قواعد مهم ازلی حفظ شود

مجموعه تست حد و پیوستگی

۱ ـ حد چپ و راست تابع $f(x)=\left(\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{-2}{x}}}\right)^{[x]}$ **در نقطه** $x=0$ **به ترتیب عبارتند از:**

۱) $0\,,+\infty$ ۲) $1\,,+\infty$ ۳) $0\,,1$ ۴) $1\,,0$

حل :

وقتی $x\to 0^+$ داریم:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}\to+\infty \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}=e^{+\infty}\to+\infty \\ e^{-\frac{2}{x}}=e^{-\infty}\to 0 \end{cases}$$

پس:

$$\text{حد راست}=\left(\frac{1}{+\infty+0}\right)^{[0^+]}=(\text{صفر حدی})^{(\text{صفر واقعی})}=1$$

وقتی $x\to 0^-$ داریم:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}\to-\infty \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}=e^{-\infty}\to 0 \\ e^{\frac{-2}{x}}=e^{+\infty}\to+\infty \end{cases}$$

پس:

$$\text{حد چپ}=\left(\frac{1}{0+\infty}\right)^{[0^-]}=(\text{صفرحدی})^{-1}=\frac{1}{\left(0^+\right)^1}=+\infty$$

۲ ـ می‌دانیم f تابعی فرد است و برای xهای مثبت داریم: $f(x)=\dfrac{[x^2]-1}{x^2-1}$**. مقدار** $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$ **کدام است؟**

۱) $-\infty$ و 0 ۲) $+\infty$ و 0 ۳) 0 و $+\infty$ ۴) 0 و $-\infty$

حل :

به سبب فرد بودن تابع داریم: $f(-x)=-f(x)$

لذا طبیعی است:

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-\lim_{x\to1^-} f(x)=-\lim_{x\to1^-}\frac{[x^2]-1}{x^2-1}=-\frac{0-1}{\left(1^-\right)^2-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\lim_{x\to1^+} f(x) = -\lim_{x\to1^+} \frac{\left[x^2\right]-1}{x^2-1} = -\frac{1-1}{\left(1^+\right)^2-1} = \frac{\text{صفر واقعی}}{\text{صفر حدی}} = 0$$

۳ـ f تابعی زوج و متناوب با دوره تناوب $T=3$ بوده و داریم $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2x & 1\le x<\frac{3}{2} \end{cases}$.

کدام گزینه زیر صحیح است؟

۱) $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=8$ ۲) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-2$

۳) $\lim\limits_{x\to(-5)^+} f(x)=10$ ۴) $\lim\limits_{x\to8^+} f(x)=1$

حل :

از متناوب بودن تابع : $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to4^-} f(x-3)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1$

از زوج بودن تابع : $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=2$

از متناوب بودن تابع : $\lim\limits_{x\to(-5)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-5)^+} f(x+2\times3)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=2$

از متناوب و زوج بودن تابع : $\lim\limits_{x\to8^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1$

۴ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+3^2+\cdots+3^n}{3^{n+1}}$ **کدام است؟**

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) ∞

حل :

مجموع n جمله اول یک تصاعد هندسی با جمله اول t_1 و قدر نسبت q از رابطه $S_n=\frac{t_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$ به‌دست می‌آید؛ لذا، داریم:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3\left(1-3^n\right)}{1-3}}{3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(1-3^n\right)}{(-2)3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-3^{n+1}}{-2\left(3^{n+1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1\times3^{n+1}}{-2\times3^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

۵ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 0 ۴) $\frac{1}{4}$

حل :

$$I=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\right]\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\right]\cdots\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\right]\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\right]\left[\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\right]\cdots\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)(1)\,(1)\cdots(1)\,\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$$

۶ـ حاصل $\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ **کدام است؟**

۱) 1 ۲) -1 ۳) 0 ۴) ∞

حل :

با ضریب و تقسیم عبارت مذکور در مزدوج آن به دست می‌آید:

$$I=\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right)=\lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|+|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{(-x)+(-x)}=-1$$

۷ـ حاصل $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_{x^2}^{\sin x}\operatorname{sech} t\,dt}{\ln(1+x)}$ **کدام است؟**

۱) صفر ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

حل :

حد مذکور مبهم از نوع $\frac{0}{0}$ بوده و داریم:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{\sin x}\operatorname{sech} t\,dt}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)(\operatorname{sech}(\sin x))-(2x)\left(\operatorname{sech}\left(x^2\right)\right)}{\frac{1}{1+x}}$$

$$=\frac{(1)(\operatorname{sech}0)-(0)(\operatorname{sech}0)}{1}=\operatorname{sech}0=\frac{1}{\cosh 0}=\frac{1}{1}=1$$

۸ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2-x^2}dt$ **کدام است؟**

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) ∞

حل :

$$I=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2-x^2}dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2}e^{-x^2}dt=\lim_{x\to+\infty}e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{H}I=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$$

۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sqrt{\sin x}\right)\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{\sin x}\right)}{(1-\sin x)^{n-1}}$ **کدام است؟**

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{n}$ ۴) $\frac{1}{n!}$

حل :

$$I=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{\sin x}}{1-\sin x}\,\frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sin x}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{\sin x}}{1-\sin x}$$

اما مشاهده می‌شود:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{\sin x}}{1-\sin x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sin x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}}{-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}=\frac{1}{3}$$

پس می‌توان انتظار داشت:

$$I=\frac{1}{2}\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}$$

۱۰ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ∞

حل :

می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{0}$$

با تغییر متغیر $t=\frac{1}{x}$ به دست می‌آید:

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\overset{H}{=}\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{+1}{(1+t)^2}}{2}=\frac{1}{2}$$
$t\to 0$

۱۱ ـ اگر $f(x)=\frac{3-3^{e^x}}{1-e^x}$؛ حد تابع برای $x\to-\infty$ و $x\to 0$ کدام است؟

۱) 2 و $3\ln 3$ ۲) 3 و $3\ln 3$ ۳) 2 و 3 ۴) 3 و 3

حل :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3-3^{e^x}}{1-e^x}=\frac{3-3^0}{1-0}=2$$

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{3-3^{e^x}}{1-e^x}=\frac{3-3^1}{1-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H} I=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x\,.\,3^{e^x}\ln 3}{-e^x}=\lim_{x\to 0}3^{e^x}.\ln 3=3^1.\ln 3$$

۱۲ ـ حاصل $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}+2e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{-1}{x}}-2e^{\frac{1}{x}}}$ و $B=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+2e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{-1}{x}}-2e^{\frac{1}{x}}}$ به ترتیب کدام است؟

۱) $A=-3$, $B=2$ ۲) $A=-\frac{1}{2}$, $B=2$

۳) $A=-3$, $B=-3$ ۴) $A=-\frac{1}{2}$, $B=-3$

حل :

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}+2e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{-1}{x}}-2e^{\frac{1}{x}}}=\frac{e^0+2e^0}{e^0-2e^0}=-3$$

وقتی $x\to 0^-$ داریم:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}\to-\infty\quad,\quad\frac{-1}{x}=\frac{-1}{0^-}\to+\infty$$

لذا:

$$B=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+2e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{-1}{x}}-2e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\infty}+2e^{+\infty}}{e^{+\infty}-2e^{-\infty}}\Rightarrow B=\lim_{x\to 0^-}\frac{2e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}=2$$

۱۳ ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{Arc}\sin 2x-2\operatorname{Arc}\sin x}{x^3}$ **کدام است؟**

۱) 1 ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل :

با استفاده از قاعده هم‌ارزی داریم:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\left((2x)+\frac{(2x)^3}{6}\right)-2\left(x+\frac{x^3}{6}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1$$

۱۴ ـ حاصل $I=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\operatorname{Arc}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$ **و** $J=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$ **کدام است؟**

۱) $J=\frac{1}{4}\ ,\ I=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $J=\frac{1}{8}\ ,\ I=\sqrt{2}$

۳) $J=\frac{1}{8}\ ,\ I=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $J=\frac{1}{4}\ ,\ I=\sqrt{2}$

حل :

$$I=\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{Arc}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H} I=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}}{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1+x}}{2x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$J=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^4}=\frac{1}{8}$$

دقت داریم برای محاسبه J از این هم‌ارزی که وقتی $A\to 0$ داریم $1-\cos A\sim\frac{A^2}{2}$ استفاده کرده‌ایم.

تذکر: به کمک هم‌ارزی ($\operatorname{Arc}\cos x\sim\sqrt{1-x^2}$: $x\to 1^-$) می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\operatorname{Arc}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x^1}}{\sqrt{1-x}\,.\,\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$$

۱۵ ـ α چقدر باشد تا حاصل حد $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+6x-6\sin x}{x^\alpha}$ عددی مخالف صفر باشد؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 1 ۴) 4

حل :

$$I=\lim_{x\to0}\frac{x^3+6x-6\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)}{x^\alpha}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+6x-6x+x^3-\frac{x^5}{20}}{x^\alpha}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^3-\frac{x^5}{20}}{x^\alpha}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3\left(1-\frac{x^2}{40}\right)}{x^\alpha}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3}{x^\alpha}$$

بدیهی است اگر $\alpha>3$ باشد، عبارت به بی‌نهایت می‌گراید و اگر $\alpha<3$ باشد حاصل حد 0 خواهد بود؛ لذا، برای آنکه حاصل، عددی مخالف صفر باشد، باید $\alpha=3$ شود و البته حاصل حد در این صورت 2 خواهد بود.

۱۶ ـ چنانچه $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x^3}+\dfrac{a\cos x}{x^2}+b\right)=0$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{3}$ ۲) $-\dfrac{1}{4}$

۳) $-\dfrac{4}{3}$ ۴) اصلاً تساوی داده شده، غیرممکن است.

حل :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^3}+\frac{a\cos x}{x^2}+b\right)=0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to0}\left(\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots}{x^3}+a\times\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots}{x^2}+b\right)=0$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to0}\left(\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}\right)+a\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2!}+\frac{x^2}{4!}\right)+b\right)=0$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to0}\left((a+1)\frac{1}{x^2}+\left(-\frac{1}{3!}-\frac{a}{2!}+b\right)+\left(\frac{1}{5!}+\frac{a}{4!}\right)x^2\right)=0$$

با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ ؛ باید:

$$\begin{cases} a+1=0 \\ \frac{-1}{3!}-\frac{a}{2!}+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-1\ ,\ b=-\frac{1}{3} \Rightarrow a+b=-\frac{4}{3}$$

۱۷ ـ حاصل حد $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{((2n)!)^2}{n!(3n)!}}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{8}{27}$ ۲) $\frac{16}{27}$ ۳) $\frac{31}{54}$ ۴) $\frac{15}{54}$

حل :

طبق هم ارزی استرلینگ، داریم:

$$n\to\infty:\ \sqrt[n]{(kn)!}\sim\left(\frac{kn}{e}\right)^k$$

پس، می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{((2n)!)^2}{n!(3n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{(2n)!}\right)^2}{\sqrt[n]{n!}\,\sqrt[n]{(3n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\frac{2n}{e}\right)^2\right)^2}{\left(\frac{n}{e}\right)\left(\frac{3n}{e}\right)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{16n^4}{e^4}}{\frac{27n^4}{e^4}}=\frac{16}{27}$$

۱۸ ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ **کدام است؟**

۱) 1 ۲) 0 ۳) e ۴) e^{-1}

حل :

$$I=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=1^\infty\ \text{مبهم}$$

می‌توان نوشت:

$$\ln I=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x.\ln(\sin x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cot x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\ln I=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\left(1+\cot^2 x\right)}=0$$

لذا داریم:

$$\ln I=0\ \to\ I=e^0=1$$

۱۹ ـ حاصل $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x\ln x}$ **کدام است؟**

۱) $+\infty$ ۲) 0 ۳) 1 ۴) e

حل :

$$I=\lim_{x\to+\infty}(x\ln x)^{\frac{1}{x}}=\infty^0$$ مبهم

می‌توان نوشت:

$$\ln I=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x\ln x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x\ln x)}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\ln x+x\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x\ln x}}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln x}=\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow I=e^0=1$$

۲۰ ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ **کدام است؟**

۱) 1 ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۴) $\sqrt{e}$

حل :

$$I=\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n=\left(\cos\frac{1}{\sqrt{\infty}}\right)^\infty=(\cos 0)^\infty=1^\infty$$ مبهم

می‌توان نوشت:

$$\ln I=\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}$$

با تغییر متغیر $\frac{1}{\sqrt{n}}=t$ داریم:

$$\ln I=\lim_{t\to0}\frac{\ln\cos t}{t^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\ln I=\lim_{t\to0}\frac{\frac{-\sin t}{\cos t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{-\tan t}{2t}=\frac{-1}{2}$$

و به دست می‌آید:

$$I=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

راه دوم:

با توجه به حالت ابهام 1^∞ و هم‌ارزی گفته شده در درس داریم:

$$I=\lim_{n\to\infty}e^{n\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\left(-\frac{(\frac{1}{\sqrt{n}})^2}{2}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

۲۱ـ حاصل $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$ **کدام است؟**

۱) $\sqrt{e}$ ۲) e^2 ۳) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۴) e

حل :

$$I=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}=1^\infty \text{ مبهم}$$

با اعمال قاعده هم ارزی داریم:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to 0^+}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

۲۲ـ به ازاء چه مقدار a داریم $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-a}{2x+3a}\right)^{ax}=4$ ؟

۱) غیرممکن ۲) $a=\pm\sqrt{\ln 2}$ ۳) $a=\pm\ln 2$ ۴) $a=\pm\frac{1}{\sqrt{\ln 2}}$

حل :

حد مذکور مبهم از نوع 1^∞ بوده و می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-a}{2x+3a}\right)^{ax}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+3a)-4a}{2x+3a}\right)^{ax}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4a}{2x+3a}\right)^{ax}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2a}{x+\frac{3a}{2}}\right)^{ax}=e^{(-2a)(a)}=e^{-2a^2}$$

پس باید:

$$e^{-2a^2}=4\ \rightarrow\ -2a^2=\ln 4=2\ln 2\ \rightarrow\ a^2=-\ln 2 \text{ غیر ممکن}$$

۲۳ـ تابع f دارای خواص زیر است:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-1\ ,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$$

حاصل حدهای زیر کدام است؟

$$A=\lim_{x\to 0}\left((f(x)+1)\sin\frac{\pi}{x^2}\right),\ B=\lim_{x\to\infty}\left(\left(x^2-\cos x\right)[f(x)]\right)$$

۱) $A=B=0$ ۲) $A=\infty, B=0$ ۳) $A=0, B=\infty$ ۴) $A=B=\infty$

حل :

وقتی $x \to 0$، تابع $\sin\frac{\pi}{x^2}$ اگرچه حد ندارد، کراندار و محدود است و از طرفی چون $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ می‌باشد، $\lim_{x\to 0}(f(x)+1) = 0$ بوده و داریم:

$A = 0 \times$ کراندار $= 0$

وقتی $x \to \infty$، حد تابع $x^2 - \cos x$ بی‌نهایت می‌شود؛ ولی، چون $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ می‌باشد؛ $\lim_{x\to\infty}[f(x)] = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$ و البته این صفر، صفر واقعی است و داریم:

$B =$ (بی‌نهایت بزرگ) $\times$ (صفر واقعی) $= 0$

۲۴ـ به ازاء چه مقدار b معادله مجانب افقی تابع به معادله $y = x - \sqrt{x^2 - 4bx}$ به صورت $y = 4$ است؟

۱) 1　　۲) 2　　۳) 4　　۴) صفر

حل :

$$\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2 - 4bx} = \lim_{x\to\infty} x - \left|x + \frac{-4b}{2}\right|$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x - \left(x + \frac{-4b}{2}\right) = \frac{4b}{2} = 2b \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x + \left(x + \frac{-4b}{2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x + \frac{-4b}{2}\right) = -\infty \end{cases}$$

پس تابع در $x \to -\infty$ دارای مجانب مایلی به صورت $y = 2x - 2b$ بوده و برای آن که در $x \to +\infty$ مجانب افقی $y = 4$ را داشته باشد، باید: $2b = 4 \to b = 2$

۲۵ـ تابع $y = \frac{xe^{-x} + 3x + 2}{2e^x + e^{-x} - 3}$ دارای چند مجانب است؟

۱) یک　　۲) دو　　۳) سه　　۴) چهار

حل :

می‌دانیم $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ ؛ لذا، ملاحظه می‌شود:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{-x} + 3x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(e^{-x} + 3)}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} x$$

یعنی در $x\to+\infty$ تابع دارای مجانب افقی $y=0$ و در $x\to-\infty$ رابطه $y\sim x$ برقرار است و تابع دارای مجانب مایل $y=x$ است.

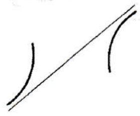
برای یافتن مجانب‌های قائم می‌نویسیم:

$$2e^x+e^{-x}-3=0 \;\rightarrow\; 2e^{2x}-3e^x+1=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} e^x=1 \;\rightarrow\; x=0 \\ e^x=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; x=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

که هیچ‌کدام به صفر شدن صورت y نیز نمی‌انجامند؛ پس، هر دو به عنوان مجانب قائم پذیرفته هستند؛ لذا، تابع دارای چهار خط مجانب است.

۲۶ ـ رفتار تابع $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$ در اطراف مجانب مایلش چگونه است؟

۱)  ۲) 

۳)  ۴) 

حل :

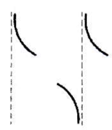
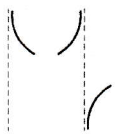
$$f(x)=\frac{\left(x^3+1\right)-1}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}+\frac{-1}{x^2-x+1}=x+1+\frac{-1}{x^2-x+1}$$

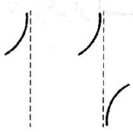
ملاحظه می‌شود $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{x^2-x+1}=0$؛ لذا، $y=x+1$ مجانب مایل تابع است؛ ضمناً، وقتی $x\to\pm\infty$:

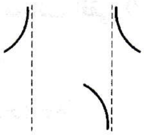
$$f(x)-(x+1)=\frac{-1}{x^2-x+1}=0^-<0$$

یعنی هم در $+\infty$ و هم در $-\infty$ منحنی تابع در پایین مجانب مایل قرار دارد و گزینه دوم صحیح است.

۲۷ ـ رفتار تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}+\dfrac{1}{x-3}$ در اطراف مجانب‌های قائمش چگونه است؟

۱)  ۲) 

۳) 

۴) 

حل :

تابع دو مجانب قائم به معادله $x = 3$ و $x = 1$ و از آنجاکه:

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+\frac{1}{x-3}\right)=\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3^+-3}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-}\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+\frac{1}{x-3}\right)=\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3^--3}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+\frac{1}{x-3}\right)=\sqrt{\frac{3}{1^+-1}}+\frac{1}{-2}=\sqrt{+\infty}+\frac{1}{-2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+\frac{1}{x-3}\right)=\sqrt{\frac{3}{1^--1}}+\frac{1}{-2}=\sqrt{-\infty}+\frac{1}{-2}$$ تعریف نشده:

پس، گزینه اول صحیح است.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+\frac{1}{x-3}$$

فصل چهارم

مشتق و بحث‌های اولیه مربوط به آن

نمو متغیر و نمو تابع و آهنگ تغییرات نسبی
تعریف مشتق یک تابع در یک نقطه
تعبیر هندسی مشتق تابع در یک نقطه
مفهوم مشتق چپ و راست
دسته‌بندی نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر نمی‌باشد
تعریف مشتق تابع به صورت یک تابع
مشتق‌پذیری در یک فاصله
چندنکته درباره مشتق‌توابع شامل قدرمطلق
چند نکته درباره مشتق توابع شامل جزء صحیح
قواعد اولیه مشتق‌گیری
مشتق توابع به فرم $f(x)^{g(x)}$
مشتق‌گیری ضمنی
مشتق تابع مرکب
مشتق‌گیری زنجیره‌ای
مشتق‌گیری پارامتری
مشتق یک تابع نسبت به تابع دیگر
مشتق تابع معکوس
مشتق‌گیری از انتگرال (قاعده لایپ نیتس)
مشتقات مراتب بالا
دیفرانسیل یک تابع

یادداشت:

نمو متغیر و نمو تابع و آهنگ تغییرات نسبی

تابع $y = f(x)$ را در نظر بگیرید. اگر متغیر x از x_1 به x_2 تغییر کند، $\Delta x = x_2 - x_1$ را نمو متغیر نامیده و $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ را نمو تابع می‌نامند. در این حالت نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را آهنگ تغییرات نسبی می‌نامیم؛ یعنی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

تعریف مشتق یک تابع در یک نقطه

تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 مشتق پذیر است؛ هرگاه:

اولاً؛ در این نقطه پیوسته باشد.

ثانیاً؛ حد زیر موجود باشد.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

که در صورت موجود بودن حد فوق، حاصل آن را $f'(x_0)$؛ یعنی، مقدار مشتق تابع f در نقطه x_0 می‌نامیم. (منظور از موجود بودن حد فوق، این است که حاصل، عددی معلوم باشد).

دقت کنید که پیوستگی در یک نقطه شرط لازم و نه کافی برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است.

توجه: داریم:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \qquad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

و به‌طور کلی می‌توان گفت:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + mh) - f(x_0 - nh)}{h} = (m+n)f'(x_0)$$

چند نکته

۱ـ تابع f به معادله $f(x) = [x]$ در نقاط $x_0 \in Z$ حد ندارد، پیوسته نیست و مشتق پذیر نمی‌باشد و در نقاط $x_0 \in (R - Z)$ حد دارد، پیوسته است و مشتق پذیر هم می‌باشد و مقدار مشتق آن صفر است.

۲ـ تابع f به معادله $f(x)=\left|(x-a)^n\right|$ در $x=a$ به ازای $n=1$ مشتق‌پذیر نیست و به ازای $n>1$ مشتق‌پذیر است.

۳ـ تابع f به معادله $f(x)=\sqrt[2n+1]{(x-a)^n}$، $n\in N$ در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست.

۴ـ تابع f به معادله $f(x)=(x-a).\sqrt[2n+1]{(x-a)^n}$، $n\in N$ در $x=a$ مشتق‌پذیر است.

۵ ـ تابع f به معادله $f(x)=\sqrt[2n]{x-a}$، $n\in N$ در $x=a$ حد ندارد، پیوسته نیست و مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

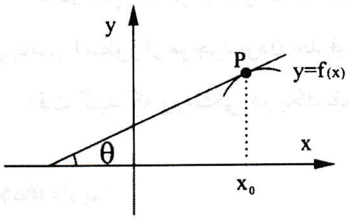
۶ ـ به رابطه مقابل توجه کنید:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^n(x+h)-f^n(x)}{h}=(f^n(x))'$$

۷ـ در کلیه توابع مثلثاتی کمان باید برحسب رادیان باشد تا بتوان از تابع، مشتق گرفت.

تعبیر هندسی مشتق تابع در یک نقطه

به سادگی می‌توان نشان داد ضریب زاویه (شیب) خط مماس در هر نقطه از یک منحنی برابر است با مشتق به ازاء مختصات نقطه تماس.



$m=tg\theta=f'(x_0)$ مماس

مفهوم مشتق چپ و راست

برای تابع $y=f(x)$ مشتق چپ و راست در نقطه x_0 به صورت زیر تعریف می‌شوند (و البته بدیهی است وقتی تابع در نقطه مذکور مشتق پذیر باشد باید مقادیر زیر با هم برابر باشند):

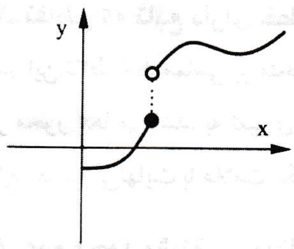
$$f'_+(x_0)=f'(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ مشتق راست

$$f'_-(x_0)=f'(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ مشتق چپ

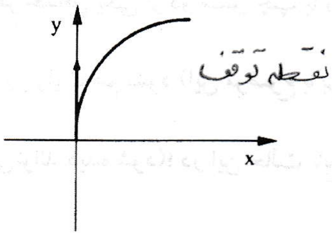
مقدار مشتق چپ (یا راست) شیب نیم‌مماس چپ (یا راست) را نشان می‌دهد.

دسته بندی نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق پذیر نمی‌باشد

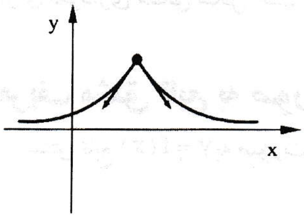
همان‌طوری‌که دیدیم تابع f در نقطه $x = a$ مشتق پذیر است هر‌گاه در این نقطه پیوسته بوده و حاصل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود (مشخص و متناهی) باشد. لذا برخی از حالاتی که تابع در یک نقطه مشتق پذیر نمی‌باشد عبارتند از:



۱ ـ نقاط ناپیوستگی تابع: از آنجا که شرط لازم برای وجود مشتق در یک نقطه پیوستگی تابع در آن نقطه می‌باشد؛ در نقاطی که تابع، پیوسته نمی‌باشد؛ قطعا، مشتق‌پذیر نیز نخواهد بود.



توجه: نقاط توقف یک تابع جاهایی است که تابع در آنجا فقط پیوستگی راست (یا چپ) داشته باشد و مشتق راست (چپ) در آنجا نامتناهی شود؛ به عنوان مثال، در توابعی به فرم $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ ریشه‌های ساده معادله $f(x)=0$ طول نقاط توقف منحنی هستند.



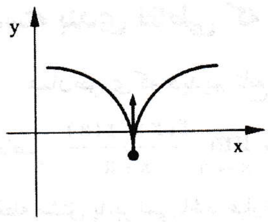
۲ـ نقاط زاویه‌دار: در نقاط زاویه دار مشتق چپ و راست هر کدام به تنهایی موجود و متناهی هستند؛ ولی، با هم مساوی نمی‌باشند.

تذکر: اگر در یک نقطه، یکی از مشتقات چپ و راست تابع، متناهی و مشتق دیگر آن نامتناهی شود؛ تابع در این نقطه، زاویه دار است.

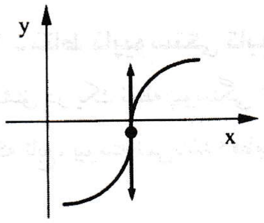
در چنین نقاطی خط مماسی بر نمودار تابع وجود ندارد و به تعبیری تابع در مجاورت این نقاط، خط مماس منحصر به فرد نخواهد داشت.

توجه: زاویه بین دو نیم مماس چپ و راست در نقطه زاویه‌دار $x=a$ از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\tan\theta=\left|\frac{f'_+(a)-f'_-(a)}{1+f'_+(a)f'_-(a)}\right|$$



۳ـ نقاط بازگشت: در این نقاط مشتق چپ و راست تابع هر دو بی‌نهایت ولی با علامت‌های مختلف می‌باشند و خط مماسی بر نمودار تابع در این نقاط قابل ترسیم نیست؛ البته، دو نیم‌مماس چپ و راست وجود دارد که دارای شیب‌های $+\infty, -\infty$ می‌باشند و بر هم منطبقند؛ یعنی، هر دو مماس عمود بر محور xها می‌باشند.

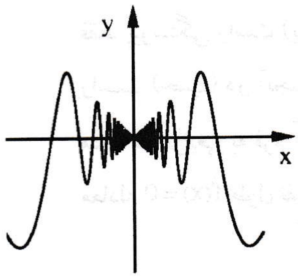


۴ـ نقاطی که تابع دارای خط مماس قائم است:

در این نقاط خط مماسی بر منحنی تابع قابل ترسیم است که عمود بر محور xها می‌باشد. به تعبیری در این نقاط مشتق چپ و راست تابع هر دو بی‌نهایت با علامت یکسان می‌باشند.

۵ـ عدم وجود مشتق بر مبناء تعریف:

اگر حداقل یکی از دو مشتق چپ یا راست در نقطه‌ای موجود نباشد و بی‌نهایت هم نشود (این موضوع با بررسی $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ می‌تواند دیده شود)؛ در این حالت تابع f در x_0 فاقد نیم‌مماس چپ یا راست می‌باشد. به عنوان مثال تابع $y=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ که دارای نموداری مطابق شکل است در $x=0$ چنین وضعیتی دارد.



تعریف مشتق تابع به صورت یک تابع

مشتق تابع $y=f(x)$ به صورت یک تابع از حد زیر مشخص می‌شود:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

(دقت کنید تمام قواعد مشتق‌گیری که روابط آن به زودی خواهد آمد، با توجه به این رابطه به‌دست آمده اند).

مشتق پذیری تابع در یک فاصله

تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ مشتق‌پذیر است؛ هرگاه، اولاً؛ f در کل فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد و ثانیاً؛ $f'(a^+)$ و $f'(b^-)$ موجود باشند.

تفاوت بین $f'(a)$ و $\lim_{x\to a} f'(x)$:

فرض کنیم تابع f در بازه (b,c) شامل a پیوسته و در $(b,c)-\{a\}$ مشتق متناهی یا نامتناهی داشته باشد. اگر $\lim_{x\to a} f'(x)$ موجود و متناهی یا نامتناهی باشد، آنگاه $f'(a)$ مشتق متناهی یا نامتناهی f نیز در a موجود و با آن برابر است؛ یعنی، با برقراری شرایط فوق:

$$\lim_{x\to a} f'(x) = f'(a)$$

بنابراین، وقتی هدف محاسبه $f'(a)$ می‌باشد مناسب نیست که $f'(x)$ را به‌دست آورده و $\lim_{x\to a} f'(x)$ را به عنوان $f'(a)$ بشناسیم.

نکته: تابع $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin^{\beta}\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ را که در آن β و α اعدادی مثبتند، در نظر بگیرید.

می‌توان نشان داد:

۱) این تابع همواره پیوسته است.

۲) اگر $\alpha>1$ باشد، تابع همواره مشتق پذیر بوده و مشتق آن در $x=0$ برابر صفر است.

۳) اگر $\alpha>2$ باشد، تابع همواره مشتق پذیر بوده و نیز مشتق تابع همه جا پیوسته است.

چند نکته درباره مشتق توابع شامل قدر مطلق

۱- تابع $f(x)=|p(x)|$ را که در آن $p(x)$ یک چند جمله‌ای دلخواه می‌باشد، در نظر بگیرید.

می‌توان ثابت کرد:

اولاً؛ f در تمام نقاط پیوسته است.

ثانیاً؛ f در تمام نقاط به جز ریشه‌های مرتبه اول معادله $p(x)=0$ مشتق پذیر است. (و در تمام ریشه‌های غیرساده معادله $p(x)=0$ حاصل مشتق تابع f برابر صفر خواهد بود).

نکته: معادله $P(x)=0$ را در نظر بگیرید.

اگر $P(\alpha)=0$ ولی $P'(\alpha)\neq 0$ باشد، $x=\alpha$ ریشه ساده (مرتبه اول) معادله $P(x)=0$ است.

اگر $P(\alpha)=0$ و $P'(\alpha)=0$ ولی $P''(\alpha)\neq 0$ باشد، $x=\alpha$ ریشه مرتبه دوم معادله $P(x)=0$ است.

تذکر: به‌طور کلی اگر $P(\alpha)=0$ و $P'(\alpha)=0$ و $\cdots$ و $P^{(n-1)}(\alpha)=0$ ولی $P^{(n)}(\alpha)\neq 0$ باشد، $x=\alpha$

ریشه مرتبه n ام معادله $P(x)=0$ است.

بنابراین؛ مثلاً، در تابع به فرم $f(x)=\left|(x^2-a^2)(x^2+2ax+a^2)(x^4+a^2x^2)\right|$ می‌توان گفت:

اولاً؛ f در تمام نقاط پیوسته است.

ثانیاً؛ چنانچه عبارت داخل قدر مطلق را برابر صفر قرار دهیم به‌دست می‌آید:

$$(x^2-a^2)(x^2+2ax+a^2)(x^4+a^2x^2)=0$$

$$\Rightarrow (x-a)(x+a)(x+a)^2x^2(x^2+a^2)=0$$

$$\Rightarrow (x-a)(x+a)^3x^2(x^2+a^2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-a=0 \Rightarrow x=a & \text{ریشه مرتبه اول} \\ (x+a)^3=0 \Rightarrow x=-a & \text{ریشه مرتبه سوم} \\ x^2=0 \Rightarrow x=0 & \text{ریشه مرتبه دوم} \\ x^2+a^2=0 & \text{غیر ممکن} \end{cases}$$

پس تابع در تمام نقاط به غیر از $x=a$ مشتق پذیر است.

۲ـ برای محاسبه مشتق چپ و یا راست توابع دارای قدر مطلق در یک نقطه خاص؛ مانند، x_0 کافی است، عبارات داخل قدر مطلق‌ها را تک تک تعیین علامت نموده و با توجه به اینکه کدام‌یک از مقادیر $f'(x_0^-)$ یا $f'(x_0^+)$ مورد نظر می‌باشد، تکلیف قدر مطلق‌ها را مشخص نموده (به تعبیری، تابع مورد نظر را به طور مناسب بدون علامت قدر مطلق بازنویسی کنیم) و سپس عمل مشتق‌گیری را انجام داده و مشتق یک‌طرفه مورد نیاز را محاسبه نماییم.

مثلا تابع $f(x)=\left|a^2-x^2\right|+\left|x-b\right|$ را با فرض $a>c>b>0$ در نظر بگیرید. برای محاسبه مقادیر $f'(a^+)$, $f'(a^-)$, $f'(b^+)$, $f'(b^-)$, $f'(c^+)$, $f'(c^-)$ با توجه به جدول تعیین علامت زیر داریم:

		$-a$		b		c		a	
a^2-x^2	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$x-b$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$

می‌توان نوشت:

$x=a^+$ برای $\rightarrow f(x)=-(a^2-x^2)+(x-b) \rightarrow f'(x)=2x+1 \rightarrow f'(a^+)=2a+1$

$x=a^-$ برای $\rightarrow f(x)=(a^2-x^2)+(x-b) \rightarrow f'(x)=-2x+1 \rightarrow f'(a^-)=-2a+1$

$x=b^+$ برای $\rightarrow f(x)=(a^2-x^2)+(x-b) \rightarrow f'(x)=-2x+1 \rightarrow f'(b^+)=-2b+1$

$x=b^-$ برای $\rightarrow f(x)=(a^2-x^2)-(x-b) \rightarrow f'(x)=-2x-1 \rightarrow f'(b^-)=-2b-1$

$x=c^-$ و c^+ برای $\rightarrow f(x)=(a^2-x^2)+(x-b) \rightarrow f'(x)=-2x+1 \rightarrow f'(c)=-2c+1$

چند نکته درباره مشتق توابع شامل جزء صحیح

۱ـ در توابعی به‌صورت $f(x)=[P(x)]$ تابع در $x=a$ هر نوع پیوستگی داشته باشد، همان نوع مشتق را داراست و به‌خصوص، مشتق این تابع در هر جایی که موجود باشد برابر صفر خواهد بود.

۲ـ در توابعی به‌صورت $f(x)=(x-a)^n[x]$ که در آن $n>0$ می‌باشد، تابع در $x=a$ پیوسته است. اگر $n>1$ باشد تابع در $x=a$ مشتق پذیر است.

قواعد اولیه مشتق‌گیری

چنانچه u، v و w توابعی از x و پارامترهای a، m و n اعداد ثابت باشند، قواعد مشتق‌گیری زیر برقرارند.

تابع	مشتق
a	0
au^m	$amu^{m-1}u'$
$u+v+w$	$u'+v'+w'$
uvw	$u'vw+uv'w+uvw'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$
$\sqrt[n]{u^m}$	$\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$
$\lvert u\rvert$	$\frac{uu'}{\lvert u\rvert}$

تابع	مشتق
e^u	$u'e^u$
a^u	$u'a^u \operatorname{Ln} a$
$\operatorname{Ln} u$	$\frac{u'}{u}$
$\log_a^u$	$\frac{u'}{u}\frac{1}{\ln a}$

تابع	مشتق	تابع	مشتق
$\sin^{-1}u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\sinh^{-1}u$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
$\cos^{-1}u$	$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\cosh^{-1}u$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$tg^{-1}u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$tgh^{-1}u$	$\frac{u'}{1-u^2}\quad \lvert u\rvert<1$
$\cot g^{-1}u$	$\frac{-u'}{1+u^2}$	$cotgh^{-1}u$	$\frac{u'}{1-u^2}\quad \lvert u\rvert>1$
$\sec^{-1}u$	$\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$	$sech^{-1}u$	$\frac{-u'}{\lvert u\rvert\sqrt{1-u^2}}\quad 0<u<1$
$\csc^{-1}u$	$\frac{-u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$	$csch^{-1}u$	$\frac{-u'}{\lvert u\rvert\sqrt{1+u^2}}\quad u\neq 0$

چند قاعده مشتق‌گیری مهم

الف) مشتق توابع به فرم $y=f(x)^{g(x)}$

در این گونه موارد برای محاسبه y' نخست از دو طرف رابطه موجود، لگاریتم نپرین می‌گیریم تا از وضعیت نمایی خلاص شویم و سپس از دو طرف عبارت به‌دست آمده مشتق‌گیری می‌کنیم؛ یعنی:

$$\ln y=\ln f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y=g(x)\cdot \ln f(x) \xrightarrow{\text{مشتق گیری}}$$

$$\frac{y'}{y}=g'(x).\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow\quad y'=\left(g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\cdot f(x)^{g(x)}$$

ب) مشتق‌گیری ضمنی

گاهی مواقع رابطه بین x و y به صورت صریح بیان نشده؛ بلکه، به فرم ضمنی با عبارت $F(x,y)=0$ توصیف گردیده است، در این گونه موارد می‌توان نشان داد که:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}\quad,\quad x'_y=\frac{dx}{dy}=-\frac{F'_y}{F'_x}$$

که در عبارت‌های فوق منظور از F'_x آن است که باید از $F(x,y)$ با فرض اینکه y عددی ثابت است نسبت به x مشتق‌گیری کنیم و منظور از F'_y آن است که باید از $F(x,y)$ با فرض اینکه x عددی ثابت است، نسبت به y مشتق‌گیری کنیم.

یک نکته در بحث مشتق‌گیری ضمنی

فرض کنید رابطه بین x و y به صورت ضمنی با رابطه $F(x,y)=0$ داده شده باشد. برای محاسبه y' , y'' و... می‌توان بدون استفاده از فرمول به صورت زیر عمل کرد.

نخست از دو طرف رابطه $F(x,y)=0$ نسبت به متغیر x مشتق‌گیری می‌کنیم و البته توجه داریم، در حین این کار y تابع بوده و لذا مشتق آن y' خواهد بود. بدین ترتیب در رابطه حاصل مخلوطی از y' و y و x نتیجه می‌شود که اگر بخواهیم می‌توانیم حاصل y' را به‌دست آوریم.

همچنین، اگر منظور، محاسبه y'' باشد از دو طرف رابطه حاصل در بحث فوق مجددا نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم و باز به خاطر داریم که y تابع بوده و لذا مشتق آن y' و مشتق y' همان y'' خواهد بود. بدین ترتیب در رابطه حاصل مخلوطی از y'' و y' و y و x نتیجه می‌شود که اگر بخواهیم می‌توانیم حاصل y'' را به‌دست آوریم.

ج) مشتق تابع مرکب

فرض کنید دو تابع g و f در دست باشند و داشته باشیم $y = fog(x)$ می‌توان نشان داد:

$$y' = g'(x)\cdot f'(g(x))$$

دقت داریم که در محاسبه $f'(g(x))$ نخست باید $f'(x)$ را به‌دست آورده و سپس به جای x آن $g(x)$ قرار دهیم.

د) مشتق‌گیری زنجیره‌ای (تعمیم قاعده مشتق تابع مرکب)

فرض کنید داشته باشیم:

$$y=f(u)\ ,\ u=g(t)\ ,\ t=h(p)\ ,\ p=w(x)$$

در چنین شرایطی طبیعی است y را می‌توان برحسب تنها یک متغیر به‌نام x بازنویسی کرد؛ ولی، اگر بخواهیم مستقیما y'_x را به‌دست آوریم؛ داریم:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}$$

هـ) مشتق‌گیری پارامتری

برخی مواقع معادله یک منحنی به صورت پارامتری و به فرم $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ بیان می‌شود، در این شرایط می‌توان نشان داد:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

همچنین، داریم:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g''(t)\cdot f'(t)-f''(t)g'(t)}{f'^2(t)}\cdot\frac{1}{f'(t)}$$

پس، به‌دست می آید:

$$y''=\frac{g''(t)\cdot f'(t)-f''(t)\cdot g'(t)}{f'^3(t)}$$

و) مشتق یک تابع نسبت به تابع دیگر

برای محاسبه مشتق تابع f نسبت به تابع g (که در حقیقت نسبت سرعت تغییرات تابع f به سرعت تغییرات تابع g را نشان می‌دهد) می‌توان نوشت:

$$\frac{df}{dg}=f'_g=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ز) مشتق تابع معکوس

در تابع معکوس‌پذیر $y=f(x)$ داریم:

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

به تعبیری دیگر، اگر $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$ داریم:

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

ح) مشتق‌گیری از انتگرال (قاعده لایپ نیتس)

فرض کنید داشته باشیم:

$$f(x)=\int_{p(x)}^{q(x)} h(t)\,dt$$

همان‌طوری‌که می‌دانیم، برای مشخص کردن تابع f لازم است نخست، تابع اولیه h را به‌دست آورده (اگر این تابع اولیه را $H(t)$ بنامیم) و سپس بنویسیم:

$$f(x)=H(t)\Big|_{p(x)}^{q(x)}=H(q(x))-H(p(x))$$

اما، در بسیاری مواقع محاسبه تابع اولیه h دشوار و یا اصولا غیر ممکن است. خوشبختانه محاسبه $f'(x)$ اصولا نیازی به محاسبه f (که نیازمند عمل انتگرال گیری است) نداشته و داریم:

$$f'(x)=q'(x)\cdot h(q(x))-p'(x)\cdot h(p(x))$$

مشتقات مراتب بالا

برای محاسبه مشتق مرتبه n ام تابع $y=f(x)$ که آن را با نماد $f^{(n)}(x)$ یا $\frac{d^ny}{dx^n}$ نشان می‌دهیم، یک قاعده کلی وجود ندارد؛ ولی، ممکن است با محاسبه عبارت‌های y' , y'' , y''' و... یک روال منطقی در این مشتقات ملاحظه شود و با استفاده از آن بتوان تکلیف $y^{(n)}$ را مشخص کرد.

چند نکته

۱ـ در هر تابع چند جمله‌ای؛ مانند، $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+k$:

$$f^{(n)}(x)=a\cdot n! \quad \text{و} \quad f^{(n+1)}(x)=f^{(n+2)}(x)=\cdots=0$$

۲ـ در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به راحتی به‌دست می‌آید:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-c)^{n-1}\cdot n!(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$$

۳ـ در تابع $f(x)=Lnx$ به‌دست می‌آید:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

۴ ـ می‌توان نشان داد:

$$f(x)=\sin ax \Rightarrow f^{(n)}(x)=a^n\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f(x)=\cos ax \Rightarrow f^{(n)}(x)=a^n\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$$

۵ ـ در توابعی به صورت $f(x)=u\cdot v$ که u و v دو تابع می‌باشند، می‌توان نشان داد که:

$$f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(n-i)}\cdot v^{(i)} \qquad \binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

این رابطه موقعی کاربرد مناسب دارد که $v(x)$ یک چند جمله‌ای از x و $u(x)$ یکی از انواع تابع $\left(\sin ax\,,\ \cos ax\,,\ e^{ax}\right)$ باشد.

۶ـ اگر مشتق n ام در یک تست مطرح باشد، معمولاً از تابع یک بار یا دو بار مشتق می‌گیریم و در جواب‌ها، به جای n عدد ۱ یا ۲ را قرار می‌دهیم و از روی آن گزینه صحیح را انتخاب می‌کنیم.

دیفرانسیل یک تابع

برای تابع $y=f(x)$ دیفرانسیل‌های از مراتب مختلف به صورت زیر تعریف می‌شوند:

دیفرانسیل مرتبه اول : $dy=f'(x)\cdot dx$

دیفرانسیل مرتبه دوم : $d^2y=f''(x)\cdot(dx)^2$

و در حالت کلی داریم:

دیفرانسیل مرتبه n ام : $d^ny=f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n$

توجه: مسائل این فصل به همراه مسائل کاربرد مشتق می آیند.