بسمه تعالی

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

اعداد مختلط

۱. فرض کنید $z, z_1, z_2 \in C$ ثابت کنید.

a) $\bar{\bar{z}} = z$

با فرض $z = a + ib$ داریم

$\bar{z} = a - ib \Rightarrow \bar{\bar{z}} = a + ib \Rightarrow \bar{\bar{z}} = z$

b) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$z_1 = a_1 + ib_1 \ , \ z_2 = a_2 + ib_2$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \quad (1)$

$\bar{z}_1 = a_1 - ib_1$

$\bar{z}_2 = a_2 - ib_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \quad (2)$

$(1), (2) \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

c) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_2 a_1 + a_2 b_1) \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(b_2 a_1 + a_2 b_1) \quad (1)$

$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(-a_1 b_2 - a_2 b_1) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad (2)$

$(1), (2) \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 \cdot \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 \cdot \frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

e) $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib \quad \Rightarrow \quad z + \bar{z} = 2a = 2Re(z) \Rightarrow Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

f) $Im(Z) = \frac{Z-\bar{Z}}{2i}$

$Z = a+ib$, $\bar{Z} = a-ib$ $\Rightarrow$ $Z-\bar{Z} = 2ib = 2i\,Im(Z)$ $\Rightarrow$ $Im(Z) = \frac{Z-\bar{Z}}{2i}$

g) $Re(iZ) = -Im(Z)$

h) $Im(iZ) = Re(Z)$

۲. مقادیر زیر را تعیین کنید.

$|(1+i)(2+i)| = |(2-1)+i(2+1)| = |1+3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$\left|\frac{4-2i}{2-i}\right| = \left|\frac{4-3i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}\right| = \left|\frac{(8+3)+i(4-6)}{5}\right| = \left|\frac{11}{5}-\frac{2}{5}i\right| = \sqrt{\frac{121}{25}+\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{125}{25}} = \sqrt{5}$

$|Z\bar{Z}| = |(a+ib)(a-ib)| = |a^2+b^2| = |Z|^2$

$|Z-1|^2 = |(a-1)+ib|^2 = (a-1)^2+b^2$

۳. کدام یک از مقادیر زیر درون دایره $|Z-i| = 2$ قرار دارند

a) $\frac{1}{2}+i$

$|Z-i| = \left|\frac{1}{2}+i-i\right| = \frac{1}{2} < 2$ درون دایره

b) $2+3i$

$|Z-i| = |2+3i-i| = |2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} > 2$ بیرون دایره

c) $\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)$

$|Z-i| = |\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)-i| = |\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = 2$ روی دایره

۴. مجموعه نقاطی را که با روابط زیر در صفحه مختلط تعیین می‌شوند رسم کنید.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

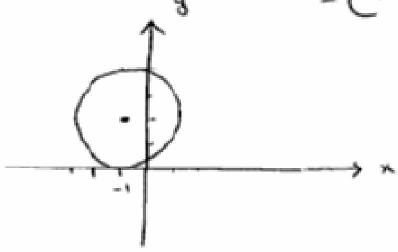
a) $|Z+1-2i|=2$

با فرض $Z=x+iy$ داریم:

$$|Z+1-2i|=2 \Rightarrow |x+iy+1-2i|=2 \Rightarrow |(x+1)+i(y-2)|=2$$

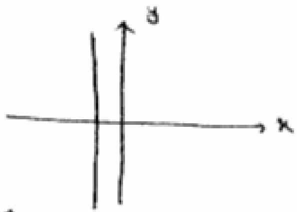
$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=2 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4$$

دایره ای به مرکز $(-1,2)$ و شعاع ۲



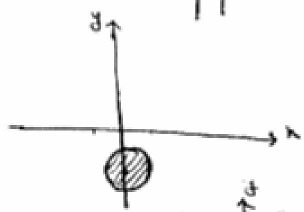
b) $Re(Z+1)=0$

$$Re(x+iy+1)=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$



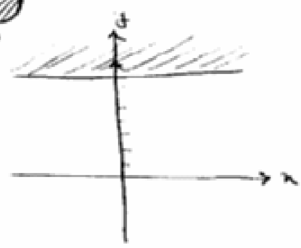
c) $|Z+2i|\le 1$

$$|x+i(y+2)|\le 1 \Rightarrow x^2+(y+2)^2\leq 1$$



d) $Im(Z-2i)>6$

$$Im(x+iy-2i)>6 \Rightarrow y-2>6 \Rightarrow y>8$$



۵۴. ثابت کنید:

۱. $|Z|=0 \iff Z=0$

$$|Z|=0 \iff a^2+b^2=0 \iff a^2=0,\ b^2=0 \iff a=0,\ b=0 \iff Z=0$$

۲. $|Z_1-Z_2|\le |Z_1|+|Z_2|$

$$|Z_1-Z_2|^2=(Z_1-Z_2)\cdot(\overline{Z_1-Z_2})=(Z_1-Z_2)\cdot(\bar Z_1-\bar Z_2)=Z_1\bar Z_1-Z_1\bar Z_2-Z_2\bar Z_1+Z_2\bar Z_2$$

$$=|Z_1|^2-(Z_1\bar Z_2+\bar Z_1 Z_2)+|Z_2|^2 \qquad (1)$$

حال طرفین را [illegible]

$$\underbrace{(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})^2}_{\text{عدد حقیقی}} \geq 0 \qquad \underbrace{(z_1\bar{z}_2-\overline{z_1\bar{z}_2})^2}_{\text{عدد موهومی محض}} \leq 0$$

$$(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})^2-(z_1\bar{z}_2-\overline{z_1\bar{z}_2})^2=4z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2=4|z_1|^2|z_2|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})^2 \leq 4|z_1|^2|z_2|^2 \Rightarrow -2|z_1||z_2| \leq z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2} \leq 2|z_1||z_2|$$

بنابر (۱) و (۲)

$$|z_1-z_2|^2 \leq |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2$$

$$\Rightarrow |z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

۳. $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-2Re(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2$

مشابه به حالت قبل

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})+|z_2|^2$$

با فرض [illegible] حالت e بنابراین $2Re(z)=z+\bar{z}$

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-2Re(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2$$

۴. $\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1-z_2|$

مشابه به حالت ۲

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})+|z_2|^2$$

$$-(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}) \geq -2|z_1||z_2|$$

داریم

$$|z_1-z_2|^2 \geq |z_1|^2-2|z_1||z_2|+|z_2|^2=(|z_1|-|z_2|)^2 \Rightarrow |z_1-z_2| \geq \big||z_1|-|z_2|\big|$$

۵. $\sqrt{2}|z| \geq |Re(z)|+|Im(z)|$

$$\sqrt{2}|z| \geq |Re(z)|+|Im(z)| \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{Re(z)^2+Im(z)^2} \geq |Re(z)|+|Im(z)|$$

$$\Leftrightarrow 2(Re(z)^2+Im(z)^2) \geq (|Re(z)|+|Im(z)|)^2=Re(z)^2+Im(z)^2+2|Re(z)||Im(z)|$$

$$\Longleftrightarrow Re(z)^2 + Im(z)^2 - 2|Re(z)||Im(z)| \geq 0 \Longleftrightarrow (|Re(z)| - |Im(z)|)^2 \geq 0$$

۷. بردارهای نا صفر z_1 و z_2 موازی‌اند اگر و تنها اگر $Im(z_1\bar{z}_2) = 0$

فرض می‌کنیم $z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1\bar{z}_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)$$

فرض می‌کنیم z_1 ، z_2 موازی باشند در این صورت

$$z_1 \times z_2 = 0 \Rightarrow (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1y_2\vec{k} - y_1x_2\vec{k} = 0$$

بنابراین $x_1y_2 = y_1x_2$ از طرفی

$$Im(z_1\bar{z}_2) = x_2y_1 - x_1y_2$$

در نتیجه $Im(z_1\bar{z}_2) = 0$.

دیگر اگر $Im(z_1\bar{z}_2) = 0$ آنگاه $x_2y_1 = x_1y_2$ و در نتیجه $z_1 \times z_2 = 0$ بنابراین z_1 ، z_2 موازی هستند.

۸. $|z^n| = |z|^n$

نتیجه را با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم.

$n = 1 \qquad |z| = |z|$

فرض می‌کنیم نتیجه برای n برقرار باشد یعنی $|z^n| = |z|^n$

نشان می‌دهیم نتیجه برای $n+1$ نیز برقرار است.

$$|z^{n+1}| = |z\,z^n| = |z||z^n| = |z||z|^n = |z|^{n+1}.$$

۵- آرگومان اصلی اعداد زیر را تعیین کنید.

a) $1-i$

$|1-i| = \sqrt{2}$ $\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\arg(z) = \{-\frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z\}$ $\quad Arg(z) = -\frac{\pi}{4}$

b) $-\sqrt{3}+i$

$|-\sqrt{3}+i| = 2$ $\quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\arg(-\sqrt{3}+i) = \{\frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in Z\}$ $\quad Arg(-\sqrt{3}+i) = \frac{5\pi}{6}$

c) $(-1-i\sqrt{3})^2$

$|-1-i\sqrt{3}| = 2$ $\quad \cos\theta = \frac{-1}{2}$ $\quad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \arg(-1-i\sqrt{3}) = \{-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z\}$

با توجه به اینکه $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ داریم

$\arg(-1-i\sqrt{3})^2 = \{-\frac{4\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z\}$ $\quad Arg(-i\sqrt{3}-1)^2 = -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

d) $(1-i)^3$

$|1-i| = \sqrt{2}$ $\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\quad \arg(1-i) = \{-\frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z\}$

$\arg(1-i)^3 = \{-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z\}$ $\quad Arg(1-i)^3 = -\frac{3\pi}{4}$

e) $\frac{2}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2(1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\left|\frac{2}{1+i\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right| = 1$ $\quad \cos\theta = \frac{1}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\arg(\frac{2}{1+i\sqrt{3}}) = \{-\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z\}$ $\quad Arg(\frac{2}{1+i\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{3}$

f) $\frac{2}{i-1} = \frac{-2}{\sqrt{2}}(1+i)$

$\left|\frac{2}{i-1}\right| = 2$ $\quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \arg(\frac{2}{i-1}) = \{-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z\}$ $\quad Arg(\frac{2}{i-1}) = -$

g) $\frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2i} = \frac{-i}{2}(-\sqrt{3}+i) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$\left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right| = 1 \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{-1}{2}$

$\arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}\right) = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\} \qquad \operatorname{Arg}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}\right) = \frac{-\pi}{6}$

h) $(1+i\sqrt{3})(1+i)$

$|1+i\sqrt{3}| = 2 \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \arg(1+i\sqrt{3}) = \left\{\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

$|1+i| = \sqrt{2} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \arg(1+i) = \left\{\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

$\arg((1+i\sqrt{3})(1+i)) = \operatorname{Arg}(1+i\sqrt{3}) + \arg(1+i) = \left\{\frac{7\pi}{12} + 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

$$\operatorname{Arg}((1+i\sqrt{3})(1+i)) = \frac{7\pi}{12}$$

۶- اعداد مختلط زیر را به شکل نمایی نشان دهید.

a) $(\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}+2i$

$|\sqrt{3}-i| = 2 \qquad \operatorname{Arg}(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt{3}-i = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

$|1+i\sqrt{3}| = 2 \qquad \operatorname{Arg}(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

$|2\sqrt{3}+2i| = 4 \qquad \operatorname{Arg}(2\sqrt{3}+2i) = \frac{\pi}{6} \qquad 2\sqrt{3}+2i = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$

$(\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3}) = 2e^{-\frac{\pi}{6}i} \times 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 4e^{\frac{\pi}{6}i} = 2\sqrt{3}+2i$

b) $(1+i)^3 = -2+2i$

$|1+i| = \sqrt{2} \qquad \arg(1+i) = \left\{\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\} \Rightarrow \arg(1+i)^3 = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

$(1+i)^3 = (\sqrt{2})^3 \times e^{\frac{3\pi}{4}i} = 2\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$|-2+2i| = 2\sqrt{2} \qquad \arg(-2+2i) = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\} \qquad -2+2i = 2\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$$(1+i)^3 = -2+2i = 2\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

c) $2i(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3}) = -8$

$|2i| = 2 \qquad \arg(2i) = \{\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n\in Z\} \qquad 2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$

$|\sqrt{3}+i| = 2 \qquad \arg(\sqrt{3}+i) = \{\frac{\pi}{6} + 2n\pi, n\in Z\} \qquad \sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$

$|1+i\sqrt{3}| = 2 \qquad \arg(1+i\sqrt{3}) = \{\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n\in Z\} \qquad 1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

$|-8| = 8 \qquad \arg(-8) = \{-\pi + 2n\pi, n\in Z\} \qquad -8 = 8e^{-i\pi}$

$2i(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3}) = 2e^{\frac{\pi}{2}i} \times 2e^{\frac{\pi}{6}i} \times 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 8e^{-\pi i} = -8$

d) $\frac{8}{1+i} = 4-4i$

$|1+i| = \sqrt{2} \qquad \arg(1+i) = \{\frac{\pi}{4} + 2n\pi, n\in Z\} \qquad 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

$|4-4i| = 4\sqrt{2} \qquad \arg(4-4i) = \{-\frac{\pi}{4} + 2n\pi, n\in Z\} \qquad 4-4i = 4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$\frac{8}{1+i} = \frac{8}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} = 4\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i} = 4-4i$

۷. اعداد زیر را به شکل قطبی نمایش دهید

a) $-4 = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$

b) $4-4i$

$|4-4i| = 4\sqrt{2} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \theta = -\frac{\pi}{4}$

$4-4i = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) = 4\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$

c) $-7i$

$|-7i| = 7 \qquad \cos\theta = 0 \qquad \sin\theta = -1 \qquad \theta = -\frac{\pi}{2}$

$-7i = 7(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})$

d) $-2\sqrt{3}-2i$

$|-2\sqrt{3}-2i|=4$ $\quad\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\theta=-\frac{1}{2}$ $\quad\theta=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$

$-2\sqrt{3}-2i=4\left(\cos\frac{5\pi}{6},-i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

f) $\frac{6}{i+\sqrt{3}}=\frac{3}{2}(\sqrt{3}-i)$

$\left|\frac{3}{2}(\sqrt{3}-i)\right|=3$ $\quad\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\theta=-\frac{1}{2}$ $\quad\theta=-\frac{\pi}{6}$

$\frac{6}{i+\sqrt{3}}=3\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

g) $(5+5i)^3$

$|5+5i|=5\sqrt{2}$ $\quad\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\theta=\frac{\pi}{4}$

$5+5i=5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$(5+5i)^3=(5\sqrt{2})^3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

۸. اعداد زیر را به فرم جبری $a+ib$ نمایش دهید

a) $e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

b) $4e^{-i\frac{\pi}{2}}=4\left(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})\right)=-4i$

c) $8e^{i\frac{7\pi}{3}}=8\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right)=8\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4(1+\sqrt{3}i)$

d) $-2e^{i\frac{5\pi}{6}}=-2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-i$

e) $2i\,e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\pi}=2i\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(\cos\pi+i\sin\pi)=2i\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)i=1-\sqrt{3}i$

f) $6e^{i\frac{2\pi}{3}}=6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=6\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=3(-1+\sqrt{3}i)$

g) $e^{2}e^{i\pi}=e^{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-e^{2}i$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

h) $e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\pi} = e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

۹. فرض کنید $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$ نشان دهید که تساوی زیر برقرار نیست.

$$Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$$

$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \qquad |z_1| = 2 \qquad \cos\theta = -\frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$arg(z_1) = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2n\pi,\ n\in Z\right\} \qquad Arg(z_1) = \frac{2\pi}{3}$

$z_2 = -\sqrt{3} + i \qquad |z_2| = 2 \qquad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{1}{2}$

$arg(z_2) = \left\{\frac{\pi}{6} - \pi + 2n\pi,\ n\in Z\right\} \qquad Arg(z_2) = \cancel{-\frac{2\pi}{3}}\ \frac{5\pi}{6}$

$z_1 z_2 = (-1 + i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i) = -4i \qquad Arg(z_1 z_2) = -\frac{\pi}{2}$

$Arg(z_1) + Arg(z_2) = \frac{2\pi}{3} + \cancel{\frac{2\pi}{3}}^{\,\frac{5\pi}{6}} = \cancel{0}^{\,\frac{3\pi}{2}} \neq -\frac{\pi}{2} = Arg(z_1 z_2)$

۱۰. ثابت کنید:

a) $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$

$arg(z_1) - arg(z_2) = \{\theta_1 - \theta_2 : \theta_1 \in arg(z_1), \theta_2 \in arg(z_2)\}$

فرض می‌کنیم $\theta \in arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$. چون $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ بنابراین $\theta_1 - \theta_2 \in arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

در نتیجه

$$\exists n_0 \in Z : \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2n_0\pi$$

اما چون $\theta_1 \in arg(z_1)$ لذا $\theta_1 + 2n_0\pi \in arg(z_1)$ در نتیجه

$$\theta = (\theta_1 + 2n_0\pi) - \theta_2 \in arg(z_1) - arg(z_2)$$

بنابراین $arg(z_1/z_2) \subseteq arg(z_1) - arg(z_2) \quad (1)$

بالعکس، فرض می‌کنیم $\theta \in arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$. بنابراین

$$\exists\theta_1 \in arg(z_1) \quad \exists\theta_2 \in arg(z_2) : \theta = \theta_1 - \theta_2$$

در نتیجه $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$, $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ شکل قطبی z_1, z_2 می‌باشد

$\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \Rightarrow (2)\ arg(z_1) - arg(z_2) \subseteq arg(z_1/z_2)$

b) $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$

$\arg(\frac{1}{z}) = \arg(1) - \arg(z) = \{2n\pi - \theta,\ n\in Z,\ \theta\in \arg(z)\}$

$= -\{\theta - 2n\pi,\ n\in Z,\ \theta\in\arg(z)\}$

چون $\theta\in\arg(z)$ بنابراین $\theta - 2n\pi\in\arg(z)$ در نتیجه

$\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$

c) $\arg(z_1\bar{z}_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

$z_2 = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\bar{z}_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{-i\theta}$

بنابراین $-\theta\in\arg(\bar{z}_2)$ در نتیجه

$\arg(\bar{z}_2) = \{-\theta + 2n\pi,\ n\in Z,\ \theta\in\arg(z_2)\} = -\{\theta - 2n\pi,\ \theta\in\arg(z_2),\ n\in Z\}$

چون $\theta\in\arg(z_2)$ بنابراین $\theta - 2n\pi\in\arg(z_2)$ در نتیجه

$\arg(\bar{z}_2) = -\arg(z_2)$

$\arg(z_1\bar{z}_2) = \arg(z_1) + \arg(\bar{z}_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

11. ثابت کنید:

a) $Arg(z\bar{z}) = 0$

$\arg(z\bar{z}) = \arg(z) - \arg(z) = \{2n\pi,\ n\in Z\} \Rightarrow Arg(z\bar{z}) = 0$

b) اگر $Re(z) > 0$ آنگاه $Arg(z+\bar{z}) = 0$

$\arg(z+\bar{z}) = \arg(2Re(z)) = \{2n\pi,\ n\in Z\} \Rightarrow Arg(z+\bar{z}) = 0$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

ریشه n ام یک عدد مختلط

همه مقادیر زیر را مشخص کنید.

a) $(-2+2i)^{\frac{1}{3}}$ $\qquad Z^3=(-2+2i)$

$r_0=|-2+2i|=2\sqrt{2}$ $\qquad \cos\theta_0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \sin\theta_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \theta_0=\frac{3\pi}{4}$

$$Z_k=(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right) \qquad 0\le k\le 2$$

$k=0$ $\quad Z_0=\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt[6]{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(1+i)$

$k=1$ $\quad Z_1=\sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\sqrt[6]{8}\left(-\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}+i\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}\left((1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})\right)$

$k=2$ $\quad Z_2=\sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=\sqrt[6]{8}\left(\frac{-\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}-i\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}\right)$

$=-\frac{1}{2}\left((1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})\right)$

b) $(-1)^{\frac{1}{5}}$ $\qquad Z^5=-1$ $\qquad r_0=1$ $\qquad \theta_0=\pi$

$$Z_k=\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right) \qquad 0\le k\le 4$$

$k=0$ $\quad Z_0=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\frac{\pi}{5}=0.809+0.5878i$

$k=1$ $\quad Z_1=\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=-0.309+0.9511i$

$k=2$ $\quad Z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-i$

$k=3$ $\quad Z_3=\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)=-0.309-0.9511i$

$k=4$ $\quad Z_4=\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=0.809-0.5878i$

d) $(12i)^{\frac{1}{4}}$ $\qquad Z^4 = 12i \qquad r_0 = 12 \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$Z_k = 12^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)\right] \qquad 0 \le k \le 3$$

e) $\sqrt{\frac{1-i}{1+i}}$ $\qquad Z^2 = \frac{1-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{-2i}{2} = -i$

$r_0 = 1 \qquad \theta_0 = -\frac{\pi}{2}$

$$Z_k = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) \qquad 0 \le k \le 1$$

فرض کنید $1 \ne \omega$ یک ریشه nام واحد است. ثابت کنید:

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = \frac{-n}{1-\omega}$$

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n = \frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega}$$

با مشتق گیری از طرفین داریم

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = \frac{-(n+1)\omega^n(1-\omega) + (1-\omega^{n+1})}{(1-\omega)^2}$$

با توجه به اینکه $1 = \omega^n$ و $\omega^{n+1} = \omega$ خواهیم داشت

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = \frac{-(n+1)(1-\omega) + (1-\omega)}{(1-\omega)^2}$$

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = \frac{-(n+1)+1}{1-\omega}$$

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = \frac{-n}{1-\omega}$$

تابع

۱. فرض کنید $f(x)=\frac{1}{1+x}$ مطلوبست:

الف. $f(f(x))$

$$f(f(x))=f\left(\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{1+1+x}=\frac{1+x}{2+x}$$

ب. $f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{1+x}$$

ج. $f(cx)$

$$f(cx)=\frac{1}{1+cx}$$

د. به ازای کدام مقادیر c، x ای وجود دارد که $f(cx)=f(x)$

$$f(cx)=f(x)\Rightarrow \frac{1}{1+cx}=\frac{1}{1+x}\Rightarrow 1+x=1+cx\Rightarrow (c-1)x=0$$

اگر $c\neq 1$ باشد $x=0$.

ه) به ازای کدام مقادیر c، معادله $f(cx)=f(x)$ حداقل دارای دو جواب است؟

$$\frac{1}{1+cx}=\frac{1}{1+x}\Rightarrow 1+cx=1+x\Rightarrow cx=x\Rightarrow c=1$$ دارای حداقل ۲ جواب

۲. فرض کنید $g(x)=x^2$، $h(x)=\begin{cases}0 & x\in Q\\ 1 & x\in R-Q\end{cases}$.

الف. به ازای کدام y، $h(y)\leq y$؟

$y\in Q \quad h(y)\leq y\Rightarrow 0\leq y$

$y\in R-Q \quad h(y)\leq y\Rightarrow 1\leq y$

ب. به ازای کدام y، $h(y)\leq g(y)$؟

$y\in Q \quad h(y)\leq g(y)\Rightarrow y^2\geq 0 \quad y\in Q$

$y\in R-Q \quad h(y)\leq g(y)\Rightarrow y^2\geq 1\Rightarrow y^2-1\geq 0 \quad y\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

$((-\infty,-1]\cup[1,\infty))\cap(R-Q)$

ج) حاصل $g(h(t)) - h(t)$ چیست؟

$$g(h(t)) = g\left(\begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \in R-Q \end{cases}\right) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \in R-Q \end{cases}$$

$$g(h(t)) - h(t) = 0$$

د) به ازای کدام a، $g(g(a)) = g(a)$ ؟

$$g(g(a)) = g(a^2) = a^4$$

$$g(g(a)) = g(a) \Rightarrow a^4 = a^2 \Rightarrow a^2(a^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

۳. دامنه توابع زیر را مشخص کنید

الف) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$1 - x^2 \geq 0 \qquad x = \pm 1 \qquad \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 1 & \\ \hline & - & & + & & - \end{array} \qquad D_f = [-1,1]$

ب) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

$$g(x) = \frac{1}{x-1}, \quad h(x) = \frac{1}{x-2}$$

$D_g = \mathbb{R} - \{1\} \qquad D_h = \mathbb{R} - \{2\} \qquad D_f = D_g \cap D_h = \mathbb{R} - \{1,2\}$

ج) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad D_g = [-1,1]$$

$h(x) = \sqrt{x^2-1} \qquad x^2 - 1 \geq 0 \qquad \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 1 & \\ \hline & + & & - & & + \end{array} \qquad D_h = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

$$D_f = D_g \cap D_h = \{-1,1\}$$

د) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$

$$g(x) = \sqrt{1-x}, \quad h(x) = \sqrt{x-2}$$

$D_g = (-\infty,1] \qquad D_h = [2,\infty) \qquad \Rightarrow \qquad D_f = \varnothing$

ج) حاصل $g(h(t))-h(t)$ چیست؟

$$g(h(t))=g\left(\begin{cases}0 & x\in Q\\ 1 & x\in R-Q'\end{cases}\right)=\begin{cases}0 & x\in Q\\ 1 & x\in R-Q'\end{cases}$$

$$g(h(t))-h(t)=0$$

د) بازای کدام a، $g(g(a))=g(a)$؟

$$g(g(a))=g(a^2)=a^4$$

$$g(g(a))=g(a)\Rightarrow a^4=a^2\Rightarrow a^2(a^2-1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ a^2-1=0\Rightarrow a=\pm1\end{cases}$$

۳. دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

الف. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$1-x^2\geqslant 0 \qquad x=\pm1$

x		-1		1	
	$-$		$+$		$-$

$D_f=[-1,1]$

ب. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$

$g(x)=\dfrac{1}{x-1}\quad,\quad h(x)=\dfrac{1}{x-2}$

$D_g=\mathbb{R}-\{1\}\qquad D_h=\mathbb{R}-\{2\}\qquad D_f=D_g\cap D_h=\mathbb{R}-\{1,2\}$

ج. $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$

$g(x)=\sqrt{1-x^2}\quad,\quad D_g=[-1,1]$

$h(x)=\sqrt{x^2-1}\qquad x^2-1\geqslant 0$

x		-1		1	
	$+$		$-$		$+$

$D_h=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

$$D_f=D_g\cap D_h=\{-1,1\}$$

د) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$

$g(x)=\sqrt{1-x}\quad,\quad h(x)=\sqrt{x-2}$

$D_g=(-\infty,1]\qquad D_h=[2,\infty)\qquad\Rightarrow\qquad D_f=\phi$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۴. فرض کنید $S(x)=x^2$ ، $P(x)=2^x$ ، $R(x)=\sin x$. هر یک از موارد زیر را تعیین کنید.

الف. $(SoP)(y)$

$$(SoP)(y)=S(P(y))=S(2^y)=(2^y)^2=2^{2y}$$

ب. $(RoP)(t)+(SoPoR)(t)$

$$SoPoR(t)=SoP(R(t))=SoP(\sin t)=S(P(\sin t))=S(2^{\sin t})=2^{2\sin t}$$

$$RoP(t)=R(2^t)=\sin 2^t$$

$$(RoP)(t)+(SoPoR)(t)=2^{2\sin t}+\sin 2^t$$

۵. به ازای کدام مقادیر از a ، b ، c ، d تابع $F(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ در $F(F(x))=x$ به ازای هر x صادق است؟

$$F(F(x))=F\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=\frac{a\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+d}=\frac{a^2x+ab+bcx+bd}{acx+cb+dcx+d^2}$$

$$=\frac{(a^2+bc)x+(ab+bd)}{(ac+dc)x+(cb+d^2)}=x$$

برای $x=0$ داریم:

$$\frac{ab+bd}{cb+d^2}=0 \Rightarrow ab+bd=0 \Rightarrow ab=-bd$$

با فرض $b\neq 0$ ، $a=-d$

در این صورت

$$F(F(x))=\frac{(a^2+bc)x}{(ac+cd)x+cb+d^2}=x$$

$$\Rightarrow \frac{(a^2+bc)x}{(cb+d^2)x}=x$$

که این رابطه به ازای هر c و $a=-d$ برقرار است.

اگر $b=0$ باشد، آنگاه

$$F(F(x))=\frac{a^2x}{(ac+cd)x+d^2}=x \Rightarrow$$

با فرض $c\neq 0$ ، $a=-d$ و اگر $c=0$ باشد، $a=\pm d$

۶. فرض کنید f یک تابع، y عددی است که $f(f(y)) = y$. حاصل $f(f(f(\dots(f(y))\dots)))$ کدام است؟ این مقدار برای ۸۱ بار چند است؟ اگر $f(f(y)) = f(y)$ حاصل های خواسته شده چگونه اند؟

$$\underbrace{f(f(\dots(f(y))\dots)))}_{\text{۸۰ بار}} = y \qquad \underbrace{f(f(f\dots(f(y))\dots)))}_{\text{۸۱ بار}} = f(y)$$

$$\underbrace{f(f(\dots(f(y))\dots)))}_{\text{۸۰ بار}} = f(y) \qquad \underbrace{f(f\dots(f(y))\dots)))}_{\text{۸۱ بار}} = f(f(y)) = f(y)$$

۷. ثابت کنید هر تابع f با دامنه R را می‌توان به صورت $f = E + O$ نمایش داد که در آن E زوج و O فرد است. ثابت کنید این نمایش یکتاست.

درصورتیکه $E = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ ، $O = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. در این صورت $f = E + O$ که E یک تابع زوج و O یک تابع فرد است.

$$E(x) = f(x) - O(x) \Rightarrow E(-x) = f(-x) - O(-x)$$

چون E یک تابع زوج است بنابراین $E(-x) = E(x)$ در نتیجه داریم.

$$f(-x) - O(-x) = f(x) - O(x)$$

و حال چون O فرد است، بنابراین

$$f(-x) - (-O(x)) = f(x) - O(x)$$

$$f(-x) + O(x) = f(x) - O(x)$$

$$2O(x) = f(x) - f(-x) \Rightarrow O(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$E(x) = f(x) - O(x) \Rightarrow E(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱:

۸. برای توابع f و g، تعریف کنید:

$$|f|(x) = |f(x)|$$
$$\max(f,g)(x) = \max(f(x), g(x))$$
$$\min(f,g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

نمایشی برای توابع max و min برحسب قدر مطلق پیدا کنید.

$$\max(|f|,|g|)(x) = \max(|f|(x), |g|(x)) = \max(|f(x)|, |g(x)|)$$

$$\min(|f|,|g|)(x) = \min(|f|(x), |g|(x)) = \min(|f(x)|, |g(x)|)$$

۹. الف) برای تابع دلخواه f، نشان دهید

$$f = \max(f,0) + \min(f,0)$$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \max(f,0) = \max(f(x),0) = f(x) \\ \min(f,0) = \min(f(x),0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f = \max(f,0) + \min(f,0)$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \max(f,0) = \max(f(x),0) = 0 \\ \min(f,0) = \min(f(x),0) = f(x) \end{cases} \Rightarrow f = \max(f,0) + \min(f,0)$$

ب. نشان دهید هر تابع f را می‌توان به صورت $f = g - h$ که g و h توابعی نامنفی اند نمایش داد.

فرض می‌کنیم $h = \max(-f, 0)$ و $g = \max(f, 0)$ در این صورت g و h نامنفی اند و داریم

$$f \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} h = \max(-f,0) = 0 \\ g = \max(f,0) = f \end{cases} \Rightarrow g - h = f - 0 = f$$

$$f < 0 \Rightarrow \begin{cases} h = \max(-f,0) = -f \\ g = \max(f,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow g - h = 0 - (-f) = f$$

۱۰. ثابت یا رد کنید.

الف. $fo(g+h) = fog + foh$

مثال نقض:

$f(x) = \sqrt{x}\ ,\ g(x) = 1-x \qquad h(x) = \frac{1}{x}$

$fog + foh = \sqrt{1-x} + \sqrt{\frac{1}{x}}$

$fo(g+h) = \sqrt{1-x+\frac{1}{x}}$

$fog + foh \neq fo(g+h)$

همچنین دامنه طرفین مساوی نیست.

ب- $(g+h)of = gof + hof$

$$((g+h)of)(x) = (g+h)(f(x)) = g(f(x)) + h(f(x)) = gof(x) + hof(x)$$

$$D_{(g+h)of} = D_{gof} \cap D_{hof} = D_{gof+hof}$$

ج. $\frac{1}{fog} = \frac{1}{f} o g$

$f(x) = \sqrt{1-x} \qquad g(x) = \frac{1}{1-x}$

$fog(x) = f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{1-x}} = \sqrt{\frac{-x}{1-x}} \Rightarrow \frac{1}{fog}(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

$f^{-1}(x) = 1-x^2 \qquad \frac{1}{f} o g(x) = \frac{1}{f}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^2-2x}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{fog}(x) \neq \frac{1}{f} o g(x)$

د. $\frac{1}{fog} = fo\frac{1}{g}$

$g^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}$

$$fo\frac{1}{g}(x) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \sqrt{1-\frac{x-1}{x}} = \sqrt{\frac{x-x+1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \neq \frac{1}{fog}(x)$$

۱۱. فرض کنید I تابع همانی است و $f\circ g = I$. ثابت کنید:

الف. $x\neq y \Rightarrow g(x)\neq g(y)$

$$g(x)=g(y) \Rightarrow f\circ g(x)=f\circ g(y) \Rightarrow I(x)=I(y) \Rightarrow x=y$$

ب. $\forall b\ \exists a\ (f(a)=b)$

$$\forall b \quad I(b)=b \Rightarrow f\circ g(b)=b \Rightarrow f(g(b))=b$$

با فرض $g(b)=a$ داریم

$$f(a)=b$$

۱۲. فرض کنید $f(x)=x+1$. آیا تابعی مانند g وجود دارد که $f\circ g=g\circ f$؟ ب. اگر f یک تابع ثابت باشد، به ازای کدام توابع g، $f\circ g = g\circ f$؟ ج. اگر به ازای هر تابع g، $f\circ g=g\circ f$ نشان دهید f همانی است.

الف. نشان می‌دهیم f معکوس‌پذیر است، f یک به یک

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1+1=x_2+1 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$$

$$y=x+1 \Rightarrow x=y-1 \Rightarrow f^{-1}(x)=x-1$$

ب. فرض می‌کنیم $f(x)=c$ که c یک عدد ثابت است را باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} f\circ g(x)&=f(g(x))=c \\ g\circ f(x)&=g(f(x))=g(c) \end{aligned} \Rightarrow g(c)=c$$

ج. فرض می‌کنیم تابع $g(x)$، تابع ثابت $g(x)=c$ باشد، بنابراین

$$\begin{aligned} f\circ g(x)&=f(g(x))=f(c) \\ g\circ f(x)&=g(f(x))=c \end{aligned} \Rightarrow f(c)=c \qquad (1)$$

چون رابطه $f\circ g=g\circ f$ به ازای هر g دلخواه برقرار است بنابراین رابطه (۱) به ازای هر c دلخواه برقرار می‌باشد، بنابراین تابع f، تابع همانی است.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

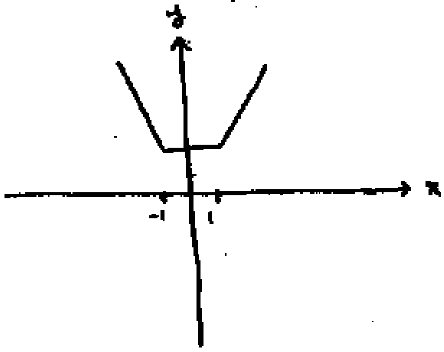
۱۳. نمودارهای روابط زیر را رسم کنید.

الف. $y=|x+1|+|x-1|$

ابتدا $x-1$ و $x+1$ را تعیین علامت می‌کنیم.

		-1	1	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$+$	

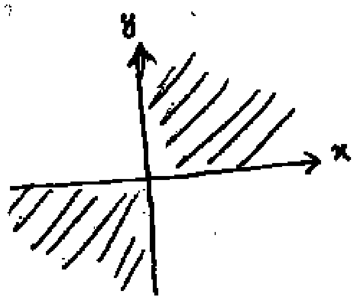
$$\Rightarrow y=\begin{cases}-(x+1)-(x-1)=-2x & x\leqslant -1\\ x+1-(x-1)=2 & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x+1+(x-1)=2x & x\geqslant 1\end{cases}$$



ب. $\frac{x}{|x|}=\frac{y}{|y|}$

$$\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases} \Rightarrow \frac{y}{|y|}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x>0 \Rightarrow |y|=y \Rightarrow y>0\\ x<0 \Rightarrow |y|=-y \Rightarrow y<0\end{cases}$$

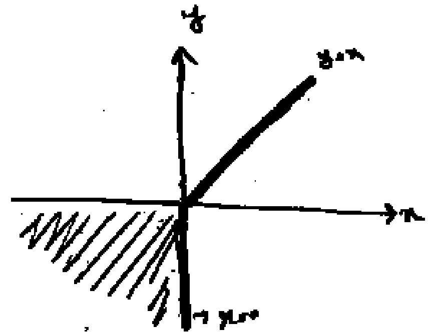


ج. $|x|+x=|y|+y$

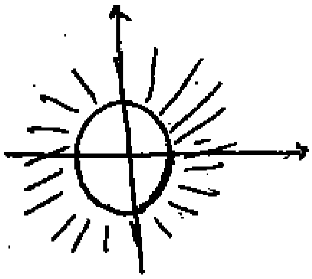
$$|x|+x=\begin{cases}2x & x\geqslant 0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$x\geqslant 0 \Rightarrow |y|+y=2x \Rightarrow \begin{cases}y\geqslant 0 & 2y=2x \Rightarrow y=x\\ y<0 & 0=2x \Rightarrow x=0\end{cases}$$

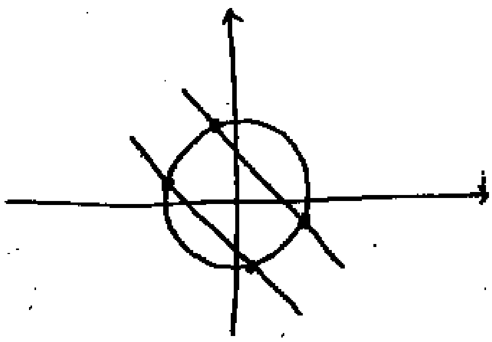
$$x\leqslant 0 \Rightarrow |y|+y=0 \Rightarrow |y|=-y \Rightarrow y\leqslant 0$$



د) $x^2+y^2>1$



ز) $\begin{cases} |x+y|=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$



ر) $\begin{cases} |x-y|<2 \\ y\geq 3 \\ x^2+y^2<4 \end{cases}$

جواب ندارد چون y ای که در رابطه $y\geq 3$ و $x^2+y^2<4$ با هم صدق کند وجود ندارد.

۱۴. کدام یک از توابع زیر کران دارند؟

الف) $y=\frac{x}{x^2+1}$ کران دار $|y|<1$

ب) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ کران دار $|y|<1$

ج) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$ کران دار نیست.

د) $y=|x|$ کران دار نیست.

ه) $y=\frac{1}{|x|}$ کران دار

و) $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ کران دار

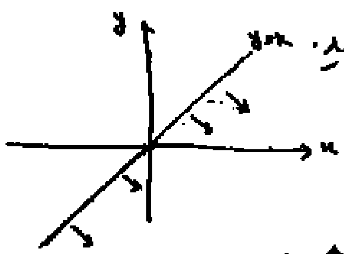
۱۵. ثابت کنید تابع $y=\frac{1-x}{1+x}$ معکوس خوداست.

$$y=\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow y+xy=1-x \Rightarrow xy+x=1-y \Rightarrow x(1+y)=1-y$$

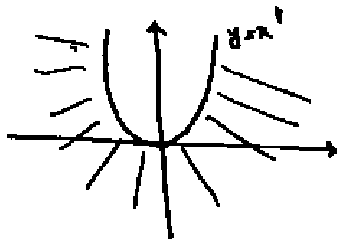
$$\Rightarrow x=\frac{1-y}{1+y}$$

۱۶. نمودارهای روابط زیر را در صفحه تعیین کنید.

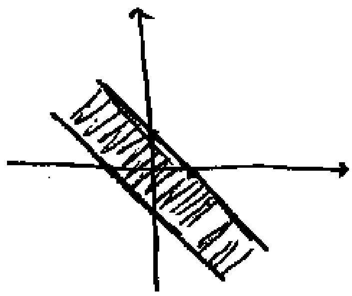
۱) $x>y$



۲) $y<x^2$



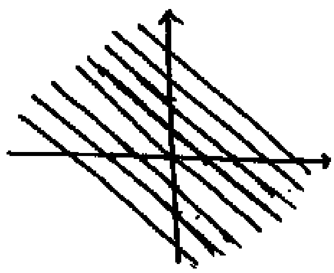
۳) $|x+y|<1$



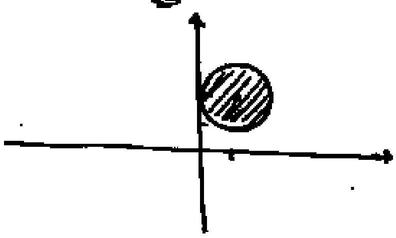
۴) $x+y$ یک عدد صحیح است.

$x+y=k \Rightarrow y=k-x$

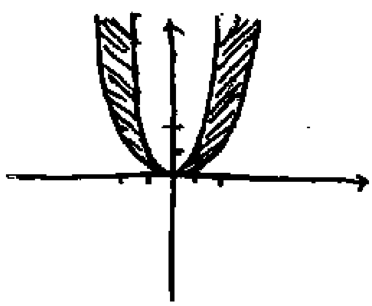
k عدد صحیح



۵) $(x-1)^2+(y-2)^2<1$

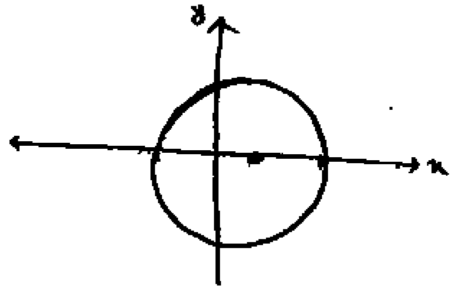


۶) $x^2<y<x^4$



۷) $x^2-2x+y^2=4$

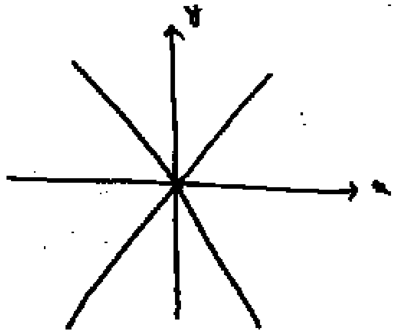
$$x^2-2x+1+y^2=4+1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=5$$



۸) $y^2=x^2$

$y=|x|$

$y=-|x|$

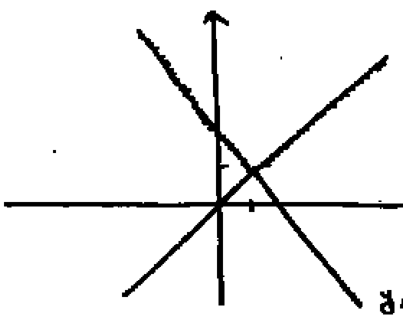


۹) $|1-x|=|y-1|$

$$|y-1|=\begin{cases}-(y-1) & y\leq 1\\ y-1 & y\geq 1\end{cases}$$

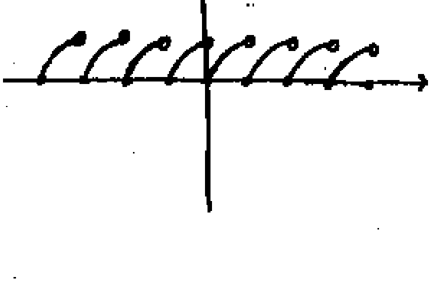
$\Rightarrow \quad y\leq 1 \Rightarrow -(y-1)=|1-x| \Rightarrow y=1-|1-x|$

$\quad\; y\geq 1 \Rightarrow y-1=|1-x| \Rightarrow y=1+|1-x|$



۱۰) $y=\sqrt{x-[x]}$

اگر x عدد صحیح باشد، $y=0$



حل تمرین ریاضی عمومی ۱

• حد •

۱. حدود زیر را حساب کنید. در صورت عدم وجود دلیل ارائه دهید.

$$1.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1}=3$$

$$2.\ \lim_{x\to -\infty}\frac{-x^2+6x+8}{10x^2+10^2}=\frac{-1}{10}$$

$$3.\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$4.\ \lim_{x\to 3^-}\frac{(2x+1)^3(x-5)^4}{(x-3)^3\sqrt{9-x}}=\frac{7^3\times 2^4}{0^-}=-\infty$$

$$5.\ \lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-5)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-5}=\frac{-3}{4}$$

$$6.\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-x^2(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}-x^2=-9$$

$$7.\ \lim_{x\to\infty}e^{-x}+1=1$$

$$8.\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+7}{x^3-3}=0$$

$$9.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x-x^2}{x+x^2}=-1$$

$$10.\ \lim_{x\to\infty}\frac{12+2^x}{6-2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln 2\ 2^x}{-\ln 2\ 2^x}=-1$$

$$11.\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\simeq\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

۱۲. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{10x^3 - x^2}{x-3} = \dfrac{270-9}{0^-} = -\infty$

۱۳. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x+5}{x^2+4x-5} = \lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x+5}{(x+5)(x-1)} = \dfrac{-1}{6}$

۱۴. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^4-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1} = 4$

۱۵. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|} =$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{-x} = -1$

۱۶. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin 2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2 \times \dfrac{\sin 2h}{2h} = 2$

۱۷. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} \simeq \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{|x+1|}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-(x+1)}{x} = -1$

۱۸. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+3}{x-1} = +\infty$

۱۹. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \dfrac{1}{6}$

۲۰. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 3$

۲۱. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{2\cos^2 x-1}{\sin^2 x-1} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 2x}{-\cos^2 x} = -1$

۲۲. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} \times \dfrac{\sin 3x}{x} = 3\times 3 = 9$

۲۳. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{4+x^2} = -\infty$

۲۴. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 4x} = \dfrac{1}{4}$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۲۵. برای تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{8x^3+12x^2}{x+2} & x<-\frac{1}{2} \\ 3 & x=-\frac{1}{2} \\ \dfrac{\sin \pi x}{x} & x>-\frac{1}{2} \end{cases}$ حدود زیر را تعیین کنید.

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \pi x}{x} = \pi$

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} \dfrac{8x^3+12x^2}{x+2} = 2 \qquad \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} \dfrac{\sin \pi x}{x} = 2$

c) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{\sin \pi x}{x} = \dfrac{0}{-2} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{8x^3+12x^2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{8x^2(x+2)}{x+2} = +\infty$

۲۶. برای تابع $y=\dfrac{|x|-x}{x}$ حدود زیر را تعیین کنید.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-x}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-2x}{x} = -2$

c) $\lim\limits_{x\to 0} y =$ وجود ندارد

۲۷. $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-9x}} = \sqrt{\dfrac{25}{36}} = \dfrac{5}{6}$

۲۸. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x \, \sin(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln x \times \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} = 0\times 1 = 0$

۲۹. برای تابع
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2} & x<0\\ 3 & x=0\\ \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & x>0\end{cases}$$
حدود زیر را تعیین کنید.

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{2}{3}$$

c) $$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=1$$

۳۰. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}$$

۳۱. $$\lim_{x\to -5^-}\frac{x^2-25}{x^2+10x+25}=\lim_{x\to -5^-}\frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)^2}=\lim_{x\to -5^-}\frac{x-5}{x+5}=\frac{-10}{0^-}=+\infty$$

۳۲. $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{3\sin x}+\frac{\sin x}{3x}\right]=\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]=\left[\frac{2}{3}\right]=0$$

۳۳. هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2\sin^2 x/2}=\frac{1}{-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=-2$$

2. $$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\simeq\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}-\frac{1}{t}=0$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^3\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times\sin^2 x}{x^3\cos x(1+\cos x)}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۴. $\lim\limits_{x\to \pi/2^-} (2x\,tg x - \pi \sec x) = \lim\limits_{x\to\pi/2^-} \dfrac{2x\sin x - \pi}{\cos x} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2(\frac{\pi}{2}-t)\sin(\frac{\pi}{2}-t)-\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(\pi-2t)\cos t - \pi}{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\pi\cos t - 2t\cos t - \pi}{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-\pi(1-\cos t)-2t\cos t}{\sin t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-2\pi \sin^2\frac{t}{2} - 2t\cos t}{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0} (-2\pi) \times \dfrac{\sin t/2}{\sin t} \times \sin t/2 - 2\,\dfrac{t}{\sin t} \times \cos t = -2$

۵. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right) \approx \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2} = 0$

۶. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} t\,e^{-t} = \lim\limits_{u\to 0} (-\ln u)\times u = 0$

$\lim\limits_{u\to 0} u\ln u = \lim\limits_{u\to 0} u \ln(1+(u-1)) = \lim\limits_{u\to 0} u(u-1) = 0$

۷. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} - \dfrac{\sin 2x}{x} = +\infty - 2 = +\infty$

۸. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-2x)^{\cot g x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-2x)^{1/tg x} \approx \lim\limits_{x\to 0^+} (1-2x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left((1-2x)^{1/(-2x)}\right)^{-2} = e^{-2}$

۹. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\ln x = \lim\limits_{t\to 0} t\ln(-\ln t) \approx \lim\limits_{t\to 0} t(-\ln t - 1) = \lim\limits_{t\to 0} t\ln t + t = 0$

۱۰. $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^x)^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x^{x^x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x^x \ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{e^{\ln x^x}\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{e^{x\ln x}\ln x}$

$= e^{e^0(-\infty)} = e^{1(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$

۱۱. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sec x - tg x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}$

$= \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos x}{(1+\sin x)} = 0$

۱۲. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2i\sin x}{\sin x}=2i$

۱۳. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2}{\sin^2x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2}{\sin^2x}-\frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2}{\sin^2x}-\frac{1+\cos x}{\sin^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2x}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}2\times\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x}\times\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x}=2\times\frac12\times\frac12=\frac12$

۱۴. $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin x)^{\frac{1}{4x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{4x}}=\lim\limits_{x\to0}\left((1-x)^{-\frac1x}\right)^{-\frac14}=e^{-\frac14}$

۱۵. $\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^{2x}}{4\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^{2x}\cos x}{4\sin x}=\frac14\times1\times1=\frac14$

۱۶. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)\ln\cos x=\lim\limits_{t\to0^+}t\ln t=0$

۱۷. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\cos x\sin x}{x^2\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)}{x^2\sin x(1+\sin x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3x}{x^2\sin x(1+\sin x)}=0$

۱۸. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin x}\simeq\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to0}\frac{e^{\ln(t+1)}-1}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1+t-1}{\ln(1+t)}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac1t}}=\frac{1}{\ln e}=1$

۱۹. $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^x=\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\ln x^x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^0=1$

۲۰. $\lim\limits_{x\to0}(e^x+x)^{\frac1x}=\lim\limits_{x\to0}\left((1+(e^x+x-1))^{\frac{1}{e^x+x-1}}\right)^{\frac{e^x+x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+x-1}{x}}=$

حل تمرین‌های برگزیده ۱

۲۱. $= e^{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+1} = e^{1+1} = e^2$

$21. \lim_{x\to 0^+} x^{tgx} = \lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

$22. \lim_{x\to 0^+} (\ln x)\, tgx = \lim_{x\to 0^+} \ln (x^{tgx}) = \ln(\lim_{x\to 0^+} x^{tgx}) = \ln(1) = 0$

۲۳. فرض کنید $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ، دنباله حقیقی $\{x_n\}$ به x_0 همگرا باشد و برای هر n، $x_n \neq x$ ، در این صورت $f(x_n) \to L$. به کمک این مسئله نشان دهید تابع دیریکله

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x\in Q \\ 0 & x\in R-Q \end{cases}$$

در هیچ عدد حقیقی دارای حد نیست .

حل فرض می‌کنیم . $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ در این صورت .

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \qquad (1)$

برای این که نشان دهیم $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ کافی است نشان دهیم

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists M\in N \quad \forall n\geq M \Rightarrow |f(x_n)-L|<\varepsilon$

حال چون $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ، بنابراین برای $\delta>0$ ، عدد طبیعی M وجود دارد که اگر $n\geq M$ باشد آن گاه

$0<|x_n-x_0|<\delta \qquad (2)$

بنابراین با توجه به روابط (۱) و (۲) ، $|f(x_n)-L|<\varepsilon$ ، در نتیجه

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists M\in N \quad \forall n\geq M \quad |f(x_n)-L|<\varepsilon$

اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد گویا و همگرا به عدد حقیقی a و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد اصم و همگرا به a باشد در این صورت

$\lim_{n\to\infty} D(x_n) = 1 , \quad \lim_{n\to\infty} D(y_n) = 0$

بنابراین حد تابع $D(x)$ در a وجود ندارد.

۲۴. حدود زیر را محاسبه کنید.

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}\Rightarrow 1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1 \xRightarrow{\text{فشار}} \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

$$2.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}$$

$$=\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{m}}{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}}=\frac{m}{n}$$

$$3.\ \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x^2-a^2}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}=\lim\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\sqrt{\frac{(x-a)^2}{(x-a)(x+a)}}\times\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{2a}}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}\times(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}\times 2\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1+2\sqrt{a}}{2\sqrt{2}\,a}$$

$$4.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}\cong\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$$

$$5.\ \lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-2\cos(\frac{\pi}{3}+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-2(\cos\frac{\pi}{3}\cos t-\sin\frac{\pi}{3}\sin t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-\cos t+\frac{2\sqrt{3}}{2}\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}+2\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}+2\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۵. ثابت کنید $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\frac{a}{n}x} = 1$. با استفاده از آن

$$\lim \frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{1+27x} - \sqrt[4]{1+16x}\right)$$

را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\frac{a}{n}x} \times \frac{\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{1+ax}+1}{\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{1+ax}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{1+ax-1}{\frac{a}{n}x} \times \frac{1}{\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\cdots+1}$$

$$= \frac{n}{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}} = 1$$

۲۶. a, b را چنان تعیین کنید که $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} - ax - b$ در بی‌نهایت حدی برابر با صفر داشته باشد.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} - ax - b = \frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1} = \frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}$$

برای اینکه $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ باشد باید درجه مخرج از صورت بیشتر باشد، بنابراین باید:

$1-a=0 \Rightarrow a=1$

$a+b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow b=-1$

۲۷. ثابت کنید $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ اگر و تنها اگر $f(x) = L + g(x)$ که در آن $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

حل: ثابت می‌کنیم

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - L = 0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

اگر $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ،

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - L = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} L = L - L = 0$$

اگر $\lim_{x\to x_0} f(x) - L = 0$ ، داریم

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)+L-L = \lim_{x\to x_0} f(x)-L + \lim_{x\to x_0} L = 0+L = L$$

پیوستگی

۱. نشان دهید تابع زیر در $x=-2$ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x+2} & x\neq -2 \\ -5 & x=-2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-3)=-5=f(-2)$$

۲. مقادیر a و c را چنان تعیین کنید که $f(x)$ در $x=4$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} 2cx & x<4 \\ x+a & x=4 \\ x^2-6 & x>4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=f(4)$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-} 2cx=8c \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+} x^2-6=10 \qquad f(4)=4+a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8c=10 \Rightarrow c=\dfrac{5}{4} \\ 4+a=10 \Rightarrow a=6 \end{cases}$$

۳. ثابت کنید $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2 \\ 7 & x=2 \end{cases}$ در $x=2$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=4\neq f(2)$$

۴. پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید.

i) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}} \qquad x\in R$

ii) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{nx}+x}{e^{nx}+1} \qquad x\in R$

ii)

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0)$$

پس تابع پیوسته نیست.

iii)

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$$

پس تابع پیوسته است.

۵. بزرگترین مقدار k را طوری بیابید که به ازای آن تابع $f(x)=[x^2-2]$ روی بازه $[3,3+k)$ پیوسته باشد.

$$f(x)=[x^2-2]=[x^2]-2$$

$$3\leq x<3+k \Rightarrow 9\leq x^2<(3+k)^2$$

برای آنکه تابع f پیوسته باشد باید $(3+k)^2\leq 10$

$$\Rightarrow (3+k)^2\leq 10 \Rightarrow 9+k^2+6k\leq 10 \Rightarrow k^2+6k-1\leq 0$$

$$\Delta=36+4=40 \qquad k=\frac{-6\pm\sqrt{40}}{2} \Rightarrow k=-3\pm\sqrt{10}$$

	$-3-\sqrt{10}$		$-3+\sqrt{10}$	
k	+		−	+

بزرگترین k ممکن عبارت است از $-3+\sqrt{10}$

۶. پیوستگی تابع زیر را در صفر بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{Arctg} x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\operatorname{Arctg} x=0\neq f(0)$$

f در صفر پیوسته نیست.

۷. نقاط ناپیوستگی و پیوستگی تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2+\operatorname{sgn}(x-3)} & x<2\\ \left[\frac{x}{2}\right] & 2\leq x<6\\ \frac{-4}{x-7} & x\geq 6\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2+\operatorname{sgn}(x-3)}=\sqrt{2-1}=1=f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{x}{2}\right]=1=f(2) \rightarrow$$ f در ۲ پیوسته

$$\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-}\left[\frac{x}{2}\right]=2\neq \lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^+}\frac{-4}{x-7}=4$$

f در ۶ پیوسته نیست

مشتق

۱. با استفاده از تعریف مشتق، $f'(x)$ را بیابید.

1. $f(x)=(x-1)(x+1)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x-1)(x+\Delta x+1)-(x-1)(x+1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x-1)(x+1)+\Delta x\,(x+\Delta x+1)+(x-1)\Delta x-(x-1)(x+1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\,(x+\Delta x+1+x-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} 2x+\Delta x=2x$$

2. $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3. $f(x)=\sin x$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0} 2\times\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\times\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}\times\cos x=\cos x$$

۲. مشتق توابع زیر را تعیین کنید.

1. $y=\ln\sqrt{5x^2-4}$

$$y'=\frac{\frac{10x}{2\sqrt{5x^2-4}}}{\sqrt{5x^2-4}}\Rightarrow y'=\frac{5x}{5x^2-4}$$

۲. $y = (e^{x^2+2})^2$

$$y' = 2 \times 2x\, e^{x^2+2} \times e^{x^2+2} = 4x\, e^{2x^2+4}$$

۳. $x^2y^3 + 5xy^4 + 3y^2 = x^4 - 2x$

$$x^2y^3 + 5xy^4 + 3y^2 - x^4 + 2x = 0$$

$$y' = -\frac{2xy^3 + 5y^4 - 4x^3 + 2}{3x^2y^2 + 20xy^3 + 6y}$$

۴. $y = \frac{e^{3x}}{x} + \ln x$

$$y' = \frac{3e^{3x} \times x - e^{3x}}{x^2} + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{(3x-1)e^{3x} + x}{x^2}$$

۵. $y = 2^{x+4}$

$$y' = \ln 2\; 2^{x+4}$$

۶. $e^{\csc x + x}$ $\qquad y' = (-\cot g\, x \csc x + 1)\, e^{\csc x + x}$

۷. $y = \sin x^3 + \cot g^2 x$

$$y' = 3x^2 \cos x^3 - 2(1 + \cot g^2 x)\cot g\, x$$

۸. $y = \log_{10} x^2 + 2^x$

$$y' = \frac{2x}{x^2} \log_{10} e + \ln 2\; 2^x$$

۹. $y = (1-2x)^4 \sin x$

$$y' = 4 \times (-2)(1-2x)^3 \sin x + (1-2x)^4 \cos x \Rightarrow y' = -8x(1-2x)^3 \sin x + (1-2x)^4 \cos x$$

۱۰. $y = \ln(\sec x) + e^{x^2}$

$$y' = \frac{\sec x\, tg\, x}{\sec x} + 2x e^{x^2} \Rightarrow y' = tg\, x + 2x e^{x^2}$$

۱۱. $y=\frac{(x-1)^3}{(2x^2+3)^2}$

$$y'=\frac{3(x-1)^2(2x^2+3)^2-2\times 4x(2x^2+3)(x-1)^3}{(2x^2+3)^4}$$

$$y'=\frac{(x-1)^2\left(3(2x^2+3)-8x(x-1)\right)}{(2x^2+3)^3} \Rightarrow y'=\frac{(x-1)^2(-2x^2+8x+9)}{(2x^2+3)^3}$$

۱۲. $y=tg\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

$$y'=\frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)^2}\cdot\left(1+tg^2\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right) \Rightarrow y'=\frac{4}{(x+2)^2}\left(1+tg^2\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right)$$

۱۳. $y=e^{\sin^3 x^2}$

$$y'=3\times 2x\cos x^2\times\sin^2 x^2\, e^{\sin^3 x^2} \Rightarrow y'=6x\cos x^2\sin^2 x^2\, e^{\sin^3 x^2}$$

۱۴. $y=x^{x^2}$

$$\ln y=\ln x^{x^2} \Rightarrow \ln y=x^2\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y}=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x$$

$$\Rightarrow y'=(2x\ln x+x)\,x^{x^2}$$

۱۵. $y=x^7e^{3x}$

$$y'=7x^6e^{3x}+3x^7e^{3x}$$

۱۶. معادلات خطوط مماس و قائم بر $y=\frac{1}{x-1}$ در $(-2,-\frac{1}{3})$ را بیابید.

$y'=\frac{-1}{(x-1)^2}$ $\quad m=\frac{-1}{(-2-1)^2}=\frac{-1}{9}$ شیب مماس $\quad$ شیب قائم $m'=9$

خط مماس $\quad y-\frac{1}{3}=\frac{-1}{9}(x+2) \Rightarrow y=\frac{-1}{9}x+\frac{1}{9}$

خط قائم $\quad y-\frac{1}{3}=9(x+2) \Rightarrow y=9x+\frac{53}{3}$

۱۷. مختصات نقاطی بر منحنی $y=2x^3-2x+4$ را بیابید که خط مماس در آن نقاط بر منحنی با خط $y=22x-9$ موازی‌اند.

$$\begin{aligned} y'&=6x^2-2\\ y'&=22\end{aligned} \Rightarrow 6x^2-2=22 \Rightarrow 6x^2=24 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$x=2 \Rightarrow y=2\times 8-4+4 \Rightarrow y=16$

$x=-2 \Rightarrow y=-16+4+4 \Rightarrow y=-8$ $\quad (2,16)\ (-2,-8)$

۱۸. معادله خط مماس بر $x^2+3xy+y^2=5$ را در $(1,1)$ تعیین کنید.

$$y'=-\frac{2x+3y}{3x+2y} \qquad m=-\frac{2+3}{3+2} \Rightarrow m=-1$$

$$y-1=-1(x-1) \Rightarrow y=-x+2$$ معادله خط مماس

۱۹. معادله مماس بر $y=\ln(3x^2-11)-5x$ را در $(2,-10)$ تعیین کنید.

$$y'=\frac{6x}{3x^2-11}-5 \qquad m=\frac{12}{12-11}-5 \Rightarrow m=7$$

$$y+10=7(x-2) \Rightarrow y=7x-24$$ خط مماس

۲۰. مشتقات مورد نظر را در معادلات زیر تعیین کنید.

۱. $s=3t^3-\frac{2}{t}$ $\qquad \frac{d^2s}{dt^2}$

$$\frac{ds}{dt}=9t^2+\frac{2}{t^2} \qquad \frac{d^2s}{dt^2}=18t-\frac{4}{t^3}$$

۲. $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2}$ $\qquad f''(5)$

$$f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^2}} \qquad f''(x)=\frac{2(1-4x^2)}{3\sqrt[3]{x^2+2}}$$

$$f''(5)=\frac{2(1-100)}{3\sqrt[3]{25+2}} \Rightarrow f''(5)=-22$$

۳. $h(t)=\sin 2t$ $\qquad h'''(t)$

$$h'(t)=2\cos 2t \qquad h''(t)=-4\sin 2t \qquad h'''(t)=-8\cos 2t$$

۴. $f(x)=e^{3x}$, $f^{(n)}(x)$

$$f'(x)=3e^{3x} \qquad f''(x)=3^2e^{3x} \Rightarrow f^{(n)}(x)=3^n e^{3x}$$

۲۱. ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بر بازه داده شده تعیین کنید.

۱) $[-2,2]$ ، $f(x)=x^3-x^2-8x+1$

$f'(x)=3x^2-2x-8$ $\qquad f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-2x-8=0$

$\Rightarrow x=2,-\frac{4}{3}$

		$-\frac{4}{3}$		2	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

در $x=-\frac{4}{3}$ ، ماکزیمم و در $x=2$ مینیمم.

۲) $[-\frac{1}{2},1]$ $\qquad f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$

$f'(x)=12x^3-24x^2+12x$ $\qquad f'(x)=0 \Rightarrow 12x(x^2-2x+1)=0 \Rightarrow x=0,1$

$f(0)=0$ $\qquad f(1)=1$

$f(x)$ در $x=0$ مینیمم و در $x=1$ ، ماکزیمم است.

۳) $[-1,\frac{1}{2}]$ $\qquad f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow x^2+2x-1=0 \Rightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$$

$x=-1+\sqrt{2}$ در بازه $[-1,\frac{1}{2}]$ قرار دارد.

		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(x)$ در $x=-1+\sqrt{2}$ ، ماکزیمم است.

$$f(-1+\sqrt{2})=\frac{-1+\sqrt{2}+1}{(-1+\sqrt{2})^2+1} \Rightarrow f(-1+\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$$

$f(0)=0$ $\qquad f(\frac{1}{2})=\frac{6}{5}$

$f(x)$ در $x=0$ ، مینیمم است.

۲۲. فرض کنید $a>0$. ماکزیمم مقدار تابع $f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$ را محاسبه کنید.

مشتق تابع $f(x)$ را روی بازه‌های $(-\infty,0)$، $(0,a)$ و (a,∞) تعیین می‌کنیم.

$$(-\infty,0] \quad f(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-(x-a)}$$

$$[0,a] \quad f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-(x-a)}$$

$$[a,\infty) \quad f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+(x-a)}$$

$$(-\infty,0): \quad f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+a-x)^2} \qquad f'(x)\neq 0$$

$$(0,a) \quad f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+a-x)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (1+x)^2=(1+a-x)^2 \Rightarrow 1+x=\pm(1+a-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+x=1+a-x \Rightarrow x=\frac{a}{2} \\ 1+x=-(1+a)+x \Rightarrow a=-2 \ \times \end{cases}$$

$$x=\frac{a}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{4}{2+a}$$

$$(a,\infty) \quad f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+(x-a))^2} \qquad f'(x)\neq 0$$

۲۳. ثابت کنید هرگاه:

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

آنگاه به ازای یک نقطه مانند $x\in[0,1]$ داریم:

$$a_0+a_1x+\dots+a_nx^n=0$$

فرض می‌کنیم $f(x)=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\dots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. با توجه به فرض مسئله

$$f(0)=f(1)=0$$

بنابراین طبق قضیه رول، یک نقطه مانند $x\in[0,1]$ وجود دارد به طوری که $f'(x)=0$

در نتیجه
$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

۲۴. نشان دهید که تابع $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ صرف نظر از مقدار m نمی‌تواند دو ریشه در $[0,1]$ داشته باشد.

فرض می‌کنیم f_m در بازه $[0,1]$ دو ریشه مانند α و β داشته باشد:

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

در این صورت بنا به قضیه رول، نقطه‌ای مانند c وجود دارد که $c \in [0,1]$ $\quad f'_m(c) = 0$

در حالی که $f'_m(x) = 3x^2 - 3$ در بازه $[0,1]$ همواره منفی است

بنابراین f_m در این بازه نمی‌تواند دو ریشه داشته باشد.

۲۵. ثابت کنید تابع $f(x) = x^2 - \cos x$ دقیقاً دارای دو ریشه است.

$$f(0) = -1 < 0 \qquad f(1) > 0$$

بنابراین $f(x)$ در بازه $[0,1]$ دارای یک ریشه است. از طرفی برای $(0, \infty)$ ، $f'(x) > 0$

بنابراین f در این بازه دقیقاً دارای یک ریشه است. همچنین

$$f(0) = -1 < 0 \qquad f(-1) > 0$$

بنابراین f در بازه $[-1,0]$ دارای یک ریشه است $x \in (-\infty, 0]$ $\quad f'(x) = 2x + \sin x < 0$

بنابراین f در این بازه نیز دارای دقیقاً یک ریشه است. در نتیجه f در کل دقیقاً دارای دو ریشه است.

۲۶. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ و $g(0) = g'(0) = 0$ ، $g''(0) = 17$. مقدار $f'(0)$ را پیدا کنید.

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

$$\overset{\text{هوپیتال}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g'(\Delta x)}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g''(\Delta x)}{2} = \frac{g''(0)}{2} = \frac{17}{2}$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

دنباله ها

۱. نامساوی برنولی را ثابت کنید.

باید نشان دهیم

$$\forall x \quad x \geqslant -1 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

با فرض $a = x+1$ و $b = 1$ داریم:

$$(x+1)^n - 1 = (x+1-1)\underbrace{((x+1)^{n-1} + (x+1)^{n-2} + \cdots + (x+1) + 1)}_{P}$$

$$= xP$$

اگر $x \geqslant 0$ باشد، آنگاه $x+1 \geqslant 1$، در نتیجه $\forall k \in \mathbb{N} \quad (x+1)^k > 1$

بنابراین $P \geqslant n$، پس چون $x \geqslant 0$ است، $(1) \quad Px \geqslant nx$

اگر $-1 < x < 0$، آنگاه $0 < x+1 < 1$ در نتیجه $\forall k \in \mathbb{N} \quad (x+1)^k < 1$

بنابراین $P < n$، و چون $-1 < x < 0$ است، در نتیجه $(2) \quad Px > nx$

$$(1),(2) \Rightarrow Px \geqslant nx \Rightarrow (1+x)^n - 1 = Px \geqslant nx \Rightarrow (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

۲. حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \left(\frac{1}{1+n}\right)^n = \frac{1}{(1+n)^n} < \frac{1}{n}$$

طبق قضیه فشار،

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

ب) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n}$

از نامساوی $\frac{1}{2} \leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1$ نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2^{1/n}} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} \leqslant 1$$

بنابراین طبق قضیه فشار

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} = 1$$

ج) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin n+\cos n}{3}\right)^n$

$$-\sqrt{2}<\sin n+\cos n<\sqrt{2}\Rightarrow\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n<\left(\frac{\sin n+\cos n}{3}\right)^n<\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

طبق قضیه فشار، $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin n+\cos n}{3}\right)^n=0$

۳. ثابت کنید هرگاه $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ همگرا و $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ واگرا باشد، آنگاه $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ واگراست.

فرض خلف، $\lim\limits_{n\to\infty}a_n+b_n=l$؛

$$\left.\begin{array}{l}\lim a_n+b_n=l\\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=l'\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}-a_n=-l'\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n+b_n+\lim\limits_{n\to\infty}-a_n=l-l'$$

$$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n-a_n)=l-l'\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l-l'\quad\times$$

۴. فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای است دلخواه و $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای است که به ازای هر n، $\bar{a}_n=\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$
ثابت کنید هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{a}_n=l$. نشان دهید عکس این گزاره درست نیست.

چون $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$، بنابراین برای ε دلخواه و مثبت،

$$\exists N\quad\forall n\quad n\geq N\Rightarrow|a_n-l|<\varepsilon/2$$

$$|\bar{a}_n-l|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-l\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-nl}{n}\right|$$

$$=\left|\frac{(a_1-l)+(a_2-l)+\cdots+(a_n-l)}{n}\right|$$

$$=\left|\frac{(a_1-l)+\cdots+(a_{N-1}-l)}{n}+\frac{(a_N-l)+\cdots+(a_n-l)}{n}\right|$$

$$\leq\left|\frac{(a_1-l)+\cdots+(a_{N-1}-l)}{n}\right|+\left|\frac{a_N-l}{n}\right|+\left|\frac{a_{N+1}-l}{n}\right|+\cdots+\left|\frac{a_n-l}{n}\right|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\underbrace{\frac{\varepsilon}{2n}+\frac{\varepsilon}{2n}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2n}}_{n-N}=\left(\frac{n-N+1}{2n}\right)\varepsilon<\varepsilon$$

عکس قضیه فوق برقرار نیست. به عنوان مثال، هرگاه $a_n = (-1)^n$ آنگاه واضح است $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ همگرا نیست.

$$\tilde{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$\tilde{a}_n = \frac{(-1) + (-1)^2 + \dots + (-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{a}_n = 0$$

۵. ثابت کنید هرگاه $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ یک زیردنباله همگرا به A و یک زیردنباله همگرا به B داشته باشد که $A \neq B$، آنگاه دنباله $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ واگرا است.

برهان خلف: فرض کنیم $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ همگرا به ℓ باشد. بنابراین به ازای ε دلخواه داریم:

$$\exists N \quad \forall n \quad n \geq N \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$$

$$\exists k_1 \quad \forall k \quad k \geq k_1 \Rightarrow |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{n_k} = \ell \qquad (1)$$

a_{n_k} زیردنباله a_n و همگرا به A.

$$\exists k_2 \quad \forall k' \quad k' \geq k_2 \Rightarrow |a_{n_{k'}} - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \lim a_{n_{k'}} = \ell \qquad (2)$$

$a_{n_{k'}}$ زیردنباله a_n و همگرا به B.

$$(1),(2) \Rightarrow A = B \quad . \times$$

۶. حد هر یک از دنباله‌های زیر را تعیین کنید.

الف)
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^n} \cdot \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^n} \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5 = 0 \cdot e^5 = 0$$

ب)
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{\frac{-n}{n+1}}$$

$$= e^{-1}$$

۷. حد هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $a_1 = 1$ و $a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}$ $(n = 2, 3, 4, \dots)$

به استقرا نشان می‌دهیم این دنباله صعودی و از بالا کران‌دار است.

به وضوح $a_1 \leq a_2$. فرض می‌کنیم (فرض استقرا) $a_n \leq a_{n+1}$. نشان می‌دهیم $a_{n+1} \leq a_{n+2}$

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow 1+a_n \leq 1+a_{n+1} \Rightarrow \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

برای اثبات کران داری، نشان می‌دهیم: $\forall n,\ a_n \leq 2$.

$a_1 \leq 2$. فرض می‌کنیم $a_n \leq 2$ (فرض استقرا) نشان می‌دهیم $a_{n+1} \leq 2$.

$$a_n \leq 2 \Rightarrow 1+a_n \leq 1+2 \Rightarrow \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{3} \leq 2 \Rightarrow a_{n+1} \leq 2$$

بنابراین (a_n) یک دنباله از بالا کراندار و صعودی است، در نتیجه همگرا است. فرض می‌کنیم $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$

$$a_n = \sqrt{1+a_{n-1}} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt{1+a_{n-1}} \Rightarrow l = \sqrt{1+l}$$

$$\Rightarrow l^2 = 1+l \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

چون جملات دنباله همگی مثبت اند، $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

ب) $a_1 = \sqrt{2}$ و $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ $(n = 2, 3, 4, \dots)$

واضح است $a_1 \leq a_2$. فرض می‌کنیم $a_n \leq a_{n+1}$. بنابراین:

$$2a_n \leq 2a_{n+1} \Rightarrow \sqrt{2a_n} \leq \sqrt{2a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+1}$$

برای اثبات کران داری، واضح است که $a_1 < 3$. فرض می‌کنیم $a_n \leq 3$. در این صورت:

$$2a_n \leq 6 \Rightarrow \sqrt{2a_n} \leq \sqrt{6} \leq 3 \Rightarrow a_{n+1} \leq 3$$

بنابراین (a_n) از بالا به ۳ کران دار است.

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$

$$a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt{2a_{n-1}} \Rightarrow l = \sqrt{2l} \Rightarrow l^2 = 2l \Rightarrow l = 0, 2$$

جواب قابل قبول $l = 2$ است.

ج) $(P>0)$ $\quad a_1=\sqrt{P}\ ,\quad a_n=\sqrt{P+a_{n-1}}\quad (n=2,3,\dots)$

استقرا: $\quad a_1=\sqrt{P}\qquad a_2=\sqrt{P+\sqrt{P}} \Rightarrow a_2>a_1$

فرض $\quad a_n>a_{n-1}$

حکم $\quad a_{n+1}>a_n$

$$a_n>a_{n-1} \Rightarrow a_n+P>a_{n-1}+P \Rightarrow \sqrt{a_n+P}>\sqrt{a_{n-1}+P} \Rightarrow a_{n+1}>a_n$$

برای اثبات کرانداری:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

$$2\sqrt{ab}>0 \Rightarrow a+b+2\sqrt{ab}>a+b \Rightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>a+b \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

$$x\geqslant 2 \Rightarrow x^2>2x \Rightarrow x>\sqrt{2x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}$$

(I) $\ 0<P<1 \qquad a_1=\sqrt{P}<5$

فرض $\quad a_n<5$

حکم $\quad a_{n+1}<5$

$$a_n<5 \Rightarrow a_n+P<5+P \Rightarrow \sqrt{a_n+P}<\sqrt{5+P}\leq\sqrt{5}+\sqrt{P}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}<\sqrt{5}+\sqrt{P}<4+1 \Rightarrow a_{n+1}<5$$

(II) $\ 1<P<2 \qquad a_1=\sqrt{P}<4$

فرض $\quad a_n<4$

حکم $\quad a_{n+1}<4$

$$a_n<4 \Rightarrow a_n+P<4+P \Rightarrow a_{n+1}<\sqrt{4+P}<\sqrt{4}+\sqrt{P}<2+2 \Rightarrow a_{n+1}<4$$

(III) $\ P>2 \qquad a_1=\sqrt{P}<P$

فرض $\quad a_n<P$

حکم $\quad a_{n+1}<P$

$$a_n<P \Rightarrow a_n+P<2P \Rightarrow \sqrt{a_n+P}<\sqrt{2P}<P \Rightarrow a_{n+1}<P$$

$\forall p \quad (p>0: \ a_n < \max\{p, 2\})$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

$a_n = \sqrt{a_{n-1}+p} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_{n-1}+p} \Rightarrow l = \sqrt{l+p} \Rightarrow l^2 - l - p = 0$

$\Rightarrow l = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4p}}{2}$ چون تمام جملات دنباله مثبت است، $l = \dfrac{1+\sqrt{1+4p}}{2}$ قابل قبول است.

۸. حدود زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1-\frac{1}{2}^n}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1-\frac{1}{3}^n}{1-\frac{1}{3}}} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$

ج) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$

$-1<a<1 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

$a>1 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{a^n}{a^{2n}}}{1+\frac{1}{a^{2n}}} = 0$

$a<-1 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{a^n}{a^{2n}}}{1+\frac{1}{a^{2n}}} = 0$

$a=1 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} = \dfrac{1}{2}$

$a=-1 \Rightarrow$ همگراست $= \pm\frac{1}{2}$

۹. ثابت کنید هرگاه $a_n \to A$ ، $B_n \to B$ و $a_n \leq b_n$ (از جایی به بعد) آنگاه $A \leq B$.

فرض خلف $A > B$

چون $a_n \to A$ و $B_n \to B$ ، با فرض $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ ، داریم

$a_n \to A \quad \exists N_1, \forall n \ (n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - A| < \frac{A-B}{2}$

$b_n \to B \quad \exists N_2 \quad \forall n \quad n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - B| < \frac{A-B}{2}$

$$|a_n - A| < \frac{A-B}{2} \Rightarrow -\frac{A-B}{2} + A < a_n < \frac{A-B}{2} + A$$

$$|b_n - B| < \frac{A-B}{2} \Rightarrow -\frac{A-B}{2} + B < b_n < \frac{A-B}{2} + B$$

فرض می‌کنیم از مرحله‌ای به بعد که $b_n \geq a_n$ است N_3 باشد، $N \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}$

$$n \geq N \quad b_n \geq a_n \Rightarrow b_n - a_n \geq 0$$

$$\begin{array}{l} -\frac{A-B}{2} + A < a_n < \frac{A-B}{2} + A \\ -\frac{A-B}{2} - B < -b_n < \frac{A-B}{2} - B \end{array} \Rightarrow -A+B+A-B < a_n - b_n < A-B+A-B$$

$$\Rightarrow 0 < a_n - b_n < 2(A-B) \quad \times \quad a_n - b_n \leq 0$$

۱۰. ثابت کنید دنباله $\{\frac{2^n}{n!}\}$ نزولی و از پایین کراندار است و بنابراین همگراست.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \leq 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$$

بنابراین دنباله نزولی است.

$$0 \leq a_n \leq 2$$

a_n کران دار است.

بنابراین $\{\frac{2^n}{n!}\}$ همگراست.

۱۱. بررسی کنید کدام یک از دنباله‌های زیر صعودی و یا نزولی است؟

الف. $\frac{n^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$$

$\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$ دنباله صعودی

ب. $\frac{2^n}{1+2^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}} \times \frac{1+2^n}{2^n} = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n+1}} = \frac{2+2^{n+1}}{1+2^{n+1}} \geq 1$$

$\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$ دنباله صعودی

ج. $\frac{n}{2^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\leqslant 1 \Rightarrow a_{n+1}\leqslant a_n$$

نزولی

د. $(n^2+(-1)^n n)$

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2+(-1)^{n+1}(n+1)-n^2-(-1)^n n$$
$$=n^2+2n+1+(-1)^{n+1}n+(-1)^{n+1}-n^2+(-1)^{n+1}n$$
$$=2n+2(-1)^{n+1}n+1+(-1)^{n+1}=\begin{cases}4n+2 & n \text{ فرد}\\ 0 & n \text{ زوج}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}-a_n\geqslant 0 \Rightarrow a_{n+1}\geqslant a_n$$ دنباله صعودی

۱۲. فرض کنید (a_n) دنباله‌ای است که در آن به ازای هر n، $a_n>0$ و $a_{n+1}<ka_n$ که $0<k<1$ ثابت کنید (a_n) همگراست.

فرض کنیم $\varepsilon>0$ عدد دلخواهی باشد چون $a_1>0$ پس $\frac{\varepsilon}{a_1}>0$. با توجه به اینکه $0<k<1$، خواهیم داشت

$$\exists N\in\mathbb{N} \quad k^{N-1}<\frac{\varepsilon}{a_1}$$

دنباله $\{k^n\}$ به صفر همگراست بنابراین

$$\forall n\geqslant N\ ; \quad k^{n-1}\leqslant k^{N-1}<\frac{\varepsilon}{a_1}$$

در نتیجه

$$\forall n\geqslant N \quad a_1k^{n-1}<\varepsilon \quad *$$

با توجه به فرض $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}<ka_n$ لذا

$$a_n<ka_{n-1}<k^2a_{n-2}<\dots<k^{n-1}a_1$$

بنابراین، $\forall n\in\mathbb{N}:\ a_n<k^{n-1}a_1$ ، از * داریم، $\forall n\geqslant N \quad a_n<\varepsilon$

$$\forall n\geqslant N \quad |a_n|<\varepsilon \Rightarrow a_n\longrightarrow 0$$

انتگرال نامعین

الف) انتگرال های زیر را حساب کنید.

1. $\int \frac{(x^{-1}+x)^2}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}+x\right)^2 dx = \int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

$\frac{1}{x} = u \Rightarrow \quad dx = \frac{-du}{u^2}$

$\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \int (1+u^2)^2 \times \frac{-du}{u^2} = -\int \left(\frac{1+u^4+2u^2}{u^2}\right) du = -\int \left(\frac{1}{u^2}+u^2+2\right) du$

$= \frac{1}{u} - \frac{1}{3}u^3 - 2u = x - \frac{1}{3x^3} - \frac{2}{x}$

2. $\int \left[\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)\right] dx$

$\frac{1}{x} = u \Rightarrow \quad dx = \frac{-du}{u^2}$

$I = \int [u^3+u^2-u] \times \frac{-du}{u^2} = -\int \left(u+1-\frac{1}{u}\right) du = -\left(\frac{1}{2}u^2+u-\ln u\right)$

$= -\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+\ln(x)\right)$

3. $\int tg^2 x\,dx = \int (tg^2 x + 1 - 1)\,dx = tg\,x - x$

4. $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

$tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow \quad x = 2\,\mathrm{arctg}\,t \Rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$\sin x = \frac{2\,tg\,x/2}{1+tg^2\,x/2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$I = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \left(\frac{2}{1+t^2+2t}\right) dt = \int \frac{2}{(1+t)^2}\,dt$

$= -\frac{2}{1+t} = -\frac{2}{1+tg\,x/2}$

ب) هر یک از انتگرال‌های زیر را تعیین کنید.

۱. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sqrt{x^2-1}$

۲. $\int x\cos ax\,dx$ $\qquad x=u \quad dx=du$

$\cos ax\,dx = dv \quad v=\frac{1}{a}\sin ax$

$I=\frac{1}{a}x\sin ax-\int\frac{1}{a}\sin ax\,dx=\frac{1}{a}x\sin ax+\frac{1}{a^2}\cos ax$

۳. $\int \frac{7x+1}{x^2-x-2}\,dx=\int\frac{7x+1}{(x-2)(x+1)}\,dx$

$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{7x+1}{(x-2)(x+1)} \Rightarrow Ax+A+Bx-2B=7x+1$

$\begin{cases} A+B=7 \\ A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=5,\ B=2$

$I=\int\left(\frac{5}{x-2}+\frac{2}{x+1}\right)dx=5\ln(x-2)+2\ln(x+1)$

۴. $\int\cos^3x\,dx=\int\cos^2x\cos x\,dx=\int(1-\sin^2x)\cos x\,dx=\int(\cos x-\cos x\sin^2x)\,dx$

$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x$

۵. $\int\sin^6x\cos^3x\,dx=\int\sin^6x(1-\sin^2x)\cos x\,dx=\int(\sin^6x\cos x-\sin^8x\cos x)\,dx$

$=\frac{1}{7}\sin^7x-\frac{1}{9}\sin^9x$

۶. $\int\sin\theta\ln(\cos\theta)\,d\theta$

$\ln(\cos\theta)=t \Rightarrow \cos\theta=e^t \Rightarrow -\sin\theta\,d\theta=e^t\,dt \Rightarrow \sin\theta\,d\theta=-e^t\,dt$

$I=-\int te^t\,dt$

$t=u \quad dt=du$

$e^t dt=dv \Rightarrow v=e^t$

$I=-te^t+\int e^t\,dt=-te^t+e^t=-\cos\theta\ln(\cos\theta)+\cos\theta$

7. $\int \sec^3 2\theta \; tg^5 2\theta \; d\theta = \int \sec^3 2\theta \; tg 2\theta \,(\sec^2 2\theta - 1)^2 \, d\theta$

$\sec 2\theta = t \qquad 2\sec 2\theta \; tg 2\theta \, d\theta = dt \Rightarrow \sec 2\theta \; tg 2\theta \, d\theta = \frac{dt}{2}$

$I = \int t^2 (t^2-1)^2 \times \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^2 (t^4 - 2t^2 + 1)\, dt = \frac{1}{2}\int (t^6 - 2t^4 + t^2)\, dt$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sec^7 2\theta - \frac{2}{5}\sec^5 2\theta + \frac{1}{3}\sec^3 2\theta\right)$

8. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{4-x^2})^3}$

$x = 2\sin t \qquad dx = 2\cos t \, dt$

$I = \int \frac{2\cos t \, dt}{(\sqrt{4 - 4\sin^2 t})^3} = \int \frac{2\cos t}{8\cos^3 t}\, dt = \frac{1}{4}\int \sec^2 t \, dt = \frac{1}{4} tg\, t$

$\Rightarrow I = \frac{x}{8\sqrt{4-x^2}}$

9. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\; dx$

$\operatorname{arctg}\sqrt{x} = t \Rightarrow x = tg^2 t \qquad dx = 2\sec^2 t \; tg t \; dt$

$I = \int 2t \sec^2 t \; tg t \; dt$

$t = u \Rightarrow dt = du$

$2\sec^2 t \; tg\, t\, dt = dv \Rightarrow v = tg^2 t$

$I = t\, tg^2 t - \int tg^2 t \; dt = t\, tg^2 t - tg\, t + t$

$I = x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$

10. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\, dx \qquad x = 2\sin t \qquad dx = 2\cos t \, dt$

$= \int \frac{8\sin^3 t}{\sqrt{4 - 4\sin^2 t}} \times 2\cos t \, dt = 8\int \sin^3 t \, dt = 8\int (1-\cos^2 t)\sin t \, dt$

$= 8\int (\sin t - \cos^2 t \sin t)\, dt = 8\left(-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right)$

$I = 8\left(-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + \frac{1}{3}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^3}\right)$

۱۱. $\int (x+1)\sqrt{2x-1}\,dx$

$u = x+1 \quad dx = du$

$\sqrt{2x-1}\,dx = dv \rightarrow v = \frac{4}{3}(2x-1)^{3/2}$

$I = \frac{4}{3}(x+1)(2x-1)^{3/2} - \frac{4}{3}\int (2x-1)^{3/2}\,dx$

$= \frac{4}{3}(x+1)(2x-1)^{3/2} - \frac{14}{15}(2x-1)^{5/2}$

۱۲. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$

$\operatorname{arctg} x = t \Rightarrow x = tgt \quad dx = \sec^2 t\,dt$

$= \int t \sec^2 t\, tgt\,dt$

$t = u \quad du = dt$

$tgt \sec^2 t\,dt = dv \Rightarrow v = \frac{1}{2} tg^2 t$

$= \frac{1}{2} t\, tg^2 t - \frac{1}{2}\int tg^2 t\,dt$

$= \frac{1}{2} t\, tg^2 t - \frac{1}{2}(tgt - t) = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$

۱۳. $\int e^x \sin x\,dx$

$e^x = u \quad e^x dx = du$

$\sin x\,dx = dv \quad v = -\cos x$

$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx \quad . \quad e^x = u \quad e^x dx = du$

$\cos x\,dx = dv \quad v = \sin x$

$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$

$\Rightarrow 2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) \Rightarrow \int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$

۱۴. $\int x \sin^3 x^2 \cos^4 x^2\,dx = \int x(1-\cos^2 x^2)\sin x^2 \cos^4 x^2\,dx$

$= \int (x \sin x^2 \cos^4 x^2 - x\cos^6 x^2 \sin x^2)\,dx = -\frac{1}{10}\cos^5 x^2 + \frac{1}{14}\cos^7 x^2$

۱۵. $\int \sec^2 x \ln|ctgx|\,dx$

$\ln|ctgx| = t \Rightarrow |ctgx| = e^t \overset{ctgx>0}{\Rightarrow} ctgx = e^t \Rightarrow \csc^2 x\,dx = -e^t dt$

$ctgx = e^t \Rightarrow tgx = e^{-t} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{e^{-t}}{\sin x} \Rightarrow \sec x = \csc x\, e^{-t}$

$\Rightarrow \sec^2 x\,dx = \csc^2 x\, e^{-2t}\,dx = -e^{-2t} \times e^t\,dt = -e^{-t}\,dt$

$$I = \int e^{-t}\, t\, dt \qquad t = u \quad dt = du \qquad e^{-t} dt = dv \quad v = -e^{-t}$$

$$= -t e^{-t} + \int e^{-t} dt$$

$$= -t e^{-t} - e^{-t} \Rightarrow I = -\operatorname{tg} x \ln|\operatorname{ctg} x| - \operatorname{tg} x$$

۱۶. $\int \sec^4 x \cdot \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \sec^4 x (\sec^2 x - 1) \operatorname{tg} x\, dx$

$$= \int (\sec^6 x \operatorname{tg} x - \sec^4 x \operatorname{tg} x) dx = \int \sec^5 x \sec x \operatorname{tg} x\, dx - \int \sec^3 x \sec x \operatorname{tg} x\, dx$$

$$= \frac{1}{6} \sec^6 x - \frac{1}{4} \sec^4 x$$

۱۷. $\int \frac{x^2}{(9-4x^2)^{3/2}} dx \qquad x = \frac{3}{2} \sin t \qquad dx = \frac{3}{2} \cos t\, dt$

$$= \int \frac{\frac{9}{4} \sin^2 t}{(9 - 9\sin^2 t)^{3/2}} \times \frac{3}{2} \cos t\, dt = \frac{1}{8} \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{8} \int \operatorname{tg}^2 t\, dt$$

$$= \frac{1}{8} (\operatorname{tg} t - t) = \frac{1}{8} \left(\frac{\frac{2}{3} x}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} x^2}} - \arcsin \frac{2x}{3} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{2x}{\sqrt{9 - 4x^2}} - \arcsin \frac{2}{3} x \right)$$

۱۸. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 9}} \qquad x = 3 \sec t \qquad dx = 3 \sec t \operatorname{tg} t\, dt$

$$= \int \frac{3 \sec t \operatorname{tg} t\, dt}{3 \sec t \sqrt{9 \sec^2 t - 9}} = \int \frac{\operatorname{tg} t}{9 \operatorname{tg} t} dt = \frac{1}{9} t = \frac{1}{9} \sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$

۱۹. $\int \operatorname{ctg}^3 x\, dx = \int \operatorname{ctg} \operatorname{ctg}^2 x\, dx = \int \operatorname{ctg} x (\csc^2 x - 1) dx$

$$= \int (\operatorname{ctg} x \csc^2 x - \operatorname{ctg} x) dx = -\frac{1}{2} \csc^2 x - \operatorname{Ln}|\sin x|$$

۲۰. $\int \sin x \ln(\sec x) dx \qquad \operatorname{Ln}(\sec x) = t$

$$\sec x = e^t \Rightarrow \sec x \operatorname{tg} x\, dx = e^t dt$$

$$\Rightarrow \sin x \sec^2 x\, dx = e^t dt$$

$$\sin x \times e^{2t} dx = e^t dt$$

$$\sin x\, dx = e^{-t} dt$$

$$= \int t e^{-t} dt$$

$$= -t e^{-t} - e^{-t}$$

$$= -\cos x \operatorname{Ln}(\sec x) - \cos x$$

21. $\int x^2(\ln x)^2\,dx \qquad \ln x = t \quad x = e^t \quad dx = e^t\,dt$

$= \int e^{2t} t^2 e^t\,dt = \int t^2 e^{3t}\,dt$

$= \frac{1}{3}t^2 e^{3t} - \frac{2}{9}t e^{3t} + \frac{2}{27}e^{3t}$

$= \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}x^3$

$$\begin{array}{c|l} t^2 & e^{3t} \\ \hline 2t & \frac{1}{3}e^{3t} \\ 2 & \frac{1}{9}e^{3t} \\ & \frac{1}{27}e^{3t} \end{array}$$

22. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \times \frac{1}{\cos x}\,dx = \int tg^3 x \sec x\,dx$

$= \int tg^2 x \; tg x \sec x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec x \; tg x\,dx$

$= \int (\sec^3 x \; tg x - \sec x \; tg x)\,dx = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x$

23. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \qquad e^x = t \quad e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$= \int \frac{\frac{1}{t}dt}{t + \frac{1}{t}} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg}(t) = \operatorname{arctg}(e^x)$

24. $\int \cos^2(\ln x)\,\frac{dx}{x} \qquad \ln x = t \quad \frac{dx}{x} = dt$

$= \int \cos^2 t\,dt = \int \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t$

$= \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}\sin(2\ln x) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}\sin \ln x^2$

25. $\int x^3\sqrt{x^2-4}\,dx \qquad x = 2\sec t \quad dx = 2\sec t \; tg t\,dt$

$= \int 8\sec^3 t \times 2\,tg t \times 2\sec t \; tg t\,dt$

$= 32\int \sec^4 t \; tg^2 t\,dt \qquad tg t = u \quad \sec^2 t\,dt = du$

$= 32\int (1+u^2)u\,du = 32\int (u+u^3)\,du = 32\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4\right)$

$= 32\left(\frac{1}{2}tg^2 t + \frac{1}{4}tg^4 t\right) = \frac{32}{2}tg^2 t\left(1 + \frac{1}{2}tg^2 t\right)$

$= 16\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\right) = 2(4+x^2)(5+x^2$

۲۶. $\int \frac{\sec^2 3x}{tg 3x}\,dx = \int \frac{1+tg^2 3x}{tg 3x}\,dx = \int (\frac{1}{tg 3x} + tg 3x)\,dx$

$= \int (cotg 3x + tg 3x)\,dx = \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| - \frac{1}{3}\ln|\cos 3x|$

۲۷. $\int \frac{5x^2-11x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$

$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{5x^2-11x+5}{(x-1)^2(x-2)}$

$A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2 = 5x^2-11x+5$

$Ax^2-3Ax+2A+Bx-2B+Cx^2-2Cx+C = 5x^2-11x+5$

$A+C=5$
$-3A+B-2C=-11 \Rightarrow A=0,\ C=5,\ B=-1$
$2A+C=5$

$I = \int (\frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2})\,dx = \frac{-1}{x-1} + \ln(x-2)$

۲۸. $\int \frac{(\ln|x|)^3}{x}\,dx \qquad \ln|x| = t \Rightarrow |x| = e^t \Rightarrow \begin{cases} x = e^t & x>0 \\ x=-e^t & x<0 \end{cases}$

$x>0 \quad I = \int \frac{t^3 \times e^t}{e^t}\,dt = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{4}(\ln|x|)^4$

$x<0 \quad I = \int \frac{t^3(-e^t)}{(-e^t)}\,dt = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}(\ln|x|)^4$

۲۹. $\int x\,tg^2x\,dx = \int x(1+tg^2x-1)\,dx = \int [x(1+tg^2x) - x]\,dx$

$= \int x(1+tg^2x)\,dx - \frac{1}{2}x^2 \qquad u=x \Rightarrow du=dx$
$\qquad (1+tg^2x)\,dx = dv \Rightarrow v = tg x$

$= x\,tg x - \int tg x\,dx - \frac{1}{2}x^2$

$= x\,tg x + \ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2$

۳۰. $\int \ln x\sqrt{x\ln x - x}\,dx$ $\qquad x\ln x - x = u \Rightarrow \ln x\,dx = du$

$$= \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x\ln x - x)^{\frac{3}{2}}$$

۳۱. $\int \sin^4\left(\frac{x}{4}\right)dx = \int \left(\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1+\cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int\left(1 + \frac{1+\cos x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin x - 4\sin\frac{x}{2}\right)$$

۳۲. $\int \sec^3\theta\,d\theta$ $\qquad \sec\theta = u \quad \sec\theta\,tg\theta\,d\theta = du$

$\qquad \sec^2\theta\,d\theta = dv \Rightarrow v = tg\,\theta$

$$I = \sec\theta\,tg\theta - \int \sec\theta\,tg^2\theta\,d\theta$$

$$= \sec\theta\,tg\theta - \int \sec\theta(\sec^2\theta - 1)\,d\theta$$

$$= \sec\theta\,tg\theta - \int \sec^3\theta\,d\theta + \int \sec\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow 2\int \sec^3\theta\,d\theta = \sec\theta\,tg\theta + \int \sec\theta\,d\theta$$

حل $\int \sec\theta\,d\theta$ را محاسبه می‌کنیم.

$$Z = tg\frac{\theta}{2} \qquad \cos\theta = \frac{1-tg^2\frac{\theta}{2}}{1+tg^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-Z^2}{1+Z^2} \qquad d\theta = \frac{2dZ}{1+Z^2}$$

$$\int \sec\theta\,d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta}d\theta = \int \frac{1+Z^2}{1-Z^2}\cdot\frac{2dZ}{1+Z^2} = \int\frac{2dZ}{1-Z^2} = 2\int\frac{dZ}{(1-Z)(1+Z)}$$

$$\frac{A}{1-Z} + \frac{B}{1+Z} = \frac{2}{1-Z^2} \qquad A(1+Z) + B(1-Z) = 2 \Rightarrow \begin{matrix} A-B=0 \\ A+B=2 \end{matrix} \Rightarrow A=1, B=1$$

$$\int \sec\theta\,d\theta = \int\left(\frac{1}{1-Z} + \frac{1}{1+Z}\right)dZ = -\ln|1-Z| + \ln|1+Z| = \ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{1+tg\frac{\theta}{2}}{1-tg\frac{\theta}{2}}\right| = \ln|\sec\theta + tg\theta|$$

$$2\int \sec^3\theta\,d\theta = \sec\theta\,tg\,\theta + \ln|\sec\theta + tg\theta|$$ [illegible]

$$\int \sec^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\sec\theta\,tg\theta + \ln|\sec\theta + tg\theta|\right)$$

۴۳. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$ $\qquad \operatorname{arctg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{tg} t \qquad dx = \sec^2 t\,dt$

$$= \int \frac{t\sec^2 t}{\operatorname{tg}^2 t}\,dt$$

$t = u \qquad dt = du$

$\frac{\sec^2 t}{\operatorname{tg}^2 t}\,dt = dv \Rightarrow v = \frac{-1}{\operatorname{tg} t}$

$$= \frac{-t}{\operatorname{tg} t} + \int \frac{1}{\operatorname{tg} t}\,dt$$

$$= \frac{-t}{\operatorname{tg} t} + \operatorname{Ln}|\sin t| = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \operatorname{Ln}|\sin(\operatorname{arctg} x)|$$

۴۴. $\int (\arcsin x)^2\,dx$ $\qquad \arcsin x = t \Rightarrow x = \sin t \qquad dx = \cos t\,dt$

$$= \int t^2 \cos t\,dt = t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x - 2x$$

t^2	$\cos t$
$2t$	$\sin t$
2	$-\cos t$
	$-\sin t$

۴۵. $\int \frac{\sec^4 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,dx = \int \sec^2 x \times \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,dx$

$\sec^2 x = u \Rightarrow 2\sec^2 x\,\operatorname{tg} x\,dx = du$

$\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,dx = dv \Rightarrow v = 2\sqrt{\operatorname{tg} x}$

$$I = 2\sqrt{\operatorname{tg} x}\,\sec^2 x - 4\int \sec^2 x\,(\operatorname{tg} x)^{3/2}\,dx$$

$$= 2\sqrt{\operatorname{tg} x}\,\sec^2 x - 4 \times \frac{2}{5}(\operatorname{tg} x)^{5/2}$$

۴۶. $\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^4-1}$$

$$A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1) = x^2$$

$$A(x^3+x+x^2+1) + B(x^3+x-x^2-1) + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D = x^2$$

41

$$A+B+C=0$$
$$A-B+D=1$$
$$A+B-C=0$$
$$A-B-D=0$$

$A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=0$, $D=\frac{1}{2}$

$$I=\int \frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{2(x^2+1)}dx=\frac{1}{4}\ln(x-1)-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x)$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arc tg} x$$

انتگرال معین

۱. مشتق هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $F(x)=\int_0^{x^2}\sin^2 t\,dt$

$F'(x)=2x\sin^2 x$

۲) $F(x)=\int_2^{\int_1^x \sin^2 t\,dt}\frac{dt}{1+\sin^4 t+t^2}$

$F'(x)=\left(\int_1^x \sin^2 t\,dt\right)'\frac{1}{1+\sin^4\left(\int_1^x \sin^2 t\,dt\right)+\left(\int_1^x \sin^2 t\,dt\right)^2}$

$F'(x)=\frac{\sin^2 x}{1+\sin^4\left(\int_1^x \sin^2 t\,dt\right)+\left(\int_1^x \sin^2 t\,dt\right)^2}$

۳) $F(x)=\int_{15}^x\left(\int_8^y \frac{dt}{t^2+\cos^2 t}\right)dy$

$F'(x)=\int_8^x \frac{dt}{t^2+\cos^2 t}$

۴) $F(x)=\int_a^b \frac{x}{1+t^2+\sin^2 t}\,dt$

$F(x)=x\int_a^b \frac{dt}{1+t^2+\sin^2 t} \Rightarrow F'(x)=\int_a^b \frac{dt}{1+t^2+\sin^2 t}$

۲. بدون محاسبه انتگرال، مطلوب است تعیین $(F^{-1})'(0)$ هرگاه:

الف) $F(x)=\int_0^x (1+\sin(\sin t))\,dt$

$(F^{-1})'(0)=\frac{1}{F'(F^{-1}(0))}$

$F(0)=0 \Rightarrow F^{-1}(0)=0$

$F'(x)=1+\sin(\sin x)$

$(F^{-1})'(0)=\frac{1}{F'(0)}=\frac{1}{1+\sin(\sin 0)}=1$

ب) $F(x)=\int_1^x \cos(\cos t)\,dt$

$(F^{-1})'(0)=\frac{1}{F'(F^{-1}(0))}$

$F(1)=0 \Rightarrow F^{-1}(0)=1$

$F'(x)=\cos(\cos x)$

$(F^{-1})'(0)=\frac{1}{\cos(\cos(1))}$

۳. تابع g را چنان تعیین کنید که:

الف) $\int_0^x t\, g(t)\, dt = x + x^2$

با مشتق گیری از طرفین داریم:

$$x\, g(x) = 1 + 2x \Rightarrow g(x) = 2 + \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

ب) $\int_0^{x^2} t\, g(t)\, dt = x + x^2$

$$2x \cdot x\, g(x) = (x + x^2)' = 1 + 2x \Rightarrow 2x^2 g(x) = 1 + 2x \Rightarrow g(x) = \frac{1+2x}{x^2}$$

۴. تمام توابع پیوسته f صادق در معادله زیر را پیدا کنید.

$$\int_0^x f(t)\, dt = (f(x))^2 + C$$

$$\left(\int_0^x f(t)\, dt\right)' = \left((f(x))^2 + C\right)' \Rightarrow f(x) = 2f'(x) f(x) \Rightarrow 2f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + C_1$$

۵. میانگین توابع زیر را بر بازه داده شده تعیین کنید.

الف. $f(x) = tg\, x \quad [0, \frac{\pi}{4}]$

$$\text{میانگین} = \frac{\int_0^{\pi/4} f(x)\, dx}{\pi/4} = \frac{\int_0^{\pi/4} tg\, x\, dx}{\pi/4} = -\frac{4}{\pi} \ln|\cos x| \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{4}{\pi} \ln(\frac{1}{2})$$

ب. $f(x) = \ln x \quad [1, e]$

$$\int_1^e f(x)\, dx = \int_1^e \ln x\, dx = \int_0^1 t e^t\, dt \qquad \ln x = t \to dx = e^t dt$$

$$= te^t - e^t \Big|_0^1 = 1$$

$$\text{میانگین} = \frac{1}{e-1}$$

۶. ثابت کنید

الف. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}$$

اگر تابع $f(x)=x$ را روی بازه $[0,1]$ در نظر بگیریم و این بازه را به n قسمت تقسیم کنیم در این صورت مجموع ریمان f روی این بازه عبارت است از رابطه بالا، بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

ب. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

۷. الف) به کمک قضیه مقدار میانگین برای مشتقات و تابع $g(x)=\int_a^x f(t)dt$، قضیه مقدار میانگین برای انتگرال را ثابت کنید.

چون تابع $g(x)$ در شرایط قضیه مقدار میانگین برای مشتقات صدق می‌کند، بنابراین

$$\exists c\in(a,b)\qquad g'(c)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

اما $g'(x)=f(x)$ و $g(a)=0$ ، $g(b)=\int_a^b f(t)dt$ ، در نتیجه

$$\exists c\in(a,b)\qquad f(c)=\frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}$$

$$\Rightarrow \exists c\in(a,b)\qquad \int_a^b f(t)\,dt=f(c)(b-a)$$

ب) هرگاه f و g بر $[a,b]$ پیوسته و g در (a,b) هرگز صفر نشود، آنگاه

$$\exists c\in(a,b)\qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

فرض می‌کنیم $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ در این صورت

$$\int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

از طرفی با فرض $G(x)=t$ داریم

$$\int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(G^{-1}(t))\,dt$$

حال با به کارگیری قضیه مقدار میانگین انتگرال

$$\exists c_1 \in (G(a),G(b)) \qquad \int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx = f(G^{-1}(c_1))\,(G(b)-G(a))$$

در نتیجه با فرض $G^{-1}(c_1)=c$ داریم

$$\exists c \in (a,b) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\,(G(b)-G(a))$$

از طرفی $G(b)=\int_a^b g(x)\,dx$ ، $G(a)=0$ بنابراین

$$\exists c \in (a,b) \qquad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

۸. فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته و نامنفی، و در نقطه‌ای از $[a,b]$ ناصفر باشد. نشان دهید $\int_a^b f(x)\,dx>0$

طبق قضیه مقدار میانگین

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

و چون f نامنفی است، بنابراین $f(c)>0$ ، در نتیجه

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

۹. بدون محاسبه انتگرال نشان دهید $\frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{dx}{10+x} < \frac{1}{5}$

با فرض $f(x)=\frac{1}{10+x}$ ، مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع f در بازه $[0,2]$ عبارت است از

$$M=\frac{1}{10}=f(0) \qquad m=\frac{1}{12}=f(2)$$

بنابراین

$$m(b-a) < \int_0^2 \frac{dx}{10+x} < M(b-a)$$

$$2\times\frac{1}{12} < \int_0^2 \frac{dx}{10+x} < 2\times\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{dx}{10+x} < \frac{1}{5}$$

۱۰. ثابت کنید هرگاه m ، n دو عدد صحیح باشند، آنگاه

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

ابتدا حالت $m\neq n$ را بررسی می‌کنیم

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin(m-n)x - \cos(m+n)x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{-1}{m+n} \cos(m+n)x - \frac{1}{(m-n)} \sin(m-n)x \Big]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \Big)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

حالت $m=n$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big(x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\Big)\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\Big)\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

$m\neq n$ $$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{-1}{m+n} \cos(m+n)x - \frac{1}{m-n} \cos(m-n)x \Big]_0^{2\pi} = 0$$

$m=n$ $$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \cos nx \, dx = \frac{1}{2n}\sin^2 nx \Big|_0^{2\pi} = 0$$

۱۱. ثابت کنید هرگاه f در $[-a,a]$ پیوسته و زوج باشد، آنگاه:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

در انتگرال $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$، تغییر متغیر $x=-t$ را قرار می‌دهیم

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

چون f یک تابع زوج است، بنابراین $f(-t)=f(t)$، در نتیجه

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

۱۲. ثابت کنید هرگاه f در $[-a,a]$ پیوسته و فرد باشد، آنگاه:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx, \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$$

۱۳. فرض کنید $f''(x)$ در $[a,b]$ پیوسته است. نشان دهید

$$\int_{a}^{b} x f''(x)\,dx = (b f'(b) - f(b)) - (a f'(a) - f(a))$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

ابتدا از روش انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم.

$$u=x \Rightarrow du=dx$$
$$f''(x)dx=dv \Rightarrow v=f'(x)$$

$$\int_a^b x f''(x)\,dx = x f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,dx$$
$$= bf'(b)-af'(a) - f(x)\Big|_a^b$$
$$= bf'(b)-af'(a) - f(b)+f(a)$$
$$=(bf'(b)-f(b))-(af'(a)-f(a))$$

۱۴. نشان دهید اگر f در $[0,\pi]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

طبق قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته درمورد تابع $f_1(x)=x,\ g(x)=f(\sin x)$ داریم:

$$\exists c\in(0,\pi) \qquad \int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = c\int_0^\pi f(\sin x)\,dx \qquad (1)$$

حال هدف پیدا کردن c می باشد.

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x f(\sin x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x f(\sin x)\,dx$$

با تغییر متغیر $x=\pi-t$ درمورد $\int_{\pi/2}^{\pi} x f(\sin x)dx$ داریم:

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x f(\sin x)\,dx - \int_{\pi/2}^{0} (\pi-t) f(\sin(\pi-t))\,dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} x f(\sin x)\,dx + \int_0^{\pi/2} (\pi-t) f(\sin t)\,dt$$
$$= \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin t)\,dt \qquad (2)$$

از طرفی

$$\int_0^\pi f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx \qquad (3)$$

بنابه روابط (۱)، (۲)، (۳) نتیجه می شود.

$$2c\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx \Rightarrow c=\pi/2$$

بنابراین

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \pi/2\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

۱۵. انتگرال های زیر را محاسبه کنید:

$$1)\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{4}$$

$$2)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^{b} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \lim_{c\to 0^+}\int_{c}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \lim_{b\to 0^-} \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}\Big|_{-1}^{b} + \lim_{c\to 0^+} \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}\Big|_{c}^{1}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$3)\ \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{b\to 4}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{b\to 4} \frac{1}{2}\sqrt{4-x}\Big|_0^b = 1$$

$$4)\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \qquad \sqrt{x} = t$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2\,dt}{1+t^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{2\,dt}{1+t^2} = \lim_{b\to\infty} 2\operatorname{arctg} t\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} 2(\operatorname{arctg} b) = \pi$$

۱۶. رفتار (همگرایی یا واگرایی) انتگرال های زیر را تعیین کنید:

$$1)\ \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} = \lim_{b\to\infty} \frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3}\Big|_1^b = \infty$$ واگرا

$$2)\ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+2} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{2x^2}\Big|_1^b = \frac{1}{2}$$

بنابراین $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+2}$ همگراست.

۳) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+1}$ $\quad\quad \sqrt[3]{x}=t \Rightarrow x=t^3 \quad dx=3t^2dt$

$$=\int_0^\infty \frac{3t^2dt}{1+t^2}=3\int_0^\infty \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\lim_{b\to\infty}3\int_0^b\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=\lim_{b\to\infty}3(t-\operatorname{arctg}t)\Big|_0^b=\infty$$ واگرا

۴) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x}$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x}<\int_0^\infty\frac{dx}{e^x}=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{e^x}=\lim_{b\to\infty}-e^{-x}\Big|_0^b=1$$

بنابراین $\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x}$ همگرا است.

۵) $\int_0^2\frac{dx}{1-x^2}=\int_0^1\frac{dx}{1-x^2}+\int_1^2\frac{dx}{1-x^2}$

$$=\lim_{b\to1^-}\int_0^b\frac{dx}{1-x^2}+\lim_{c\to1^+}\int_c^2\frac{dx}{1-x^2}$$

$$=\lim_{b\to1^-}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_0^b+\lim_{c\to1^+}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_c^2$$

$$=\lim_{b\to1^-}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|+\lim_{c\to1^+}\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1+c}{1-c}\right|+\ln(3)\right)$$

حدها وجود ندارند بنابراین انتگرال واگرا است.

۶) $\int_0^\infty x^2e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^2e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}\Big|_0^b=2$ همگرا

۷) $\int_1^\infty\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}dx$

$$\int_1^\infty\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}dx<\int_1^\infty\frac{\sqrt{x}+1}{x^2}dx=\int_1^\infty\left(x^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\Big|_1^b=3$$

بنابراین $\int_1^\infty\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}dx$ همگرا است.

۷) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$ $\qquad \ln x = t \qquad dx = e^t\, dt$

$$= \int_0^{\infty} t e^t\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t e^t\, dt = \lim_{b\to\infty} t e^t - e^t \Big|_0^b = \infty$$

بنابراین انتگرال واگراست.

۸) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x - 2^x}$ $\qquad 2^x = t \to x\ln 2 = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\ln 2\, t}$

$$= \int_2^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{\ln 2}\ln t} - t} \times \frac{dt}{(\ln 2)t} = \frac{1}{\ln 2} \int_2^{\infty} \frac{dt}{t^2\left(t^{\ln 2^{-1}} - 1\right)}$$

$$> \frac{1}{\ln 2} \int_2^{\infty} \frac{dt}{t^2 \times t^{\frac{1}{\ln 2}-1}} = \frac{1}{\ln 2} \int_2^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{1+\ln 2}{\ln 2}}}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\ln 2}\, t^{2-\frac{1}{\ln 2}} \Big|_2^b = \infty$$

بنابراین انتگرال واگراست.

۱۷. به ازای چه مقادیری از r انتگرال های زیر همگرا هستند؟

الف) $\int_1^{2} \frac{dx}{x(\ln x)^r}$ $\qquad \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$

$$\int_1^{2} \frac{dx}{x(\ln x)^r} = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{t^r} = \frac{1}{1-r}\, t^{1-r} \Big|_0^{\ln 2}$$

اگر $r<1$ ، انتگرال همگرا به $\frac{1}{1-r}(\ln 2)^{1-r}$ است و اگر $r>1$ ، انتگرال واگراست.

ب) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^r}$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^r} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^r} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-r}\, t^{1-r} \Big|_{\ln 2}^{b}$$

اگر $r>1$ باشد، انتگرال همگرا به $\frac{-1}{1-r}(\ln 2)^{1-r}$ و اگر $r<1$ باشد، انتگرال واگرا است

۱. مساحت محدود بین دو نمودار $y=\frac{1}{2}x^2$ و $x^2+y^2=8$ را به دست آورید.

محل برخورد دو نمودار را به دست می‌آوریم.

$$8-x^2=\frac{1}{4}x^4 \Rightarrow x^4+4x^2-32=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$A=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx = 2\int_{0}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$x=2\sqrt{2}\sin t \qquad dx=2\sqrt{2}\cos t\, dt$$

$$A=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{8(1-\sin^2 t)}-\frac{1}{2}\,8\sin^2 t\right)(2\sqrt{2}\cos t)\,dt$$

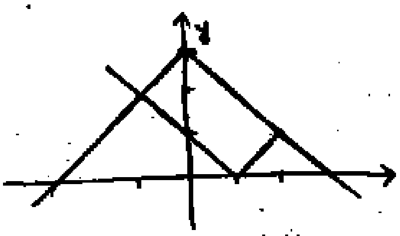
$$=16\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\, dt-16\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cos t\, dt$$

$$=8\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,dt-\frac{16\sqrt{2}}{3}\sin^3 t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=8\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}-\frac{8}{3}$$

$$=2\pi+4-\frac{8}{3}=2\pi+\frac{4}{3}$$

۲. مساحت محدود به منحنی‌های $y=|x-1|$ و $y=-|x|+3$ را پیدا کنید.



$$3-|x|=|x-1| \Rightarrow \begin{cases} 3-|x|=x-1 \Rightarrow |x|=4-x \Rightarrow \begin{cases} x=4-x \Rightarrow x=2 \\ x=x-4 \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \\ 3-|x|=1-x \Rightarrow |x|=2+x \Rightarrow \begin{cases} x=2+x \quad \text{غ ق ق} \\ x=-2-x \Rightarrow x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

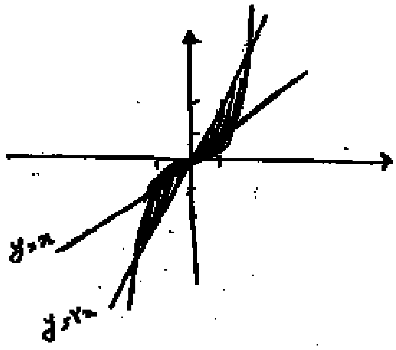
$$A=\int_{-1}^{2}(3-|x|-|x-1|)\,dx$$

بازه را به سه بازه $[-1,0]$ و $[0,1]$ و $[1,2]$ تقسیم می‌کنیم

$$A=\int_{-1}^{0}[3+x-(1-x)]\,dx+\int_{0}^{1}[3-x-(1-x)]\,dx+\int_{1}^{2}[(3-x)-(x-1)]\,dx$$

$$=2+2+1=5$$

۳. تمام مساحتی را که شکل محدود به منحنی $y=x^3$ و خطوط $y=2x$ و $y=x$ دارد بدست آورید.



کافیست مساحت محدود به منحنی و خطوط را در ربع اول به دست آوریم. برای این منظور ابتدا مساحت شکل محدود به منحنی $y=x^3$ و خط $y=2x$ را در ربع اول به دست می‌آوریم

$$y=x^3,\ y=2x \Rightarrow y=2x=x^3 \Rightarrow x(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$A_1=\int_0^{\sqrt{2}}(2x-x^3)\,dx = x^2-\frac{1}{4}x^4\Big|_0^{\sqrt{2}} = 1$$

سپس مساحت شکل محدود به منحنی $y=x^3$ و $y=x$ را بدست می‌آوریم (در ربع اول)

$$y=x^3,\ y=x \Rightarrow x^3=x \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0,1$$

$$A_2=\int_0^1 (x-x^3)\,dx = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

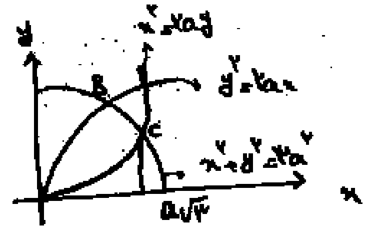
بنابراین در ربع اول داریم:

$$A=A_1-A_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

در نتیجه مساحت کل عبارت است از

$$\text{مساحت کل} = 2A = 2\times\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

۴. مساحت قسمتی از دایره $x^2+y^2=4a^2$ واقع در ربع اول و محدود به سهمی‌های $y^2=2ax$, $x^2=2ay$ را بیابید $(a>0)$



محل تلاقی دایره با هر یک از سهمی‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x^2+y^2=3a^2 \\ y^2=2ax \end{cases} \Rightarrow x^2-2ax-3a^2=0 \Rightarrow x=a$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=3a^2 \\ x^2=2ay \end{cases} \Rightarrow y^2+2ay-3a^2=0 \Rightarrow y=a$$

$$B=\begin{vmatrix} x=a \\ y=\sqrt{2ax}=\sqrt{2a(a)} \end{vmatrix} \Rightarrow B=\begin{vmatrix} a \\ \sqrt{2}\,a \end{vmatrix}$$

$$C=\begin{vmatrix} x=\sqrt{2ay}=\sqrt{2a\times a} \\ y=a \end{vmatrix} \Rightarrow C=\begin{vmatrix} \sqrt{2}\,a \\ a \end{vmatrix}$$

مساحت

$$A=\int_0^a \left(\sqrt{2ax}-\frac{x^2}{2a}\right)dx+\int_a^{\sqrt{2}a}\left(\sqrt{3a^2-x^2}-\frac{x^2}{2a}\right)dx$$

$$=\sqrt{2a}\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6a}x^3\Big|_0^a-\frac{1}{6a}x^3\Big|_a^{\sqrt{2}a}+\int_a^{\sqrt{2}a}\sqrt{3a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}a^2+\int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}}\sqrt{3a^2-3a^2\sin^2\theta}\;\sqrt{3}a\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}a^2+3a^2\int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}}\cos^2\theta\,d\theta$$

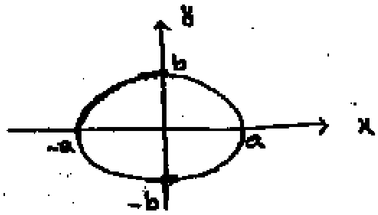
$$=\frac{\sqrt{2}}{3}a^2+\frac{3}{2}a^2\int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}}(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}a^2+\frac{3}{2}a^2\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Big|_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}a^2+\frac{3}{2}a^2\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}a^2+\frac{3}{2}a^2\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

۵. مساحت ناحیه‌ای که با منحنی $x=a\cos t$ ، $y=b\sin t$ محدود شده است را محاسبه کنید.

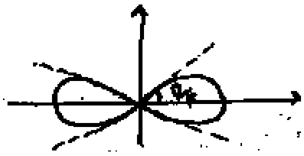


$$A=2\int_{-a}^{a} y\,dx = 2\int_{\pi}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)\,dt = -2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt$$

$$=2ab\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi}=\pi ab$$

۶. مساحت ناحیه‌ای که به $\rho=a\sqrt{\cos 2\theta}$ محدود شده است بدست آورید.

چون از تبدیل θ به $\pi-\theta$ و $2\pi-\theta$ ، $\rho=a\sqrt{\cos 2\theta}$ تغییر نمی‌کند پس محورهای y ها و x ها هر دو محور تقارن شکل هستند.



در ناحیه اول تغییرات θ بین 0 و $\frac{\pi}{4}$ است. بنابراین

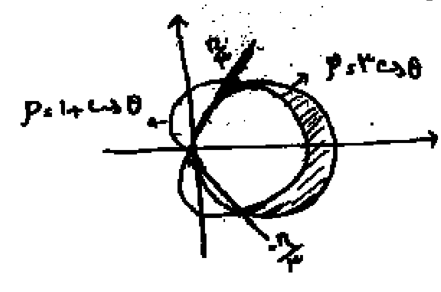
$$S=4\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\rho^2\,d\theta$$

$$S=4\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}a^2\cos 2\theta\,d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta$$

$$=a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4}=a^2$$

۷. مساحت ناحیه خارج $\rho=1+\cos\theta$ و داخل دایره $\rho=3\cos\theta$ را بدست آورید.

از روی دایره $\rho=3\cos\theta$ داریم $\rho^2=3\rho\cos\theta$ یعنی $x^2+y^2=3x$ ، دایره‌ای به مرکز $(\frac{3}{2},0)$ و شعاع $\frac{3}{2}$ است.



$$3\cos\theta = 1+\cos\theta \Rightarrow 2\cos\theta = 1 \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$$

برای $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ ، $3\cos\theta \ge 1+\cos\theta$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[(3\cos\theta)^2 - (1+\cos\theta)^2\right] d\theta$$

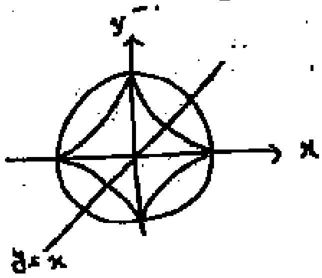
چون ناحیه نسبت به محور xها تقارن دارد.

$$A = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)\, d\theta = \int_0^{\pi/3} \left(8\times\frac{1+\cos 2\theta}{2} - 2\cos\theta - 1\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} (4\cos 2\theta - 2\cos\theta + 3)\, d\theta = 2\sin 2\theta - 2\sin\theta + 3\theta \Big|_0^{\pi/3} = \pi$$

۸- محیط آسترویید $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ را پیدا کنید.

آسترویید نسبت به محورهای مختصات و نیمسازهای ربع اول و سوم و نیز دوم و چهارم متقارن است. بنابراین کافی است طول قوسی از آن قسمت از آسترویید را که بین خط $y=x$ و محور xها قرار دارد محاسبه نموده و حاصل را هشت برابر نماییم.



در ربع اول صفحه، $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$

$$y=0 \Rightarrow x = a$$

$$y=x \Rightarrow x = \frac{a}{2^{3/2}}$$

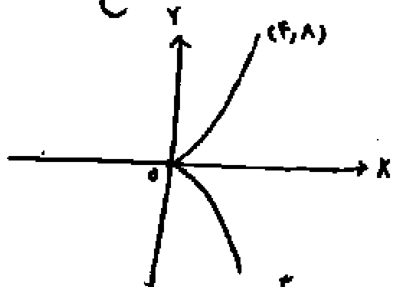
همچنین

$$y' = \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-1/3} = -x^{-1/3}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + x^{-2/3}(a^{2/3}-x^{2/3})} = \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3}$$

$$L = 8\int_{a/2^{3/2}}^{a} a^{1/3} x^{-1/3}\, dx = 6a$$

۹. طول قوسی از منحنی $y^2=x^3$ را که بین نقاط $(0,0)$ و $(4,8)$ واقع است محاسبه کنید.



چون نقاط داده شده در ربع اول صفحه قرار دارند $y=x^{3/2}$ ، بنابراین

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x} \qquad \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}$$

$$L=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

۱۰. طول قوس منحنی $y=\sin^5 t$ ، $x=\cos^5 t$ را از $t_1=0$ تا $t_2=\frac{\pi}{2}$ بدست آورید.

$$\frac{dx}{dt}=-5\cos^4 t\sin t \qquad \frac{dy}{dt}=5\sin^4 t\cos t$$

$$L=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-5\cos^4 t\sin t)^2+(5\sin^4 t\cos t)^2}\,dt=5\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\sqrt{\sin^6 t+\cos^6 t}\,dt$$

$$=\frac{5}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\sqrt{\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^3+\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^3}\,dt$$

$$=\frac{5}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2t}\,dt$$

$$A=\frac{1}{4}\int\sin 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t}\,dt=\frac{-1}{4}\int\sqrt{1+3u^2}\,du \qquad \cos 2t=u$$

$$u=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\theta \quad , \quad du=\frac{1}{\sqrt{3}}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$A=\frac{-1}{4\sqrt{3}}\int\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}\times\sec^2\theta\,d\theta=-\frac{1}{4\sqrt{3}}\int\sec^3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{-1}{14\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}\cos 2t+\sqrt{1+3\cos^2 2t}\right)\right)$$

$$L=\frac{5}{8}\left[2-\frac{\ln(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right]$$

۱۱. طول قوس منحنی $\rho=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ را در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ محاسبه کنید.

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left[\frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right]^2+\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^4}}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{2}{(1+\cos\theta)^3}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{2}{8\cos^6\frac{\theta}{2}}}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\cos^3\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^4\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{(1-\sin^2\frac{\theta}{2})^2}\,d\theta$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=u \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=du$$

$$A=\frac{1}{2}\int\frac{\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(1-\sin^2\frac{\theta}{2})^2}=\int\frac{du}{(1-u^2)^2}=\int\frac{du}{(1-u)^2(1+u)^2}$$

$$\frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1+u}\right]$$

$$A=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-u}-\ln(1-u)-\frac{1}{1+u}+\ln(1+u)\right]$$

$$L=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\sin\frac{\theta}{2}}+\ln\left[1+\sin\frac{\theta}{2}\right]-\frac{1}{1+\sin\frac{\theta}{2}}-\ln\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$$L=\frac{1}{4}\left[2\sqrt{2}+\ln\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right]\right]$$

۱۲. محیط منحنی بسته $\rho=a\sin^4\frac{\theta}{4}$ را محاسبه نمایید.

چون تابع ρ یک تابع زوج است، منحنی نسبت به محور xها تقارن دارد و چون تابع $\sin^4(\frac{\theta}{4})$ دارای دوره تناوب 4π است، در طول نصف دوره تناوب از ۰ تا 2π، شعاع قطبی از ۰ تا a افزایش می‌یابد.

$$\rho'=a\sin^3\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}$$

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=\sqrt{a^2\sin^8\frac{\theta}{4}+a^2\sin^6(\frac{\theta}{4})\cos^2\frac{\theta}{4}}=a\sin^3(\frac{\theta}{4})$$

$$L=2\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=2\int_0^{2\pi}a\sin^3\frac{\theta}{4}\,d\theta=2a\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{\theta}{4}\right)\sin\frac{\theta}{4}\,d\theta$$

$$=2a\left(-4\cos\frac{\theta}{4}+\frac{4}{3}\cos^3\frac{\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{16}{3}a$$

۱۳. حجم بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را محاسبه نمایید.

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\Rightarrow\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

با نیم‌قطرهای $b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ ، $c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

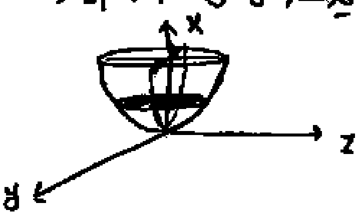
مساحت این بیضی مساوی با πb_1c_1 است. بنابراین $Q(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc$$

۱۴. حجم جسمی را که محدود به سطح بیضی‌گون $x=\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}$ $(p,q>0)$ و صفحه $x=a$ است محاسبه نمایید.

$$\begin{cases}x=a\\ x=\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}\end{cases}\Rightarrow\frac{y^2}{2ap}+\frac{z^2}{2qa}=1$$

محل تقاطع صفحهٔ موازی صفحه oYZ و به فاصله x از آن جسم $(0\le x\le a)$، بیضی $\frac{y^2}{2px}+\frac{z^2}{2qx}=1$ است که نیم‌قطرهای آن $b_1=\sqrt{2px}$ و $c_1=\sqrt{2qx}$ می‌باشند.



مساحت بیضی فوق

$$Q(x)=\pi b_1c_1=2\pi x\sqrt{pq}$$

$$V=\int_0^a 2\pi x\sqrt{pq}\,dx=\pi a^2\sqrt{pq}$$

۱۵. شکل محدود به یک قوس سیکلوئید

$$x=a(t-\sin t)$$
$$y=a(1-\cos t)$$

به دور محور x ها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل از دوران را بدست آورید.

$x=a(t-\sin t) \qquad dx=a(1-\cos t)\,dt$

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2dx=\pi\int_0^{2\pi a} y^2(x)\,dx=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,a(1-\cos t)\,dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left[1-\cos^3 t-3\cos t+3\cos^2 t\right]dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left[1-\cos t(1-\sin^2 t)-3\cos t+3\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\right]dt$$

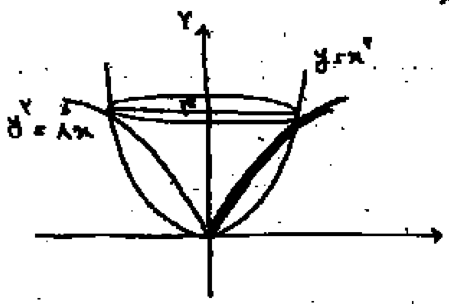
$$=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-4\sin t+\frac{1}{3}\sin^3 t+\frac{3}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=5\pi^2a^3$$

۱۶. حجم جسمی را که از دوران شکل محدود به منحنی های $y=x^2$ ، $8x=y^2$ به دور محور yها بدست می‌آید محاسبه کنید.

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=8x \end{cases} \Rightarrow y_1=0,\ y_2=4$$

در بازه $[0,4]$ ، $x_2(y)=\sqrt{y}$ و $x_1(y)=\frac{y^2}{8}$



$$V=\pi\int_0^4\left(x_2^2(y)-x_1^2(y)\right)dy=\pi\int_0^4\left(y-\frac{y^4}{64}\right)dy=\frac{24}{5}\pi$$

۱۷. سطح کره‌ای به شعاع R را محاسبه کنید.

$$y=f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$$

اگر نیم‌دایره فوق را حول محور xها دوران دهیم کره مورد نظر بدست می‌آید.

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}R\,dx=4\pi R^2$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۱۸. سطح رویه حاصل از دوران یک شاخه از سیکلوئید

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$$

به دور محور ox را محاسبه نمائید.

$$\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{matrix} \qquad P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\, dt$$

$$P = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\; dt$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)} = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\, dt$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\, dt = 8\pi a^2\left(-\cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{64}{3}\pi a^2$$

۱۹. مساحت رویه ای را که از دوران دایره $x^2+(y-b)^2=a^2$ ، که در آن $b \geq a$ ، به دور محور x ها بدست می آید محاسبه نمائید.

$$x = a\cos t \qquad y = b + a\sin t$$

$$P = 2\pi \int_0^{2\pi} (b + a\sin t)\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\; dt$$

$$= 2\pi a \int_0^{2\pi} (b + a\sin t)\, dt = 4\pi^2 ab$$

حل تمرین را بیان نمایید:

سریها

الف. در هر یک از تمرینات زیر تعیین کنید که آیا سری همگرای مطلق، مشروط یا واگراست.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$a_n > a_{n+1}$ دنباله نزولی $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

بنابه آزمون لایب نیتز، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ همگراست.

در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$، چون $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ $\forall n$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، بنابراین بنابه آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست. بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ همگرای مشروط است.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n^2}$

در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} n\,a_n = \lim_{n\to\infty} n \times \frac{2n+1}{n^2} = 2$$

بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$ واگراست.

$a_{n+1} < a_n$ دنباله نزولی $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0$

بنابراین بنابه آزمون لایب نیتز سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n^2}$ سری همگراست.

پس در کل سری یک سری همگرای مشروط است.

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

$a_n = \frac{1}{n \ln n}$ $\qquad a_n > a_{n+1}$ دنباله نزولی $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

بنابه آزمون لایب نیتز، سری همگراست.

در مورد سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$، بنابه آزمون انتگرال یک سری واگراست.

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} \ln|\ln x| \Big|_{2}^{b} = \infty$$

بنابراین سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ همگرای مشروط است.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} e^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{(-1)^n e^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{ne}{n+1} = e > 1$$

سری در کل واگراست.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5n^2}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left| \frac{5(n+1)^2}{(n+2)!} \times \frac{(n+1)!}{5n^2} \right| = \lim_{n\to\infty}\left| \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n+2} \right| = 0 < 1$$

همگرای مطلق

۶. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ نانزولی، $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ بنا بر آزمون لایب نیتز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ همگراست

در مورد سری قدر مطلق:

$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < 2\sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ داریم:

$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}$ $\quad p\left(=\frac{1}{2}\right) < 1$

بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ واگراست، در نتیجه سری قدر مطلق واگراست.

در کل سری همگرای مشروط است.

۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

$a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ نانزولی، $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ بنا بر لایب نیتز سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ همگراست

در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ داریم:

$\lim_{n\to\infty} n \times \frac{1}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n+1)} = \infty$

سری واگراست.

در نتیجه سری به طور مشروط همگراست.

۸. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{e^k}$

در مورد سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$:

$F(x) = \frac{x}{e^x}$ $\quad F'(x) = \frac{1-x}{e^x}$

F در بازه $[1,\infty)$ نزولی و پیوسته است

$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{x}{e^x}\,dx = \lim_{b\to\infty} -xe^{-x} - e^{-x} \Big|_1^b = 0$

بنا بر این سری بنا بر آزمون انتگرال همگراست. در نتیجه سری همگرای مطلق است.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n - \sum \frac{(-1)^n 2}{n+2}$$

با فرض $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$ ، $b_n = (-1)^n$ ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ یک سری واگراست بنابراین

در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n$ یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$ یک سری واگراست.

در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n n}{n+2}\right|$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \neq 0$$

پس این سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$ واگراست.

۱۰. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{(n-2)!}$

در مورد سری قدر مطلق،

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}}{(n-1)!} \times \frac{(n-2)!}{3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n-1} = 0 < 1$$

پس سری همگرای مطلق است.

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

$a_n = \frac{1}{n!}$ نزولی است $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ سری همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad n \geq 4 \quad n! > 2^n \Rightarrow \quad \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

چون سری $\sum \frac{1}{2^n}$ یک سری همگراست بنابراین طبق آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ نیز همگراست.

۱۲. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k}{2}\right)^k$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \left(\frac{n}{2}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^n} = \infty$$

سری واگراست.

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{n+4}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+4} = 2 > 1$$

سری واگراست.

حل تمرین زیر را بیان نمودید.

ب) همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را مشخص کنید.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+3)} = 1 \quad \Rightarrow$$ سری همگراست.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

$$\lim_{n\to\infty} n\, a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n(n+1)}} = 1$$ سری واگراست.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$ $\quad p = \frac{3}{4} < 1$ سری واگراست.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$

$$A(n+1)(n+2) + B\,n(n+2) + C\,n(n+1) = 4 \Rightarrow A = 2,\ B = -4,\ C = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)(n+2)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n = 2\left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)\right] \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$ پس سری همگراست.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^{-n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+2^{-n}} = \frac{1}{3} \neq 0$$ سری واگراست.

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^{3/2}}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^{3/2}}\, dt = \lim_{b\to\infty} -2t^{-1/2} \Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \frac{2}{\sqrt{\ln 2}}$$

سری همگراست. (از محک آزمون انتگرال)

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

۸. $\sum \frac{n^2}{\sqrt{n^8+4n^3}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \times \frac{n^2}{\sqrt{n^8+4n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4\sqrt{1+\frac{4}{n^5}}} = 1$ سری همگرا است.

۹. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \infty$ سری واگرا است.

۱۰. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(2n+1)!}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{(2n+3)!} \times \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1$

سری همگرا است.

۱۱. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{(2n+3)(n-5)}$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \times \frac{\pi}{(2n+3)(n-5)} = \frac{\pi}{2}$ سری همگرا است.

۱۲. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n(1+n^2)}{n^3-2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(1+n^2)}{n^3-2} = 1 \neq 0$ سری واگرا است.

۱۳. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n 3^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{6^{n+1}} \times \frac{6^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{6} = \infty$ سری واگرا است.

۱۴. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ آزمون انتگرال $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ بر بازه $[2,\infty)$ نزولی و پیوسته و مثبت است

$\lim\limits_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{-1}{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \frac{1}{\ln 2}$ سری همگرا است

۱۵. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

$\int^b \; e^{-\sqrt{x}} \; \ldots \; e^{-\sqrt{x}}\Big|^b = \frac{2}{\ldots}$ سری همگرا است.

۱۶. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+3}{(\ln n)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{(\ln n)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\ln n \times \frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2\ln n} = \infty$ سری واگراست.

۱۷. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n}{\ln n} + \dfrac{3}{4^n}$

سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n}{\ln n}$ ، چون $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln n} = \infty$. سری واگراست.

سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3}{4^n}$ چون سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{4^n}$ همگراست ، یک سری همگراست. $\Leftarrow$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n}{\ln n} + \dfrac{3}{4^n}$ واگراست.

۱۸. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$

$f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1-2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}$ $\qquad x \geq 1 \Rightarrow f'(x) < 0$

پس f در بازه $[1,\infty)$ نزولی است.

$\int_1^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^{b} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 \Big|_1^b = \infty$

سری واگراست.

۱۹. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} = 1 \neq 0$ سری واگراست.

۲۰. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(2n)!}$

از آزمون نسبت :

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}}{(2n+2)!} \times \dfrac{(2n)!}{2^n} = \lim\limits_{h\to\infty} \dfrac{2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1$

سری همگراست

۲۱. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n+n}$

$2^n + n > 2^n \Rightarrow \dfrac{1}{2^n+n} < \dfrac{1}{2^n}$

چون سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ همگراست ، بنابراین $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n+n}$ همگراست (بنابر آزمون مقایسه)

۲۲. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n$

$\lim \ldots = \lim \left[\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k = e^k \neq 0$ سری واگراست.

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

$f(x) = xe^{-x^2} \quad f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2} \quad x>1 \quad f'(x)<0$

تابع نزولی است.

$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2}$

سری همگراست.

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

طبق آزمون نسبت

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$

سری همگراست.

۲۵. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1$

سری همگراست.

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}$

(آزمون ریشه)

سری همگراست.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}$

سری واگراست.

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)^3} \times \frac{n^3}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e\, n^3}{(n+1)^3} = e > 1$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

سری واگراست.

۳. شعاع همگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{n^2 x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |x| = |x|$

سری به ازای $|x|<1$ همگراست، بنابراین شعاع همگرایی برابر ۱ است.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} (x+2)^n$

$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{(-1)^n (x+2)^{n+1}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{(-1)^n (x+2)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|}{2} = \frac{|x+2|}{2} < 1$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(\ln(n+1))^2} \times \frac{(\ln n)^2}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^2 = |x| \Rightarrow r=1$$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x-\frac{1}{2})^n}{2^n\, n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\,(x-\frac{1}{2})^{n+1}}{2^{n+1}\,(n+1)^{n+1}} \times \frac{2^n\, n^n}{n!\,(x-\frac{1}{2})^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-\frac{1}{2}|}{2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-\frac{1}{2}|}{2} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= \frac{|x-\frac{1}{2}|}{2e} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x-\tfrac{1}{2}| < 2e \Rightarrow r = 2e$$

۴. سری تیلور توابع داده شده را حول c بنویسید و سپس شعاع همگرایی سری حاصل را تعیین کنید.

۱. $f(x) = e^x \qquad c=0$

$f(0)=1 \qquad f'(x) = e^x \qquad f'(0)=1$

$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

سری به ازای همه x همگراست.

۲. $f(x) = \frac{1}{3+x} + \frac{1}{2-x} \qquad c=0$

$f(0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{3\times 2}$

$f'(x) = \frac{-1}{(3+x)^2} - \frac{1}{(2-x)^2} \qquad f'(0) = -\frac{3^2+2^2}{3^2\times 2^2}$

$f''(x) = \frac{2}{(3+x)^3} + \frac{2}{(2-x)^3} \qquad f''(0) = 2\times \frac{3^3+2^3}{3^3\times 2^3}$

$\vdots$

$f^{(n)}(0) = (-1)^n\, n! \times \frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^{n+1}\times 2^{n+1}}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{6^{n+1}} \times x^n$$

$|x| \quad 3^{n+1}+2^{n+1}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2} \times \frac{3^{n+1}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \frac{|x|}{2} < 1$$

پس سری برای $|x|<2$ همگراست.

۵. نشان دهید سری‌های توانی زیر در بازه داده شده همگرایند.

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \qquad I=[-1,1]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(2n+2)!}\times\frac{(2n)!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

سری برای هر x همگراست.

$$2.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}} \qquad I=[1,3]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{3^{n+2}}\times\frac{3^{n+1}}{(x-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|}{3} = \frac{|x-2|}{3} < 1$$

$$\Rightarrow |x-2|<3 \Rightarrow -1<x<5$$

$$3.\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j(j+1)}{j!}(x+3)^j \qquad I=[-5,-1]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)!}(x+3)^{n+1}\times\frac{n!}{n(n+1)(x+3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}|x+3| = 0$$

سری برای هر x همگراست.

۶. شعاع همگرایی سری‌های زیر را بیابید. همگرایی آنها را در ± 1 بررسی کنید.

$$1.\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

$x=1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \qquad p=2$ سری همگراست.

$x=-1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$ سری همگراست.

$2.\ \sum_{k=1}^{\infty} k x^k \qquad x=1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k$ واگراست.

$x=-1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k$

طبق آزمون ابل چون $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ واگراست بنابراین $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k$ نیز واگراست.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۷. یک سری توانی حول $x=5$ با شعاع همگرایی $R=2$ بنویسید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^n}$$

۸. به ازای چه مقادیری از x سری‌های زیر همگرایند

$$1.\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{x^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{x^{n+1}} \times \frac{x^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} \times |x| = |x| < 1$$

سری به ازای $|x|<1$ همگراست

به ازای $x=1$، سری $\sum_{n=0}^{\infty} n$ داریم که یک سری واگراست.

به ازای $x=-1$، سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$ خواهد بود که یک سری واگراست، بنابراین سری به ازای $|x|<1$ همگراست.

$$2.\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{(x-2)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)3^{n+1}}{(x-2)^{n+1}} \times \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} \times \frac{3}{|x-2|} = \frac{3}{|x-2|} < 1$$

$$\Rightarrow \quad |x-2| > 3 \quad \Rightarrow \quad x > 5,\ x < -1$$

به ازای $x=5$، سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} n+1$ خواهد بود که یک سری واگراست.

به ازای $x=-1$، سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)$ خواهد بود که باز یک سری واگراست.

بنابراین سری به ازای $x<-1$، $x>5$، همگرا خواهد بود.

۹. محاسبه حد به کمک سری توانی

$$3.\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + \cdots\right) = \frac{1}{2}$$

$$4.\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} \qquad a>0$$

$$f(x) = \ln(1+ax) \qquad f(0)=0 \qquad f'(x) = \frac{1}{1+ax} \qquad f'(0)=1$$