دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

**میانترم معادلات دیفرانسیل**

**دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی-اردیبهشت۱۴۰۳**

**پاسخ تشریحی: مهندس شاه ابراهیمی**

---

**۱-با یافتن فاکتور انتگرال مناسب، جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بدست آورید.**

$$(x+y^{3})dx+y^{2}(1-x)dy=0$$

## پاسخ سوال۱:

$$\rightarrow (\underbrace{x+y^{3}}_{M})dx+(\underbrace{y^{2}-xy^{2}}_{N})dy=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y}=3y^{2} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=-y^{2} \end{cases} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4y^{2} \xrightarrow{\times\frac{1}{N}} \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{4y^{2}}{y^{2}(1-x)}=\frac{4}{1-x}$$

$$\rightarrow \mu=e^{\int\frac{4}{1-x}dx}=e^{-4\ln(1-x)}=e^{\ln(1-x)^{-4}}=(1-x)^{-4}$$

$$\xrightarrow{\times(1-x)^{-4}} (\underbrace{\frac{x+y^{3}}{(1-x)^{4}}}_{M})dx+(\underbrace{\frac{y^{2}}{(1-x)^{3}}}_{N})dy=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{3y^{2}}{(1-x)^{4}} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{3y^{2}}{(1-x)^{4}} \end{cases} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\xrightarrow{c=\int Mdx+\int^{*} Ndy} c=\int\frac{x+y^{3}}{(1-x)^{4}}dx+0 \rightarrow c=-\int\frac{(1-x)}{(1-x)^{4}}dx+(1+y^{3})\int\frac{dx}{(1-x)^{4}}$$

$$\rightarrow \boxed{c=\frac{1}{2(1-x)^{2}}+\frac{1+y^{3}}{3(1-x)^{3}}}$$

۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$۲\cos y\,dx + (-x\sin y + x^۳)dy = ۰$$

## پاسخ سوال ۲:

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۲\cos y}{x\sin y - x^۳} \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x\sin y - x^۳}{۲\cos y} = \frac{x}{۲}\tan y - \frac{x^۳}{۲\cos y}$$

$$\rightarrow x' - \frac{\tan y}{۲}x = -\frac{x^۳}{۲\cos y} \xrightarrow{\div x^۳} \frac{x'}{x^۳} - \frac{۱}{۲x^۲}\tan y = -\frac{۱}{۲\cos y}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{-۱}{۲x^۲} = t \\ \frac{x'}{x^۳} = t' \end{cases} \rightarrow t' + t\tan y = -\frac{۱}{۲\cos y}$$

$$\rightarrow \mu = e^{\int \tan y\,dy} = e^{-\ln(\cos y)} = e^{\ln(\cos y)^{-۱}} = (\cos y)^{-۱}$$

$$\xrightarrow{\times(\cos y)^{-۱}} \frac{t'}{\cos y} + t\frac{\sin y}{\cos^۲ y} = -\frac{۱}{۲\cos^۲ y}$$

$$\rightarrow \left(\frac{t}{\cos y}\right)' = -\frac{۱}{۲\cos^۲ y} \xrightarrow{\int} \frac{t}{\cos y} = -\frac{۱}{۲}\tan y + c$$

$$\xrightarrow{\times\cos y} t = -\frac{۱}{۲}\sin y + c\cos y$$

$$\xrightarrow{\frac{-۱}{۲x^۲}=t} \boxed{\frac{-۱}{۲x^۲} = -\frac{۱}{۲}\sin y + c\cos y}$$

۳- معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=۰$ باشد مقدار $a$ رابیابید.

$$y''+y'-۱۲y=۰$$
$$y(۰)=a$$
$$y'(۰)=۱$$

## پاسخ سوال ۳:

$$\xrightarrow{\text{characteristic equation}} t^۲+t-۱۲=۰ \to (t+۴)(t-۳)=۰ \to \begin{cases} t=-۴ \\ t=۳ \end{cases}$$

$$\to y=c_۱e^{-۴x}+c_۲e^{۳x} \xrightarrow{y(۰)=a} c_۱+c_۲=a$$

$$\to y'=-۴c_۱e^{-۴x}+۳c_۲e^{۳x} \xrightarrow{y'(۰)=۱} -۴c_۱+۳c_۲=۱$$

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=۰} ۰=c_۲e^{\infty} \to c_۲=۰$$

$$\xrightarrow{c_۱+c_۲=a} c_۱=a \xrightarrow{-۴c_۱+۳c_۲=۱} -۴a=۱ \to \boxed{a=-\frac{۱}{۴}}$$

**۴- سوال تکراری جزوه معادلات دیفرانسیل مهندس شاه ابراهیمی(سوال۶۸فصل۱).**

**مثال ۶۸:** مقدار $n$ را طوری بیابید که منحنی‌های $x^n + y^n = c_1$ مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $y = \frac{x}{1 - c^2 x}$ باشند. ($c_1$ و $c_2$ پارامتر ثابت‌اند.)

## پاسخ سوال۴:

$$\rightarrow y' = \frac{1}{(1 - c_2 x)^2} = \frac{1}{(\frac{x}{y})^2} = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\xrightarrow{y' \rightarrow \frac{-1}{y'}} \frac{-1}{y'} = \frac{y^2}{x^2} \rightarrow \frac{-dx}{dy} = \frac{y^2}{x^2} \rightarrow -x^2 dx = y^2 dy \xrightarrow{\int} -\frac{x^3}{3} = \frac{y^3}{3} + c$$

$$\xrightarrow{\times 3} x^3 + y^3 = -3c \xrightarrow{-3c = c_1} \boxed{x^3 + y^3 = c_1} \rightarrow \boxed{n = 3}$$

**۵- معادله زیر را با استفاده از تغییر متغیر $y=t^a$ حل کنید.**

$$y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$$

## پاسخ سوال۵:

$$\to \frac{dy}{dx}=y'=\frac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$$

$$\xrightarrow{y=t^a} y'=at^{a-1}t'$$

$$\to at^{a-1}t'=\frac{t^{3a}}{2(xt^{2a}-x^2)}$$

$$\to t'=\frac{t^{3a}}{2a(xt^{3a-1}-t^{a-1}x^2)}\xrightarrow{Homogeneous}1+3a-1=a-1+2\to 3a=a+1\to \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

$$\to t'=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{xt^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}x^2}\xrightarrow{\times\frac{t^{\frac{1}{2}}}{x^2}}=\frac{\frac{t^2}{x^2}}{\frac{t}{x}-1}\longrightarrow\begin{cases} t=ux\\ t'=u'x+u\end{cases}$$

$$\to u'x+u=\frac{u^2}{u-1}\to u'x=\frac{u^2}{u-1}-u=\frac{u}{u-1}$$

$$\to \frac{du}{dx}x=\frac{u}{u-1}\to \frac{(u-1)du}{u}=\frac{dx}{x}\xrightarrow{\int}u-\ln u=\ln cx$$

$$\xrightarrow{t=ux}\frac{t}{x}-\ln\frac{t}{x}=\ln cx$$

$$\xrightarrow{y=t^{\frac{1}{2}}}\boxed{\frac{y^2}{x}-\ln\frac{y^2}{x}=\ln cx}$$