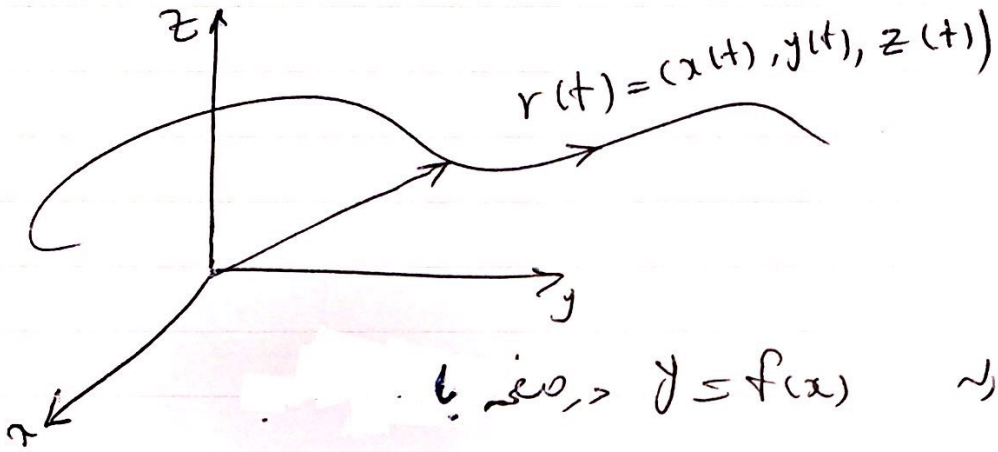
p: 119.1

یادآوری: منحنی پارامتری به معادله

$$r(t) = x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,k \;;\quad a \le t \le b.$$



مثلا معادله $y = f(x)$ در صفحه با

قرار دادن $x := t$ ، $y = f(t)$ و در نتیجه $r(t) = t\,i + f(t)\,j$

می‌توان پارامتری کرد. منحنی $y = x^2$ را می‌توان به صورت

$r(t) = t\,i + t^2\,j$ پارامتری کرد.

همین طور می‌توان معادله $x = f(y)$ را با قرار دادن $x := f(t)$ ، $y := t$

و در نتیجه $r(t) = f(t)\,i + t\,j$ پارامتری کرد. مثلا $x = y^3 + 2$

را می‌توان به صورت زیر پارامتری کرد

$$r(t) = (t^3 + 2)\,i + t\,j$$

یادآوری میدان برداری به معادله زیر

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$$

مثلا

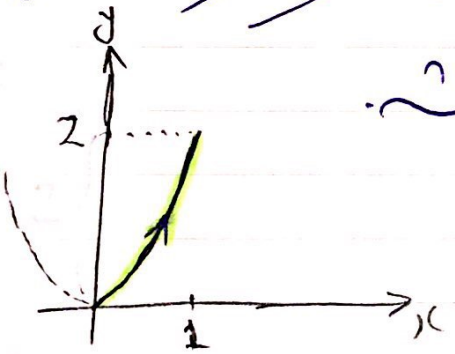
$$F(x,y,z) = x^2 y\,i + z^2\,j + e^{xz}\,k.$$

Scanned with CamScanner

انتگرال خط

فرض کنید $F = Pi + Qj + Rk$ یک میدان برداری و $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ یک منحنی پارامتری برای $a \le t \le b$ باشد، در این صورت انتگرال خط میدان F بر منحنی C یا (کار انجام شده توسط F روی مسیر C) را با $\int_C F \cdot dr \overset{\text{نشان}}{=} \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ نشان می‌دهیم. برای محاسبه انتگرال خط به مثال‌های زیر توجه کنید.

Ex) مقدار $\int_C (x^2+y)\,dx + (y^2-x)\,dy$ را حساب کنید هرگاه C قسمتی از سهمی $y = 2x^2$ برای $0 \le x \le 1$ باشد.



حل: منحنی را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم

$$r(t) = \underbrace{t}_{x(t)}\, i + \underbrace{2t^2}_{y(t)}\, j \qquad 0 \le t \le 1$$

$dx = dt \leftarrow x(t)$ ، $y(t) \rightarrow dy = 4t\,dt$

اکنون می‌نویسیم

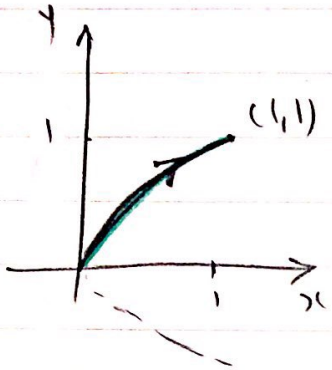
$$\int_C (x^2+y)\,dx + (y^2-x)\,dy = \int_0^1 (t^2+2t^2)\,dt + (4t^4-t)(4t\,dt)$$

$$= \int_0^1 (3t^2 + 16t^5 - 4t^2)\,dt = \int_0^1 (16t^5 - t^2)\,dt$$

$$= 16\frac{t^6}{6} - \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{16}{6} - \frac{1}{3} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

Scanned with CamScanner

EX) مقدار $\int_C xy\,dx+(y-x)\,dy$ را حساب کنید هرگاه C سهمی $x=y^2$ از نقطه (0,0) تا نقطه (1,1) باشد.



حل: منحنی C را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم

$y=t \rightarrow x=t^2$

$$r(t)=\underbrace{t^2}_{x(t)}i+\underbrace{t}_{y(t)}j \qquad 0\le t\le 1$$

$dx=2t\,dt$, $dy=dt$.

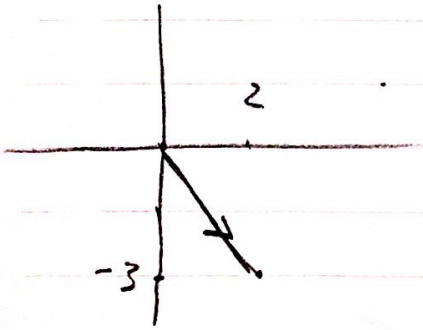
اکنون:

$$\int_C xy\,dx+(y-x)\,dy=\int_0^1 t^2\times t\times 2t\,dt+(t-t^2)\,dt$$

$$=\int_0^1(2t^4+t-t^2)\,dt=\frac{2t^5}{5}+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{12+15-10}{30}=\frac{17}{30}.$$

EX) مقدار $\int_C x\,dy$ را حساب کنید هرگاه C پاره‌خط از (0,0) تا (2,-3) باشد.



حل: معادله خط C عبارت است از

$$y-0=\frac{-3-0}{2-0}(x-0) \Longrightarrow$$

$$y=\frac{-3}{2}x$$

پاره‌خط C را به صورت زیر توصیف می‌کنیم.

$$y=-\frac{3}{2}x\ ; \quad 0\le x\le 2$$

و آن را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم

$dx=dt$, $dy=-\frac{3}{2}dt$

$$r(t)=\overbrace{t}^{x}i+\overbrace{(-\tfrac{3}{2}t)}^{y}j \qquad 0\le t\le 2$$

Scanned with CamScanner

p:122

$$\int_C x\,dy = \int_0^2 t\left(-\frac{3}{2}\,dt\right) = -\frac{3}{2}\frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = -\frac{3}{4}\times 4 = -3.$$

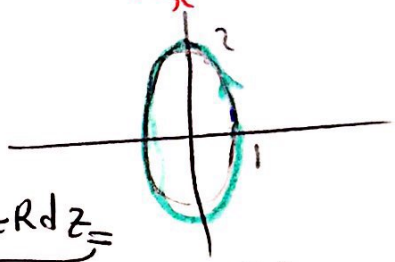
(GA) کار انجام شده توسط میدان $F = \underbrace{-\frac{1}{y}}_{P} i + \underbrace{z}_{Q} j + \underbrace{x y^2}_{R} k$ روی منحنی مشترک بیضی‌گون $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ و صفحه $z=0$ که یکبار پادساعتگرد پیموده شده کدام است؟

1- $\frac{\pi}{2}$ 2- π 3- $-\pi$ 4- 2π

حل:

$$C:\begin{cases} x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1 \\ z=0 \end{cases} \longrightarrow C:\begin{cases} x^2+\frac{y^2}{4}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$r(t) = \underbrace{1\cos t}_{x}\, i + \underbrace{2\sin t}_{y}\, j + \underbrace{0}_{z}\, k \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



$$\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_C F\cdot dr = \int_0^{2\pi} \frac{-1}{2\sin t}\underbrace{(-\sin t\,dt)}_{dx} + 0\times\underbrace{(2\cos t\,dt)}_{dy} + \cot t\sin^2 t\,\underbrace{(0)}_{dz}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}(t)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi - 0) = \pi$$

گزینه 2

- اگر $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$ و C_i ها قطعه‌ای هموار و ابتدای تا انتهای منحنی مابعد باشد،

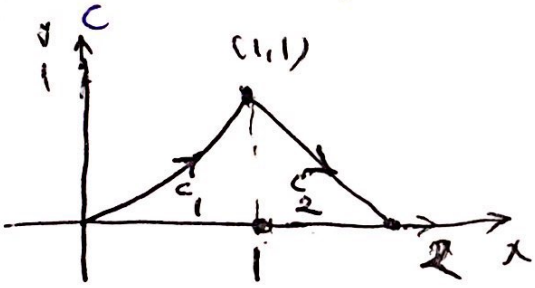
P:123

منحنی ماقبل

منحنی مابعد

$$\int_C F\cdot dr = \int_{C_1} F\cdot dr + \dots + \int_{C_n} F\cdot dr$$

Ex) فرض کنید C مسیر از سهمی $y=x^2$ از مبدا به نقطه $(1,1)$ و قطعه خطی از $(1,1)$ به $(2,0)$ است. مطلوبست محاسبه $\int_C y\,dx + x\,dy$.



حل:

$$C_1: \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \to x = 1 \end{cases}$$

$$C_1: r(t) = \underbrace{t}_{x}\, i + \underbrace{t^2}_{y}\, j \quad 0 \le t \le 1$$

و

$$C_2: \begin{cases} y = 2 - x \\ x = 1 \to x = 2 \end{cases}, \quad C_2: r(t) = \underbrace{t}_{x}\, i + \underbrace{(2-t)}_{y}\, j \quad 1 \le t \le 2.$$

$$C = C_1 \cup C_2$$

$$\int_C y\,dx + x\,dy \overset{\text{تکه‌ای}}{=} \int_{C_1} y\,dx + x\,dy + \int_{C_2} y\,dx + x\,dy$$

$$= \int_0^1 t^2\,dt + t(2t\,dt) + \int_1^2 (2-t)\,dt + t(-dt)$$

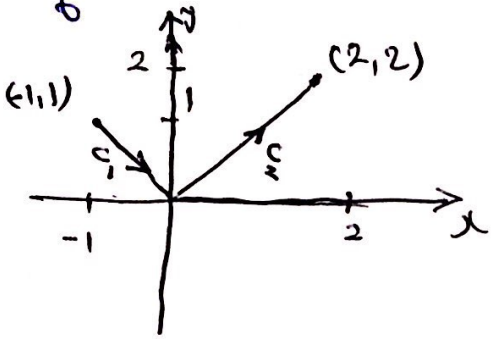
$$= \frac{\cancel{5}t^3}{\cancel{3}}\Big|_0^1 + \left(2t - \frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_1^2 = 1 + (\cancel{4} - \cancel{4} - 2 + 1) = 0$$

Scanned with CamScanner

P:124

۱) انتگرال خط میدان $F=(x^2+y^2)i+(x^2-y)j$ روی منحنی $y=|x|$ از نقطه $(-1,1)$ تا نقطه $(2,2)$ مساوی است با:

$\frac{41}{6}$ -4 -2 -3 $\frac{12}{13}$ -2 $\frac{2}{3}$ -1



حل:

$c_1: \begin{cases} y=-x \\ x=-1 \to x=0 \end{cases}$

$\to r(t)=\underbrace{t}_{x}i-\underbrace{t}_{y}j \; ; -1\le t\le 0$

$c: \begin{cases} y=x \\ x=0 \to x=2 \end{cases} \to r(t)=\underbrace{t}_{x}i+\underbrace{t}_{y}j \; ; 0\le t\le 2$

$c=c_1\cup c_2$.

$$\int_c (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y)\,dy \overset{\text{نکته قبل}}{=} \int_{c_1}(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y)\,dy+$$

$$\int_{c_2}(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y)\,dy=\int_{-1}^{0}(t^2+(-t)^2)\,dt+(t^2-(-t))(-dt)$$

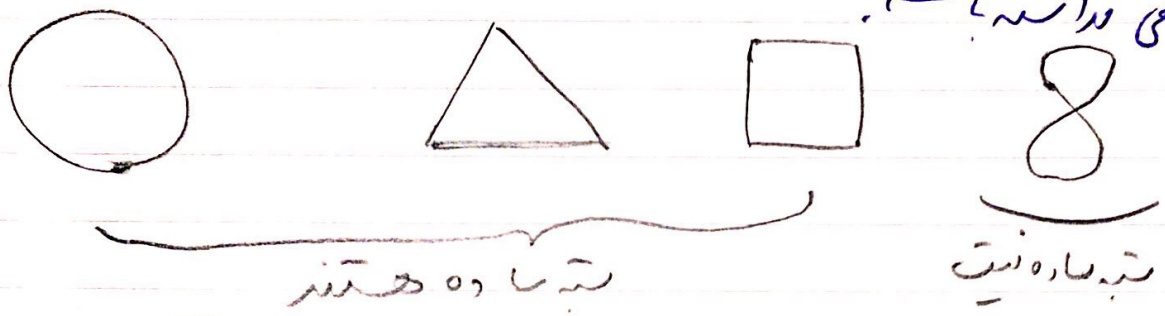
$$+\int_0^2(t^2+t^2)\,dt+(t^2-t)\,dt=\int_{-1}^{0}(+t^2-t)\,dt+\int_0^2(3t^2-t)\,dt$$

$$=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\left(t^3-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^2=0-\left(\frac{-1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(8-\frac{4}{2}\right)$$

$$=\frac{5}{6}+6=\frac{41}{6}\checkmark$$ گزینه ۴

Scanned with CamScanner

تعریف: منحنی C را ساده گوییم هرگاه ابتدا و انتهای آن یکی باشند و خود را قطع نداشته باشد.



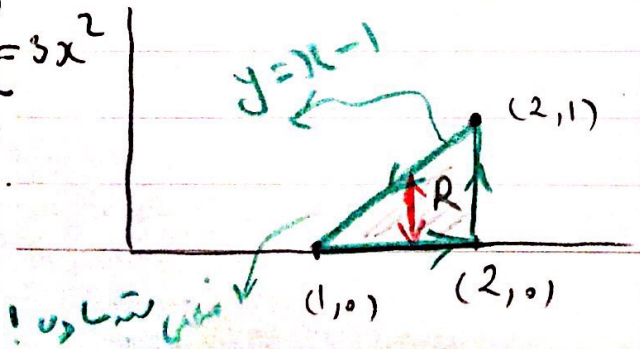
قضیه گرین: فرض کنیم C یک منحنی ساده در صفحه باشد که در جهت مثبت مثلثاتی پیموده شده و R ناحیه درون آن و $F=Pi+Qj$ یک میدان برداری بر C باشد در این صورت

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dA$$

Ex) حاصل $I=\int_C \underbrace{(y+\ln x)}_{P}\,dx + \underbrace{(x^3+e^{-y})}_{Q}\,dy$ را بدست آورید هرگاه C مثلثی به رئوس $(1,0)$ و $(2,0)$ و $(2,1)$ باشد.

$P_y = 1$

$Q_x = 3x^2$



حل:

$$I \overset{\text{از گرین}}{=} \iint (Q_x - P_y)\,dA$$

$$= \iint_R (3x^2 - 1)\,dA$$

$$= \int_1^2 \int_0^{x-1} (3x^2 - 1)\,dy\,dx = \dots = 4$$

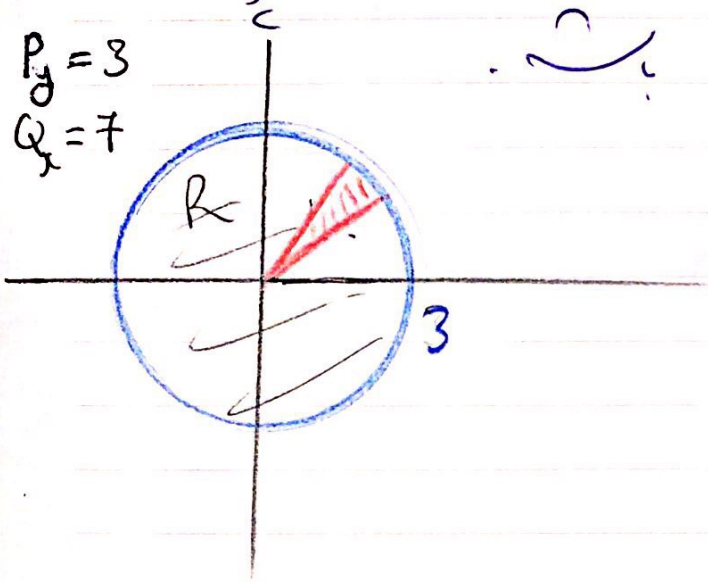
Scanned with CamScanner

p: 126

Ex) حاصل $I=\int_C \overbrace{(3y-e^{\sin x})}^{P}dx+\overbrace{(7x+\sqrt{y^4+1})}^{Q}dy$ را حساب کنید، هرگاه C دایره $x^2+y^2=9$ باشد.

$P_y=3$

$Q_x=7$



$$I \overset{\text{از گرین}}{=} \iint (Q_x-P_y)\,dA$$

$$= \iint_R (7-3)\,dA$$

$$=4\iint_R dA = 4\times\pi\times 3^2$$

مساحت دایره

$$=4\int_0^{2\pi}\int_0^3 r\,dr\,d\theta$$

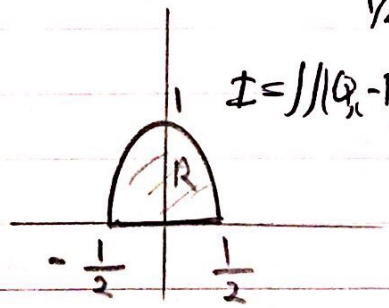
$$=4\times\frac{r^2}{2}\Big|_0^3(\theta)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=4\times\frac{9}{2}\times 2\pi$$

$$=36\pi.$$

Ex) حاصل $I=\int_C \overbrace{-\frac{1}{2}y^2}^{P}dx+\overbrace{(y^2-xy)}^{Q}dy$ را حساب کنید هرگاه C نیمه بالایی بیضی $4x^2+y^2=1$ و پاره خط واصل نقاط $(\frac{1}{2},0)$ و $(-\frac{1}{2},0)$ باشد.

$$4x^2+y^2=1 \rightarrow \frac{x^2}{1/4}+y^2=1,$$



$$I=\iint(Q_x-P_y)\,dA=\iint_R -y-(-y)\,dA=\iint 0\,dA$$

$$=0.$$

Scanned with CamScanner

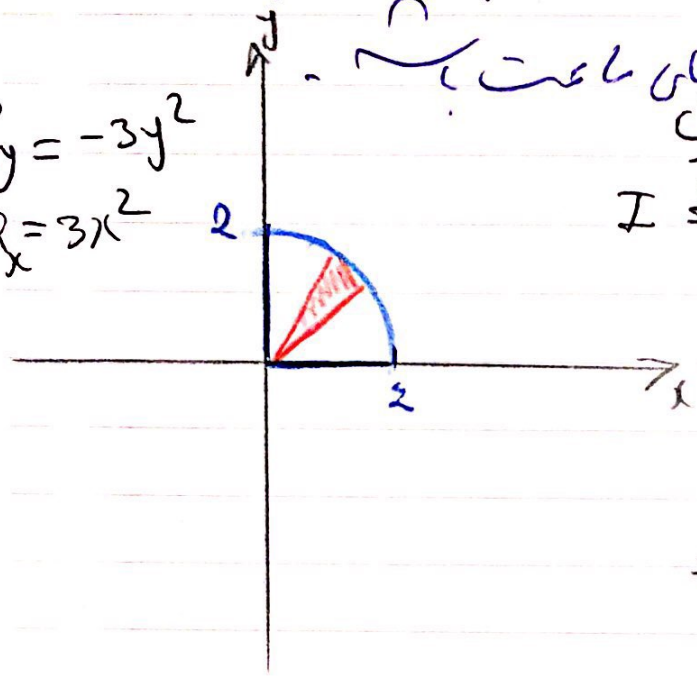
P: 127

Ex) حاصل $I = \int_C \overbrace{(x-y^3)}^{P}\,dx + \overbrace{(y^3+x^3)}^{Q}\,dy$ را محاسبه کنید.

C مسیر بسته روی محیط ربع دایره $x^2+y^2=4$ در ربع اول و محورهای مثبت مختصات در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد.

$P_y = -3y^2$

$Q_x = 3x^2$



$$I \overset{\text{از گرین}}{=} \iint_R (Q_x - P_y)\,dA$$

$$= \iint_R \left(3x^2 - (-3y^2)\right) dA$$

$$= 3\iint_R (x^2+y^2)\,dA$$

$$= 3\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^2\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 3\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2 \left(\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 3 \times \frac{16}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

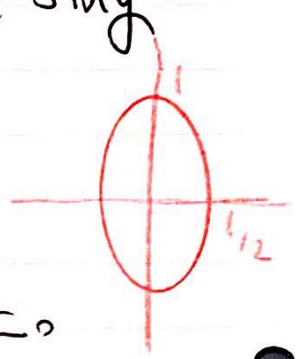
$$= 6\pi$$

Scanned with CamScanner

EX) حاصل $I=\int_C e^x\cos y\,dx - e^x\sin y\,dy$ را محاسبه کنید، هرگاه C بیضی $2x^2+y^2=1$ باشد.

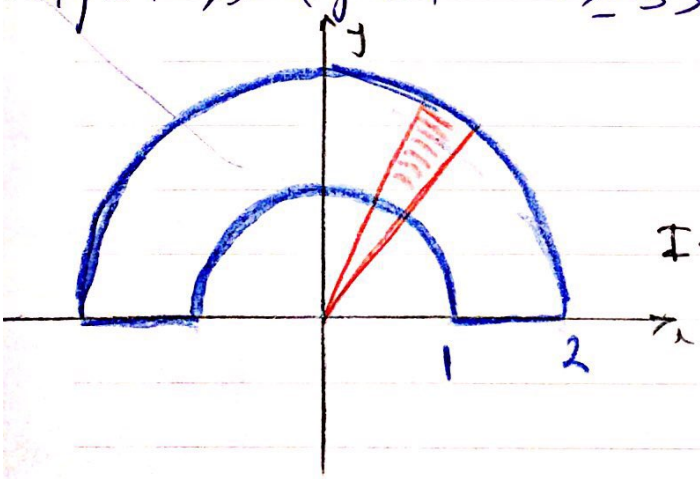
$$P=e^x\cos y \longrightarrow P_y=e^x(-\sin y)=-e^x\sin y$$

$$Q=-e^x\sin y \longrightarrow Q_x=-e^x\sin y$$



$$I \overset{\text{گرین}}{=} \iint_R (Q_x-P_y)\,dA=\iint_R 0\,dA=0$$

EX) حاصل $I=\int_C \underbrace{y^2}_{P}\,dx+\underbrace{3xy}_{Q}\,dy$ را محاسبه کنید، هرگاه C مسیر پیرامون ناحیه R محدود بین دو دایره $x^2+y^2=1$ ، $x^2+y^2=4$ در نیمه بالایی صفحه xy باشد.



$$I=\iint_R (3y-2y)\,dA$$

$$=\iint_R y\,dA=\int_0^{\pi}\int_1^2 r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{8-1}{3}\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{7}{3}\times(1+1)=\frac{14}{3}.$$

Scanned with CamScanner

P:129 Ex) مقدار $I=\int_C (\frac{3}{2}x^2y^2 - \underbrace{3y+3}_{P})dx + \underbrace{x^3y}_{Q}\,dy$ کدام است؟ هرگاه C منحنی به معادله $x^2+y^2-x-y=0$ یکبار پادساعتگرد پیموده شده باشد

1) π 2) $-\pi$ 3) 0 4) $\frac{3\pi}{2}$.

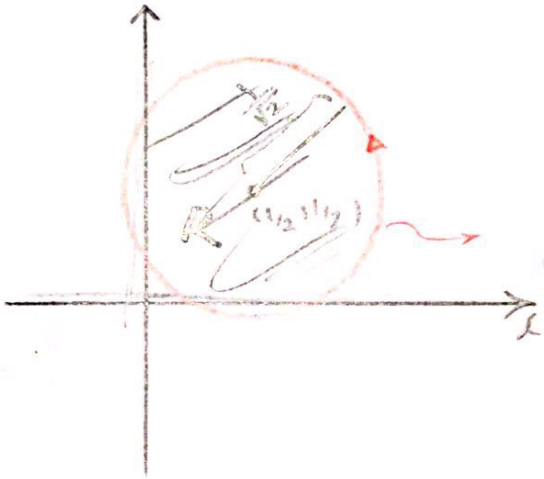
حل:

$$C: x^2+y^2-x-y=0 \Rightarrow (x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}+(y-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}=0$$

$$\Rightarrow (x-\tfrac{1}{2})^2+(y-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{2}$$

$$I \overset{\text{گرین}}{=} \iint_R (Q_x - P_y)\,dA$$

$$= \iint_R \left(3x^2y-(3x^2y-3)\right)dA$$



مساحت دو ضلعی مقدمه‌های ماست

$$= \iint_R 3\,dA = 3\underbrace{\iint_R dA}_{\text{مساحت R}} = 3\times\pi\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

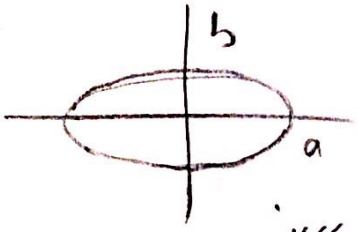
نتیجه از قضیه گرین: فرض کنیم C منحنی ساده و جهت مثلثاتی و R ناحیه درون آن باشد در این صورت

$$\iint_R dA = \int_C -y\,dx = \int_C x\,dy = \frac{1}{2}\int -y\,dx + x\,dy$$

Scanned with CamScanner

P:130

Ex) مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را بدست آورید.



$$c:\begin{cases} x=a\cos t \longrightarrow dx=-a\sin t\,dt \\ y=b\sin t \longrightarrow dy=b\cos t\,dt \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$$

$$\iint_R dA \overset{\text{نتیجه گرین}}{=} \frac{1}{2}\int_c -y\,dx+x\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -b\sin t(-a\sin t\,dt)+a\cos t(b\cos t)\,dt$$

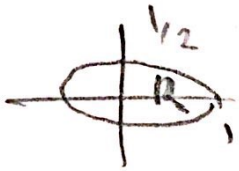
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\sin^2 t+ab\cos^2 t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1})\,dt$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\frac{1}{2}ab(2\pi)=\pi ab.$$

Ex) مقدار $I=\int_c \underbrace{y}_{P}\,dx+\underbrace{3x}_{Q}\,dy$ روی بیضی $x^2+4y^2=1$ برابر است با:

4π -4 2π -3 π -2 $\frac{\pi}{2}$ -1

حل: $c: x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1 \quad (a=1,\ b=1/2)$



$$I=\iint_R (Q_x-P_y)\,dA=\iint_R (3-1)\,dA=2\underbrace{\iint_R dA}_{R\text{ مساحت}}$$

$$=2\left(\pi\times 1\times\frac{1}{2}\right)=\pi.$$

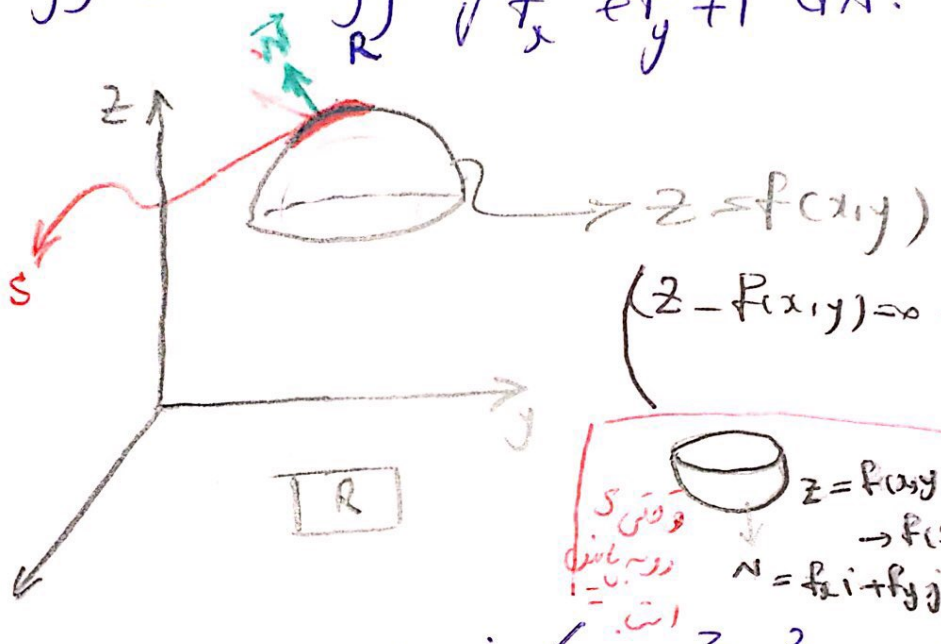
اگر گزینه‌ها جواب $-\pi$ هم موجود بود. این تست جای مناقشه داشت زیرا جهت بیضی در آن مشخص نشده است (خوب بود می‌نوشت بیضی با ساعتگرد $x^2+4y^2=1$.)

Scanned with CamScanner

مساحت سطح

فرض کنید S قسمتی از سطح $z=f(x,y)$ تعریف شده بر ناحیه R در صفحه xy باشد، در این صورت مساحت S را با $\iint_S d\sigma$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر حساب می‌کنیم

$$\iint d\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\, dA.$$



$\left(z-f(x,y)=0 \Rightarrow \vec{N}=-f_x i-f_y j+k,\ \|\vec{N}\|=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\right)$

$z=f(x,y)$

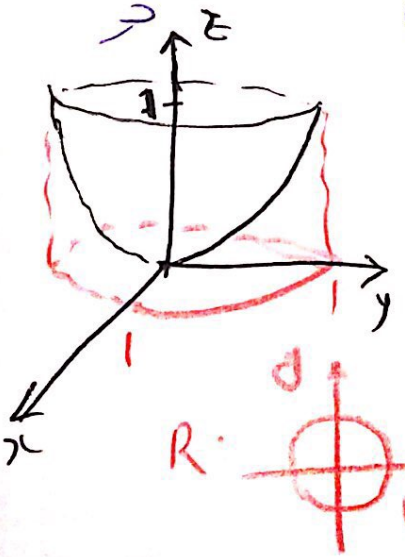
$\to f(x,y)-z=0$

$N=f_x i+f_y j-k$

وقتی S رو به بالا است

EX) مساحت قسمتی از رویه $z=x^2+y^2$ را که بین صفحات $z=0$ و $z=1$ محدود است، برابر با:

1- 2π 2- $\frac{4\pi}{3}$ 3- $\frac{\sqrt[3]{25}-1}{6}\pi$ 4- هیچکدام



$$S:\begin{cases} z=x^2+y^2=f(x,y) \\ \vec{N}=+2xi+2yj-k \\ R:\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}$$

$$\iint_S d\sigma = \iint_R \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dA$$

→

P:132

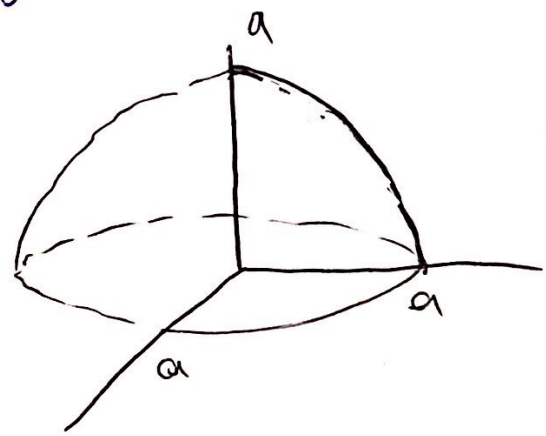
$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^1 8\sqrt{4r^2+1}\; r\,dr\,d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(4r^2+1)^{3/2}\Big|_0^1 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{12}\left((4+1)^{3/2}-1\right) 2\pi = (5\sqrt{5}-1)\frac{\pi}{6}$$

گزینه ۴

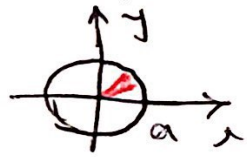
Q) مساحت نیمرو $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$ کدام است؟

1) πa^2 2) $2\pi a^2$ 3) $4\pi(a^2-1)$ 4) $\frac{4}{3}a^2\pi$



حل:

$$S:\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=f(x,y) \\ N=-\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,i-\dfrac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,j+k \\ R:\ x^2+y^2\le a^2 \end{cases}$$



$$\iint_S d\sigma = \iint_R \sqrt{\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}+1}\; dA$$

$$= \iint_R \sqrt{\frac{x^2+y^2+a^2-x^2-y^2}{a^2-x^2-y^2}}\; dA \overset{(a>0)}{=} \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\, dA$$

$$= \frac{a}{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{(-2)\,r\,dr\,d\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} = -\frac{a}{2}\times 2(a^2-r^2)^{1/2}\Big|_0^a (2\pi)$$

$$= -a\left((\underbrace{a^2-a^2}_{0})^{1/2}-(a^2)^{1/2}\right)2\pi = -a(-a)2\pi = 2\pi a^2$$

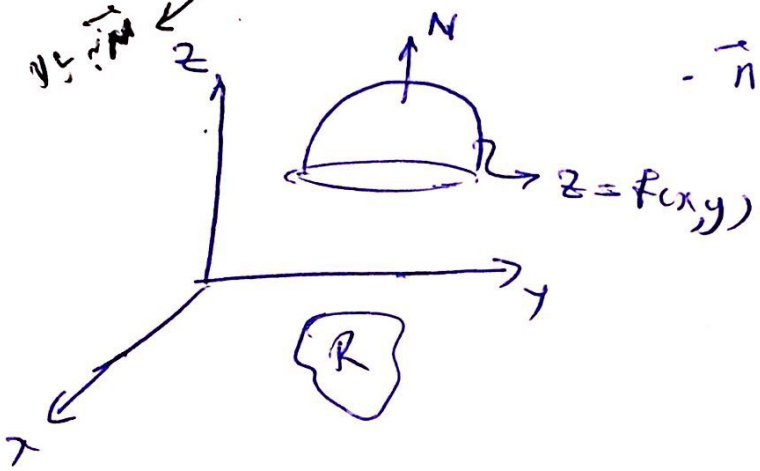
گزینه 2.

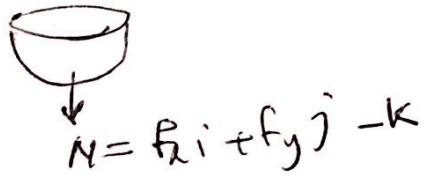
Scanned with CamScanner

p: 133

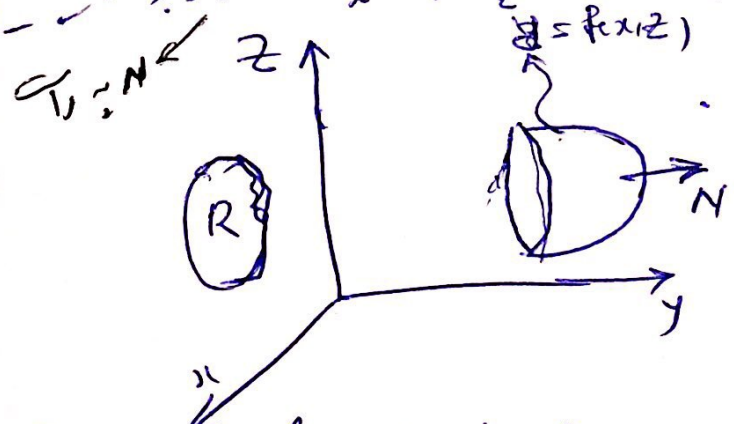
سوال: مساحت نیم پایینی کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ ، یعنی $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ برابر با کدام است؟

تعریف: اگر S قسمتی از سطح $z=f(x,y)$ تعریف شده بر ناحیه R در صفحه xy باشد، در این صورت بردار قائم خارجی آن عبارتست از: $\vec{N}=-f_x i-f_y j+k$ و بردار یکه قائم خارجی S عبارتست از $\vec{n}=\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$.



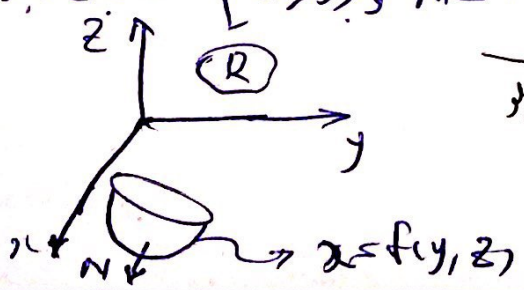


اگر S قسمتی از سطح $y=f(x,z)$ تعریف شده بر ناحیه R در صفحه xz باشد، در این صورت بردار قائم خارجی آن عبارتست از $\vec{N}=-f_x i+j-f_z k$ و بردار یکه قائم خارجی S عبارتست از $\vec{n}=\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$.



و اگر S قسمتی از سطح $x=f(y,z)$ تعریف شده بر ناحیه R در صفحه yz باشد، در این صورت بردار قائم خارجی آن عبارتست از $N=i-f_y j-f_z k$ و بردار یکه قائم خارجی S عبارتست از $\vec{n}=\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$.

N به چپ

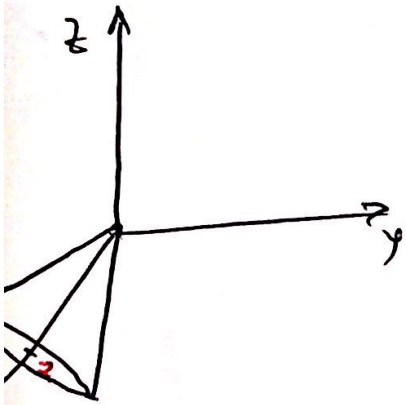


Scanned with CamScanner

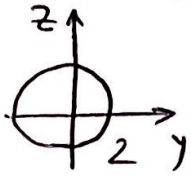
134

(Ex) مساحت قسمتی از مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$ که بین صفحات $x=0$ و $x=2$ قرار دارد کدام است؟

1) 2π 2) 4π 3) $\sqrt{32}\pi$ 4) 8π



$$S:\begin{cases} x=\sqrt{y^2+z^2}=f(y,z) \\ N=-i+\dfrac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{y^2+z^2}}j+\dfrac{\cancel{2}z}{\cancel{2}\sqrt{y^2+z^2}}k \\ R: \end{cases}$$



$y^2+z^2\le 4$

$$\iint_S d\sigma=\iint_R\sqrt{1+\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2}{y^2+z^2}}\,dA$$

$$=\iint\sqrt{\frac{y^2+z^2+y^2+z^2}{y^2+z^2}}\,dA=\iint_R\sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}\underbrace{\iint_R dA}_{\text{مساحت } R}$$

$$=\sqrt{2}\times\pi\times 2^2=4\sqrt{2}\pi$$ گزینه 3

تعریف: فرض کنیم S قسمتی از سطح $z=f(x,y)$ تعریف شده بر ناحیه R در صفحه xy و $\vec{N}$ بردار قائم خارجی و $w=g(x,y,z)$ یک میدان اسکالر بر آن باشد، در این صورت انتگرال سطح میدان g بر S را $\iint_S g(x,y,z)\,d\sigma$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر حساب می‌کنیم

z از سطح نوشته شود

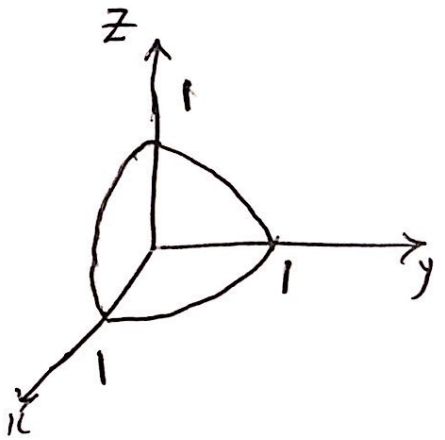
$$\iint_S g(x,y,z)\,d\sigma=\iint_R g(x,y,f(x,y))\,\|\vec{N}\|\,dA$$

Scanned with CamScanner

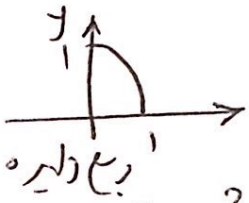
p: 135 — اگر $w = g(x,y,z)$ چگالی جرمی سطح S باشد، $\iint_S g(x,y,z)\,d\sigma$ جرم S است.

EA) اگر $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1,\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$ ، مقدار $\iint_S 3z\,d\sigma$ کدام است:

1- π 2- $\frac{\pi}{2}$ 3- $\frac{3\pi}{2}$ 4) $\frac{3\pi}{4}$



$$S: \begin{cases} z = \sqrt{1-x^2-y^2} = f(x,y) \\ N = -\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\,i - \dfrac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\,j + k \\ R: \end{cases}$$



ربع دایره

$x^2+y^2\leq 1$

z از سطح

$$\iint_S 3z\,d\sigma = 3\iint_R \sqrt{1-x^2-y^2}\,\|N\|\,dA$$

$$= 3\iint_R \sqrt{1-x^2-y^2}\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}+1}\,dA$$

$$= 3\iint_R \sqrt{1-x^2-y^2}\sqrt{\frac{x^2+y^2+1-x^2-y^2}{1-x^2-y^2}}\,dA$$

$$= 3\iint_R \cancel{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2-y^2}}}\,dA \overset{\text{RECICOL}}{=} 3\iint_R dA$$

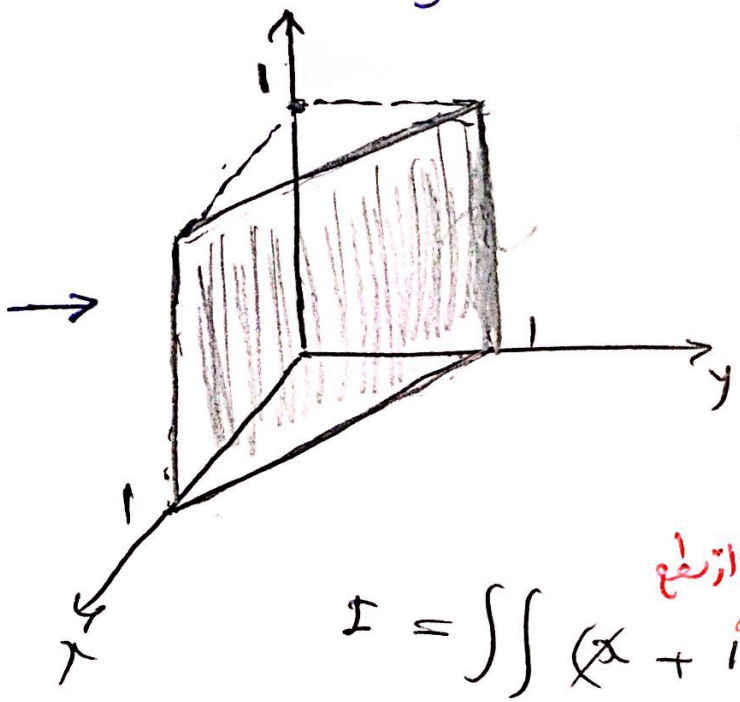
$$= 3\times\frac{1}{4}\times\pi\times 1 = \frac{3\pi}{4}.$$ گزینه 4

Scanned with CamScanner

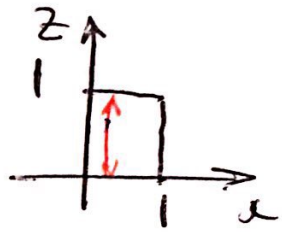
p:136

۵۴) مقدار $I=\iint_S (x+y+z)\,d\sigma$ که در آن S قسمتی از سطح $x+y=1$ با شرط $x,y,z\geq 0$ و $0\leq z\leq 1$ است برابر کدام است؟

1- $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 2- $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 3- $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 4) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$



$$S:\begin{cases} y = 1-x = f(x,z) \\ N = +i+j-0k = -f_x i+j- \\ R: \end{cases}$$



از سطح $y=f(x,z)=1-x$

$$I=\iint_R (\cancel{x}+\overbrace{1-\cancel{x}}+z)\sqrt{1+1+0}\,dA$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\int_0^1 (1+z)\,dz\,dx=\sqrt{2}\int_0^1\left(1+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$ گزینه ۱ ✓

Scanned with CamScanner

شار برونسو (یا شار به طرف خارج)

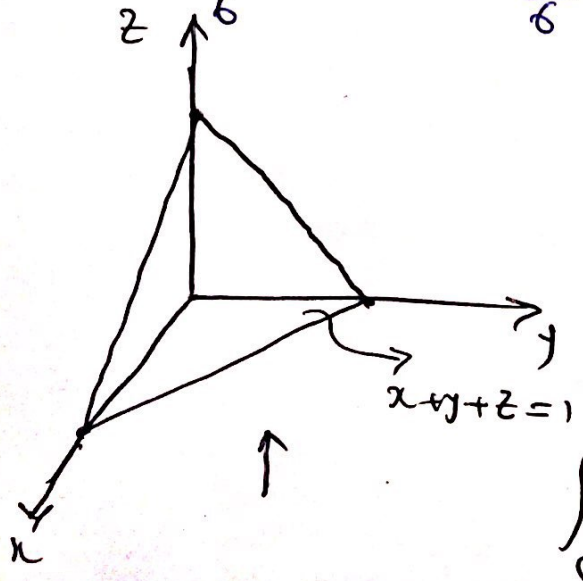
تعریف: فرض کنید دستگاه از سطح $z=f(x,y)$ تعریف شده در ناحیه R در صفحه xy و $\vec{n}$ بردار یکه قائم خارجی آن و $F=Pi+Qj+Rk$ یک میدان برداری باشد، در این صورت شار میدان F نسبت خارج S را با $\iint_S F\cdot n\,d\sigma$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر حساب می‌کنیم

$$\iint_S F\cdot n\,d\sigma = \iint_R F\cdot \frac{\vec{N}}{\cancel{\|N\|}}\,\cancel{\|N\|}\,dA$$

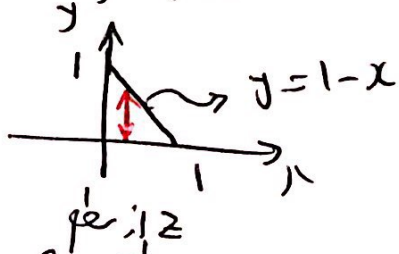
$$= \iint_R F\cdot \underbrace{\vec{N}}_{\text{از سطح } z}\,dA$$

EX) شار میدان $F=(x-2z)i-2xj-2yk$ به خارج مثلثی به رئوس $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ ، $(0,0,1)$ برابر با

$-\frac{1}{6}$ -4 $\quad -\frac{5}{6}$ -3 $\quad \frac{5}{6}$ -2 $\quad \frac{1}{6}$ -1



$$S:\begin{cases} z=1-x-y=f(x,y) \\ N=i+j+k \\ R: \end{cases}$$



$$\iint_S F\cdot n\,d\sigma = \iint_R \overbrace{F\cdot N}^{\text{از سطح } z}\,dA$$

صفحه بعد →

Scanned with CamScanner

P: 138

$$= \iint_R \left(x - 2(1-x-y) - 2x - 2y \right) dA$$

$$= \iint_R (x - 2 + \cancel{2x} + \cancel{2y} - \cancel{2x} - \cancel{2y})\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x-2)\, dy\, dx = \int_0^1 (x-2)\, y \Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 (x-2)(1-x)\, dx = \int_0^1 (x - x^2 - 2 + 2x)\, dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + 3x - 2)\, dx = \frac{-1}{3} + \frac{3}{2} - 2 = -\frac{5}{6}$$ گزینه ۲

— اگر در تست بالا ش به سمت درون را خواسته بود جواب $\frac{5}{6}$ درست است.

زیرا بجای $\vec{N} = i + j + k$ باقی $-i - j - k$ را لحاظ می‌کردیم و طبعاً حاصل انتگرال در یک منفی ضرب می‌شد.

Scanned with CamScanner

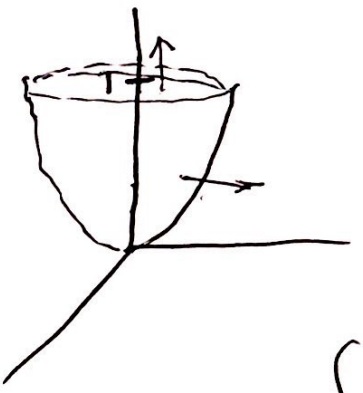
P:139

اگر $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$ و S_i ها تنها در مرز مشترک باشند آنگاه

$$\iint_S F\cdot n\, d\sigma = \iint_{S_1} F\cdot n\, d\sigma + \dots + \iint_{S_n} F\cdot n\, d\sigma$$

Ex) شار میدان $F=(x,y,z)$ خارج سطح مخروط $z=x^2+y^2$ که $0\le z\le 1$ ، همراه با صفحه $z=1$ کدام است

-2π -4 $-\pi$ -3 2π -2 π -1



$$S = S_1 \cup S_2 \rightarrow \iint_S F\cdot n\, d\sigma = \iint_{S_1} F\cdot n\, d\sigma + \iint_{S_2} F\cdot n\, d\sigma$$

$$S_1 : \begin{cases} z = 1 \\ n = k \\ R:\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$$

$$\iint_{S_1} F\cdot n\, d\sigma = \iint_R F\cdot N\, dA = \iint_R 2\, dA$$

$$= 2\times\pi\times 1 = 2\pi$$

$$S_2 : \begin{cases} z = x^2+y^2 = f(x,y) \\ N = +2x\,i + 2y\,j - k = f_x\, i + f_y\, j - k \\ R:\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$$

S روبه بالا

$$\iint_{S_2} F\cdot n\, d\sigma = \iint_R F\cdot N\, dA = \iint_R (+2x^2+2y^2-2)\, dA \xrightarrow{\text{قطبی}}$$

Scanned with CamScanner

P:145

$$= +2\iint_R (x^2+y^2-1)\,dA = +2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2-1)\,r\,dr\,d\theta$$

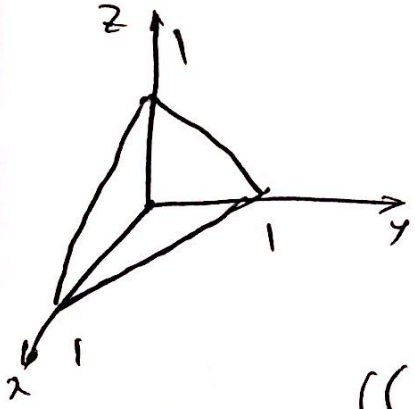
$$= +2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)(2\pi) = +4\pi\left(\frac{-1}{4}\right) = -\pi.$$

$$\iint_S F\cdot n\,d\sigma = \iint_{S_1} F\cdot n\,d\sigma + \iint_{S_2} F\cdot n\,d\sigma = 2\pi - \pi = \pi.$$

(حل مساله ترسم یا درخواهیم گرفت)

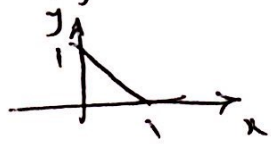
مثال: میدان $F = (y, x, z)$ خارج سطح جسم S واقع در هشتم اول محدود به صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=1$ کدام است

-4 -3 -2 -1



$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

$$S_1: \begin{cases} z = 1-x-y \\ N = i + j + k \\ R: \end{cases}$$



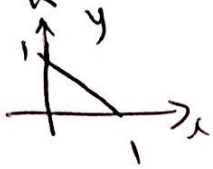
$$\iint_{S_1} F\cdot n\,d\sigma = \iint_R \underbrace{F\cdot N}_{\text{بعد از } z}\,dA = \iint_R (y+x+1-x-y)\,dA$$

$$= \iint_R dA = \frac{1}{2}\times 1\times 1 = 1/2$$

R مثلث

p:141

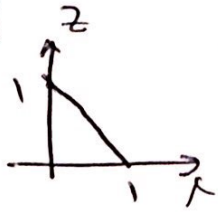
$$S_2 : \begin{cases} z = 0 \\ N = -k \\ R : \end{cases}$$



$$\iint_{S_2} F \cdot n \, d\sigma = \iint_R F \cdot \overset{\text{فقط از } z}{N} \, dA = \iint_R 0 \, dA$$

$$= 0$$

$$S_3 : \begin{cases} y = 0 \\ N = -j \\ R : \end{cases}$$



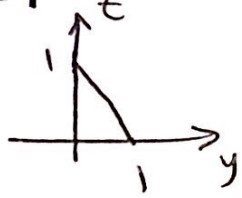
$$\iint_{S_3} F \cdot n \, d\sigma = \iint_R \overset{\text{فقط از } y}{F} \cdot N \, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} -x \, dz \, dx$$

$$= \int_0^1 -x(1-x) \, dx$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-1}{6}$$

$$S_4 : \begin{cases} x = 0 \\ N = -i \\ R : \end{cases}$$



$$\iint_{S_4} F \cdot n \, d\sigma = \iint_R \overset{\text{فقط از } x}{F} \cdot N \, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} -y \, dz \, dy$$

$$= -1/6$$

$$\iint_S F \cdot n \, d\sigma = \frac{1}{2} + 0 - 1/6 - 1/6 = 1/6$$

«راه حل ساده‌تر هم یاد می‌گیریم»

Scanned with CamScanner