آزمون مدارس برتر ایران

به ابتکار دبیرستان انرژی اتمی ایران

پرسش‌نامه

آزمون ۱

المپیاد

۲۹ مهر ۱۳۹۰

فیزیک

مدت آزمون: ۴ ساعت

تذکرات:

استفاده از ماشین حساب مجاز <u>نیست</u>.

۱- گزینه ۱ صحیح است.

با فشرده شدن فنر به جرم M نیرو به سمت بالا وارد می‌شود و شتاب جرم M را صفر و سپس منفی می‌کند (یعنی به سمت بالا) تا وقتی جرم M شتاب مثبت و به سمت پایین دارد طناب در حال کشش و جرم m نیز همان سرعت و شتاب را دارد ولی وقتی شتاب جرم M منفی و رو به بالا شود طناب شل شده و شتاب m صفر و با سرعت ماکزیمم حرکت می‌کند.

فرض می‌کنیم در حالی که شتاب جرم M صفر می‌شود فنر به اندازه‌ی x فشرده می‌شود.

طبق ۱ و ۲

$$Mg\sin\theta - kx - T = ۰ \quad (۱)$$
$$T = ۰ \quad (۲)$$
$$x = \frac{Mg\sin\theta}{k} \quad (۳)$$

طبق بقای انرژی داریم:

$$mg(h+x)\sin\theta = \frac{۱}{۲}(m+M)V_{max}^{۲} + \frac{۱}{۲}kx^{۲}$$

در نتیجه ۳ و ۴

$$V_{max}^{۲} = \frac{Mg\sin\theta}{m+M}\left(۲h + \frac{Mg\sin\theta}{k}\right)$$
$$V_{max} = \left[\frac{Mg\sin\theta}{m+M}\left(۲h + \frac{Mg\sin\theta}{k}\right)\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

۲- گزینه ۲ صحیح است.

اگر فاصله جسم از عدسی را (x) و فاصله تصویر از عدسی را (x') در نظر بگیریم. می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x'} = \frac{۱}{f}$$
$$x' = \frac{fx}{x-f} \quad (۱)$$

از رابطه اخیر نسبت به زمان مشتق می‌گیریم تا رابطه بین سرعت جسم در امتداد محور نوری عدسی (v_x) و سرعت تصویر در همین امتداد (v'_x) مشخص گردد.

$$\frac{dx'}{dt} = f\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{x-f}\right)\right)$$
$$v'_x = (v_x)\left(\frac{(x-f)f - f_x}{(x-f)^{۲}}\right) \quad (۲)$$

هنگامی‌که جسم در فاصله $(x = ۲f)$ از عدسی قرار دارد با استفاده از رابطه اخیر می‌توان مولفه سرعت تصویر در امتداد محور نوری (v'_x) را بدست آورد.

$$v'_x = (v_x)\left(\frac{(۲f-f)f - f(۲f)}{(۲f-f)^{۲}}\right) = v_x \quad (۳)$$

مولفه سرعت جسم و تصویر در امتداد عمود بر محور نوری را (v_y) و (v'_y) می‌نامیم اگر فاصله جسم و تصویر از محور نوری به ترتیب (y) و (y') باشد، به کمک تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت.

$$-\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} \quad (۴)$$

از رابطه فوق نسبت به زمان مشتق می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$v'_y = \frac{-f}{x-f}(v_y) \quad (۵)$$

هنگامی که جسم در فاصله $(x = ۲f)$ از عدسی قرار دارد، از رابطه اخیر نتیجه می‌گیریم.

$$v'_y = -(v_y) \quad (۶)$$

بدین ترتیب بردار سرعت تصویر هنگامی‌که جسم در فاصله $(x = ۲f)$ از عدسی قرار دارد، از روابط ۳ و ۶ بدست خواهد آمد.

$\overrightarrow{v'} = (v_x)\hat{\imath} - (v_y)\hat{\jmath} \quad (۷)$

۳- گزینه ۳ صحیح است.

۴- گزینه ۲ صحیح است.

۵- گزینه ۳ صحیح است.

۶- گزینه ۳ صحیح است.

۷- گزینه ۱ صحیح است.

علاوه بر فشار اتمسفر، نیتروژن داخل حباب به وسیله‌ی فشار ناشی از کشش سطحی$\Delta p = \frac{۸\sigma}{d}$ فشرده می‌شود کهd در این‌جا، قطر حباب است. این رابطه خیلی راحت حاصل می‌شود. حباب را به وسیله صفحه‌ای که از مرکز کره می‌گذرد، به دو نیم‌کره تقسیم می‌کنیم. حالا تعادل را برای این دو نیم‌کره در نظر می‌گیریم. اگر فشار اضافی داخل حباب$(p - p_۰)$ برابرΔp باشد، دو نیم‌کره با نیروی$\frac{\Delta P\pi d^۲}{۴}$ یک‌دیگر را دفع می‌کنند. اما علاوه بر این، دو نیم‌کره با کشش سطحی صابون جذب می‌شود که در طول محیط دایرهπd اعمال می‌شود. این نیرو برابر است با $۲\sigma\pi d$(ضریب ۲ برای این ظاهر می‌شود که حباب صابون دو سطح دارد سطح داخلی و سطح خارجی) با مساوی قرار دادن این نیروها داریم:

$$\frac{\Delta P\pi d^۲}{۴} = ۲\sigma\pi d \Longrightarrow \Delta P = \frac{۸\sigma}{d}$$

حباب وقتیشناور می‌شود که نیروی ارشمیدس بزرگ‌تر یا برابر با وزن نیتروژن داخل حباب شود، یعنی:

$$m_N = p_a \frac{\pi d^۲}{۶} = m_a$$

$$p_v = \frac{m}{M}RT \Longrightarrow m_N = \frac{M_N(P_۰ + \Delta P)\pi d^۲}{۶RT} \Longrightarrow p_a \times \frac{\pi d^۲}{۶} = \frac{M_a P_۰ \pi d^۲}{۶RT}$$

برای این‌که نیروی ارشمیدس از وزن بیش‌تر باشد:

$$\frac{M_a P_۰ \pi d^۳}{۶RT} \geq \frac{M_N(P_۰ + \Delta P)\pi d^۳}{۶RT} \Longrightarrow d \geq \frac{۸\sigma M_N}{P_۰(M_a - M_N)} \equiv ۱۰^{-۱} m$$

۸- گزینه ۲ صحیح است.

۹- گزینه ۴ صحیح است.

چون ماشین گاز کارنو برگشت پذیر است، طبق قانون دوم نباید نتایج با هم تفاوت داشته باشند. مثلاً اگر $\overline{T}_۱ > \overline{T}_۲$ می‌توان با معکوس کردن روش ۱ و سپس اعمال روش ۲، از دمای$\overline{T}_۱$ و$W_۱$ به دمای $\overline{T}_۲$ و$W_۲$ رسید. و این معادل این است که اختلاف$W_۱$ و$W_۲$ را که به صورت گرما درون اجسام ذخیره بوده، تماماً به کار تبدیل کرده‌ایم.

۱۰- گزینه ۱ صحیح است.

تعیین رابطه برد پرتابه بر روی سطح‌شیب‌دار(R) و پیدا کردن بیشینه آن(R_{max}) به کمک مشتق طولانی بنظر می‌رسد. لذا از روش تحلیل ابعادی استفاده می‌کنیم. ابتدا باید عواملی‌که بر برد پرتابه مؤثرند در نظر بگیریم که عبارتند از سرعت اولیه گلوله$(v_۱)$ ، شتاب جاذبه(g) و سرعت در آستانه برخورد$(v_۲)$. به رابطه ابعادی زیر، توجه کنید.

$$R \sim (v_۱)^a (v_۲)^b (g^c) \qquad (۱)$$

دیمانسیون سرعت$(LT^{-۱})$ و دیمانسیون شتاب$(LT^{-۲})$ می‌باشد.

با جایگذاری دیمانسیون‌ها در رابطه (۱)، مقادیر $(c), (b), (a)$ بدست می‌آیند.

$$R \sim (LT^{-۱})^{a+b}(LT^{-۲})^c \qquad (۲)$$
$$R \sim (L^{a+b+c})(T^{-a-b-۲c}) \qquad (۳)$$

(R)کمیتی از جنس طول است و به زمان وابسته نیست. پس توان(T) در رابطه اخیر برابر با صفر است.

$$\begin{cases} -a - b - ۲c = ۰ & (۴) \\ a + b + c = ۱ & (۵) \end{cases}$$

پس: از روابط ۴ و ۵ می‌توان نتیجه گرفت:

$$a = b = ۱ \qquad c = -۱ \qquad (۶)$$

بدین ترتیب رابطه ابعادی۱ مشخص می‌گردد.

$$R \sim \frac{v_۱ v_۲}{g} \qquad (۷)$$

حال با در نظر گرفتن یک حالت خاص، تناسب فوق را به رابطه تبدیل می‌کنیم.
حالت$(\alpha = ۰)$ را در نظر بگیرید. آنگاه: در این‌صورت$(v_۱ = v_۲)$ خواهد بود، پس

$$R = v_۰^۲ \qquad (۸)$$

از رابطه اخیر می‌توان نتیجه گرفت که این ضریب ثابت برابر با یک است. پس از رابطه(۷)، بیشینه برد پرتابه بدست می‌آید:

$$R_{max} = \frac{v_۱ v_۲}{g} \qquad (۹)$$

۱۱- گزینه ۲ صحیح است.

قسمتی از انرژی پتانسیل گرانشی کره هنگامی‌که به نقطه‌ی O می‌رسد، به انرژی جنبشی دورانی کره تبدیل شده است. کره در مسیر بدون اصطکاک، سرعت زاویه‌ای و در نتیجه انرژی جنبشی دورانی خود را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین هنگامی‌که کره به بالاترین نقطه خود در مسیر بدون اصطکاک می‌رسد، در حال چرخش بوده پس در ارتفاعی پایین‌تر از ارتفاع اولیه، ساکن می‌شود.

۱۲- گزینه ۴ صحیح است.

تنها نیروی وارد بر زمین نیروی گرانشی از طرف خورشید است که شتاب جانب به مرکز زمین را تأمین می‌کند:

$$F = G\frac{M_s m_e}{L^۲} = m_e a_r$$
$$a_r = \omega^۲ L = \frac{۴\pi^۲}{T^۲} \times L$$

بنابراین می‌توان گفت:

$$G\frac{M_s m_e}{L^۲} = m_e \times \frac{۴\pi^۲}{T^۲} \times L$$

اندازه‌ی شتاب ثقل g را نیز می‌توان به صورت رابطه‌ی رو به رو نوشت:

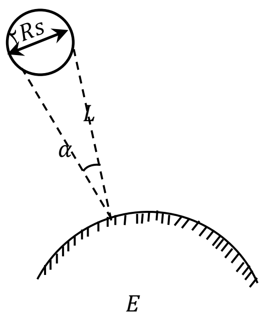
$$g = G\frac{m_e}{R_e^۲}$$

بنابراین:

$$M_s \times g = \frac{R_e^۲}{L^۲} = m_e \times \frac{۴\pi^۲}{T^۲} \times L$$
$$\Longrightarrow \frac{m_e}{M_s} = \frac{g R_e^۳ T^۲}{۴\pi^۲ L^۳} \qquad (۱)$$

با فرض کروی بودن زمین و خورشید می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت.

$$m_e = \frac{۴}{۳}\pi R_e^۳ \times p_e$$
$$M_s = \frac{۴}{۳}\pi R_s^۳ \times p_s$$



از معادله‌ی (۱) و با توجه به روابط بالا خواهیم داشت.

$$\frac{p_e}{p_s} = \frac{g R_e^۳ T^۲}{۴\pi^۲ L^۳ R_e}$$

حال باید R_sرا بر حسب L و α نوشت. با توجه به شکل زیر می‌توان گفت.

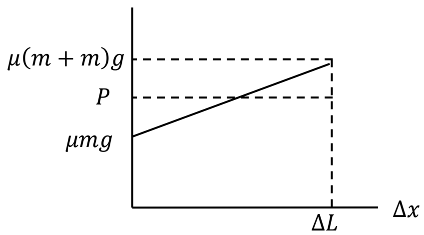
$$R_s = \frac{L\alpha}{۲}$$

با جایگذاری مقادیر داده شده در مسئله نسبت چگالی‌ها برابر است با:

$$\frac{p_e}{p_s} = \frac{g\alpha^۳ T^۲}{۳۲\pi^۲ R_e} = ۴/۴$$

که نزدیک‌ترین گزینه به جواب به دست آمده گزینه‌ی(۳) می‌باشد.

۱۳- گزینه ۲ صحیح است.



تغییرات نیروی متغیر F بر حسب جابه‌جایی جرمی که به آن نیرو وارد می‌شود(Δx) به صورت زیر است.

بنابراین نیروی متغیر F از μmg شروع می‌شود تا به مقدار $۲\mu mg$ برسد.

مطابق نمودار کار نیروی F برابر مساحت زیر نمودار است. حال اگر نیروی ثابت P را درست بین $۲\mu mg$ و μmg درنظر بگیریم آن‌گاه کار نیروی P برابر با کار نیروی F است. بنابراین نیروی ثابت P برابر است با:

$$P = \frac{۲\mu mg + \mu mg}{۲} = \frac{۳}{۲}\mu mg$$

باید توجه داشت که با وارد کردن نیروی $\frac{۳\mu mg}{۲}$ ابتدا جسم ۱ به حرکت می‌افتد و برای حرکت دادن جسم دوم از آن‌جا که با حرکت جسم ۱ فنر کشیده می‌شود نیروی فنر نیز برای ؟ اصطکاک جسم دوم مؤثر خواهد بود. لذا لزوماً اندازه نیروی(P) از مجموع اصطکاک دو جسم$(۲\mu mg)$ برای حرکت مجموعه نباید بیش‌تر باشد.

۱۴- گزینه ۳ صحیح است.

از تحلیل ابعادی استفاده می‌کنیم.دیمانسیون نیرو برابر است با:$(MLt^{-۲})$

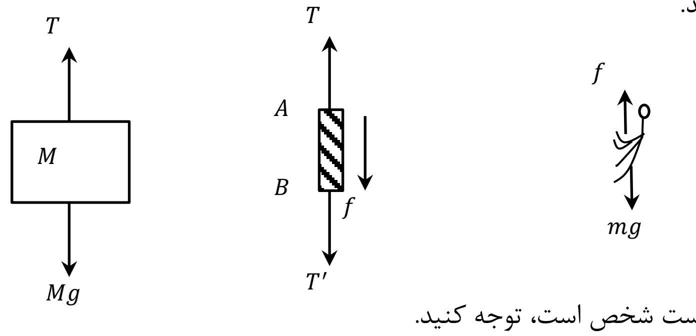
(M)دیمانسیون جرم،(L) به دیمانسیون طول و (T) دیمانسیون زمان است.

ولی باید به این نکته توجه داشت که نیروی(F) به عامل دیگری نیز وابسته است. هر چقدر تراکم ذرات (مولکول‌های) بیشتر باشد، تعداد برخورد آن‌ها با گلوله نیز بیشتر و در نتیجه نیرو نیز بیشتر خواهد شد. فرض می‌کنیم نیرو با(p^{γ}) متناسب است، (p)چگالی هوا می‌باشد.پس خواهیم داشت:

$$F \sim (R^{\alpha})(V^{\beta})(p^{\gamma})$$
$$\Longrightarrow (M)(L)(T^{-۲}) = (L)^{\alpha}\left(\frac{L}{T}\right)^{\beta}\left(\frac{M}{L^{۳}}\right)^{\gamma}$$
$$\Longrightarrow (M)(L)(T^{-۲}) = \left(L^{(\alpha+\beta-۳\gamma)}\right)\left(T^{-\beta}\right)(M^{\gamma})$$
$$\Longrightarrow \gamma = ۱ \ , \ \beta = ۲$$
$$\alpha + \beta - ۳\gamma = ۱ \Longrightarrow \alpha = ۱ + ۳\gamma - \beta = ۲$$
$$\Longrightarrow \alpha = \beta = ۲$$

۱۵- گزینه ۳ صحیح است

مشخص به کمک اصطکاک، نیروی(f) را به طناب وارد می‌کند. واکنش این نیرو، همانطورکه در شکل زیر به نمایش درآمده است، باعث شتاب گرفتن شخص رو به بالا خواهد شد.



به نیروهای وارد برطناب(AB) که در دست شخص است، توجه کنید.

وارد کردن(f) نیروی توسط شخص باعث ایجاد کشش(T) در نقطه(A) می‌شود. از آنجا که قسمت پایینی طناب آزاد است، کششی در نقطه(B) وجود نخواهد داشت. برای این قسمت از طناب قانون دوم نیوتون بصورت زیر است:

$$\sum F = T - f - T' = (M_{AB})(a)$$

طناب بدون جرم است، پس:

$$M_{AB} = ۰$$
$$T = f + T'$$

(T')کشش در نقطه(B) است. از معادله اخیر، کشش در قسمت بالایی طناب(T) بدست می‌آید که به جرم(M) نیز همین نیرو وارد می‌گردد.

$$T' = T_B = 0$$
$$T = f$$

حال برای شخص و جرم(M) قانون دوم نیوتون را بصورت زیر می‌نویسیم.(جهت مثبت رو به بالا فرض شده است)

$$\text{شخص} \sum F = f - mg = ma$$
$$(M)\text{جرم} \sum F = T - Mg = Ma'$$

(a')شتاب جعبه(M) است. از ۲ معادله اخیر می‌توان نتیجه گرفت:

$$f = m(g+a)$$
$$a' = \frac{T}{M} - g = \frac{f}{M} - g = \frac{m(g+a)}{M} - g$$

بدین ترتیب شتاب برابر می‌شود با:

$$a' = g - \frac{m}{M}(g+a)$$

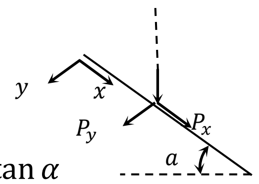
۱۶- گزینه ۳ صحیح است

چون $\mu_\circ = \tan\alpha$ $(mg\sin\alpha = (f_s)_{max} = \mu mg\cos\alpha)$

می‌توان گفت جعبه در آستانه‌ی لغزش قرار دارد. جسم هنگام برخورد با جعبه در مدت زمانdt به جعبه نیرو وارد می‌کند.

اگر سرعت جسم هنگام رسیدن به جعبهV باشد خواهیم داشت:

$$p_x = m(V\sin\alpha) = F_x dt$$
$$p_y = m(V\cos\alpha) = F_y dt$$



از رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\frac{F_x}{F_y} = \tan\alpha$$

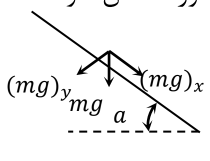
قبل از جسم با جعبه، در حال سکون بوده است. و با توجه به مؤلفه‌های وزن در دو راستایx وy داریم:

$$\frac{(mg)_x}{(mg)_y} = \frac{mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} = \tan\alpha$$

که $(mg)_x$و$(mg)_y$ مؤلفه‌های وزن در راستاهای x وy هستند.

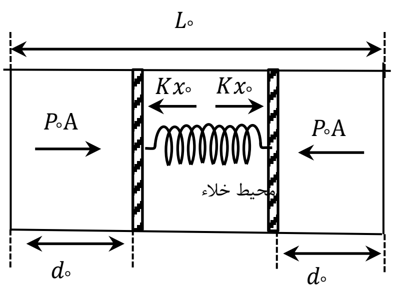
در هنگام برخورد از آن‌جا که$\frac{F_x}{F_y} = \tan\alpha$ می‌توان فرض نمود به اندازه‌ی نیروی$F = \frac{dp}{dt} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ به وزن جسم افزوده می‌شود.

اگر$\mu = \tan\alpha$ باشد، هر جسمی به ازای هر وزنی بر سطح شیب‌دار در حال سکون و در آستانه‌ی لغزش قرار می‌گیرد، بنابراین در این مسئله نیز برخورد جسم و افزایش نیروی وزن جعبه، تأثیری بر تعادل جعبه نخواهد داشت. لذا جعبه بعد از برخورد ساکن خواهد ماند.



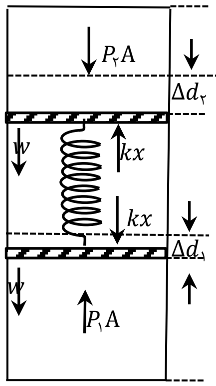
۱۷- گزینه ۴ صحیح است.

اگر فشار محبوس بین هر یک از پیستون‌ها و محفظه را در حالت اولیه$P_\circ$ بگیریم و تغییر طول اولیه فنر را$x_\circ$ فرض کنیم، داریم:



$$x_\circ = 2d_\circ$$
$$P_\circ A = kx_\circ$$
$$P_\circ A d_\circ = kx_\circ d_\circ$$
$$nRT = k\frac{x_\circ^2}{2}$$
$$\Longrightarrow x_\circ^2 = \frac{2nRT}{k}$$

وقتی استوانه را به صورت قائم بر روی زمین قرار می‌دهیم، قانون دوم نیوتون برای پیستون بالا و پایین در حالت تعادل چنین است:



$$P_2A + W = kx \longrightarrow P_2 = \frac{kx-W}{A}$$

$$kx + W = P_1A \longrightarrow P_1 = \frac{kx+W}{A}$$

$$\Delta d_2 - \Delta d_1 = x - x_0$$

هم‌چنین قانون گازها را برای گازهای محبوس در قسمت بالایی و پایینی استوانه می‌نویسیم.

$$P_0Ad_0 = P_2A(d_0 + \Delta d_2) \Longrightarrow d_0 + \Delta d_2 = \frac{P_0d_0}{p_2}$$

$$P_0Ad_0 = P_1A(d_0 - \Delta d_1) \Longrightarrow d_0 - \Delta d_1 = \frac{p_0d_0}{P_1}$$

$$\frac{P_0d_0}{P_1} + \frac{P_0d_0}{P_2} = 2d_0 + \Delta d_2 - \Delta d_1 = x_0 + x - x_0$$

$$P_0d_0\left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}\right) = x$$

$$P_0d_0\left(\frac{A}{kx+W} + \frac{A}{kx-W}\right) = x$$

$$P_0d_0A\left(\frac{2kx}{(kx)^2 - W^2}\right) = x$$

$$2P_0d_0Ak = k^2x^2 - W^2$$

$$x^2 = \frac{2P_0d_0Ak + W^2}{k^2}$$

$$P_0V_0 = nRT$$

$$P_0Ad_0 = nRT$$

$$x^2 = \frac{2nRTk + W^2}{k^2}$$

$$U_g = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{2nRTk + W^2}{2k} = nRT + \frac{W^2}{2k}$$

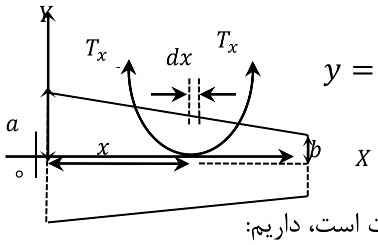
$$U_{g_0} = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{2nRT}{k}\right) = nRT$$

$$\eta = \frac{U_g - U_{g_0}}{U_{g_0}} = \frac{U_g}{U_{g_0}} - 1 = 1 + \frac{W^2}{2n} - 1 \qquad \eta = \frac{W^2}{2nRkT}$$

۱۸- گزینه ۲ صحیح است.

اگر یک لایه نازک به ضخامت dx از مخروط را در نظر بگیریم و فاصله‌ی این لایه از مبدأ مختصات را با x نشان دهیم، سطح مقطع لایه به صورت زیر محاسبه می‌شود. معادله‌ی خط مولد بالایی مخروط به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y = f(0) = a$$
$$y = f(L) = b$$



$$y = f(x) = \alpha x + \beta \Longrightarrow \begin{cases} \beta = f(0) = a \\ \alpha L + \beta = f(L) = b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{b-a}{L} \\ \beta = a \end{cases} \Longrightarrow y = \left(\frac{b-a}{L}\right)x + a$$

با توجه به این‌که در حالت تعادل گرمایی، توان عبوری از هر لایه در نظر گرفته شده به ضخامت ثابت است، داریم:

$$\frac{dQ}{dt} = -KA_x\frac{dT}{dx}$$

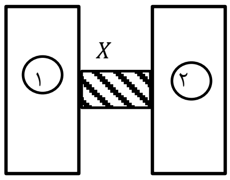
A_x مساحت مقطع این لایه می‌باشد و اگر لایه‌ی مورد بحث در فاصله از مبدأ مختصات باشد، داریم:

$$A_x = \pi y^2 = \pi \left[\left(\frac{b-a}{L}\right)x + a\right]^2$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -k\pi \frac{dT}{dx} \quad \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{-\frac{dQ}{dt}}{k\pi\left[\left(\frac{b-a}{L}\right)x+a\right]^2}$$

با توجه به این‌که $\frac{dQ}{dt}$ و k و a و b مقادیر ثابتی هستند،
اندازه‌ی شیب تغییرات دمایی در نمودار $T-x$ که برابر $\frac{dT}{dx}$ می‌باشد،
با افزایش x کاهش می‌یابد، پس نمودار گزینه‌ی "۲" درست است.

۱۹- گزینه ۴ صحیح است.



(آزمایش ۱)

آزمایش اول: توان عبوری از میله‌ی X برابر است با:

$$P_1 = k_X \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{L} A$$

که A سطح مقطع میله، $T_1 \theta_1$ دمای جوش آب، θ_2 دمای ذوب یخ و k_X ضریب رسانش میله‌ی X است. با توجه به این که در صورت پرسش گفته شده است "دمای آب‌جوش ثابت است." θ_1 ثابت است. هم‌چنین تا زمانی که قالب یخ و مخلوط آب و یخ کاملاً ذوب نشده است، دمای محفظه‌ی (θ_2) نیز ثابت است. بنابراین P_1 ثابت است.

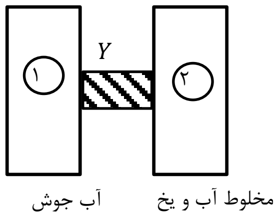
$$P = \frac{Q_1}{t_1}$$

Q_1 مقدار گرمایی است که قالب یخ را در مدت t_1 ذوب می‌کند. اگر گرمای ویژه ذوب یخ برابر L_f باشد، داریم:

$$Q_1 = mL_f$$
$$t_1 = \frac{mL_f}{P_1} = \frac{mL_f L}{k_X(\theta_1 - \theta_2)A}$$

آزمایش دوم: توان عبوری از میله‌ی Y برابر است با:

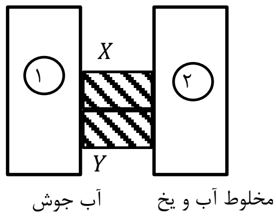
$$P_2 = k_Y \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{L} A \qquad P_2 = \frac{Q_2}{t_2}$$
$$Q_2 = mL_f$$
$$t_2 = \frac{mL_f}{P_2} = \frac{mL_f L}{k_X(\theta_1 - \theta_2)A}$$
$$P = P_X + P_Y$$
$$P = k_X \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{L} A + k_Y \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{L} A$$
$$P = \frac{Q}{t} = \frac{mL_f}{t}$$



(آزمایش ۲)

آزمایش ۳:

$$\frac{mL_f}{t} = \frac{k_X(\theta_1 - \theta_2)A}{L} + k_Y \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{L} A$$
$$\frac{mL_f}{t} = \frac{mL_f}{t_1} + \frac{mL_f}{t_2} \Longrightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$$
$$t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{20 \times 60}{20 + 60} = 15min$$

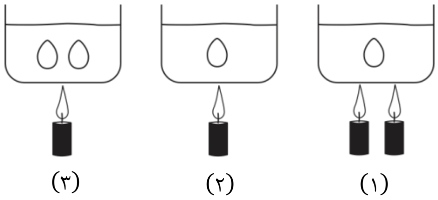


(آزمایش ۳)

۲۰- گزینه ۲ صحیح است.

چون دمای تخم‌مرغ‌ها پایین‌تر از دمای جوش آب است، به محض انداختن آن‌ها داخل ظرف‌ها، مقداری از گرمای آب هر یک از ظرف‌ها گرفته می‌شود تا تخم‌مرغ‌های درون ظرف‌ها با آب داخل آن‌ها هم‌دما شوند. به این ترتیب، دمای مجموعه‌ی تخم‌مرغ‌ها و آب هر یک از ظرف‌ها ، پایین‌تر از دمای جوش می‌آید. با توجه به این‌که درون ظرف ۳ دو تخم‌مرغ انداخته شده است، دمای آب داخل ظرف ۳ بیش‌تر از دو ظرف دیگر کاهش می‌یابد. پس $t_۳ > t_۲$ است.

اگر توان گرمایی شعله‌ها را ثابت فرض کنیم، خواهیم داشت: $۲t_۱ = t_۲$



۲۱- گزینه ۳ صحیح است.

جرم آب با M و جرم هر قالب یخ را با m و دمای تعادل ظرف ۱ و ۲ را به ترتیب با $T_{f_۱}$ و $T_{f_۲}$ نشان می‌دهیم.

$$\begin{cases} mL_f + mc(T_{e_۱} - ۰) = Mc(۱۰۰ - T_{e_۱}) \\ ۲mL_f + ۲mc(T_{e_۲} - ۰) = Mc(۱۰۰ - T_{e_۲}) \end{cases}$$

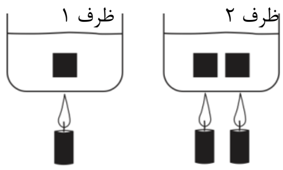
$$\begin{cases} T_{e_۱} = \dfrac{۱۰۰Mc - mL_f}{mc + Mc} \\ T_{e_۲} = \dfrac{۱۰۰Mc - ۲mL_f}{۲mc + Mc} \end{cases} \Longrightarrow T_{e_۲} < T_{e_۱}$$

اگر توان گرمایی هر شعله را با P نشان دهیم، داریم:

$$\begin{cases} Pt_۱ = (M+m)c(۱۰۰ - T_{e_۱}) \\ ۲Pt_۲ = (M+۲m)c(۱۰۰ - T_{e_۲}) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$t_۱ = \frac{(M+m)c\left(۱۰۰ - \frac{۱۰۰Mc - mL_f}{mc+Mc}\right)}{P}$$

$$\begin{cases} t_۱ = \dfrac{(M+m)c\left(۱۰۰ - \dfrac{۱۰۰Mc - mL_f}{mc+Mc}\right)}{P} \\ t_۲ = \dfrac{(M+۲m)c}{۲P}\left(۱۰۰ - \dfrac{۱۰۰Mc - ۲mL_f}{۲mc+Mc}\right) \end{cases}$$



$$t_۱ = \frac{۱۰۰mc + mL_f}{P}$$

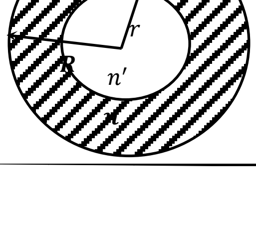
$$\left.\begin{array}{l} t_۱ = \dfrac{۱۰۰mc + mL_f}{P} \\ t_۲ = \dfrac{۲۰۰mc + ۲mL_f}{۲P} = \dfrac{۱۰۰mc + mL_f}{P} \Longrightarrow t_۱ = t_۲ \end{array}\right\} \Longrightarrow t_۱ = t_۲$$

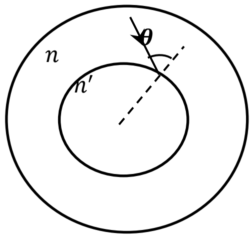
۲۲- گزینه ۴ صحیح است.

ضریب شکست مایع از ضریب شکست شیشه‌ی لوله کوچک‌تر است، پس اگر یک پرتو با زاویه‌ای بزرگ‌تر از زاویه حد مایع - شیشه به مرز مایع و شیشه برخورد کند، وارد مایع نشده و بازتابش کلی می‌کند. بنابراین اولین شرط، کوچک‌تر بودن زاویه‌ی تابش پرتو تابیده شده به مرز شیشه و مایع از زاویه حد شیشه - مایع است: $\theta \le \theta_c$

اگر بیشینه‌ی زاویه‌ی θ (θ_{max}) از θ_c کوچک‌تر باشد: شرط به دست آمده برآورده می‌شود: $\theta_{max} \le \theta_c$

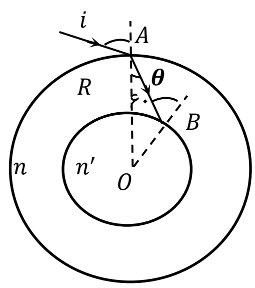
حال باید بررسی کنیم که پرتویی که با زاویه θ_{max} به مرز شیشه – مایع می‌تابد، با چه زاویه‌ای از هوا به مرز بین هوا – شیشه برخورد کرده است.





یک پرتو دل‌خواه را که از هوا وارد لوله‌ی شیشه‌ای می‌شود و با مرز شیشه- مایع برخورد می‌کند را در نظر بگیرید. اگر در مثلث ABO قاعده‌ی سینوس‌ها را بنویسیم، داریم:

$$\frac{\sin\varphi}{r}=\frac{\sin(\pi-\theta)}{R}=\frac{\sin\theta}{R}$$



آشکار است که طبق این رابطه، بیشینه‌ی مقدار θ به ازای بیشینه‌ی مقدار φ اتفاق می‌افتد. بیشینه مقدار φ نیز زمانی اتفاق می‌افتد که زاویه i بیشینه باشد. بیشینه‌ی زاویه‌ی i، 90° می‌تواند باشد.(از رابطه‌ی $\sin i=n\sin\varphi$ نیز می‌توانید به همین نتیجه برسید.) بنابراین، پرتویی با بیش‌ترین زاویه‌ی θ با مرز شیشه- مایع برخورد می‌کند که از هوا مماس به سطح خارجی لوله‌ی شیشه‌ای برخورد کند.

در این صورت($\hat{i}=90^\circ$) زاویه φ_{max} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\sin 90}{\sin\varphi_{max}}=n\Longrightarrow \sin\varphi_{max}=\frac{1}{n}$$

$$\frac{\sin\varphi_{max}}{r}=\frac{\sin\theta_{max}}{R}$$

$$\sin\theta_{max}\le\sin\theta_c=\frac{n'}{n}\Longrightarrow$$

$$\frac{R}{r}\times\frac{1}{n}\le\frac{n'}{n}\Longrightarrow\frac{R}{n'}\le r$$

بنابراین حداقل r برابر است با:

$$r_{min}=\frac{R}{n'}$$

۲۳- گزینه ۴ صحیح است.

یکای ضریب سختی فنر $\frac{N}{m}$ است (زیرا $K=\frac{F}{\Delta l}$ است) بنابراین یکای هر گزینه‌ای که $\frac{N}{m}$ شد، پاسخ درست است. تعداد دور، یکا و کمیتی بدون بعد است.

گزینه‌ی«۱»:

$$\frac{\frac{N}{m^2}\times 1\times m}{m^2}=\frac{N}{m^3}$$

گزینه‌ی«۲»:

$$\frac{\frac{N}{m^2}\times m}{1\times m^2}=\frac{N}{m^3}$$

گزینه‌ی«۳»:

$$\frac{\frac{N}{m^2}\times 1\times m^4}{m^3}=\frac{N}{m}$$

گزینه‌ی«۴»:

$$\frac{\frac{N}{m^2}\times m^4}{1\times m^3}=\frac{N}{m}$$

یکای دو گزینه ۳ و ۴ یکسان به دست آمد اما باید دقت کنید که اگر دو فنر یکسان (با r ، R ، n و G مشابه) را با یک‌دیگر سری کنید، ثابت فنرمعادل از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\frac{۱}{k_{eq}}=\frac{۱}{k_۰}+\frac{۱}{k_۰}=\frac{۲}{k_۰}$$
$$k_{eq}=\frac{k_۰}{۲}$$

طبق رابطه‌ی گزینه‌ی«۳» در صورت سری کردن دو فنر n حلقه‌ای، ثابت فنر معادل به صورت

$$k_{eq}=\frac{G(۲n)R_۴}{۴r^۳}=۲\frac{GnR^۴}{۴r^۳}=۲k_۰$$

به دست می‌آید که نادرست است. در حالی‌که طبق گزینه‌ی«۴» در صورت سری کردن دو فنر حلقه‌ای، ثابت فنر معادل به صورت

$$k_{eq}=\frac{Gr^۴}{۴(۲n)R^۳}=\frac{۱}{۲}\times\frac{Gr^۴}{۴nr^۳}=\frac{k_۰}{۲}$$

به دست می‌آید و درست است.

بنابراین رابطه‌ی گزینه‌ی«۴» درست است.

$$\Longrightarrow k=\frac{Gr^۴}{۴nR^۳}$$

۲۴- گزینه ۱ صحیح است.

ضریب شکست منشور اول (سمت چپ) را با $n_۱$ و ضریب شکست منشور دوم (سمت راست) را با $n_۲$ نشان می‌دهیم. زاویه تابش پرتوی فرودی به مرز مشترک دو منشور، برابر θ است. زاویه‌ی شکست در مرز مشترک دو منشور را با γ نشان می‌دهیم. قانون اسنل، رابطه‌ی زیر را به ما می‌دهد:

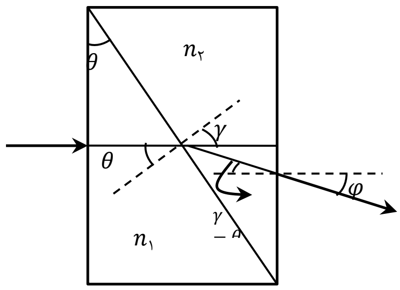
$$n_۱\sin\theta=n_۲\sin\gamma$$

چون زاویه‌ی θ کوچک است، زاویه‌ی γ هم کوچک است و می‌توان سینوس این زوایا را با خود آن‌ها بر حسب رادیان برابر گرفت. (در شکل به دلیل فهم بهتر زوایا، به طور اغراق‌آمیز بزرگ‌تر کشیده شده اند)

$$n_۱\theta\simeq n_۲\gamma$$

از طرفی، پرتو پس از عبور از مرز مشترک دو منشور، به مرز منشوردوم و هوا برخورد می‌کند. با توجه به این‌که ضریب شکست هوا را می‌توان ۱ درنظرگرفت و زاویه‌ی تابش به این مرز برابر $\gamma-\theta$ و زاویه‌ی شکست φ می‌باشد، قانون اسنل، رابطه‌ی دیگری به‌صورت زیر به ما می‌دهد.

$$n_۲\sin(\gamma-\theta)=\sin\varphi$$
$$n_۲(\gamma-\theta)\simeq\varphi=n_۲\left(\frac{n_۱}{n_۲}\theta-\theta\right)\simeq\varphi$$



با توجه به کوچک بودن زوایا:

$$\Delta n=n_۱-n_۲=\frac{\varphi}{\theta}$$

۲۵- گزینه ۴ صحیح است.

۱) مدت زمان رسیدن هر کره به زمین، فقط به شتاب گرانش و ارتفاع رها شدن کره‌ها بستگی دارد. حتی اگر مقاومت هوا را هم در نظر بگیریم. چون شعاع هر دو کره یکسان است، بر روی هر دو کره به یکم مقدار کار منفی انجام می‌شود.

۲) چون وزن و شعاع هر دو کره برابر است، حجمی که از هر کره در آب فرو می‌رود(ΔV) با هم برابر است.

$$\Delta V=\frac{mg}{\rho_{watet\ g}}$$

۳) در گزینه‌ی۳ گفته شده است که دمای هر دو کره به یک میزان بالا رفته است، پس:

$$R_۰(\lambda\Delta\theta)=R_۰(\lambda\Delta\theta)\Longrightarrow\Delta R_۲=\Delta R_۱$$

توجه داشته باشید که شعاع قسمت فلزی خارجی هر دو کره یکسان است.

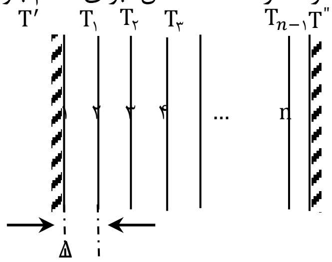
اگر در گزینه‌ی سوم گفته می‌شد: مقدار گرمای مساوی به کره‌ها داده می‌شود و سپس میزان تغییر شعاع هر یک اندازه‌گیری می‌شود. تغییر شعاع دو کره متفاوت می‌شد. از روی روابط زیر برای این فرض داریم:

$$\begin{cases} Q = Mc\Delta\theta_1 = (m_1 + m_2)c\Delta\theta_1 \\ Q = (m_1 c + m_2 c')\Delta\theta_2 \\ c' > c \end{cases} \Longrightarrow \Delta\theta_2 < \Delta\theta_1 \Longrightarrow R_0(x\Delta\theta_2) < R_0(x\Delta\theta_1) \Longrightarrow \Delta R_2 < \Delta R_1$$

Mجرم کره‌ی همگن فلزی، m_1جرم قسمت فلزی کره‌ی ناهمگن، m_2جرم قسمت چوبی کره‌ی ناهمگن، cگرمای ویژه فلز، c'گرمای ویژه چوب،R_0شعاع اولیه کره‌ها، λضریب انبساط گرمایی فلز، ΔR_1تغییر شعاع کره‌ی همگن فلزی و ΔR_2تغییر شعاع کره‌ی ناهمگن است.

۲۶- گزینه ۴ صحیح است.

آهنگ عبور گرما در حالت تعادل، برای تمام بلوک‌ها برابر است.



$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{dQ_2}{dt} = \cdots = \frac{dQ_n}{dt}$$

$$k_1 \frac{A}{\Delta}(T' - T_1) = k_2 \frac{A}{\Delta}(T_1 - T_2) = \cdots = k_n \frac{A}{\Delta}(T_n - T'')$$

Δضخامت هر بلوک است.

از طرفی، این توان انتقالی باید برابر توان انتقالی بین دو منبع گرمایی در حالتی‌که بلوک معادل گذاشته شده است، باشد.

$$\frac{dQ}{dt} = k_{eq}\frac{(T' - T'')}{L}A \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} T' - T_1 &= \frac{dQ_1}{dt}\left(\frac{\Delta}{k_1 A}\right) \\ T_1 - T_2 &= \frac{dQ_2}{dt}\left(\frac{\Delta}{k_2 A}\right) \\ T_{n-1} - T'' &= \frac{dQ_n}{dt}\left(\frac{\Delta}{k_n A}\right) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow T' - T'' = \sum_1^n \frac{dQ_i}{dt}\frac{\Delta}{k_i A}$$

با توجه به اینکه $\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_i}{dt}$ است، داریم:

$$T' - T'' = \frac{dQ}{dt}\frac{\Delta}{A}\sum_1^n \frac{1}{k_i}$$

پس:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{(T' - T'')A}{\Delta \sum_1^n \frac{1}{k_i}}$$

هم‌چنین $n\Delta = L$ است.

پس:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{(T' - T'')A}{L} \times \frac{n}{\sum_1^n \frac{1}{k_i}}$$

با مقایسه این رابطه و رابطه‌ی(۱) نتیجه می‌شود.

$$k_{eq} = \frac{n}{\sum_1^n \frac{1}{k_i}}$$

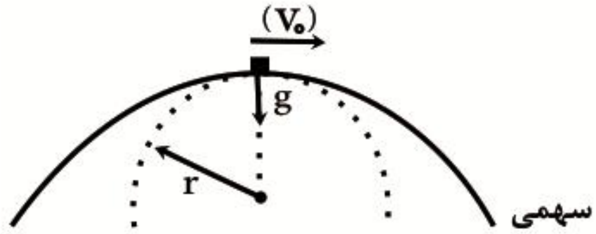
۲۷- گزینه ۱ صحیح است.

$(V_\circ)$سرعت واشر باید به قدری باشد که با طی مسیری که به شکل سهمی تحت تأثیر نیروی جاذبه زمین از سطح نیمکره خارج شود و فقط در بالاترین نقطه نیمکره با آن تماس داشته باشد.

وقتی ذره در امتداد یک سهمی حرکت می‌کند که شتاب عددی آن در نقطه (A) بالاترین نقطه نیم‌کره، برابر(g) است. و شتاب جانب به مرکز برای حرکت بر روی دایره‌ای به شعاع(R) با سرعت$(V_\circ)$ برابر با $\left(\frac{V_\circ^۲}{R}\right)$ است.

اگر انحنای سهمی در بالاترین نقطه‌اش کمتر از انحنای دایره‌ای به شعاع(R) باشد، ذره برخوردی با نیم‌کره نخواهد داشت. هر چقدر انحنای یک منحنی کمتر باشد شعاع انحنا بیش‌تر است، پس با توجه به شکل خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} r \geq R \\ V_\circ^۲ \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{V_\circ^۲}{} > R \Longrightarrow V_\circ^۲ > gR \Longrightarrow V_\circ > \sqrt{gR}$$



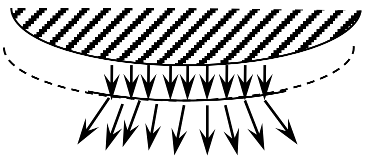
۲۸- گزینه ۱ صحیح است.

وقتی قرص به تعادل گرمایی می‌رسد، مقدار توانی که در هر لحظه از طریق تابش به قرص انتقال داده می‌شود، برابر توانی است که دو سطح آن از طریق همرفت به هوای محیط داده می‌شود.

اگر دمای سطح بالایی قرص را باT_{top} و دمای سطح پایینی آن را باT_{bot} و دمای هوا را باT_{air} نشان دهیم، داریم:

$$I_\circ A = \alpha A\left(T_{top} - T_{air}\right) + \alpha A(T_{bot} - T_{air}) \qquad (۱)$$

αضریب همرفت، A مساحت مقطع قرص،$I_\circ$ توان تابشی پرتوهای فرودی بر واحد سطح قرص است.



از طرفی چون دمای نقاط مختلف قرص با زمان تغییر می‌کند، توانی که از طریق رسانش از سطح بالایی قرص به سطح پایینی آن منتقل می‌شود، برابر توانی است که از طریق همرفت از سطح پایینی قرص به هوای محیط داده می‌شود.

$$\frac{kA}{\delta}\left(T_{top} - T_{bot}\right) = \alpha A(T_{bot} - T_{air}) \qquad (۲)$$

kضریب رسانش صفحه‌ی فلزی است.

اگر همین معادلات را در حالتی‌که قرص به ضخامت ۲δرا جایگزین قرص اولی کردیم، بنویسیم، خواهیم داشت:

$$I_\circ A = \alpha A\left(T'_{top} - T_{air}\right) + \alpha A(T'_{bot} - T_{air}) \qquad (۳)$$

$$k\frac{A}{۲\delta}\left(T'_{top} - T'_{bot}\right) = \alpha A(T'_{bot} - T_{air}) \qquad (۴)$$

از تقسیم معادلات ۲ و ۴ بر یک‌دیگر داریم:

$$\frac{۲\left(T_{top} - T_{bot}\right)}{\left(T'_{top} - T'_{bot}\right)} = \frac{T_{bot} - T_{air}}{T'_{bot} - T_{air}}$$

از معادلات ۱ و ۳ داریم:

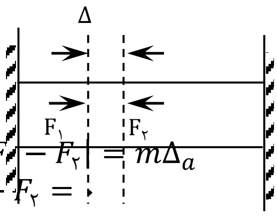
$$T_{top} - T_{bot} = T'_{top} - T'_{bot} \Longrightarrow T'_{top} = T_{top} - T_{bot} - T'_{bot}$$

از دو رابطه‌ی به دست آمده نهایی داریم:

$$\left(T_{bot} - T_{air}\right)\left(T_{top} + T_{bot} - T'_{bot} - T'_{bot}\right) = ۲\left(T_{top} - T_{bot}\right)(T'_{bot} - T_{air})$$
$$(۳۴۰ - ۳۰۰)(۳۶۰ + ۳۴۰ - ۲T'_{bot}) = ۲(۳۶۰ - ۳۴۰)(T'_{bot} - ۳۰۰)$$
$$\Longrightarrow T'_{bot} = ۳۳۳K$$
$$T'_{bot} = T_{top} + T_{bot} - T'_{bot}$$
$$T'_{top} = ۳۶۰ + ۳۴۰ - ۳۳۳ = ۳۶۷K$$

۲۹- گزینه ۲ صحیح است.

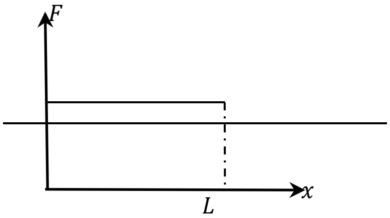
تکه‌ای از مقطع استوانه‌ی اول به ضخامت Δ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید نیروی وارد شده از بقیه‌ی قسمت‌های استوانه به ابتدا و انتهای این تکه، $\overrightarrow{F_1}$ و $\overrightarrow{F_2}$ باشد. اگر $\overrightarrow{F_1}$ و $\overrightarrow{F_2}$ برابر نباشد، این تکه طبق قانون دوم نیوتن شتاب پیدا خواهد کرد.
اما با توجه به تعادل ایستایی این تکه از میله، باید داشته باشیم:



$$|F_1 - F_2| = m\Delta_a$$

$$F_1 - F_2 = 0$$

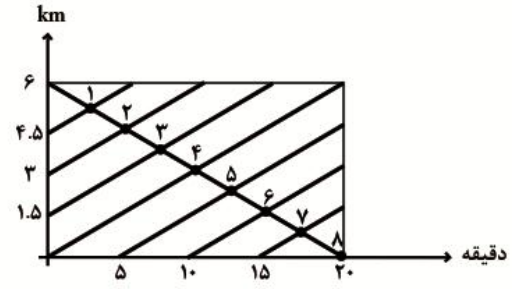
این استدلال را می‌توان برای هر تکه‌ی فرضی دیگر نیز مطرح کرد.
بنابراین نیروی فشاری ایجاد شده در تمام مقطع دو استوانه مقداری ثابت است.



مسأله کوتاه

۶۱- جواب: ۰۸

نمودار زیر، برای اتوبوس‌هایی است که در جهت مخالف اتوبوسی که مسافر بر آن سوار است حرکت می‌کنند.



منحنی خط چنین نیز برای مسافر مورد نظر است که در ۸ نقطه، با اتوبوس‌های
بنابراین در مسیر با ۸ اتوبوس برخورد خواهد داشت.

۶۲- جواب ۰۳

می‌دانیم توان تابشی در جسم سیاه با توان چهارم دما بر حسب کلوین متناسب است.

همچنین می‌توان گفت که آهنگ عبوری گرما بین دو دیواره گرم و سرد با اختلاف دمای دیواره‌ها متناسب است.

در حالت اول داریم:

$$P_1 \sim T_H^4$$
$$P_1 \sim T_C^4$$
$$P_1 \sim (T_H^4 - T_C^4)$$

با ضریب ثابت(A) رابطه تناسبی اخیر را بصورت زیر می‌نویسیم.

$$P_1 = A(T_H^4 - T_C^4) \qquad (1)$$

تأثیر مساحت دیواره‌ها در ضریب(A) نهفته است.

در حالت دوم، اگر دمای حفاظ‌ها(T_1) و(T_2) باشند(به شکل توجه فرمایید.)

خواهیم داشت:

$$P_2 \sim T_H^4 - T_1^4$$
$$P_2 \sim T_1^4 - T_2^4$$
$$P_2 \sim T_2^4 - T_C^4$$

هر ۳ رابطه تناسبی فوق، با ضریب(A) به رابطه تبدیل می‌شوند زیرا مساحت دیواره‌ها یکسان می‌باشند.

پس خواهیم داشت:

$$P_2 = A(T_H^4 - T_1^4) \qquad (2)$$
$$P_2 = A(T_1^4 - T_2^4) \qquad (3)$$
$$P_2 = A(T_2^4 - T_C^4) \qquad (4)$$

با جمع کردن ۳ رابطه اخیر داریم:

$$3P_2 = A(T_H^4 - T_C^4) \qquad (5)$$

با مقایسه روابط ۱ و ۵ نیز داریم:

$$A(T_H^4 - T_C^4) = 3P_2 = P_1 \qquad (6)$$

بدین ترتیب نسبت $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$ بدست می‌آید:

$$\frac{P_1}{P_2} = 3$$

۶۳- جواب ۰۳

برای انرژی درونی یک گاز ایده‌آل می‌توان نوشت:

$$U = nC_{MV}T \qquad (۱)$$

(n)تعداد مول گاز و(C_{MV}) ظرفیت گرمایی مولی گاز در حجم ثابت است(برای گاز تک‌اتمی$C_{MV} = \frac{۳}{۲}(R)$ و برای گازدواتمی$C_{MV} =$ $\frac{۵}{۲}(R)$ می‌باشد.)

انرژی درونی گاز ترکیبی(U) برابر با جمع انرژی درونی گازهای تک‌اتمی و دواتمی است.

$$U = U_۱ + U_۲ \qquad (۲)$$

$$(n_۱ + n_۲)C_{MV}T = n_۱C_{MV_۱}T + n_۲C_{MV_۲}T \qquad (۳)$$

$\left(C_{MV_۱} = \frac{۳}{۲}R\right)$و$\left(C_{MV_۲} = \frac{۵}{۲}R\right)$ به ترتیب ظرفیت مولی گازتک‌اتمی و دواتمی در حجم ثابت می‌باشد از رابطه اخیر می‌توان(C_{MV}) ظرفیت گرمایی مولی گاز ترکیبی در حجم ثابت را بدست آورد.

$$C_{MV} = \frac{n_۱C_{MV_۱}T + n_۲C_{MV_۲}T}{(n_۱ + n_۲)T} = \frac{n_۱\left(\frac{۳}{۲}R\right) + n_۲\left(\frac{۵}{۲}R\right)}{n_۱ + n_۲} \qquad (۴)$$

برای گاز ایده‌ال رابطه $(C_{MP} - C_{MV} = R)$برقرار است.

طبق فرض مسأله می‌توان نوشت:

$$x = \frac{C_{MP}}{C_{MV}} = \frac{۱۱}{۷} \qquad (۵)$$

$$\frac{C_{MV} + R}{C_{MV}} = \frac{۱۱}{۷} \qquad (۶)$$

با ساده کردن رابطه اخیر می‌توان نوشت:

$$\frac{R}{C_{MV}} = \frac{۴}{۷} \qquad (۷)$$

حال از رابطه(۴)، عبارت(C_{MV}) را در رابطه ۷ جایگذاری می‌کنیم.

$$۲R\left(\frac{n_۱ + n_۲}{۳n_۱R + ۵n_۲R}\right) = \frac{۴}{۷}$$

$$\frac{n_۱ + n_۲}{۳n_۱ + ۵n_۲} = \frac{۲}{۷}$$

بدین ترتیب نسبت$\left(\frac{n_۱}{n_۲}\right)$ بدست می‌آید.

$$\frac{n_۱}{n_۲} = ۳$$

۶۴- جواب ۱۰

قبل از ترکیدن حباب صابون داریم:

$$V = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰(a + t)}$$

$$(t << a) \Longrightarrow V \approx \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ a} = ۱۰^{V}$$

پس از ترکیدن حباب شعاع قطره را برابر با(a') و پتانسیل قطره را برابر(V') در نظر بگیرید.

حجم مایع صابون موجود در حباب برابر با حجم قطره است.

$$\frac{۴}{۳}\pi(a^۳ - t^۳) = \frac{۴}{۳}\pi a'^۳$$

$$(t << a) \Longrightarrow ۴\pi a^۲t = \frac{۴}{۳}\pi a'^۳ \Longrightarrow Q' = \sqrt[۳]{۳a't}$$

درباره پتانسیل حباب و قطره می‌توان گفت:

$$\begin{cases} V = \dfrac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}a} \\ V' = \dfrac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}a'} \end{cases} \Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{a'}{a}$$

$$\Rightarrow V' = \left(\frac{a}{a'}\right)V \quad = \left(\frac{a}{\sqrt[۳]{۳a^{۲}t}}\right)V$$

بدین ترتیب پتانسیل قطره(V') بدست می‌آید:

$$V' = \sqrt[۳]{\frac{a}{۳t}}\ (V) = \left(\frac{۱۰}{۳/۳ \times ۱۰^{-۶}}\right)^{\frac{۱}{۳}} (۱۰۰)^{V} \Rightarrow V' = ۱۰^{KV}$$

۶۵- جواب: ۰۱

هر ستاره طولی به اندازه کهکشان$(L_{\circ})$ می‌پیماید اگر در حجم یک سال نوری مکعب(N) ستاره و قطر هر ستاره(d) باشد، هنگامی برخورد رخ می‌دهد که فاصله مراکز دو ستاره(d) شود اگر در مسیر ستاره‌ای از کهکشان دوم، نقطه‌ای از کهکشان اول وجود داشت، یعنی یک برخورد صورت گرفته است.

بطور میانگین مسیر را استوانه می‌گیریم، حجم آن را در(N) ضرب کرده و تعداد متوسط ستاره‌های موجود در آن ناحیه را بدست می‌آوریم که برابر با تعداد برخوردهای هر ستاره است.

تعداد برخوردهای هر ستاره کهکشان دوم $= N\pi L_{\circ}d^{۲}$

$$= \frac{۱۰^{۱۱}}{(۱۰^{۴})^{۳}} \times \pi \times ۱۰^{۴} \times \left(۱۰^{۹} \times \frac{۱}{۳ \times ۱۰^{۸} \times ۳ \times ۱۰^{۷}}\right) \simeq ۱۰^{-۱۰}$$

تعداد کل برخوردها $=$ تعداد کل ستاره‌ها $\times\ ۱۰^{-۱۰}$

$$= ۱۰^{۱۱} \times ۱۰^{-۱۰} = ۱۰ \quad \Rightarrow k = ۱$$

۶۶-جواب ۲۶

برای تعیین تغییرات سرعت توپ قبل و پس از برخورد با سطح زمین می‌توان نوشت:

$$\int Fdt = mdv$$

$$\int Ndt - mgT = m\Delta v = m\left(\frac{v}{۲} - (-v)\right)$$

عبارت$\int Ndt$ برابر با مساحت زیر نمودار داده شده در مسئله است. این مساحت برابر است با:

$$s = \int Ndt = \frac{۲۵ \times ۰/۶}{۲} = ۷/۵ \ \ Ns$$

از روابط اخیرنتیجه می‌گیریم

$$\frac{۳mv}{۲} = s - mgT$$

$T = ۰/۶\,s$مدت زمان تماس توپ با سطح زمین است.

$$\frac{۳}{۲}(۰/۱)v = ۷/۵ - ۰/۱ \times ۱۰ \times ۰/۶ = ۶/۹$$

$$v = \frac{۲ \times ۶/۹}{۰/۳} = ۴۶\frac{m}{s}$$

بنابراین سرعت گلوله پس از برخورد برابر با$\frac{v}{۲} = ۲۳\frac{m}{s}$ خواهد بود.

بدین ترتیب ارتفاع اوج توپ(h) بدست خواهد آمد.

$$h = \frac{\left(\frac{v}{۲}\right)^{۲}}{۲g} = \frac{۲۳^{۲}}{۲۰} = ۲۶/۴۵ \simeq ۲۶m$$