بردار

پاره‌خطی جهت‌دار است که نشان‌دهنده‌ی حرکت از یک نقطه (ابتدا) به نقطه‌ی دیگر (انتها) می‌باشد.

مثال: بردار مقابل حرکت از نقطه‌ی D به نقطه‌ی A را نمایش می‌دهد. $D \longrightarrow A$

بردار مقابل حرکت از نقطه‌ی M به نقطه‌ی N را نمایش می‌دهد. $N \longleftarrow M$

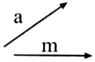
نام‌گذاری بردار

در نام‌گذاری بردارها، اول نقطه‌ی ابتدا، سپس نقطه‌ی انتها را نوشته و علامت بردار $(\rightarrow)$ را روی آن‌ها قرار می‌دهیم.

برای نمونه در مثال بالا: $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{MN}$

همچنین می‌توان بردار را با یک حرف کوچک انگلیسی نمایش داد. این حرف کوچک را وسط بردار قرار می‌دهند.

مثال: $\vec{a}$ و $\vec{m}$.



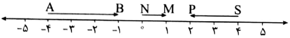
جمع متناظر با بردارها روی محور عددهای صحیح

برای نوشتن جمع متناظر با یک بردار، به عدد ابتدا، عدد بردار و عدد انتها نیاز داریم.

برای به دست آوردن عدد یک بردار، ابتدا با توجه به جهت آن علامت آن را مشخص می‌کنیم. (سمت راست + و سمت چپ -)

سپس تعداد واحدها را از ابتدا تا انتها شمارش کرده و می‌نویسیم.

مثال: اندازه یا عدد مربوط به هر بردار را بنویسید.



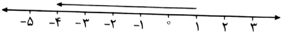
پاسخ:

$\overrightarrow{AB} = +۳ \quad , \quad \overrightarrow{NM} = ۱ \quad , \quad \overrightarrow{SP} = -۲$

با توجه به حرکت هر بردار از نقطه‌ی ابتدا به انتها برای نوشتن جمع متناظر از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

عدد انتهای بردار = عدد بردار + عدد ابتدای بردار

مثال: جمع متناظر با بردار زیر را بنویسید.



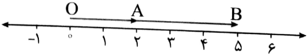
پاسخ:

$(+۱) + (-۵) = (-۴)$

جمع بردارهای روی محور عددهای صحیح

با توجه به عدد هر بردار می‌توان جمع بردارها را به دست آورد.

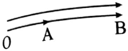
مثال ۱:



پاسخ:

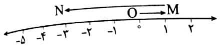
$(+۲) + (+۳) = +۵ \qquad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

تذکر اگر بردارها هم جهت باشند، طول بردار حاصل جمع با مجموع طول بردارها مساوی می‌باشد.



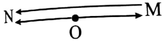
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

مثال ۲:



پاسخ: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$ $\quad (+۱)+(-۴)=-۳$

تذکر اگر بردارها هم جهت نباشند، طول بردار حاصل جمع با اختلاف طول بردارها مساوی می‌باشد.



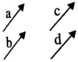
$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$$

درس دوم: بردارهای مساوی و قرینه

بردارهای مساوی

دو بردار هم اندازه، هم راستا و هم جهت را دو بردار مساوی (هم‌سنگ) می‌گویند.

مثال:



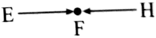
$$\vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = \vec{d}$$

بردارهای قرینه

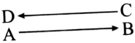
دو بردار هم‌اندازه، هم راستا و در خلاف جهت یکدیگر را دو بردار قرینه می‌گویند.

نکته حاصل جمع دو بردار قرینه، همیشه مساوی بردار صفر می‌باشد.

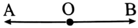
مثال:



$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HF} = \vec{۰}$$



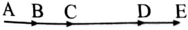
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{۰}$$



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{۰}$$

نکته با توجه به اهمیت جهت در بردار $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ و بسیاری از روابط بین پاره خط‌ها از جمله حذف حروف مشترک برای به دست آوردن حاصل جمع یا تفریق پاره‌خط‌ها، در مورد بردارها برقرار نمی‌باشد.

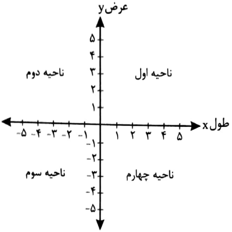
مثال:



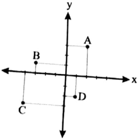
$$\overline{AB} + \overline{CB} = \overline{AC} \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{AC}$$

$$\overline{BE} - \overline{ED} = \overline{BD} \qquad \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{ED} \neq \overrightarrow{BD}$$

دستگاه محورهای مختصات



- این دستگاه از دو محور عمود بر هم تشکیل شده است.
- محور افقی را محور طول‌ها (xها) و محور عمودی را محور عرض‌ها (yها) می‌نامند.
- محل برخورد این دو محور را «مبدأ مختصات» می‌نامند.
- روی محور طول‌ها (xها) از مبدأ به سمت راست، عددهای مثبت و به سمت چپ، عددهای منفی نوشته می‌شوند.
- روی محور عرض‌ها (yها) از مبدأ به بالا، عددهای مثبت و به سمت پایین، عددهای منفی نوشته می‌شوند.
- این دستگاه، صفحه را به چهار ناحیه (ربع) تقسیم می‌کند که از بالا سمت راست، خلاف حرکت عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری می‌شوند. مختصات هر نقطه را به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نمایش می‌دهیم که در آن x «طول نقطه» و y «عرض نقطه» نامیده می‌شود.
- برای به دست آوردن طول هر نقطه، از آن نقطه عمودی بر محور طول‌ها رسم می‌کنیم. هر کجا محور طول‌ها را قطع کند آن عدد طول نقطه می‌باشد.
- برای به دست آوردن عرض هر نقطه، از آن نقطه عمودی بر محور عرض‌ها رسم می‌کنیم. هر کجا محور عرض‌ها را قطع کند آن عدد عرض نقطه می‌باشد.



مثال: مختصات نقاط زیر را بنویسید.

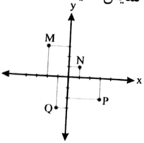
پاسخ: $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۱ \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۳ \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$

نمایش نقطه روی محورهای مختصات

برای انجام این کار ابتدا طول نقطه را روی محور طول‌ها و عرض نقطه را روی محور عرض‌ها مشخص می‌کنیم. سپس از این دو نقطه، دو خط موازی محورها رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو خط، جای نقطه‌ی داده شده می‌باشد.

مثال: نقاط $M = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}, \ N = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۳ \end{bmatrix}$ را روی محورهای مختصات نمایش دهید.

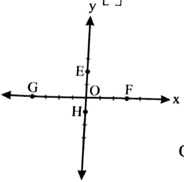
پاسخ:



تذکر ۱: محل برخورد محور طول‌ها و عرض‌ها را «**مبدأ مختصات**» نامیده و آن را با «O» نمایش می‌دهند. $O = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

تذکر ۲: همه‌ی نقاطی که روی محور طول‌ها قرار دارند، عرض آن‌ها صفر می‌باشد.

تذکر ۳: همه‌ی نقاطی که روی محور عرض‌ها قرار دارند، طول آن‌ها صفر می‌باشد.



مثال: مختصات نقاط زیر را بنویسید.

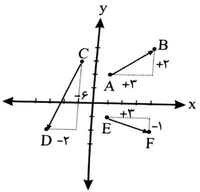
پاسخ: $O = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}, \ G = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۰ \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}$

مختصات بردار

مختصات هر بردار را هم به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نمایش می‌دهیم که در آن x «طول بردار» و y «عرض بردار» نامیده می‌شوند.

برای به دست آوردن مختصات هر بردار، از ابتدا و انتهای بردار دو خط موازی محورها رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را قطع کنند. (یک مثلث قائم الزاویه تشکیل می‌شود.) سپس روی ضلع‌های این مثلث از نقطه‌ی ابتدای بردار به سمت انتهای آن حرکت می‌کنیم. جهت حرکت، علامت و اندازه‌ی حرکت، مختصات بردار را مشخص می‌کنند.

حرکت افقی طول بردار و حرکت عمودی، عرض بردار را مشخص می‌کنند. پس برای تعیین مختصات یک بردار باید بدانیم برای رسیدن از ابتدا به انتهای بردار چند واحد طول و سپس چند واحد عرض باید طی شود.



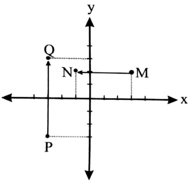
مثال: مختصات بردارهای زیر را بنویسید.

پاسخ:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix} +۳ \\ +۲ \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{CD}=\begin{bmatrix} -۲ \\ -۶ \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{EF}=\begin{bmatrix} +۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

تذکر ۱: همه‌ی بردارهایی که موازی محور طول‌ها هستند، دارای عرض صفر می‌باشند. (حرکت عمودی ندارند).

تذکر ۲: همه‌ی بردارهایی که موازی محور عرض‌ها هستند، دارای طول صفر می‌باشند. (حرکت افقی ندارند).



مثال: مختصات بردارهای زیر را بنویسید.

پاسخ:

$$\overrightarrow{MN}=\begin{bmatrix} -۴ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

رسم بردار

برای رسم یک بردار طبق مراحل زیر عمل می‌کنیم.

الف) نقطه‌ی ابتدای بردار را روی محورهای مختصات مشخص می‌کنیم.

ب) از این نقطه به اندازه‌ی طول بردار در جهت علامت آن، موازی محور طول‌ها حرکت می‌کنیم.

پ) از انتهای حرکت قبل به اندازه‌ی عرض بردار در جهت علامت آن، موازی محور عرض‌ها حرکت می‌کنیم.

ت) از ابتدا به انتها وصل کرده و جهت را روی نقطه‌ی انتها قرار می‌دهیم.

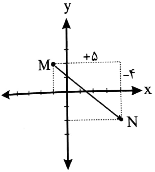
جمع متناظر با بردار

با داشتن مختصات نقطه‌ی ابتدا، مختصات نقطه‌ی انتها و مختصات بردار طبق رابطه‌ی زیر می‌توان جمع متناظر با بردار را نوشت.

مختصات انتهای بردار = مختصات بردار + مختصات ابتدای بردار

«B»   «$\overrightarrow{AB}$»   «A»

مثال: جمع متناظر با بردار زیر را بنویسید.



پاسخ:

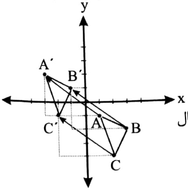
$$M=\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}۴\\ -۲\end{bmatrix},\quad \overrightarrow{MN}=\begin{bmatrix}۵\\ -۴\end{bmatrix}\quad \Rightarrow \begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵\\ -۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\ -۲\end{bmatrix}$$

درس چهارم: بردار انتقال

بردار انتقال

برداری است که هر نقطه (ابتدا) را به نقطه‌ی دیگری (انتها) منتقل می‌کند. می‌توان گفت هر بردار یک انتقال را نشان می‌دهد.

مثال: مثلث ABC را با $\vec{a}=\begin{bmatrix}-۴\\ ۳\end{bmatrix}$ انتقال دهید.



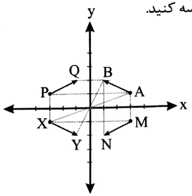
پاسخ: هر رأس را با $\vec{a}$ انتقال داده، سپس رأس‌ها را به یک‌دیگر وصل می‌کنیم.

برای این کار هر یک از نقاط A و B و C را ابتدا چهار واحد به چپ سپس سه واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا به نقاط A' و B' و C' برسیم.

قرینه‌ی بردار

برای رسم قرینه‌ی هر بردار نسبت به محورهای مختصات یا مبدأ مختصات، ابتدا قرینه‌ی نقاط ابتدا و انتهای آن را به دست آورده، سپس بردار را رسم می‌کنیم. پس از رسم، مختصات قرینه‌ی بردار به دست می‌آید.

مثال: قرینه‌ی $\overrightarrow{AB}$ را نسبت به محورها و مبدأ مختصات رسم کرده و مختصات آن‌ها را مقایسه کنید.



$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-۲\\ ۱\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور طول ها}}\overrightarrow{MN}=\begin{bmatrix}-۲\\ -۱\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-۲\\ ۱\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض ها}}\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-۲\\ ۱\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}}\overrightarrow{XY}=\begin{bmatrix}۲\\ -۱\end{bmatrix}$$

نکته در قرینه‌ی هر بردار نسبت به محور طول‌ها، عرض بردار، قرینه می‌شود و طول تغییر نمی‌کند.

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}x\\ -y\end{bmatrix}$$

نکته در قرینه‌ی هر بردار نسبت به محور عرض‌ها، طول بردار، قرینه می‌شود و عرض تغییر نمی‌کند.

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-x\\ y\end{bmatrix}$$

نکته در قرینه‌ی هر بردار نسبت به مبدأ مختصات، طول و عرض بردار، قرینه می‌شوند.

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-x\\ -y\end{bmatrix}$$

جمع مختصات‌ها

همان‌طور که در جمع متناظر با یک بردار دیدید در جمع مختصات‌ها، حاصل جمع طول‌ها مساوی طول مختصات حاصل و حاصل جمع عرض‌ها مساوی عرض مختصات حاصل می‌باشد. یعنی طول با طول و عرض با عرض جمع می‌شود.

$$\boxed{\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c\\ b+d\end{bmatrix}}$$

مثال: در تساوی‌های زیر مقدار مجهول‌ها را به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix}۵\\ -۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{cases}x=۵+۶=۱۱\\ y=-۲-۱=-۳\end{cases}\longrightarrow\begin{bmatrix}۱۱\\ -۳\end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix}-۳\\ -۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\ -۲\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{cases}-۳+x=۴\longrightarrow x=۷\\ -۱+y=-۲\longrightarrow y=-۱\end{cases}\longrightarrow\begin{bmatrix}۷\\ -۱\end{bmatrix}$

پ) $\begin{bmatrix}x\\ -۹\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\ -۳\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{cases}x-۲=۵\longrightarrow x=۷\\ -۹+y=-۳\longrightarrow y=۶\end{cases}$