

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

میانترم معادلات دیفرانسیل

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - اردیبهشت ۱۴۰۳

پاسخ تشریحی: مهندس شاه ابراهیمی

۱- با یافتن فاکتور انتگرال مناسب، جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بدست آورید.

$$(x + y^3)dx + y^2(1-x)dy = 0$$

پاسخ سوال ۱:

$$\rightarrow \underbrace{(x + y^3)}_M dx + \underbrace{(y^2 - xy^3)}_N dy = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -y^3 \end{cases} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 \xrightarrow{\times \frac{1}{N}} \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{3y^2}{y^2(1-x)} = \frac{3}{1-x}$$

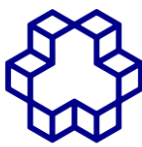
$$\rightarrow \mu = e^{\int \frac{3}{1-x} dx} = e^{-3 \ln(1-x)} = e^{\ln(1-x)^{-3}} = (1-x)^{-3}$$

$$\xrightarrow{\times (1-x)^{-3}} \left(\frac{x + y^3}{(1-x)^3} \right) dx + \left(\frac{y^2}{(1-x)^3} \right) dy = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{3y^2}{(1-x)^3} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{3y^2}{(1-x)^3} \end{cases} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\xrightarrow{c = \int M dx + \int N dy} c = \int \frac{x + y^3}{(1-x)^3} dx + 0 \rightarrow c = - \int \frac{(1-x)}{(1-x)^3} dx + (1+y^3) \int \frac{dx}{(1-x)^3}$$

$$\rightarrow c = \frac{1}{2(1-x)^2} + \frac{1+y^3}{3(1-x)^3}$$



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$2 \cos y dx + (-x \sin y + x^2) dy = 0$$

پاسخ سوال ۲:

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos y}{x \sin y - x^2} \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x \sin y - x^2}{2 \cos y} = \frac{x}{2} \tan y - \frac{x^2}{2 \cos y}$$

$$\rightarrow x' - \frac{\tan y}{2} x = -\frac{x^2}{2 \cos y} \xrightarrow{\div x^2} \frac{x'}{x^2} - \frac{1}{2x^2} \tan y = -\frac{1}{2 \cos y}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{2x^2} = t \\ \frac{x'}{x^2} = t' \end{cases} \rightarrow t' + t \tan y = -\frac{1}{2 \cos y}$$

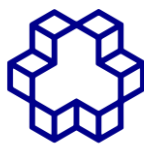
$$\rightarrow \mu = e^{\int \tan y dy} = e^{-\ln(\cos y)} = e^{\ln(\cos y)^{-1}} = (\cos y)^{-1}$$

$$\xrightarrow{\times (\cos y)^{-1}} \frac{t'}{\cos y} + t \frac{\sin y}{\cos^2 y} = -\frac{1}{2 \cos^2 y}$$

$$\rightarrow \left(\frac{t}{\cos y} \right)' = -\frac{1}{2 \cos^2 y} \xrightarrow{\int} \frac{t}{\cos y} = -\frac{1}{2} \tan y + c$$

$$\xrightarrow{\times \cos y} t = -\frac{1}{2} \sin y + c \cos y$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{2x^2} = t} \frac{-1}{2x^2} = -\frac{1}{2} \sin y + c \cos y$$



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۳- معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ باشد مقدار a را بیابید.

$$y'' + y' - 12y = 0$$

$$y(0) = a$$

$$y'(0) = 1$$

پاسخ سوال ۳:

$$\text{characteristic equation} \rightarrow t^2 + t - 12 = 0 \rightarrow (t + 4)(t - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x} \xrightarrow{y(0)=a} c_1 + c_2 = a$$

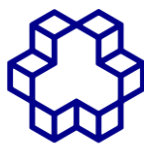
$$\rightarrow y' = -4c_1 e^{-4x} + 3c_2 e^{3x} \xrightarrow{y'(0)=1} -4c_1 + 3c_2 = 1$$

$$\xrightarrow{\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0} 0 = c_2 e^{\infty} \rightarrow c_2 = 0$$

$$\xrightarrow{c_1 + c_2 = a} c_1 = a \xrightarrow{-4c_1 + 3c_2 = 1} -4a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{4}$$



Ebimath



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۴- سوال تکراری جزوه معادلات دیفرانسیل مهندس شاه ابراهیمی (سوال ۶۸ فصل ۱).

مثال ۶۸: مقدار n را طوری بیابید که منحنی‌های $x^n + y^n = c_1$ مسیره‌های قائم بر دسته منحنی‌های $y = \frac{x}{1 - c_2 x^2}$ باشند. (c_1 و c_2 پارامتر ثابت‌اند).

پاسخ سوال ۴:

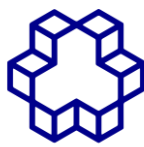
$$\rightarrow y' = \frac{1}{(1 - c_2 x)^2} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{y' \rightarrow \frac{-1}{y'}}{y'} \rightarrow \frac{-1}{y'} = \frac{y^2}{x^2} \rightarrow \frac{-dx}{dy} = \frac{y^2}{x^2} \rightarrow -x^2 dx = y^2 dy \xrightarrow{\int} -\frac{x^3}{3} = \frac{y^3}{3} + c$$

$$\xrightarrow{\times 3} -x^3 + y^3 = -3c \xrightarrow{-3c = c_1} x^3 + y^3 = c_1 \rightarrow n = 3$$



Ebimath



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۵- معادله زیر را با استفاده از تغییر متغیر $y = t^a$ حل کنید.

$$y^{\frac{1}{2}} dx + (x^{\frac{1}{2}} - xy^{\frac{1}{2}}) dy = 0$$

پاسخ سوال ۵:

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})}$$

$$\xrightarrow{y=t^a} y' = at^{a-1}t'$$

$$\rightarrow at^{a-1}t' = \frac{t^{\frac{1}{2}a}}{\frac{1}{2}(xt^{\frac{1}{2}a} - x^{\frac{1}{2}})}$$

$$\rightarrow t' = \frac{t^{\frac{1}{2}a}}{\frac{1}{2}a(xt^{\frac{1}{2}a-1} - t^{a-1}x^{\frac{1}{2}})} \xrightarrow{\text{Homogeneous}} 1 + \frac{1}{2}a - 1 = a - 1 + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}a = a + 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow t' = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{xt^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\times \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{t^{\frac{1}{2}}}{x} - 1} \rightarrow \begin{cases} t = ux \\ t' = u'x + u \end{cases}$$

$$\rightarrow u'x + u = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{u-1} \rightarrow u'x = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{u-1} - u = \frac{u}{u-1}$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} x = \frac{u}{u-1} \rightarrow \frac{(u-1)du}{u} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} u - \ln u = \ln cx$$

$$\xrightarrow{t=ux} \frac{t}{x} - \ln \frac{t}{x} = \ln cx$$

$$\xrightarrow{y=t^{\frac{1}{2}}} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x} - \ln \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x} = \ln cx$$

[لینک فرید جزوه معادلات دیفرانسیل](#)

[لینک خرید فیلم های آموزشی معادلات دیفرانسیل](#)