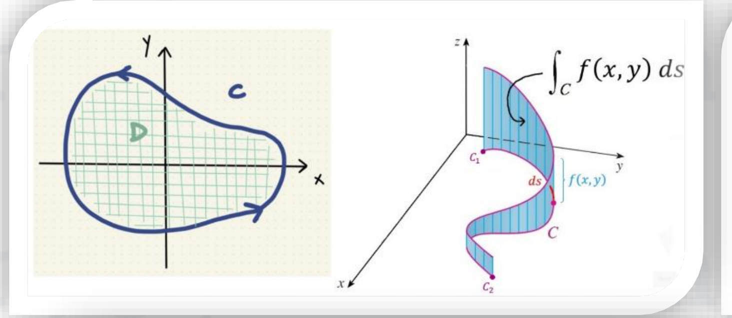
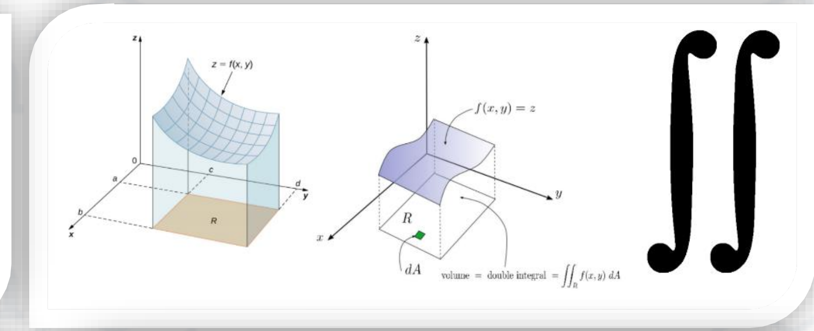
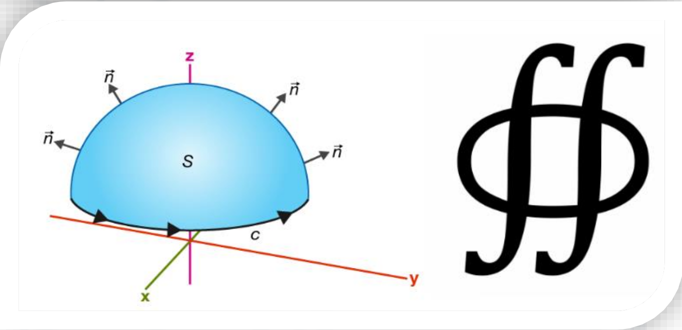
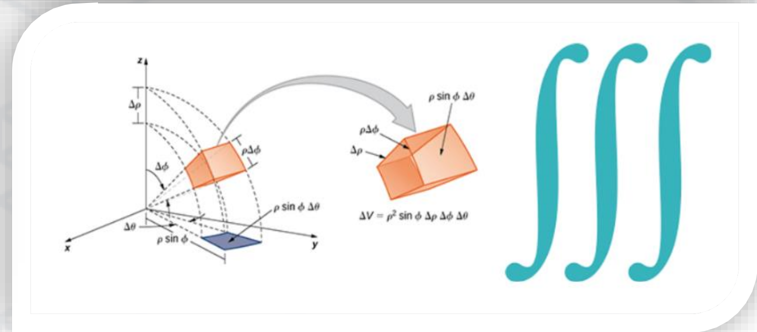








ریاضی عمومی ۲

پایانترم خرداد ۱۴۰۲

سوالات+پاسخ تشریحی

دانشگاه صنعتی اصفهان

امتحان پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۲، ۲۹ خرداد ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۶۰ دقیقه، بارم: ۱۱/۲ نمره

نام و نام خانوادگی: شمارهٔ دانشجویی: نام استاد درس:

شمارهٔ سوال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	نمرهٔ کُل
نمرهٔ سوال									

سوال ۱. اکسترمم‌های مطلق تابعِ $f(x,y,z) = x - y - 2z$ را روی ناحیهٔ $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 = \frac{11}{8}\}$ تعیین کنید. ۱۴

سوال ۲. حاصل انتگرال دوگانهٔ $\iint_D (\frac{x+y}{x^2})\, dx\, dy$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیهٔ محصور به خطوطِ $y = 0$، $y = 3x$، $x + y = 1$ و $x + y = 2$ است. ۱۴

سوال ۳. حاصل انتگرال سه‌گانهٔ $\iiint_D x\, dV$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیهٔ احاطه شده توسط رویهٔ استوانه‌ای $y = x^2$ و دو صفحهٔ $z = 0$ و $z + y = 1$ است. ۱۴

سوال ۴. حجم ناحیهٔ E محدود بین دو کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 9$، و داخلِ مخروطِ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را محاسبه کنید. ۱۴

سوال ۵. فرض کنید C مرزِ ناحیهٔ احاطه‌شده توسط منحنی‌های $x = 1 - y^2$ و $x = y - 1$ باشد که در خلاف جهت حرکتِ عقربه‌های ساعت پیموده شده است. حاصل انتگرال $\oint_C (y + e^{x^2})\, dx + (2x + \sin(y))\, dy$ را محاسبه کنید. ۱۴

سوال ۶. مساحت قسمتی از سطح کُرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ را محاسبه کنید که داخلِ مخروطِ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ واقع شده است. ۱۴

سوال ۷. شار میدان برداریِ $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ عبورکنندهٔ از قسمتی از سطح رویهٔ $z = 1 - x^2 - y^2$ که در بالای صفحهٔ $z = 0$ قرار گرفته است و در جهت قائم بر رویه را بیابید. ۱۴

سوال ۸. فرض کنید C منحنی حاصل از برخوردِ صفحهٔ $z = 2y$ با استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ باشد که با نگاه از بالا در خلاف جهت حرکتِ عقربه‌های ساعت پیموده شده است. حاصل $\oint_C \mathbf{F}.\, d\mathbf{r}$ را محاسبه کنید که در آن $\mathbf{F} = (xz^2)\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$. ۱۴

حل سوال۱) توابع چندمتغیره-اکسترمم

$$L = x - y - ۲z + \lambda(x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ - \frac{۱۱}{۸})$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{L_x = ۰} ۱ + ۲\lambda x = ۰ \to \lambda = -\frac{۱}{۲x} \\ \xrightarrow{L_y = ۰} -۱ + ۴\lambda y = ۰ \to \lambda = \frac{۱}{۴y} \longrightarrow -\frac{۱}{۲x} = \frac{۱}{۴y} = \frac{۱}{z} \longrightarrow z = -۲x = ۴y \\ \xrightarrow{L_z = ۰} -۲ + ۲\lambda z = ۰ \to \lambda = \frac{۱}{z} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[z=-۲x=۴y]{x^۲+۲y^۲+z^۲=\frac{۱۱}{۸}} (-۲y)^۲ + ۲y^۲ + (۴y)^۲ = \frac{۱۱}{۸} \to ۲۲y^۲ = \frac{۱۱}{۸} \to y^۲ = \frac{۱}{۱۶}$$

$$\to \boxed{y = \pm\frac{۱}{۴}} \xrightarrow{z=-۲x=۴y} \boxed{x = \mp\frac{۱}{۲}}, \boxed{z = \pm۱}$$

$$\xrightarrow{f(x,y,z)=x-y-۲z} f_{max}(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۴}, -۱) = \frac{۱}{۲} - (\frac{-۱}{۴}) - ۲(-۱) = \boxed{\frac{۱۱}{۴}} \qquad f_{min}(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, ۱) = -\frac{۱}{۲} - (\frac{۱}{۴}) - ۲(۱) = \boxed{-\frac{۱۱}{۴}}$$

حل سوال۲) انتگرال دوگانه-تغییر متغیر کلی

$$\begin{cases} x+y=u \\ \dfrac{y}{x}=v \end{cases} \xrightarrow{J=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} J=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -\dfrac{y}{x^۲} & \dfrac{۱}{x} \end{vmatrix}=\frac{۱}{x}+\frac{y}{x^۲}=\frac{x+y}{x^۲}$$

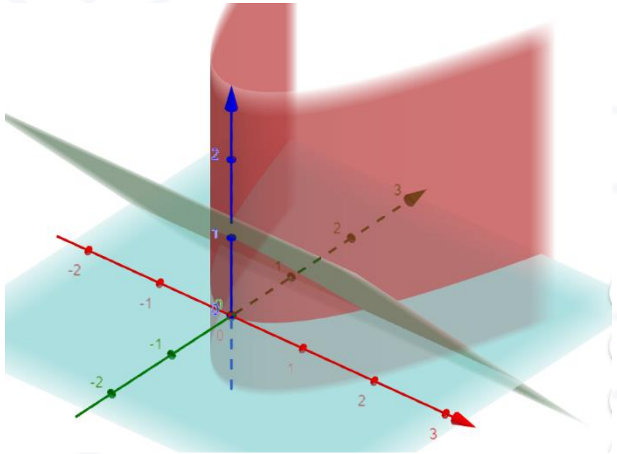
$$\xrightarrow{dxdy=\frac{۱}{|J|}dudv} dxdy=\frac{x^۲}{x+y}dudv$$

$$\longrightarrow \iint \frac{x+y}{x^۲}dxdy=\iint \frac{x+y}{x^۲}\,\frac{x^۲}{x+y}dudv=\iint dudv$$

$$\begin{cases} ۱\le x+y\le ۲ \rightarrow ۱\le u\le ۲ \\ ۰\le \dfrac{y}{x}\le ۳ \rightarrow ۰\le v\le ۳ \end{cases} \rightarrow = \int_{v=۰}^{۳}\int_{u=۱}^{۲} dudv = u\Big|_{۱}^{۲}\times v\Big|_{۰}^{۳}=(۲-۱)\times(۳-۰)=\boxed{۳}$$

حل سوال۳) انتگرال سه‌گانه-دکارتی

بدون محاسبه انتگرال و فقط با توجه به این نکته که تابع x فرد و ناحیه انتگرال گیری نسبت x متقارن است حاصل انتگرال صفر می شود.

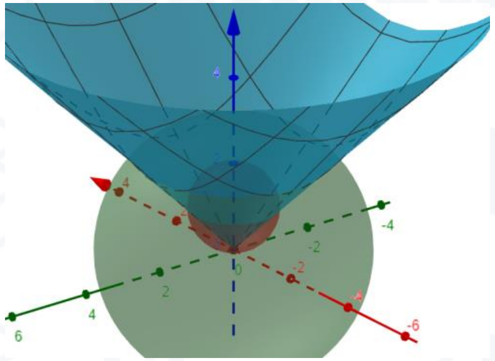


$$=\int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{x^{2}}\int_{z=0}^{1-y} x\,dz\,dy\,dx$$

$$\xrightarrow{\int_{z=0}^{1-y} x\,dz = xz\Big|_{z=0}^{1-y} = x(1-y)} = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{x^{2}} x(1-y)\,dy\,dx$$

$$\xrightarrow{\int_{y=0}^{x^{2}} x(1-y)\,dy = x\left(y-\frac{y^{2}}{2}\right)\Big|_{y=0}^{x^{2}} = x\left(x^{2}-\frac{x^{4}}{2}\right)} = \int_{x=-1}^{1} x\left(x^{2}-\frac{x^{4}}{2}\right)dx = \left(\frac{x^{4}}{4}-\frac{x^{6}}{12}\right)\Big|_{x=-1}^{1} = \boxed{0}$$

حل سوال۴) انتگرال سه گانه-کروی



$$v=\iiint dv$$

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+z^۲=۹\to r^۲=۹\to \underline{r=۳} \\ x^۲+y^۲+z^۲=۲z\to r^۲=۲r\cos\phi\to \underline{r=۲\cos\phi} \end{cases}$$

$$z=\sqrt{x^۲+y^۲}\to r\cos\phi=r\sin\phi\to \underline{\phi=\frac{\pi}{۴}}$$

$$\to v=\int_{\phi=۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{r=۲\cos\phi}^{۳} r^۲drd\theta\sin\phi d\phi \xrightarrow{\int_{\theta=۰}^{۲\pi}d\theta=۲\pi} =۲\pi\int_{\phi=۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{r=۲\cos\phi}^{۳} r^۲dr\sin\phi d\phi$$

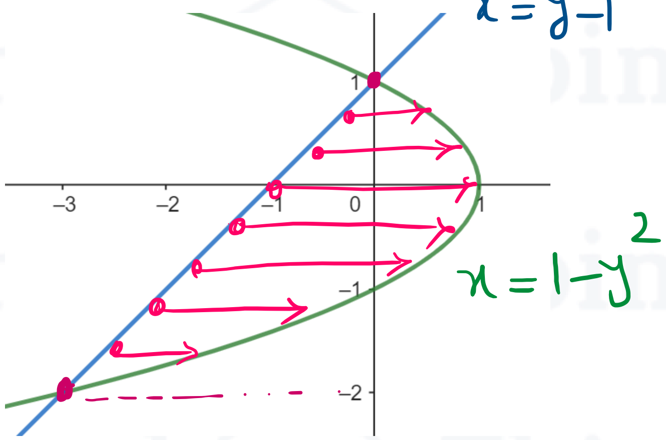
$$\xrightarrow{\int_{r=۲\cos\phi}^{۳} r^۲dr=\frac{r^۳}{۳}\Big|_{r=۲\cos\phi}^{r=۳}=۹-\frac{۸}{۳}\cos^۳\phi} v=۲\pi\int_{\phi=۰}^{\frac{\pi}{۴}}(۹-\frac{۸}{۳}\cos^۳\phi)\sin\phi d\phi$$

$$=۲\pi\int_{\phi=۰}^{\frac{\pi}{۴}}(۹-\frac{۸}{۳}\cos^۳\phi)\sin\phi d\phi=۲\pi(-۹\cos\phi+\frac{۲}{۳}\cos^۴\phi)\Big|_{\phi=۰}^{\frac{\pi}{۴}}=۲\pi\left(-۹(\frac{\sqrt{۲}}{۲})+\frac{۲}{۳}(\frac{۱}{۴})+۹-\frac{۲}{۳}\right)$$

$$=\underline{(۱۷-۹\sqrt{۲})\pi}$$

حل سوال۵) انتگرال خم-قضیه گرین

$$\oint \vec{F}.d\vec{r} = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

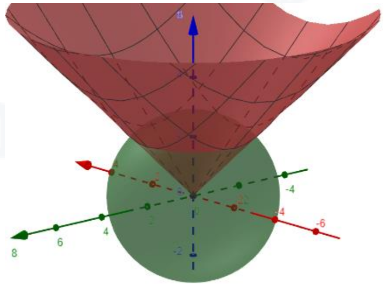


$$\vec{F} = \underbrace{(y + e^{x^2})}_{P}\vec{i} + \underbrace{(2x + \sin(y))}_{Q}\vec{j}$$

$$\rightarrow \oint Pdx + Qdy = \iint (2-1)dA = \iint dA = \int_{y=-2}^{1} \boxed{\int_{x=y-1}^{y=1-y^2} dx} \, dy$$

$$= \int_{y=-2}^{1} (2 - y^2 - y)\,dy = \left(2y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \boxed{\frac{9}{2}}$$

$\iint ds$



$$ds=\frac{\left|\vec{\nabla}_g\right|}{\left|\vec{\nabla}_g\cdot\vec{k}\right|}dA$$

تفاوت با $\vec{n}ds$ برداری

حل سوال۶) انتگرال سطح-مساحت سطوح فضایی

$$\xrightarrow{g=x^۲+y^۲+z^۲-۸=۰}\vec{\nabla}_g=(۲x,۲y,۲z)$$

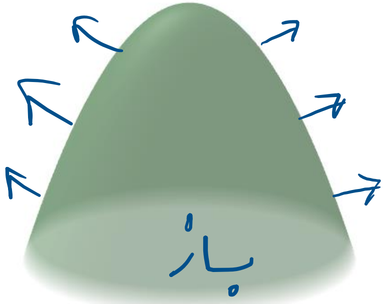
$$\to ds=\frac{|(۲x,۲y,۲z)|}{|(۲x,۲y,۲z).(۰,۰,۱)|}dA\to ds=\frac{\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۴z^۲}}{۲z}dA\to s=\iint ds=\iint\frac{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}{z}dA$$

$$\xrightarrow{x^۲+y^۲+z^۲=۸}=\iint\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۸-x^۲-y^۲}}dA\xrightarrow[z=\sqrt{x^۲+y^۲}]{x^۲+y^۲+z^۲=۸}x^۲+y^۲=۴\to s=\sqrt{۸}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{۲}\frac{۱}{\sqrt{۸-r^۲}}rdrd\theta$$

$$\to s=\sqrt{۸}\left(\int_{r=۰}^{۲}\frac{rdr}{\sqrt{۸-r^۲}}\right)\left(\int_{\theta=۰}^{۲\pi}d\theta\right)=\sqrt{۸}\left(-\sqrt{۸-r^۲}\Big|_{r=۰}^{۲}\right)\left(\theta\Big|_{\theta=۰}^{۲\pi}\right)=\sqrt{۸}(۲\sqrt{۲}-۲)(۲\pi)=\underline{۸\pi(۲-\sqrt{۲})}$$

حل سوال۷) انتگرال سطح-سطح باز

(روش اول محاسبه مستقیم)



رویه‌ای که شار از آن می‌گذرد

$$\vec{n}ds = \frac{\vec{\nabla}_g}{|\vec{\nabla}_g \cdot \vec{k}|}dA \qquad \vec{k} = (0,0,1)$$

$$\xrightarrow{g = x^2+y^2+z-1=0} \vec{\nabla}_g = (2x, 2y, 1)$$

$$\rightarrow \vec{n}ds = \frac{(2x, 2y, 1)}{|(2x,2y,1).(0,0,1)|}dA \rightarrow \vec{n}ds = (2x, 2y, 1)dA$$

$$\rightarrow \text{شار} = \iint \vec{F}.\vec{n}ds = \iint (y, -x, 2).(2x, 2y, 1)dA = \iint 2dA = 2\iint dA$$

$$\xrightarrow[z=0]{z = 1-x^2-y^2} x^2 + y^2 = 1 \rightarrow A = \pi(1)^2 = \pi \rightarrow \text{شار} = 2\pi$$

$$\oiint \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint (div\vec{F})dv$$

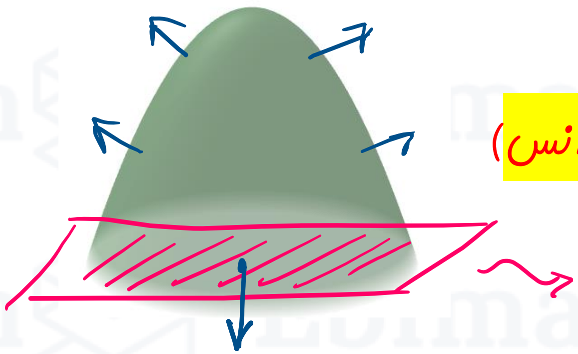
$$divF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

رویه‌ای که شار از آن می‌گذرد

$$\vec{n}ds = \frac{\vec{\nabla}_g}{|\vec{\nabla}_g.\vec{k}|}dA \qquad \vec{k} = (۰,۰,۱)$$

حل سوال۷) انتگرال سطح-سطح باز

(روش دوم قضیه دیورژانس)



صفحه $z=۰$

$$\underbrace{\iint \vec{F}.\vec{n}ds}_{\text{رویه}} + \underbrace{\iint \vec{F}.\vec{n}ds}_{z=۰\ \text{صفحه}} = \iiint div\vec{F}dv \xrightarrow{div\vec{F}=۰} = ۰$$

$$\xrightarrow{g=z=۰} \vec{\nabla}_g = (۰,۰,۱) \rightarrow \vec{n}ds = -\frac{(۰,۰,۱)}{|(۰,۰,۱).(۰,۰,۱)|}dA \rightarrow \vec{n}ds = -(۰,۰,۱)dA$$

$$\rightarrow \underbrace{\iint \vec{F}.\vec{n}ds}_{z=۰\ \text{صفحه}} = -\iint (y,-x,۲).(۰,۰,۱)dA = -\iint ۲dA = -۲\iint dA$$

$$\xrightarrow[z=۰]{z=۱-x^۲-y^۲} x^۲+y^۲=۱ \rightarrow A = \pi(۱)^۲ = \pi \rightarrow \underbrace{\iint \vec{F}.\vec{n}ds}_{z=۰\ \text{صفحه}} = -۲\pi \rightarrow \underbrace{\iint \vec{F}.\vec{n}ds}_{\text{رویه}} = \boxed{۲\pi}$$

حل سوال۸) انتگرال خم -پارامتری کردن و استفاده از تعریف،روش اول محاسبه مستقیم)

$$x^{۲}+y^{۲}=۱\to\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}\to\vec r(t)=(\cos t,\sin t,۲\sin t)\to d\vec r=(-\sin t,\cos t,۲\cos t)dt$$

[redacted]

$$F(x,y,z)=xz\,i+yzj+y\,k\longrightarrow F(t)=۴\sin t\cos ti+۲\sin tj+\sin tk$$

$$\to\int\vec F.d\vec r=\int_{t=۰}^{۲\pi}(۴\sin^{۲}t\cos t,۲\sin^{۲}t,\sin^{۲}t).(-\sin t,\cos t,۲\cos t)dt$$

$$=\int_{t=۰}^{۲\pi}(-۴\sin^{۳}t\cos t+۲\sin^{۲}t\cos t+۲\sin^{۲}t\cos t)dt$$

$$=(-\sin^{۴}t+\frac{۴}{۳}\sin^{۳}t)\Big|_{t=۰}^{۲\pi}=\boxed{۰}$$

حل سوال۸) انتگرال خم و سطح-روش دوم قضیه استوکس

$$\overrightarrow{curlF} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\iint \overrightarrow{curlF}.\vec{n}ds = \int \vec{F}.d\vec{r}}$$

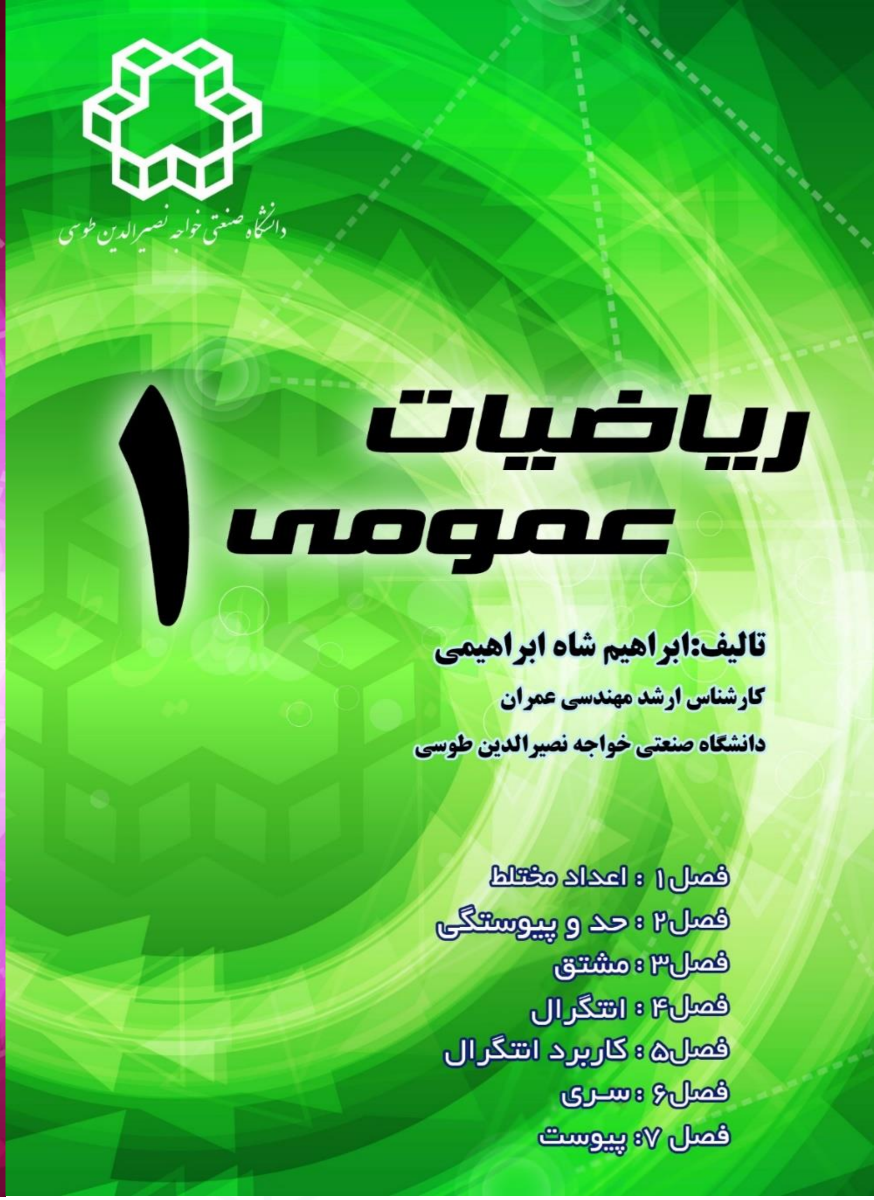
$$\rightarrow curl\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^{۲} & yz & y^{۲} \end{vmatrix} = (y, ۲xz, ۰)$$

$$\xrightarrow{g=z-۲y=۰} \vec{\nabla}_g = (۰,-۲,۱) \rightarrow \vec{n}ds = \frac{(۰,-۲,۱)}{|(۰,-۲,۱).(۰,۰,۱)|}dA \rightarrow \vec{n}ds = (۰,-۲,۱)dA$$

$$\rightarrow \iint \overrightarrow{curlF}.\vec{n}ds = \iint (y, ۲xz, ۰).(۰,-۲,۱)dA = \iint -۴xzdA \xrightarrow{z=۲y} = -۸\iint xydA$$

$$\xrightarrow{x^{۲}+y^{۲}=۱} = -۸\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{۱}(r\cos\theta)(r\sin\theta)rdrd\theta = -۴\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{۱} r^{۳}\sin(۲\theta)drd\theta$$

$$= r^{۴}\Big|_{۰}^{۱} \times \frac{۱}{۲}\cos(۲\theta)\Big|_{۰}^{۲\pi} = ۰$$


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
ریاضیات عمومی ۱
تالیف:ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
فصل ۱ : اعداد مختلط
فصل۲ : حد و پیوستگی
فصل۳ : مشتق
فصل۴ : انتگرال
فصل۵ : کاربرد انتگرال
فصل۶ : سری
فصل ۷: پیوست


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
ریاضیات عمومی ۲
تالیف:ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
فصل۱ : توابع برداری
فصل۲: توابع چند متغیره
فصل۳ : انتگرال ۲ گانه
فصل۴ : انتگرال ۳گانه
فصل۵ : انتگرال روی خم
فصل۶ : انتگرال روی سطح


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
معادلات دیفرانسیل
تالیف:ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
فصل۱ :معادلات مرتبه اول
فصل۲:معادلات مرتبه دوم و بالاتر
فصل۳: حل معادلات دیفرانسیل با سری
فصل۴:تبدیل لاپلاس
فصل۵:حل دستگاه معادلات دیفرانسیل