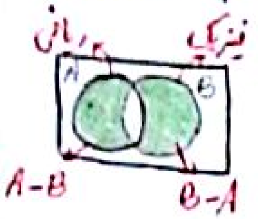



$P(A)=۰/۴$

$P(B)=۰/۵$

$P(A\cup B)=۰/۷$

$P(A\cap B)=۰/۲$




۲) در ریاضی قبول شود ولی در فیزیک قبول نشود.

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ یا $P(A-B)=P(A\cup B)-P(B)$

$P(A-B)=۰/۴-۰/۲=۰/۲$ $\quad$ $P(A-B)=۰/۷-۰/۵=۰/۲$

۳) در ریاضی قبول شود و در فیزیک قبول نشود یا در فیزیک قبول شود و در ریاضی قبول نشود.

نکته: تفاضل متقارن: $(A\Delta B)$

$$\begin{cases} P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B) \longrightarrow ۰/۷-۰/۲=۰/۵ \\ P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B) \longrightarrow ۰/۴+۰/۵-۲(۰/۲)=۰/۵ \end{cases}$$

۴) نه در ریاضی و نه در فیزیک قبول شود.

$$P(A'\cap B') \xrightarrow{\text{دمرگان}} P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$$

$$P(A\cup B)'=1-۰/۷=۰/۳$$

۵) در ریاضی قبول نشود یا در فیزیک قبول نشود.

$$P(A'\cup B') \xrightarrow{\text{دمرگان}} P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)'=1-۰/۲=۰/۸$$

☑ تست - حاصل $1-P(A')-P(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $P(A\cap B)$ $\quad$ ۲) $P(A\cup B)$ $\quad$ ۳) $P(A\cap B')$ ✓ $\quad$ ۴) $P(A\cup B')$

$$P(A)+P(A')=1 \longrightarrow P(A)=1-P(A')$$

$$P(A)-P(A\cap B)=P(A-B) \xrightarrow{\text{دمرگان}} P(A\cap B')$$

☑ تست - اگر $P(A')+P(B')=1.4$ باشد، حاصل $P(A'\cup B')-P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ✓
۲) ۰/۴-
۳) ۰/۶-
۴) ۰/۶

$$P(A')+P(B')=1.4 \longrightarrow 1-P(A)+1-P(B)=1.4$$

$$-P(A)-P(B)=1.4-2 \rightarrow -(-P(A)-P(B)=-0.6)$$

$$P(A)+P(B)=0.6$$

$$P(A'\cup B')-P(A\cup B) \xrightarrow{\text{دمورگان}} P(A\cap B)'-P(A\cup B)$$

$$[1-P(A\cap B)]-[\overbrace{P(A)+P(B)}^{0.6}-P(A\cap B)]$$

$$1-\cancel{P(A\cap B)}-0.6+\cancel{P(A\cap B)} \Rightarrow 1-0.6=0.4$$

احتمال شرطی : ⟵ داده‌ی سوال
↓
اطلاعات جدید

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}^{*}}$$

① در پرتاب یک تاس اگر بدانیم عدد رو شده زوج است با چه احتمالی اول است؟

۱و۲و۳و۴و۵و۶

$n(S)$ کل $\rightarrow 6 \longrightarrow n(S^*)=3 \rightarrow (2,4,6) \longrightarrow P(A)=\frac{1}{3}$

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{1}{3}$$

اول و زوج — زوج

② در پرتاب یک تاس اگر بدانیم عدد رو شده اول است، احتمال اینکه عدد فرد باشد چقدر است؟

۱و۲و۳و۴و۵و۶ $\longrightarrow n(S^*)=3 \longrightarrow P(A)=\frac{2}{3}$

③ در پرتاب یک تاس اگر بدانیم عدد رو شده نا کمتر از ۳ است، احتمال اینکه عدد اول باشد چقدر است؟

که یعنی بزرگتر و مساوی ۳

۱و۲و $\boxed{۳و۴و۵و۶}$ $\longrightarrow n(S^*)=4 \Rightarrow P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

④ در پرتاب دو تاس اگر بدانیم تاس اول عددی کوچکتر از ۳ آمده است، احتمال آنکه مجموع اعداد دو تاس بزرگتر از ۵ باشد چقدر است؟

$(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)$
$(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)$

$\frac{5}{12}$ عددی کوچکتر از ۳

مجموع بزرگتر از ۵

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S^*)}=\frac{5}{12}$$

$n(B)$

عددی کوچکتر از ۳

۵) از ظرف A که شامل ۲ مهره‌ی سبز و ۵ مهره‌ی صورتی است، ۲ مهره به صورت متوالی و بدون جایگذاری به تصادف خارج می‌کنیم، اگر مهره‌ی اول سبز باشد، احتمال اینکه مهره‌ی دوم سبز باشد چیست؟

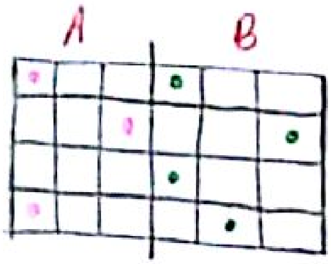
مهره‌ی اول :

$P($ مهره‌ی دوم سبز $) = \frac{1}{6}$

$P(A|B) = X$

قانون ضرب احتمال:

$$\underline{P(A|B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$$



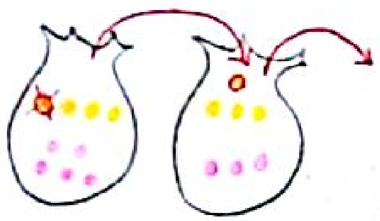


①

سهم سبز $= \frac{4}{24} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{4}{12} = \frac{4}{24}$

سهم صورتی $= \frac{3}{24} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{12} = \frac{3}{24}$

۲) با توجه به شکل، مهره‌ای از ظرف (I) خارج نموده و در ظرف (II) قرار دهیم، سپس مهره‌ای از ظرف (II) به تصادف خارج می‌کنیم مطلوب است احتمال آنکه هر دو مهره خارج شده زرد باشد چقدر است؟



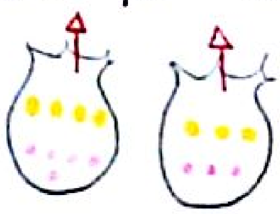


$P(A) = \frac{4}{9}$

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$$

$$P(A\cap B) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{63}$$

۳) با توجه به شکل، مهره‌ای از ظرف (I) خارج نموده و مهره‌ی دیگری از ظرف (II) خارج می‌نماییم احتمال زرد بودن هر دو مهره چقدر است؟





$$P(\overset{\text{زرد}}{A}\cap \overset{\text{زرد}}{B}) = P(A)\cdot \underset{P(B)}{\cancel{P(A|B)}}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\times P(B) \rightarrow$$ مفهوم مستقل بودن

$$P(A\cap B) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{54}$$

- سازگار - ناسازگار

$A\cap B = \emptyset$ - $A\cap B \neq \emptyset$

خارج‌کردن عدد زوج و فرد در پرتاب ۱ تاس ← ناسازگار

وضعیت ۲ پیشامد نسبت به هم

- مستقل - وابسته اگر وقوع یا عدم وقوع پیشامد A هیچ تأثیری در احتمال وقوع پیشامد B نگذارد.

مستقل ← $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

## توزیع احتمال : توزیع یعنی پخش کردن .

① در ظرفی ۶ مهره قرمز و ۴ مهره سبز موجود است ۳ مهره به تصادف باهم خارج می‌کنیم. جدول توزیع احتمال تعداد مهره‌های قرمز خارج شده را بنویسید.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120}$ | $\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120}$ | $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{60}{120}$ | $\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120}$ |

توزیع دو جمله‌ای: در این توزیع آزمایش ۲ نتیجه دارد یکی پیروزی یکی شکست احتمال پیروزی $P$ و احتمال شکست $q$ نشان می‌دهیم.

$$P+q=1$$

① سکه‌ای را ۶ بار پرتاب می‌کنیم ، احتمال آنکه ۴ بار پشت بیاید چقدر است؟

$P(\text{رو}) = P(\text{پشت}) = \frac{1}{2}$

$$\longrightarrow P(x=4) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$\binom{6}{4} \longrightarrow \binom{6}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$P(x=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

② به دانش آموزی ۷ سوال ۴ گزینه‌ای داده‌ایم ، اگر او سوال‌ها را به تصادف جواب دهد احتمال آنکه به ۵ سوال پاسخ صحیح دهد چیست؟

$P=\frac{1}{4}$ ، $q=\frac{3}{4}$

$$\longrightarrow P(x=5) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$

$$\binom{7}{5} \longrightarrow \binom{7}{5} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$

$$P(x=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

③ سراسری خارج ۹۱ : احتمال انتقال نوعی بیماری از فرد بیمار به افراد مستعد ۰/۲ است اگر ۶ نفر مستعد با این بیمار ملاقات کنند ، با کدام احتمال ۴ نفر آنها به این بیماری مبتلا می‌شوند.

$P=0/2$ ، $q=0/8$ ، $x=4$ ، $n=6$

$$P(x=4) = \binom{6}{4} \cdot (0/2)^4 \cdot (0/8)^2 = \frac{15360}{10^6} = 0/01536$$

$$P(x=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$\left(\frac{2}{10}\right)^4 = \frac{2^4}{10^4}$

$\left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{(2^3)^2}{10^2} = \frac{2^6}{10^2}$

④ سراسری داخل ۹۲ : دانش آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد با کدام احتمال فقط به ۳ پرسش پاسخ صحیح داده است؟

☑ ☐ ☐ ☐ ☐

$p = \frac{1}{5}$ $\quad n = 5$

$q = \frac{4}{5}$ $\quad k = 3$

$$P(x=3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$P(x=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

نکته: اگر ( $p = q = \frac{1}{2}$ ) یعنی سکه، تولد فرزند

$$P(x=k) = \binom{n}{k} (\underset{\frac{1}{2}}{p})^k (\underset{\frac{1}{2}}{q})^{n-k} \rightarrow \boxed{\frac{\binom{n}{k}}{2^n}}$$

برنولی

① سراسری داخل ۹۰ : در یک خانواده ۴ فرزندی با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

$$\frac{\binom{4}{2}}{2^4} + \frac{\binom{4}{3}}{2^4} = \frac{6+4}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$