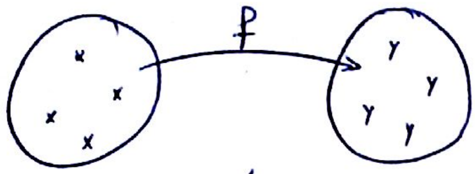
ریاضی یک (رشته‌های فنی و مهندسی)

یادآوری چند مفهوم:

تابع: یک رابطه ریاضی بین دو مجموعه است که به هر عضو از مجموعه اول حداکثر یک عضو از مجموعه دوم را اختصاص می‌دهد.



✓ به عناصر مجموعه اول که تابع می‌تواند روی آنها اثر بگذارد، دامنه تابع می‌گوییم. (نماد: D)

✓ به خروجی‌های تابع که در مجموعه دوم می‌باشند برد تابع می‌گوییم. (نماد: R) (هر خروجی تابع را مقدار تابع می‌نامیم)

✓ برای تابع ضابطه‌ای به شکل $y=f(x)$ می‌نویسیم که $x\in D$ (نمایانگر یک عضو از دامنه)، $y\in R$ (نمایانگر مقدار تابع و هم مفهوم با $f(x)$) و f را ضابطه یا قانون تابع می‌دانیم.

✓ x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌نامیم.

برخی انواع توابع :

✓ تابع چندجمله‌ای $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

↳ یک مثال خاص $P_2(x) = 3x^2 + 4x - 3$ تابع درجه دوم

↳ یک حالت خاص $y = 4x - 3$ تابع خط

↳ " " " $y = 7$ تابع ثابت

نکته: توجه کنید که تابع خط $y=f(x)=4x-3$ دارای $D=\mathbb{R}$ و $R=\mathbb{R}$ می‌باشد.
اگر ورودی $x=2$ به تابع بدهیم، مقدار خروجی آن (مقدار تابع) برابر با $y=4(2)-3=5$ خواهد بود.

✓ تابع رادیکال $\sqrt[n]{x} \longrightarrow$ حالت معمول و خاص $y=\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$

✓ تابع چندضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in D_1 \\ f_2(x) & x\in D_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x\in D_n \end{cases}$ $D_f = D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$

✓ تابع قدر مطلق $|x| = \begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

✓ توابع مثلثاتی $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$, $\csc x$

✓ تابع کسری $R(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

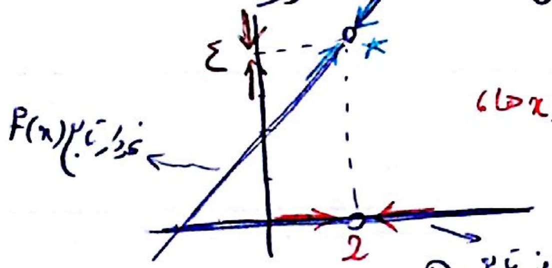
و اندکی دیگر

حد :

در این مفهوم با اعداد بسیار بزرگ یا اعداد بسیار ریز و دقیق سروکار داریم ؛ زمانی که تابع در مقدار خاص مشکل دارد (... برای توضیح بیشتر به ریاضیات دبیرستانی یا پیش دانشگاهی مراجعه نمایید) یا خروجی تابع را در مقدارهای بسیار بزرگ ∞ یا بسیار کوچک $-\infty$ (به زبان ساده آینده یا گذشته تابع) را بخواهیم از حد استفاده می‌کنیم که بحث در خصوص روش‌های آن در این مبحث نمی‌گنجد.

مثال : تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ در نقطه $x=2$ تعریف نشده است چون مخرج آن صفر است . به عنوان جایگزینی برای $f(2)$ (که تعریف نشده است) به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

با کمک شکل



$D=$ دامنه تابع $=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

با نزدیک شدن به عدد ۲ از طرفین آن در روی محور x ها روی نمودار تابع به نقطه ★ نزدیک می‌شویم که خروجی آن روی محور y ها به سمت عدد ۴ خواهد بود پس می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

با کمک جدول

x	1,9	1,99	... →	2	← ...	2,01	2,1
$f(x)$	3,9	3,99	...	X	...	4,01	4,1

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

با قالب ریاضی

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2} x+2 = 2+2=4$$

$\frac{0}{0}$ شکل تابع

نکته : در صورتی که برای مقدار حد تابع نتوانیم خروجی پیدا کنیم یا نهایتاً به خروجی‌های متفاوت برسیم گوئیم تابع حد ندارد (که بحث کامل آن در ریاضیات دبیرستان یا پیش دانشگاهی موجود است).

پیوستگی : زمانی که خروجی حد تابع، همان مقدار تابع باشد یعنی

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

گوئیم تابع پیوسته است.

✓ حالت‌های ناپیوستگی را نیز از ریاضیات گذشته خود مرور بفرمائید.

✓ اگر بدانیم تابعی پیوسته است، برای محاسبه حد آن نیازی به محاسبات صفحه قبل نیست و تنها کافیست مقدار تابع را برای آن محاسبه کنیم:

توابع چند جمله‌ای، قدر مطلق، سینوس، کسینوس و امثالهم پیوسته هستند.

مثال:

$$\lim_{x \to \pi} x^2 - 4 + |\sin x| = ?$$

جمع، تفریق و ترکیب توابع پیوسته، پیوسته است و لذا تابع بالا یک تابع پیوسته می‌باشد پس پاسخ حد همان مقدار تابع است یعنی

$$\pi^2 - 4 + |\sin \pi| = \pi^2 - 4 + |0| = \boxed{\pi^2 - 4}$$

یک حد خاص و مفهوم آن :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

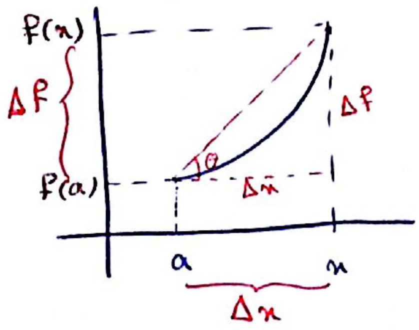
این یک حد پرکاربرد است که تابع کسری در آن مفهوم فیزیکی خاصی دارد . توجه کنید :

$$\overbrace{f(a) \qquad\qquad f(x)}^{\Delta f = f(x) - f(a)}$$

$$\underbrace{a \qquad\qquad x}_{\Delta x = x - a}$$

$$\Rightarrow \text{کسر ما} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\text{تغییرات تابع}}{\text{تغییرات متغیر}}$$

یا نمودار دقیق تر ریاضی



$$tg\,\theta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

لذا مفهوم حد بالا ، بررسی میزان تغییرات تابع نسبت به تغییرات متغیر آن است

زمانی که تغییرات متغیر به صفر میل می‌کند ؛ این همان مفهوم مشتق است .

$$x \to a \Rightarrow \Delta x \to 0$$

«مباحث مطرح در ریاضی یک»

- چند یادآوری و یادآوری مشتق

✓ انتگرال ۱ (مفهوم پادمشتق و مساحت و ارتباط آنها)

✓ تابع معکوس و توابع معکوس مثلثاتی (ادامه بحث تابع)

✓ توابع متعالی (ادامه بحث تابع و معرفی توابع سطح بالاتر و کاربردی)

✓ انتگرال ۲ (روش‌های انتگرال‌گیری)

✓ دنباله‌ها و سری‌ها

مشتق :

$$\overbrace{f(x) \qquad f(x+\Delta x)}^{\Delta f}$$

$$\underbrace{x \qquad x+\Delta x}_{\Delta x}$$

$$Df = f' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

حل یک مثال ساده: مشتق تابع $f(x) = x^2$ چیست؟

نوشتن تعریف

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

ساده کردن

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$$

در این مرحله توجه کنید که x و Δx دو موجود متفاوتند و مقدارهای آنها از هم جدا هستند.

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x + 0 = 2x$$

پس $f'(x) = 2x$ یا می‌توان نوشت: $(x^2)' = 2x$.

✓ نکته: مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2$ در نقطه $x = 3$ برابر است با $f'(x=3) = 2(3) = 6$.

✓ نکته: برای محاسبه مشتق تابع f در نقطه $x = a$ به جای عملیات بالا می‌توان مستقیماً از تعریف مقابل استفاده کرد:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

جدول مشتقات توابع اصلی

برخی توابع مربوط به فصول بعدی نیز آورده شده‌اند.

$f \to f'$	$f \to f'$
$c \to 0$	$\sin u \to \cos u \cdot u'$
$x \to 1$	$\cos u \to -\sin u \cdot u'$
$u \to u'$	$\operatorname{tg} u \to (1+\operatorname{tg}^2 u)\cdot u' = \sec^2 u \cdot u'$
$u^n \to n u^{n-1} u'$	$\operatorname{Cotg} u \to -(1+\operatorname{Cotg}^2 u)\cdot u' = -\csc^2 u \cdot u'$
$\sqrt{u} \to \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sec u \to \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u'$
$\lvert u\rvert \to \frac{\lvert u\rvert}{u} \times u'$	$\csc u \to -\csc u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u'$
$e^u \to e^u \cdot u'$	$\arcsin u \to \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$a^u \xrightarrow[a>0]{} a^u \cdot \operatorname{Ln} a \cdot u'$	$\arccos u \to -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{Ln} u \to \frac{1}{u} \times u' = \frac{u'}{u}$	$\operatorname{arc\,tg} u \to \frac{u'}{1+u^2}$
$\log_a u \to \frac{u'}{u \times \operatorname{Ln} a}$	$\operatorname{arc\,cotg} u \to -\frac{u'}{1+u^2}$

مثال: مشتق تابع $f(x) = x + x^3$ ، $g(x) = \sin x$ ، $h(x) = \sin(x^2)$ را بیابید.

$$f'(x) = 1 + 3x^2 \times 1 = 1 + 3x^2$$

$$g'(x) = \cos x \times 1 = \cos x$$

$$h'(x) = \cos(x^2) \times 2x$$

Scanned by CamScanner

قواعد مشتق گیری:

قانون جمع و تفریق : $(f \pm g)' = f' \pm g'$

" ضرب عدد در تابع : $(cf)' = cf'$

" ضرب دو تابع : $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

مشتق اولی در خود دومی + خود اولی در مشتق دومی

" کسر (تقسیم دو تابع) : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

" ترکیب (قاعده زنجیره ای) : $(f \circ g)'(x) = ?$: f تابعی از u و $u=g$ تابعی از x می باشد.

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

یا

$$(f(u))' = f'(u) \times u'$$

یا

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \times \frac{du}{dx}$$

مهم تفاوت نوشتن این قانون که وسطی پرکاربردتر است.

مثال: مشتق بگیرید :

* $f(x) = x^3 + 2\,tg\,x$

$f'(x) = (x^3)' + (2\,tg\,x)'$ قانون جمع

$= (x^3)' + 2\,(tg\,x)'$ قانون ضرب عدد

$= 3x^2 + 2\sec^2 x$ جدول

* $y = x^3 . \sin x$

$y' = (x^3)'(\sin x) + (x^3)(\sin x)'$ قانون ضرب

$= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$ جدول

* $y = \sin(\underbrace{e^x}_{u})$

$y' = \sin' u \times u'$ قانون ترکیب

$= \cos u \times u'$ جدول

$= \cos(e^x) \times e^x$ جایگزینی و جدول

$$* \; y = \frac{x^{۳}+۱}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{(۳x^{۲})\sqrt{x} - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x^{۳}+۱)}{(\sqrt{x})^{۲}}$$

$$* \; y = \sin\sqrt{x^{۳}+۱}$$

$$y' = \cos\sqrt{x^{۳}+۱} \times \frac{۱}{۲\sqrt{x^{۳}+۱}} \times ۳x^{۲}$$

$$* \; y = (x^{۳}+۴x)^{۵} = u^{۵}$$

$$y' = ۵(x^{۳}+۴x)^{۴} \times (۳x^{۲}+۴)$$

$$* \; y = \sin^{۷}(\sqrt{x})$$

$$y' = ۷\sin^{۶}(\sqrt{x}) \times \cos(\sqrt{x}) \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

تمرین: مشتقات زیر را محاسبه کنید:

$* \; y = 4x^3 + 7 - e^x$

$* \; y = (3x^{-2}) \times e^x$

$* \; y = 3^x \times \sqrt{x}$

$* \; y = \dfrac{\sin x}{\ln x}$

$* \; y = x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{3}{\sqrt{x}} - 2\sqrt[5]{x^3}$

$* \; y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$

$* \; y = \sqrt{\sec(x^3 - 1)}$

$* \; y = \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}}(4x + \sqrt{x})$

$* \; y = \sin^2 x + \cos^2 x$