

# ریاضے عمومی ۲

میانترم اردیپہشت ۱۴۰۲

سوال + پاسخ تشریحی



دانشگاه سمنان

به نام خدای مهربانی ها

مدت امتحان: ۸۰ دقیقه

امتحان میانترم ریاضی عمومی ۲

نام و نام خانوادگی: .....

۴ اردیبهشت ۱۴۰۲

شماره دانشجویی: .....

۱. منحنی  $C$  با معادله پارامتری  $\vec{r}(t) = (2 + \sqrt{2} \cos t)\vec{i} + (1 - \sin t)\vec{j} + (3 + \sin t)\vec{k}$  مفروض است.

الف) آیا منحنی  $C$  مسطح است؟

ب) انحنا و معادله صفحه بوسان را در لحظه دلخواه  $t$  بدست آورید.

۲. تابع  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^{12} + 3y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  مفروض است.

الف) پیوستگی تابع را در مبدأ بررسی کنید.

ب) مطلوبیت محاسبه  $f_x(0, 0)$ .

۳. فرض کنید  $z = z(x, y)$  به صورت ضمنی توسط رابطه  $f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$  داده شده بطوریکه مشتقات جزئی  $f$  و  $z$  همگی

موجود و پیوسته باشند. مطلوبیت محاسبه

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$$

۴. مشتق جهتی تابع  $g(x, y, z) = x^y + y^z + z^x$  را در نقطه  $(1, 1, 1)$  و در جهت بردار  $\vec{curl} F$  بیابید که در آن

$$\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z + x)\vec{k}$$

۵. معادله صفحه قائم بر منحنی فصل مشترک کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  و صفحه  $x - 2y + z = 7$  را در نقطه  $(1, -2, 2)$  بدست آورید.

سرشد و سروزباید

$$\tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}'}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}$$

حل سوال ۱- قسمت الف) توابع برداری-تاب

$$\vec{r}(t) = (2 + \sqrt{2} \cos t) \vec{i} + (1 - \sin t) \vec{j} + (3 + \sin t) \vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{v}(t) = (-\sqrt{2} \sin t) \vec{i} + (-\cos t) \vec{j} + (\cos t) \vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{a}(t) = (-\sqrt{2} \cos t) \vec{i} + (\sin t) \vec{j} + (-\sin t) \vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{a}'(t) = (\sqrt{2} \sin t) \vec{i} + (\cos t) \vec{j} + (-\cos t) \vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{2} \sin t & -\cos t & \cos t \\ -\sqrt{2} \cos t & \sin t & -\sin t \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{v} \times \vec{a} = (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \rightarrow |\vec{v} \times \vec{a}| = 2$$

$$\tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}'}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2} \rightarrow \tau = \frac{(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} \sin t, \cos t, -\cos t)}{2^2} = 0$$

تاب منفی صفر است بنابراین مسطح است.  
(در یک صفحه قرار دارد)

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}$$

حل سوال ۱- قسمت ب) توابع برداری-انفنا و صفحه بوسان

$$\rightarrow \vec{v}(t) = (-\sqrt{2} \sin t) \vec{i} + (-\cos t) \vec{j} + (\cos t) \vec{k} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2}$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} \rightarrow \kappa = \frac{2}{\sqrt{2}^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \rightarrow |\vec{v} \times \vec{a}| = 2$$

بررداری های مماس و قائم اصلی در یک صفحه قرار دارند و بردار قائم فرعی همان بردار نرمال صفحه شامل آن دو بردار است که به صفحه مماس یا بوسان معروف است.

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} \rightarrow \vec{B} = \frac{(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})}{2}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \rightarrow 0(x - x_0) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y - y_0) - \frac{\sqrt{2}}{2}(z - z_0) = 0 \rightarrow \underline{y + z = y_0 + z_0}$$

$$\frac{y_0 = 1 - \sin t}{z_0 = 3 + \sin t} \rightarrow \underline{y + z = 4}$$

حل سوال ۲- قسمت الف و ب) توابع چندمتغیره-درومشتقات جزئی

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{2x^{12} + 3y^4}$$

$$\xrightarrow{y=mx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 (mx^3)^3}{2x^{12} + 3(mx^3)^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^3 x^{12}}{2x^{12} + 3m^4 x^{12}} = \frac{m^3}{2 + 3m^4}$$

فاصل وابسته به  $m$  است پس حد ندارد و نهایتا در مبدا ناپیوسته است.

$$\boxed{1} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^{12} + 0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

حل سوال ۳) توابع چندمتغیره- ترکیبی مشتق ضمنی و زنجیره ای

$$\begin{cases} u = x + \frac{z}{y} \\ v = y + \frac{z}{x} \end{cases} \rightarrow F(u, v) = 0 \rightarrow F \begin{cases} u \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \\ v \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} F(u, v) = \frac{\partial}{\partial x} 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} \left( 1 + \frac{z}{y} \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \left( \frac{xz}{x^2} - \frac{z}{x^2} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = - \frac{\frac{(xz/x - z)}{x^2}}{\left( 1 + \frac{z}{y} \right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} F(u, v) = \frac{\partial}{\partial y} 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} \left( \frac{yz}{y^2} - \frac{z}{y^2} \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \left( 1 + \frac{z}{x} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = - \frac{\left( 1 + \frac{z}{x} \right)}{\left( \frac{yz}{y^2} - \frac{z}{y^2} \right)}$$

ادامه حل سوال ۳) توابع چندمتغیره- ترکیبی مشتق ضمنی و زنجیره ای

$$\rightarrow -\frac{\left(\frac{xz_x - z}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{z_x}{y}\right)} = -\frac{\left(1 + \frac{z_y}{x}\right)}{\left(\frac{yz_y - z}{y^2}\right)} \rightarrow \left(\frac{xz_x - z}{x^2}\right)\left(\frac{yz_y - z}{y^2}\right) = \left(1 + \frac{z_y}{x}\right)\left(1 + \frac{z_x}{y}\right)$$

$$\xrightarrow{\times x^2 y^2} (xz_x - z)(yz_y - z) = xy(x + z_y)(y + z_x)$$

$$\rightarrow xyz_x z_y - z x z_x - z y z_y + z^2 = x^2 y^2 + x^2 y z_x + x y^2 z_y + x y z_y z_x$$

$$\rightarrow -z(xz_x + yz_y) + z^2 = x^2 y^2 + xy(xz_x + yz_y)$$

$$\rightarrow (xz_x + yz_y)(xy + z) = z^2 - x^2 y^2$$

$$\rightarrow (xz_x + yz_y)(xy + z) = (z - xy)(z + xy) \rightarrow \underline{xz_x + yz_y = z - xy}$$

حل سوال ۴) توابع چندمتغیره- مشتق سویی (بهتی)

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

$$D_u g(x, y, z) = \overrightarrow{\nabla g} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{\text{curl} \vec{F}}{|\text{curl} \vec{F}|} = \frac{(-1, -1, -1)}{\sqrt{3}} \rightarrow \vec{u} = \left( \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\vec{\nabla}_g = \left( \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) \rightarrow \overrightarrow{\nabla g} = (yx^{y-1} + z^x \ln z, x^y \ln x + zy^{z-1}, y^z \ln y + xz^{x-1})$$

$$\xrightarrow{(1,1,1)} \overrightarrow{\nabla g} = (1, 1, 1) \xrightarrow{D_u g(x, y, z) = \overrightarrow{\nabla g} \cdot \vec{u}} D = (1, 1, 1) \cdot \left( \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$



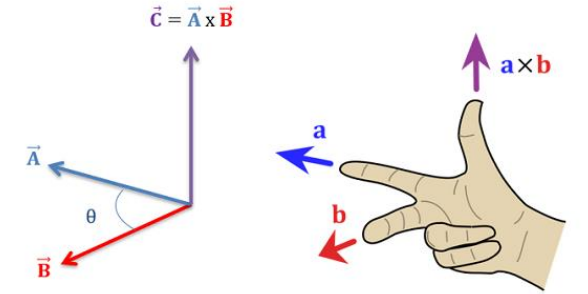
حل سوال ۵) توابع چندمتغیره-گرادیان و فظ و صفحه

$$f_1(x, y, z) = 0 \rightarrow f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \rightarrow \nabla f_1 = (2x, 2y, 2z) \xrightarrow{(1, -2, 2)} \nabla f_1 = (2, -4, 4)$$

$$f_2(x, y, z) = 0 \rightarrow f_2 = x - 2y + z = 7 \rightarrow \nabla f_2 = (1, -2, 1)$$

$$\vec{u} = (2, -4, 4) \times (1, -2, 1) = (4, 2, 0)$$

$$u = \nabla f_1 \times \nabla f_2$$



$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \rightarrow 4(x - 1) + 2(y + 2) + 0(z - 2) = 0 \rightarrow \underline{4x + 2y = 0}$$



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

# معادلات

## دیفرانسیل

تالیف: ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فصل ۱: معادلات مرتبه اول

فصل ۲: معادلات مرتبه دوم و بالاتر

فصل ۳: حل معادلات دیفرانسیل با سری

فصل ۴: تبدیل لاپلاس

فصل ۵: حل دستگاه معادلات دیفرانسیل



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

# ۲

## ریاضیات عمومی

تالیف: ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فصل ۱: توابع برداری

فصل ۲: توابع چند متغیره

فصل ۳: انتگرال ۲ گانه

فصل ۴: انتگرال ۳ گانه

فصل ۵: انتگرال روی خم

فصل ۶: انتگرال روی سطح



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

# ۱

## ریاضیات عمومی

تالیف: ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فصل ۱: اعداد مختلط

فصل ۲: حد و پیوستگی

فصل ۳: مشتق

فصل ۴: انتگرال

فصل ۵: کاربرد انتگرال

فصل ۶: سری

فصل ۷: پیوست

برای دریافت جزوات و ویدئوهای اصلی کلاس و همچنین نمونه سوالات امتحانی به سایت [EbiMath.com](http://EbiMath.com) و یا کانال تلگرامی [@EbiMath](https://t.me/EbiMath)

مراجعه کنید و برای دیدن فیلم های کوتاه از بخش های مختلف ریاضیات، صفحه اینستاگرام [EbiMath8020](https://www.instagram.com/EbiMath8020) را دنبال کنید.