

- یک کیهان تخت دو-مولفه‌ای را در نظر بگیرید که حاوی ماده بدون فشار به چگالی ρ_m و پارامتر حالت صفر، و انرژی تاریک به چگالی ρ_{de} و پارامتر حالت $\omega_{de} < -1$ است.

الف) اگر $a_0 \equiv 1$ عامل مقیاس این کیهان در زمان حال باشد، نشان دهید:

$$\Omega_{de}(a) = \left(1 + \frac{1 - \Omega_{de,0}}{\Omega_{de,0}} a^{3\omega_{de}} \right)^{-1}$$

که پارامتر چگالی بصورت $\Omega := \frac{\rho}{\rho_c}$ تعریف می‌گردد و $\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H^2$ چگالی بحرانی است.

ب) اگر پارامتر چگالی انرژی تاریک در زمان حال $\Omega_{de,0} = 75\%$ باشد و $\omega_{de} = -2$ ، عامل مقیاس کیهان چند برابر شود تا 99.9% از کیهان را انرژی تاریک مذکور تشکیل دهد؟

ج) اگر کیهان مورد بحث وارد دوران انرژی تاریک-غالب خود شود، بطوریکه t_{de} لحظه‌ای از این دوران باشد (یعنی $\rho_m(t_{de}) \ll \rho_{de}(t_{de})$)، نشان دهید که کیهان دچار یک شکافتگی بزرگ می‌شود (*Big Rip*)، بدین معنی که در مدت زمان محدود Δt ، بناگاه بزرگ خواهد شد ($a \rightarrow \infty$). Δt را بر حسب ω_{de} و $H(t_{de})$ بیابید.

د) آیا میتوان با استفاده از قسمت (ج) وجود یک افق مرئی برای فوتونهای زمینه (*CMB*) را در کیهان انرژی تاریک-غالب مذکور توجیه نمود؟ توضیح دهید.

۲- معادلات زیر به معادلات فریدمان معروف هستند:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - k\frac{c^2}{a(t)^2}$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{-4\pi G}{3}\left(\rho(t) + \frac{3}{c^2}\mathcal{P}(t)\right)$$

پارامتر کندشوندگی بصورت $q(t) := -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)}$ تعریف می‌گردد. اگر $Z(t)$ قرمزگرایی کیهانی باشد، نشان دهید که

$$q(t) = \frac{\ddot{Z}(t)}{\dot{Z}^2(t)}(1 + Z(t)) - 2$$

۳- معادله حالت اغلب در فرم بی‌دررو ب شکل $p = (\gamma - 1)\rho$ نوشته میشود، که p ، فشار و ρ ، چگالی است و $0 \leq \gamma \leq 2$ به اندیس بی‌دررو معروف است که $\gamma = 1$ به غبار و $\gamma = \frac{4}{3}$ به تابش اشاره دارد.

الف) تابع مقیاس $(a(t))$ و عمر کیهان را برای یک کیهان تخت تک مولفه‌ای با اندیس بی‌درروی γ بیابید.

ب) برای کیهانی با پارامتر خمیدگی k ، اندیس γ را بگونه‌ای بیابید که سرعت گسترش کیهان ثابت باشد. برای این مقدار از γ ، تابع مقیاس را در حالت‌های $k = +1$ ، $k = -1$ پیدا کنید.

ج) نشان دهید: $\dot{\Omega} = (2 - 3\gamma)H\Omega(1 - \Omega)$

د) عامل مقیاس لگاریتمی بصورت $s = \log a$ تعریف میشود. رابطه برای $d\Omega/ds$ بنویسید که رفتار آنرا بوضوح توصیف نماید.

۴- معادله فریدمان یک جهان ماده غالب بدون فشار بصورت $\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho_{m,0} a^{-1}$ است که $\rho_{m,0}$ چگالی کنونی ماده است.

الف- نشان دهید که این معادله برای یک جهان بسته ($k > 0$) دارای جوابی پارامتریک بصورت زیر است:

$$t = \alpha (\theta - \sin\theta) \quad \text{و} \quad a = \sqrt{k} \alpha (1 - \cos\theta)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{1}{H_0} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{و} \quad \theta \text{ پارامتر پیشرفت نامیده میشود}$$

ب- حداکثر مقدار a چقدر است؟ چه زمانی از تحول، کیهان به این مقدار از a دست میابد؟ پس از آن اندازه کیهان چه میشود؟

ج- پارامتر هابل را بر حسب θ نوشته و اندازه آنرا در این a ی ماکزیمم بیابید.