مساله های مرحله ی اول یازدهمین دوره ی المپیاد ریاضی دانش آموزان کشور

آذر ماه ۱۳۷۲

۱. اگر تفاضل مکعبات دو عدد صحیح متوالی، توان دوم یک عدد باشد، نشان دهید این عدد برابر حاصلجمع توان دوم دو عدد صحیح و متوالی است.

۲. نقطه ی P را درون مثلث ABC اختیار می کنیم، خطوط راست BP و CP اضلاع روبرو را به ترتیب در B_1 و C_1 قطع می کنند. اگر بدانیم که هم مساحت ها و هم محیط های دو مثلث PBC_1 و PCB_1 با هم برابرند، آن گاه ثابت کنید P روی نیمساز درونی زاویه ی A قرار دارد.

۳. تابع پیوسته ی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به گونه ای پیدا کنید که برای هر $c\in\mathbb{R}$ معادله ی $f(x)=c$ دقیقا سه جواب داشته باشد.

۴. ثابت کنید معادله ی $3x^2+1=4x^3$ در اعداد گویا فقط دارای جواب های $x=\pm1$ و $y=1$ است.

۵. مثلث ABC و دایره ی محیطی آن را در نظر می گیریم. از نقاط A، B و C خطوط دلخواهی رسم می کنیم تا اضلاع و کمان های روبرو را به ترتیب در M و M'، N و N' و P و P' قطع کنند. ثابت کنید اگر حاصل عبارت

$$T=\frac{AM'}{MM'}+\frac{BN}{NN'}+\frac{CP'}{PP'}$$

مینیمم شود، آن گاه سه خط مزبور همرسند. سپس نشان دهید $T\geq 12$.

۶. فرض کنید خانواده ی $A=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$، که از n مجموعه ی متمایز ناتهی تشکیل شده است دارای این خاصیت باشد که اجتماع هر دو عضو از A، دوباره عضوی از A باشد. اگر

$$|A_1|\leq|A_2|\leq\cdots\leq|A_n|$$

که $|A_i|$ تعداد اعضای مجموعه ی A_i است؛ و $|A_1|\leq 2$، نشان دهید عضوی مانند x وجود دارد که عضو حداقل $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ تا از این مجموعه ها است. ($\lceil a\rceil$ یعنی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی a).