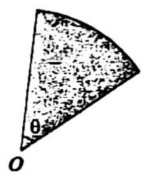
بسمه تعالی

امتحان اول المپیاد فیزیک (تابستان ۹۵)

مدت امتحان ۳ ساعت

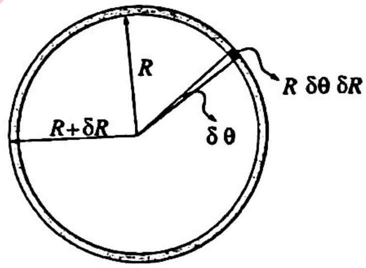
مسئله‌یِ ۱) این سوال دو بخش مستقل دارد:

a) الف- با استفاده از تحلیلِ ابعادی و اصلِ برهم‌نهی پتانسیلِ الکتریکی‌یِ ناشی از یک قطاعِ دایره‌ای به شعاعِ R و زاویه‌یِ θ را در مرکزِ قطاع، نقطه‌یِ O به دست آورید. قطاع به طور یک‌نواخت با چگالی‌یِ بارِ سطحی‌یِ σ باردار شده است.



یک ثابتِ نامعلوم در جوابِ شما می‌ماند. برایِ به دست آوردنِ این ثابت بندِ ب) را حل کنید.

a) ب- با استفاده از نتیجه بندِ الف) پتانسیلِ الکتریکی‌یِ ناشی از یک حلقه‌یِ دایره‌ای به شعاعِ درونی‌یِ R و شعاعِ بیرونی‌یِ $R+\delta R$ و چگالی‌یِ بارِ سطحی‌یِ σ را در مرکزِ حلقه به دست آورید. همین پتانسیل را به طورِ مستقیم و با تقسیم کردن حلقه به قطعاتِ کوچک به مساحتِ $R\delta\theta\delta R$ و استفاده از قانون کولن به دست آورید. با مقایسه دو جواب، ثابتِ نامعلوم در بندِ الف) را به دست آورید.



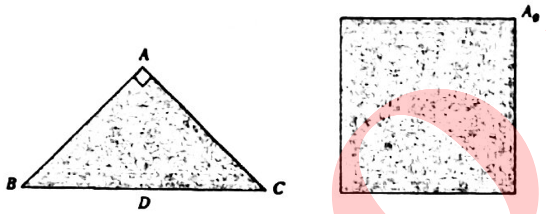
b) پتانسیلِ الکتریکی‌یِ ناشی از یک مربع به ضلعِ ℓ که به طور یک‌نواخت با چگالی‌یِ

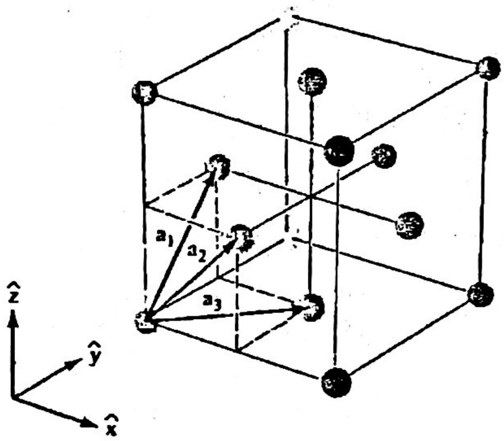
بارِ سطحیِ σ باردار شده در یک گوشه‌ی آن، که در شکل با نقطه‌ی A_0 نشان داده شده $\phi_{A_0} = 2\sigma\ell \sinh^{-1}(1)$ است. $\sinh^{-1}(1)$ ثابت است و با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$\sinh^{-1}(1) = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.88$$

b) الف- پتانسیل در نقطه‌های A و B راس‌های مثلثِ قائم‌الزاویه‌یِ متساوی‌الساقینِ ABC که طولِ ساق‌های آن ℓ است، چه‌قدر است؟

b) ب- پتانسیل در نقطه‌یِ D که AD ارتفاعِ مثلثِ قائم‌الزاویه‌یِ متساوی‌الساقینِ ABC است، چه‌قدر است؟





شکل ۱: شبکه‌ی fcc

مساله‌ی ۲)

شبکه‌ی fcc را مطابق شکل ۱ درنظر بگیرید. مبدا مختصات و بردارهای اولیه‌ی متقارن در شکل مشخص شده‌اند. اندازه‌ی ضلع مکعب را a بگیرید.

الف) بردارهای اولیه‌ای که در شکل آمده را در دستگاه مختصات مشخص‌شده بنویسید.

ب) حجم متوازی‌الاسطوحی که از بردارهای اولیه ساخته شده است را حساب کنید.

ج) با استفاده از بردارهای بخش الف، بردارهای $\vec{b}_1$، $\vec{b}_2$ و $\vec{b}_3$ در شبکه‌ی وارون را حساب کنید.

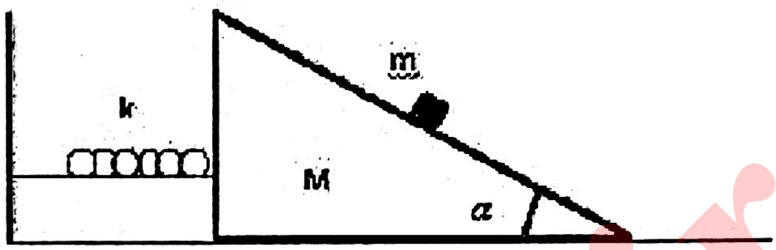
د) حجم سلولی که از بردارهای $\vec{b}_1$، $\vec{b}_2$ و $\vec{b}_3$ در شبکه‌ی وارون ساخته می‌شود را حساب کنید.

ه) با توجه به شکل ۱ تعداد همسایه‌های اول (نزدیک‌ترین نقاط به یک نقطه) و فاصله‌ی آنها از آن نقطه و تعداد همسایه‌های دوم (نزدیک‌ترین نقاط بعد از همسایه‌های اول) و فاصله‌ی آنها از آن نقطه را بنویسید.

و) شبکه‌ی وارونی که در بخش ج ساختید را در نظربگیرید. تعداد همسایه‌های اول و دوم و فاصله‌ی آنها را برای یک نقطه از این شبکه حساب کنید.

ز) صفحه‌ی [۱۱۱] در شبکه‌ی مکعبی ساده را در نظر بگیرید. زاویه‌ی بین بردار عمود بر سطح این صفحه و بردارهای اولیه‌ی متقارن شبکه‌ی fcc یعنی $\vec{a}_1$، $\vec{a}_2$ و $\vec{a}_3$ را حساب کنید.

مسئله ۳ــ در دستگاه شکل زیر جرم کوچک m در لحظه $t = 0$ در بالاترین نقطه از گوه ای به جرم M و زاویه شیب α قرار دارد و از حال سکون به پایین می لغزد. گوه با فنری به ضریب k به دیوار ثابتی متصل است و در لحظه $t = 0$ طول عادی خود را دارد. اصطکاک کلیه سطوح ناچیز است و بالاترین نقطه گوه از سطح میز ارتفاع H دارد.



الف) مختصات دکارتی جرم m نسبت به یک مبدا مختصات مناسب (که در شکل آن را نشان می دهید) را x و y و مختصه افقی گوه را X بگیرید. کلیه نیروها را در شکل مشخص کنید و قوانین حرکت متناظر با مختصات دکارتی یاد شده را بنویسید.

ب) قید یا قیود حرکت برروی مختصات دکارتی را به دست آورید.

ج) مختصات تعمیم یافته مناسبی معرفی کنید و در شکل مشخص کنید. سپس مختصات دکارتی یاد شده در بخش الف را بر حسب آنها به دست آورید.

د) با حذف نیروهای قیدی از معادلات حرکت و با استفاده از روابط بخش ج، معادلات حرکت را برای مختصات تعمیم یافته به دست آورید.

ه) کمیتهای پایسته را با استفاده از معادلات حرکت به دست آورید و مقدار آنها را معین کنید.

و) معادلات حرکت را حل کنید و با استفاده از روابط بخش ج و شرایط اولیه دستگاه کمیتهای $x(t)$، $y(t)$ و $X(t)$ را به دقت به دست آورید.

توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید.

مسئله‌ی ۴)

دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در خلاء به ترتیب در نقاط A و B به مختصات دکارتی $A: (x_1, 0)$ و $B: (x_2, 0)$ روی محور x از صفحه‌ی x-y در نظر بگیرید.

آ) مؤلفه‌های $E_x(x,y)$ و $E_y(x,y)$ میدان الکتریکی ناشی از این دو بار را در نقطه‌ی دلخواه $P: (x,y)$ بر حسب x_1 و x_2 بنویسید. (۱ نمره)

ب) طبق تعریف، یک خط نیرو منحنی است که میدان الکتریکی در هر نقطه بر آن مماس است، یعنی برای عنصر طول $d\vec{r}$ روی یک خط نیرو $d\vec{r}\|\vec{E}$ است. a) با استفاده از این خاصیت و جوابی که در قسمت آ) به دست آوردید معادله دیفرانسیلی بر حسب متغیرهای u و v که به صورت $u = \frac{x - x_1}{y}$ و $v = \frac{x - x_2}{y}$ تعریف می‌شوند به دست آورید. b) با انتگرال‌گیری از معادله‌ی دیفرانسیل، معادله‌ی خطوط نیروی ناشی از دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 را در صفحه‌ی x-y به دست آورید. (۲ نمره)

از این به بعد فرض کنید $q_1 > 0$ و $q_2 > 0$. همچنین همه‌ی زاویه‌ها نسبت به جهت مثبت محور x داده شده یا خواسته می‌شود.

پ) a) برای دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که به فاصله‌ی متناهی از یکدیگر قرار دارند خط نیرویی در صفحه‌ی x-y که با زاویه‌ی φ از بار q_1 خارج می‌شود را در نظر بگیرید. روی این خط نیرو و در فاصله‌ی بینهایت از دو بار، نقطه‌ی P را در نظر بگیرید. زاویه‌ی خط AP، θ را به دست آورید. b) برای خطوط نیروی مختلف محدوده‌ی تغییرات θ چقدر است؟ c) شیب خط مماس بر خط نیرو در نقطه‌ی P (مذکور در قسمت a)) چقدر است؟ (۳ نمره)

ت) a) برای دو بار نقطه‌ای q_1 و $-q_2$ که به فاصله‌ی متناهی از یکدیگر قرار دارند خط نیرویی در صفحه‌ی x-y که با زاویه‌ی φ از بار q_1 خارج می‌شود را در نظر بگیرید. این خط نیرو با چه زاویه‌ای به بار $-q_2$ می‌رسد؟ b) به ازای $q_1 > q_2$ بیشترین زوایه‌ی خط نیرویی که از q_1 بیرون می‌آید و به q_2 ختم می‌شود (یعنی به ازای زوایای بزرگتر از آن خط نیرو به بینهایت می‌رود) چقدر است؟ c) به ازای $x_1 = -a$ و $x_2 = a$ صفحه‌ی عمود منصف AB را در نظر بگیرید. خط نیرویی که موازی صفحه‌ی عمود منصف از q_1 خارج می‌شود و به

q_2– می‌رسد صفحه را در نقطه‌ای قطع می‌کند. فاصله‌ی این نقطه تا AB چقدر است؟ d) شار الکتریکی خالص گذرنده از دایره‌ای به شعاع a واقع در صفحه‌ی عمود منصف AB (مذکور در قسمت c)) که مرکزش روی خط AB است چقدر است؟ (۳ نمره)

انتگرال‌های زیر ممکن است سودمند باشد:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^{3/2}} = \frac{x}{b^2\sqrt{x^2+b^2}}$$

$$\int \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{b^2-x^2} - b\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-x^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{b}\right)$$

بسمه تعالی

امتحان دوم المپیاد فیزیک (تابستان 95)   مدت امتحان : 120 دقیقه

مسئله ی 1) آ) بارهای q_1، q_2، ...، q_N در مکان های مشخصی قرار دارند (شکل 1)، به طوری که فاصله ی بار i ام تا بار j ام برابر r_{ij} است. پتانسیل الکتریکی در محل بار i ام را با V_i نشان می دهیم. مقدار V_i را به دست آورید.

شکل ۱

شکل ۲

ب) اگر به جای بارهای قبل، بارهای q'_1 ، q'_2 ، ....، q'_N در همان مکان های قبل قرار بگیرد، پتانسیل الکتریکی در محل بار i ام، V'_i ، را به دست آورید.

ج) کمیت $E = \sum_{i=1}^{N}(q_i V'_i - q'_i V_i)$ را به دست آورید.

د) حال یک توزیع بار الکتریکی پیوسته در نظر بگیرید. فرض کنید با یک چگالی بار الکتریکی مشخص، عنصر بار الکتریکی در مکان $\vec{r}$ برابر dq و پتانسیل در این نقطه $V(\vec{r})$ است. اگر توزیع بار عوض شود، عنصر بار در مکان $\vec{r}$ می شود dq' و پتانسیل در این مکان می شود $V'(\vec{r})$. کمیت $E = \int(V'(\vec{r})dq - V(\vec{r})\,dq')$ را به دست آورید.

ه) اگر رسانایی با پتانسیل V باردار شود، در نقطه ی p بیرون این رسانا پتانسیل الکتریکی V_p است (شکل 2). اگر این رسانا به زمین وصل شود و یک بارنقطه ای q در نقطه ی p بگذاریم، بار القا شده روی رسانا چه قدر خواهد شد؟

و) اگر بار نقطه ای q به فاصله ی D از مرکز کره ی رسانایی با شعاع R که به زمین وصل است قرار گیرد، بار القا شده روی رسانا چه قدر است؟

ز) یک بار نقطه ای q بین دو صفحه ی رسانای بزرگ متصل به زمین قرار دارد. بار القا شده روی هر رسانا چه قدر است؟ فاصله ی بین دو صفحه d و فاصله ی بار از یکی از صفحه ها a است.

ح) اگر بار نقطه ای قسمت "ز" با سرعت v بین دو صفحه حرکت کند، جریان در سیم مدار صفحه های متصل به زمین چه قدر است؟

مسئله ی 2) یک کره عایق را در نظر بگیرید که به طور غیر یکنواخت باردار شده است. چگالی بار درون این کره به زوایای φ و θ بستگی ندارد اما به فاصله از مرکز کره مربوط است و از رابطه زیر تبعیت می کند:

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

که در آن R شعاع کره مزبور و ρ_0 عددی ثابت با بعد چگالی است.

الف) فرض کنید این کره را طوری درفضا قرار دادیم که مرکز آن منطبق بر مبدا مختصات است . بردار میدان الکتریکی در نقطه ای درون این کره به فاصله r از مرکز بر حسب بردارهای یکه ی مختصات قطبی یعنی $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ و $\hat{\varphi}$ به دست آورید.

ب) به کمک میدان به دست آمده نیرویی که دو نیم کره بالایی و پایینی به یکدیگر وارد می کنند را محاسبه کنید.

راهنمایی: یک جزء حجم در مختصات کروی به صورت زیر است

$$dv = r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi dr$$

ج) حال فرض کنید دو نیم کره عایق با شعاع های یکسان طوری به یکدیگر چسبانده شده اند که تشکیل یک کره کامل را داده اند. توزیع بار در هر دو نیم کره در زیر داده شده است:

توزیع بار نیم کره بالایی $\rho = \rho_u\left(1 - \frac{r}{R}\right)$

توزیع بار نیم کره پایینی $\rho = \rho_d\left(1 - \frac{r}{R}\right)$

نیرویی که این دو نیم کره به یکدیگر وارد می کنند را محاسبه کنید.

مسئله ۳ـ دو جرم نقطه ای m در دو انتهای فنری که ثابت آن k و طول عادی آن a است، بسته شده اند. این دستگاه داخل کره ای به شعاع R که سطح داخلی آن بدون اصطکاک است حرکت می کند. می خواهیم خودمان را به حالت هایی محدود کنیم که فنر به حالت افقی ، یعنی عمود بر شتاب گرانش، قرار دارد و هر دو جسم با دیواره داخلی کره در تماس هستند. برای این منظور باید شرایط اولیه دستگاه به شکل متقارن باشند، مثلا در یک لحظه خاص هر دو جسم ρ، $\dot\phi$ و $\dot z$ یکسانی در مختصات استوانه ای (ρ, ϕ, z) داشته باشند. به این ترتیب کافی است توجه خود را فقط به حرکت یکی از دو جسم جلب کنیم. اندازه شتاب گرانش g است.

الف) با استفاده از رابطه شتاب در مختصات استوانه ای به صورت

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$$

معادلات حرکت نیوتنی دستگاه را در یک چارچوب لخت، در مختصات استوانه ای بنویسید.

ب) قید یا قیود حرکت برروی مختصات استوانه ای را به دست آورید.

ج) مختصات تعمیم یافته مناسبی معرفی کنید و در شکل مشخص کنید. سپس مختصات استوانه ای یاد شده در بخش الف را بر حسب آنها به دست آورید.

د) با حذف نیروهای قیدی از معادلات حرکت و با استفاده از روابط بخش ج، معادلات حرکت را برای مختصات تعمیم یافته به دست آورید.

ه) ثابت های حرکت و سرعت زاویه ای ω_0 چه باشند تا دو جسم روی دایره ای افقی به شعاع ρ_0 بچرخند.

و) فرض کنید حول حرکت مذکور در بند قبل دستگاه نوسانات کوچکی به بالا و پایین داشته باشد. بسامد این نوسانات کوچک را بر حسب کمیتهای داده شده تا اینجا حساب کنید.

ز) حال شرایط اولیه دیگری در نظر بگیرید به طوری که در لحظه نخست دو جسم در دو سر قطر افقی کره قرار دارند و به آنها ضربه افقی یکسانی در دو جهت مخالف هم وارد می کنیم به طوری که اندازه سرعت اولیه افقی آنها v_0 باشد. تحت این شرایط مقدار ثابتهای حرکت را معین کنید. در این شرایط دستگاه بین دو دایره به شعاعهای ρ_1 و ρ_2 رفت و آمد می کند. این دو شعاع را تعیین کنید. (ممکن است برای یکی از این دو شعاع یک معادله به دست آید که حل آسانی نداشته باشد. در این صورت تا جای ممکن آن را ساده کنید.)

ح) تحت شرایط اخیر نیروی سطح کره به هر یک از دو جسم را بر حسب مختصه مناسب به دست آورید. شرایط اولیه ذکر شده در بند ح در چه شرطی صدق کنند تا در شروع حرکت جسم ها از سطح کره جدا نشوند.

توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید.

بسمه تعالی

امتحان سوم المپیاد فیزیک (تابستان ۹۵) مدت : ۲۴۰ دقیقه

مسئله ی ۱)

الف) میدان ناشی از یک خط بار خمیده با چگالی λ که بخشی از یک دایره با شعاع R و زاویه مرکزی α است را در مرکز آن به دست آورید.

ب) پاره خطی با چگالی بار الکتریکی λ در نظر بگیرید . از نقطه ی دلخواهی در فضا، دو خط به دو سر این پاره خط رسم می کنیم. حال دایره ای به مرکز این نقطه و در صفحه ی خطوط واصل و با شعاع فاصله عمودی نقطه مورد نظر تا پاره خط رسم می کنیم. در انتها بخشی از این دایره را که بین دو خط واصل محصور شده را با چگالی خطی بار λ باردار می کنیم. نشان دهید میدان ناشی از پاره خط بار اولیه و میدان ناشی از بخشی از دایره که ذکر شد در نقطه مورد نظر برابر هستند.

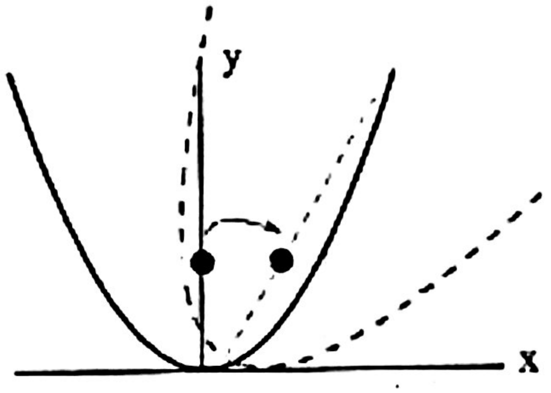
ج) مثلثی در نظر بگیرید که اضلاع آن با چگالی خطی بار λ باردار شده اند. نقطه ای را درون این مثلث به گونه ای انتخاب می کنیم که فاصله آن از اضلاع مثلث به ترتیب s_1، s_2 و s_3 باشد و این سه ضلع را به ترتیب با زوایای φ_1، φ_2 و φ_3 ببینند. شرطی برای این متغیرها به دست آورید که میدان در این نقطه صفر شود. این نقطه چه نقطه ای از مثلث است؟

د) مکان هندسی تمام نقاطی که میدان در آنها صفر می شود را به دست آورید.

تذکر: تمامی بخش ها بدون اثبات قابل قبول نخواهد بود.

مسئله ی ۲)

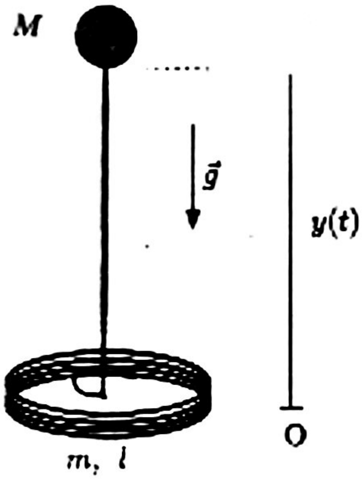
یک سهمی به معادله‌ی $y = k x^2$ دارای یک نقطه است به نام کانون، که روی محورِ تقارنِ سهمی به فاصله‌ی $\frac{1}{4k}$ از رأس سهمی قرار دارد، یعنی در مختصاتِ $(0,\frac{1}{4k})$.



فرض کنید سهمی روی محورِ x به سمت راست شروع به غلتشِ محض می‌کند. با غلتشِ سهمی، کانونش هم حرکت می‌کند. معادله‌ی مسیری که کانونِ سهمی طی می‌کند را بیابید. پاسخِ نهایی را به صورتِ $y = f(x)$ بنویسید.

انتگرالِ زیر ممکن است مفید باشد:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \text{ثابت}$$



۳) طنابی به طول l و جرم یکنواخت m به گلوله‌ای به جرم M وصل شده است. در لحظه‌ی $t = 0$ و در حالی که کل طناب روی سطح زمین قرار دارد یعنی $y = 0$ است به گلوله سرعت اولیه‌ی v_0 رو به بالا می‌دهیم. وضعیت این مجموعه در لحظه‌ی دلخواه t در شکل نشان داده شده است.

آ) سرعت گلوله را بر حسب y تا قبل از جدا شدن طناب از سطح زمین به دست آورید. (۷ نمره)

ب) کمترین مقدار سرعت اولیه، $v_{0_{min}}$، چقدر باشد تا تمام طناب بتواند از سطح زمین جدا شود. (۱ نمره)

پ) به ازای $v_0 > v_{0_{min}}$ ارتفاع اوج گلوله را به دست آورید. (۲ نمره)

راهنمایی:

سمت چپ معادله‌ی دیفرانسیلی به شکل

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x)$$

را با ضرب معادله در $g(x)$ مناسبی می‌توان به صورت مشتق کامل درآورد.

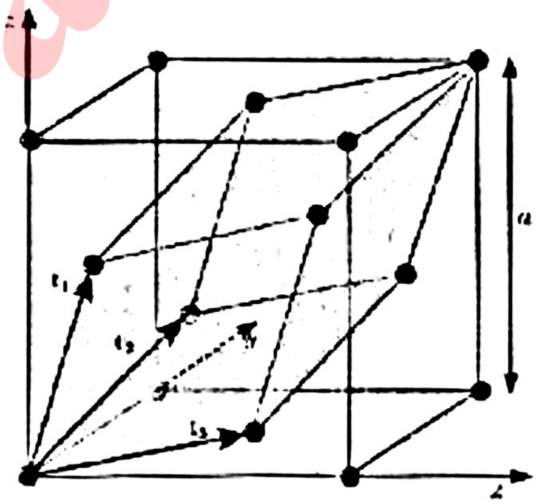
۴) دو بخش آ) و ب) از هم مستقل اند.

آ) فرض کنید یک کریستال با شبکه‌ی مکعبی ساده به عنوان زیرلایه در دست داریم. با لایه‌نشانی، لایه‌ای از همان ماده را بر روی صفحه‌ی [100] آن می‌نشانیم. اگر زاویه‌ی بین صفحات [100] از لایه و زیرلایه °63.43 باشد، اندیس‌های میلر صفحه‌ی [100] از لایه را در دستگاه زیر لایه به دست آورید. **(۵ نمره)**

یادآوری:

- **یک صفحه در کریستال موجودی فیزیکی است، حال آن که اندیس‌های میلر برای نمایش و بیان ریاضی آن صفحه استفاده می‌شود. در نتیجه برای یک صفحه در شبکه‌ی fcc می‌توان اندیس‌های میلر متناظر با شبکه‌ی مکعبی ساده را به کار برد، یا اندیس‌های میلری متناظر با خود شبکه‌ی fcc. اما هر دو نمایش، بیان موقعیت آن صفحه است.**

ب) صفحه‌ای از شبکه‌ی fcc که اندیس‌های میلرش با در نظر گرفتن بردارهای شبکه‌ی مکعبی ساده [321] است، با در نظر گرفتن بردارهای اولیه‌ی شبکه‌ی fcc چه اندیس‌هایی خواهد داشت؟ در شکل زیر بردارهای اولیه‌ی شبکه‌ی fcc یعنی t_1، t_2 و t_3 نشان داده شده است. **(۵ نمره)**



مسئله ی۵) این مسئله از دو قسمتِ مستقل تشکیل شده.

الف) در اتاقی N مولکول وجود دارد. فرض کنید توزیعِ اندازه‌ی سرعتِ مولکول‌ها به صورت $f(v) = a\, e^{-a\,v}$ داده شده است که v اندازه‌ی سرعت است و $a > 0$ یک ثابتِ معلوم. معنای تابعِ توزیع این است که احتمالِ این‌که اندازه‌ی سرعتِ یک مولکول بین v و $v + dv$ باشد برابر است با $f(v)dv$. پس داریم $\int_{v=0}^{\infty} f(v)dv = 1$. به طورِ هم‌ارز، می‌توان گفت اگر تعدادِ مولکول‌ها خیلی زیاد باشد، کسری از مولکول‌ها که سرعتشان بینِ v و $v + dv$ باشد برابر است با $f(v)dv$. تخمینی از سرعتِ سریع‌ترین مولکولِ این ظرف ارائه دهید.

ب) فرض کنید در قسمت $-L < x < L$ از فضای سه بُعدی، N لایه‌ی عایقِ باردار قرار دارد که موازی با صفحه‌ی yz هستند. از ضخامت لایه‌ها می‌توان صرف‌نظر کرد، و در راستای y و z ابعادشان را می‌توان بی‌نهایت فرض کرد. چگالی بارِ واحدِ سطحِ هر صفحه σ است. مختصه‌ی x هر لایه به طورِ تصادفی (و یکنواخت) در بازه‌ی $[-L, L]$ انتخاب شده است، و مکانِ هر لایه از مکانِ لایه‌های دیگر مستقل است (چون ضخامت ندارند، احتمالِ این که روی هم بیفتند صفر است). این طور مدل‌ها، گاهی برای مطالعه‌ی حرکت ستاره‌ها در کهکشان‌های دیسکی خیلی مسطح استفاده می‌شوند. نقطه‌ی A به مختصاتِ $(x_0, 0, 0)$ را در نظر می‌گیریم، که $0 < x_0 < L$. میدانِ برایند در نقطه‌ی A را با $\vec{E}$ نشان می‌دهیم. مقدارِ متوسطِ $\vec{E}$ را بیابید. همچنین مقدارِ متوسطِ چگالی انرژی میدانِ الکتریکی در نقطه‌ی A را به دست آورید. سپس با این فرض که نقطه‌ی A منطبق بر مبدأ باشد این پاسخ‌ها را ساده کنید. (یادآوری: چگالی انرژی میدان، $\frac{\epsilon}{2}|E|^2$ است).

بسمه تعالی

امتحان چهارمِ المپیاد فیزیک (تابستان ۹۵)

مدت امتحان ۴ ساعت

مسئله‌ی ۱) ذره‌ای به جرم m با سرعتِ اولیه‌ی صفر رها می‌شود و تحتِ تاثیرِ نیروی وزنِ خود سقوط می‌کند. نیروی مقاومتِ هوا که تابعی از سرعت است از دو بخشِ خطی نسبت به سرعت، $-bv$، و مجذوری نسبت به سرعت، $-\delta v^2$، تشکیل شده است، که b و δ دو پارامترِ ثابت و v سرعتِ ذره است. بخشِ مجذوریِ سرعت نیروی کوچکی است که می‌خواهیم آن را اختلالی بررسی کنیم. قانونِ نیوتن برای حرکتِ این ذره عبارت است از

$$m\dot{v} = mg - bv - \delta v^2.$$

الف– سرعتِ حدِ ذره را v_t بنامید. v_t را به دست آورید.

ب– با تغییرِ متغیرِ

$$u := v - v_t$$

و مقیاس کردنِ زمان با پارامترِ مناسب، معادله‌ی حرکتِ ذره را به صورتِ زیر در آورید.

$$\frac{du}{d\tau} = -u - \epsilon u^2.$$

رابطه‌ی زمانِ مقیاس‌شده، τ، را با زمان، t، و همچنین پارامترِ ϵ را بر حسبِ ثابت‌های مساله به دست آورید.

ج– حالا معادله‌ی

$$\frac{du}{d\tau} = -u - \epsilon u^2.$$

را اختلالی تا مرتبه‌ی سومِ ϵ حل کنید. حدسی برای حل تا مرتبه‌ی دلخواهِ n بزنید.

راهنمایی– جوابِ معادله‌ی

$$\frac{dy}{dx} + y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}, \quad \alpha, \beta \neq 1$$

به صورتِ

$$y(x) = A_0 e^{-x} + A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{\beta x}$$

است که ثابت‌هایِ A_1 و A_2 با جای‌گذاریِ این جواب در معادله و برابر قرار دادنِ ضرایبِ تابع‌هایِ نماییِ یکسان به دست می‌آید. ثابتِ A_0 هم با استفاده از شرطِ اولیه به دست می‌آید.

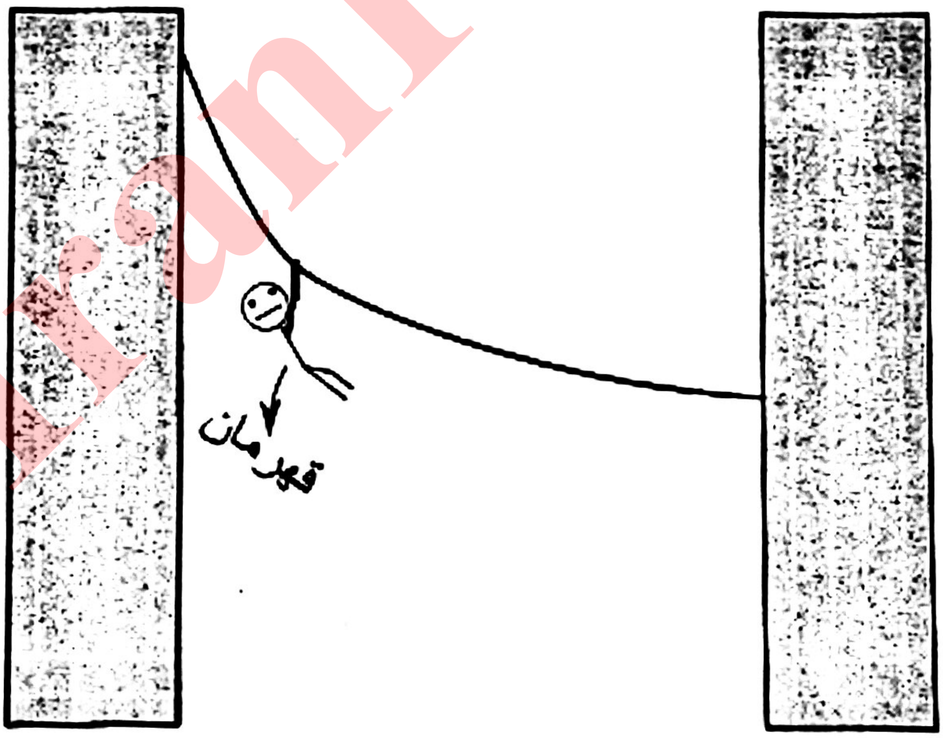
د– جوابی که در بندِ قبل به دست آورده‌اید را به صورتِ یک سری بنویسید و بدونِ آن‌که نگرانِ هم‌گراییِ سری باشید آن را جمع ببندید و جوابِ غیرِ اختلالیِ $u(\tau)$ را به دست آورید.

مسئله ی 2)

یک انتهای یک طناب با چگالی جرمی ثابتِ λ را در نقطه‌ی $(0, y_0)$ و انتهای دیگرش را به نقطه‌ی (x_e, y_e) متّصل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $x_e > 0$. کششِ افقی طناب در نقطه‌ی اتّصال را با T_0 نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم معلوم است. شتابِ گرانش g است. همچنین، برای کوتاهی نوشتار، تعریف می‌کنیم: $a = \frac{\lambda g}{T_0}$

الف) معادله‌ی سیم را به صورت $y = f(x)$ به دست آورید. پاسخ نباید هیچ ثابتِ مجهولی داشته باشد.

در بعضی فیلم‌های اکشن بعضاً دیده می‌شود قهرمانِ داستان از طنابی که یک انتهایش مثلاً به پنجره‌ای در یک برج و انتهای دیگرش به پنجره‌ای در برجی مجاور وصل شده، استفاده می‌کند که از این سمت به سمتِ دیگر برود. از اینجا به بعد فرض می‌کنیم $y_0 > y_e$ است.



در ادامه‌ی این مسئله می‌خواهیم معادله‌ی مسیری را بیابیم که قهرمان طی می‌کند. برای این کار، چند فرض ساده کننده اضافه می‌کنیم. اوّل این که فرض می‌کنیم ابعادِ قهرمان قابل صرف‌نظر است و می‌توانیم قهرمان را با یک جرمِ نقطه‌ای مدل کنیم. مکانِ این جرم را در محلِّ اتصالِ دستِ قهرمان (یا دستگیره‌ای که آن را روی سیم قرار داده) به سیم فرض می‌کنیم. همچنین فرض می‌کنیم سرعتِ قهرمان خیلی کم است به طوری که در هر لحظه می‌توان مسئله را استاتیک (همه چیز در حالت تعادل) در نظر گرفت، و می‌توان از ارتعاشاتِ سیم هم صرف‌نظر کرد. جرمِ قهرمان را با M نشان می‌دهیم.

ب) معادله‌ی مسیرِ قهرمان را به صورتِ $g(x,y) = 0$ به دست آورید. پاسخ نباید ثابتِ مجهولی داشته باشد.

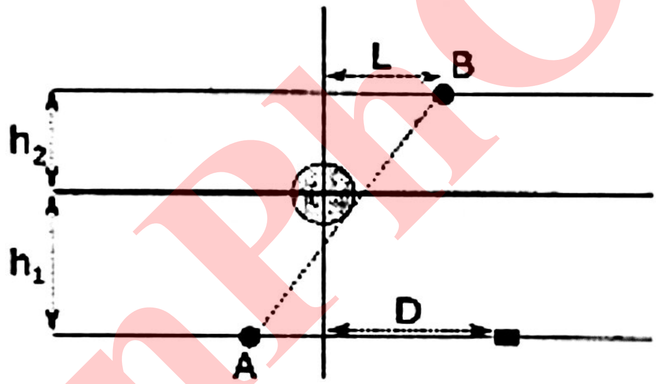
پ) در حدِّ $a \to \infty$ این معادله به چه معادله‌ای تبدیل می‌شود؟

ت) در حدِّ $a \to 0$ این معادله به چه معادله‌ای تبدیل می‌شود؟

ث) اوّلین تصحیحِ ناصفرِ معادله‌ی قسمتِ ب نسبت به حالتِ $a = 0$ را بیابید.

مسئله ی 3)

شکلِ زیر دو مسیرِ موازی (مثلاً دو پیاده رو) را نشان می‌دهد که یکی با $y = h_2$ داده شده و دیگری با $y = -h_1$. میان این دو مسیر، یک مانعِ دایره‌ای قرار دارد (مثلاً می‌تواند یک درخت باشد) به شعاعِ R که مرکزش را مبدأ مختصات می‌گیریم (نمای شکل، طبعاً از بالاست). در پیاده روی پایینی، شخصی (که او را با A نشان می‌دهیم) در حالِ راه رفتن به سمتِ راست است. A در لحظه‌ای که آن را $t = 0$ می‌گیریم، ناگهان متوجّه می‌شود که در پیاده‌روی بالایی، شخصِ B در حالِ حرکت به سمتِ چپ است.



بنا به عللی، A نمی‌خواهد که B ، او را ببیند. فرض می‌کنیم می‌شود با تقریبِ خوبی دو شخص را نقطه فرض کرد، به این معنا که اگر خطِّ واصلِ دو شخص با درخت تقاطع داشته باشد یا بر آن مماس باشد، آن‌گاه درخت مانعِ دیده شدنِ A خواهد شد، و در غیرِ این حالات، A حتماً دیده می‌شود. به عبارتِ دیگر، در هر لحظه، قطعه‌ای از پیاده‌روی پایینی وجود دارد که اگر A در آن قطعه باشد، دیده نخواهد شد. در ادامه با عبارتِ "ناحیه‌ی کور" به این قطعه اشاره می‌کنیم. در $t=0$ ، خطِّ واصلِ A و B ، بر درخت مماس است(همان طور که در شکل نشان داده شده)، که یعنی A در انتهای سمتِ راستِ ناحیه‌ی کور قرار دارد. در این لحظه، مکانِ B در $x_2 = +L$ است. سرعتِ B ثابت و جهتش به سمتِ چپ است. اندازه‌ی سرعتِ B را با v_2 نشان می‌دهیم.

در نقطه‌ی $(D,-h_1)$ ، دربِ مغازه‌ای قرار دارد. هدفِ A این است که در سریع‌ترین حالتِ ممکن، بدونِ دیده شدن، به درب برسد.

الف) در زمانِ t، طولِ ناحیه‌ی کور را بر حسبِ t و ثابت های مسئله بیابید.

برای سادگی محاسبات، از اینجا به بعد فرض می‌کنیم h_1 و h_2 هم‌مرتبه هستند و R خیلی از آنها کوچک‌تر است. محاسبات را تا مرتبه‌ی اوّلِ $\frac{R}{h_2}$ انجام می‌دهیم.

ب) فرض می‌کنیم A می‌تواند سرعتش را به دلخواه تنظیم کند (طبعاً با شتابِ محدود). در زودترین حالت، A در چه زمانی می‌تواند خود را بدونِ دیده شدن به دربِ مغازه برساند؟

پ) فرض کنیم A مطابقِ قسمتِ قبل عمل کرد و در سریع‌ترین حالت خود را به دربِ مغازه رساند. برای باز کردنِ دربِ مغازه و وارد شدن، A حداکثر چه قدر فرصت دارد؟

حالا فرض کنیم مسئله این قید را هم دارد که سرعتِ A ثابت است. برای سادگی محاسبات فرض می‌کنیم $h_1=h_2=H$ است، و همچنین $L=kH$ و $D=qH$ ، که k و q هر دو ثابت هایی مثبت از مرتبه‌ی 1 هستند و q از k بزرگ‌تر است. پس L,D,H همه هم‌مرتبه اند و محاسبات را تا مرتبه‌ی اوّلِ $\frac{R}{H}$ انجام می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم که در t=0 ، A در وسطِ ناحیه‌ی کور قرار دارد (دقّت کنید این با قسمت‌های قبل فرق دارد).

ت) حداقل سرعتی که A باید داشته باشد برای این‌که بدونِ دیده شدن خودش را به دربِ مغازه برساند چه قدر است؟

ث) حداکثر سرعتی که A می‌تواند داشته باشد برای این‌که بدونِ دیده شدن خودش را به دربِ مغازه برساند چه قدر است؟

مسئله ی 4)

یک کره‌ی توپُرِ نارسانا به شعاعِ R و به مرکزِ مبدأ مختصات در نظر بگیرید. فرض کنید تمامِ نقاطی را که در معادله‌ی $x^2 + y^2 < b^2$ صدق می‌کنند از کره خارج کنیم (مثلِ این است که چاهی به شعاعِ b در کره حفر کنیم و از مرکز بگذریم و به سمتِ دیگر برسیم). بارِ الکتریکی با چگالی حجمی مثبتِ ρ در حجمِ ماده‌ی نارسانا توزیع شده است. در همه‌ی قسمت‌های مسئله، فرض کنید $\frac{b}{R}$ خیلی کوچک است، به طوری که می‌توان از توانِ سوم و بالاترِ آن صرف‌نظر کرد.

الف) میدانِ الکتریکی را روی محورِ z بر حسبِ فاصله از مبدأ، برای نقاطِ $-\frac{R}{2} \le z \le \frac{R}{2}$ حساب کنید.

ب) پتانسیلِ مبدأ را صفر فرض کنید و پتانسیلِ الکتریکی را روی محورِ z بر حسبِ فاصله از مبدأ، برای نقاطِ $-\frac{R}{2} \le z \le \frac{R}{2}$ حساب کنید.

یک بارِ نقطه‌ای $-q$ به جرمِ m را که می‌تواند آزادانه روی محورِ z حرکت کند، از نقطه‌ی $(0,0,z_0)$ از حالتِ سکون رها می‌کنیم. فرض کنید $-\frac{R}{2} \le z_0 \le \frac{R}{2}$ است.

پ) سرعتِ بارِ نقطه‌ای را بر حسبِ z بیابید.

ت) سرعتِ بارِ نقطه‌ای را هنگامِ عبور از مبدأ بیابید.

حالا فرض کنید z_0 خیلی کوچک است.

ث) بسامدِ نوساناتِ کوچکِ بارِ نقطه‌ای حول مبدأ را بیابید.

بسمه تعالی

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۹۵)

مدت امتحان ۴ ساعت

مسئله‌یِ ۱) ذره‌ای به جرمِ m تحتِ پتانسیلِ $U(x) = \frac{kx^{2n}}{2n}$ قرار دارد به طوری که $k > 0$ و n عددی طبیعی است. حرکتِ ذره دوره‌ای با دوره‌یِ T است. متوسطِ زمانی‌یِ هر کمیت مثلِ $A(t)$ در یک دوره‌یِ T عبارت است از

$$\bar{A} := \frac{1}{T}\int_0^T A(t)dt$$

الف– تابعِ $G(t)$ را به صورتِ زیر تعریف می‌کنیم

$$G(t) := mx\dot{x}.$$

متوسطِ زمانی یِ $G(t)$ در یک دوره یعنی $\bar{G}$ چه‌قدر است؟

ب– با محاسبه‌یِ $\overline{\frac{dG}{dt}}$، یعنی متوسطِ زمانی‌یِ $\frac{dG}{dt}$، نسبتِ متوسطِ زمانی‌یِ انرژی‌یِ جنبشی، $\bar{K}$ و متوسطِ زمانی‌یِ انرژی پتانسیل، $\bar{U}$، یعنی $\frac{\bar{K}}{\bar{U}}$ را به دست آورید.

ج– در این بند فرض کنید $n = 1$ و مسئله یک نوسان‌گرِ هم‌آهنگِ ساده است. فرض کنید پارامترهایِ نوسان‌گر یعنی جرم و ضریبِ سختی‌یِ آن تغییرِ کندی نسبت به زمان داشته باشند، مثلاً

$$m(t) = m_0(1 + \epsilon t), \qquad \epsilon \ll 1/T,$$

در این صورت حرکت تقریباً دوره‌ای با دوره‌یِ $T = (2\pi)/\omega_0$ می‌ماند. این تغییر آن‌قدر کند است که در یک دوره، تغییرِ جرم و ضریبِ سختی بسیار ناچیز است یعنی

$$\frac{\dot{m}}{m} \ll \frac{1}{T}, \quad \frac{\dot{k}}{k} \ll \frac{1}{T}.$$

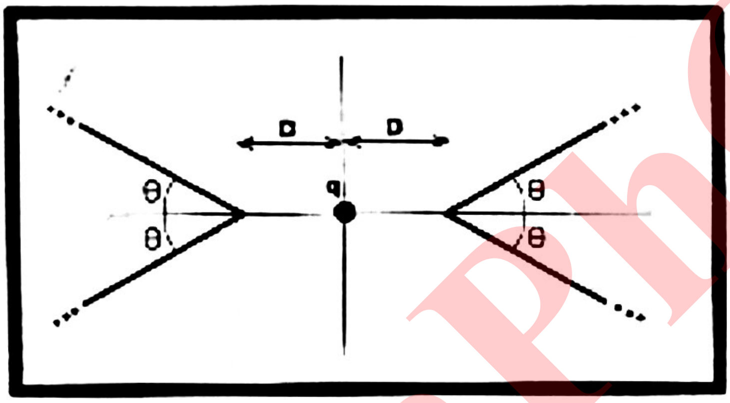
انرژی‌یِ نوسان‌گر دیگر پایسته نیست و معادله حرکت ذره $\frac{d(m\dot{x})}{dt} = -kx$ است. با چشم‌پوشی از توانِ بیش از یکِ مشتقِ مرتبه اولِ پارامترها، متوسطِ زمانی‌یِ تابعی از E، k، و m مثلِ $Em^{\alpha}k^{\beta}$ ثابت است. این تابع را به دست آورید.

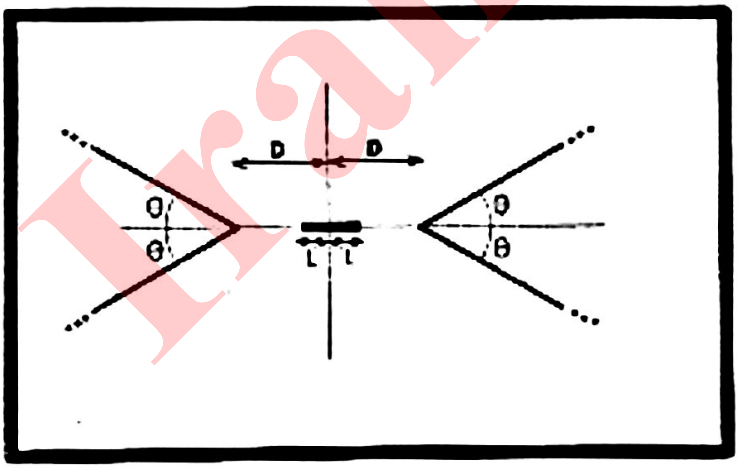
د– در این بند قیدِ $n = 1$ را کنار بگذارید و فرض کنید جرمِ m ثابت است ولی k تغییراتِ کندی نسبت به زمان دارد. انرژی‌یِ نوسان‌گر دیگر پایسته نیست ولی با چشم‌پوشی از توانِ بیش از یکِ مشتقِ مرتبه اولِ k، متوسطِ زمانی‌یِ تابعی از E، و k مثلِ Ek^{β} ثابت است. β را به دست آورید.

مسئله ی 2)

الف) بارِ الکتریکی با چگالی خطی λ روی ناحیه‌ی $x < 0$ روی محور x توزیع شده است. بردارِ میدانِ الکتریکی را در نقطه‌ی (a, b) بیابید. a مقداری مثبت است.

ب) چهار بارِ خطی نیمه بی‌نهایت مطابق شکل قرار دارند. زاویه‌ی میله‌ها با محورِ افقی θ است. چگالی بارِ خطی میله‌ها λ است. بارِ الکتریکی نقطه‌ای q به جرمِ m در مبدأ به حالتِ تعادل قرار دارد و فاصله‌اش از انتهای میله‌ها D است. بسامدِ نوساناتِ کوچک بار روی محور افقی حولِ نقطه‌ی تعادل را بیابید.



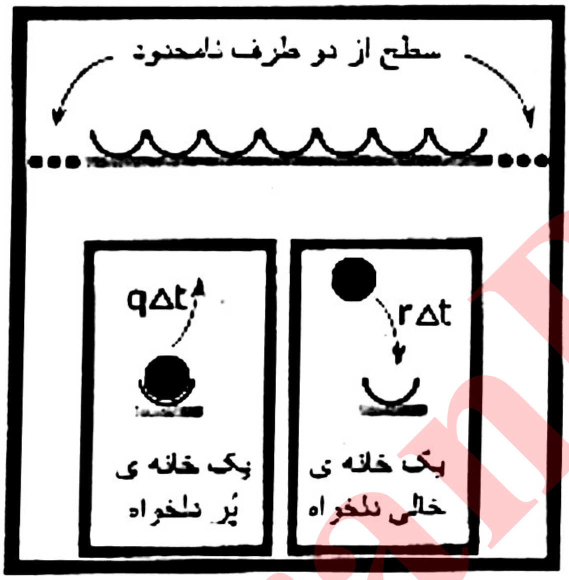


پ) قسمت قبل را برای حالتی تکرار کنید که به جای بارِ نقطه‌ای، یک میله‌ی نارسانا با با طولِ $2L$ و چگالی بارِ خطی λ' روی محور افقی به مرکز مبدأ مختصات قرار داشته باشد.

مسئله ی 3)

این مسئله از دو بخشِ مجزا تشکیل شده که ربطی به هم ندارند.

الف) در این مسئله مدلِ خیلی‌ساده‌شده‌ای از نشستنِ گرد و غبار روی دیوار را بررسی می‌کنیم. برای ساده‌گی، فرض می‌کنیم ذرّاتِ غبار با آهنگِ ثابتِ r روی یک سطحِ یک‌بُعدی فرود می‌آیند، به ترتیبی که توضیح داده خواهد شد. سطح را گسسته و نامتناهی در نظر می‌گیریم (مانند شکل)، که در آن خانه‌هایی به فواصلِ مساوی وجود دارد که ذرّات می‌توانند روی آن‌ها بنشینند. یعنی ذرّه ها نمی‌توانند در حدّ فاصلِ این خانه‌ها یا در خانه‌های پُر بنشینند. در $t = 0$ همه‌ی خانه‌ها خالی اند. یک خانه‌ی دلخواه را در لحظه‌ی دلخواهی در نظر بگیرید. اگر خانه خالی باشد، در مدّت زمانِ کوتاه Δt، با احتمالِ $r\Delta t$ یک ذرّه روی این خانه فرود می‌آید و آن را پُر می‌کند. اگر خانه پُر باشد، در مدّت زمانِ کوتاهِ Δt با احتمالِ $q\Delta t$ ذرّه‌ای که در خانه قرار دارد بیرون می‌رود (مثلاً در اثرِ باد). کسری از خانه‌ها که در زمانِ t پر هستند را با $\rho(t)$ نشان می‌دهیم. متوسّطِ $\rho(t)$ را بر حسبِ زمان بیابید. (پاسخ باید فقط به زمان و ثوابتِ بیان شده در صورتِ مسئله بستگی داشته باشد.)



ب) در حینِ تایپِ این مسئله، یک مورچه در کنارِ دیوار روی زمین در چند متری نگارنده در حالِ حرکت است، و کمی آن‌طرف‌تر، یک عنکبوت قرار دارد که گویا مورچه از حضورش آگاه نیست. مورچه از لانه‌اش دور است، و احتمالاً دیده‌اید که وقتی مورچه ها از مسیر معمولشان فاصله‌ی زیادی می‌گیرند، ردّ فرومونی که از خود به جا گذاشته‌اند را گم می‌کنند در مسیریابی حالتِ گیجی می‌گیرند. فرض کنید حرکتِ مورچه‌ی گیج را بتوانیم به صورتِ حرکتِ تصادفی مدل کنیم. فرض می‌کنیم مورچه روی محور x حرکتِ تصادفی می‌کند، به این ترتیب که ابتدا در x=0 است، و در هر گامِ زمانی، با احتمالِ p در جهتِ مثبتِ محورِ x به اندازه‌ی 1 واحد جلو می‌رود، و با احتمالِ q=1-p در جهتِ منفی محورِ x به اندازه 1 واحد حرکت می‌کند. حالا نقطه‌ی A واقع در x=+L را در نظر می‌گیریم (که $L > 0$ عددی طبیعی است) که عنکبوت آن‌جا ساکن است. فرض کنیم عنکبوت، هم گرسنه است، هم مورچه جزوِ رژیم غذایی‌اش هست، و هم این‌که اگر مورچه از A عبور کند حتماً خورده خواهد شد. احتمالِ این را حساب کنید که مورچه توسّطِ عنکبوت خورده نشود. می‌توانید به این نکات هم توجّه کنید:

– توجه: پاسخ باید به شکلِ بسته باشد، و پاسخی به صورتِ سِری یا ضربِ ساده‌نشده‌ی تعدادی محدود یا نامحدود از جملات ناپذیرفتنیست.

– راهنمایی: پاسخ، علاوه بر p، فقط به فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقطه‌ی شروع بستگی دارد.

– راهنمایی: یک رهیافتِ ممکن، این است که یک رابطه‌ی بازگشتی برای احتمالِ خورده شدن بنویسید، آن‌را حل کنید، و سپس از روی آن، احتمالِ خورده نشدن را بیابید.

-راهنمایی شدید: ممکن است در رهیافتِ فوق، ایده‌ای مانندِ آن‌چه سرِ کلاس به طورِ مختصر در مورد معادله‌ی چِپمَن-کُلمُگرُف گفتیم، مفید باشد.

۱۰/۲/۹۸

ادامه‌ی آزمون نهایی اول

مدت : ۲٫۵ ساعت

مسئله ی 4)

در این مسئله می‌خواهیم با روش‌های فیزیکی که در کلاس آموختیم، مدلِ خیلی‌ساده‌شده‌ای از یکی از مهم‌ترین پدیده‌های زیستی (شاید مهم ترینشان) را بررسی کنیم. اوّلین گام در تولیدِ مثلِ اکثرِ گونه‌های جانوری این است که سلول‌های جنسی، که در حالِ حرکت در محیطی هستند (که برای بعضی گونه‌ها این محیطِ بیرونِ بدن است و برای بعضی درونِ بدن است)، باید در آن محیط با هم برخورد کنند. تا کمتر از سه دهه‌ی پیش، تصوّرِ غالب این بود که این حرکت و رسیدنِ سلّول‌ها به هم، به طورِ تصادفی انجام می‌شود. این فرض در موردِ کم‌وبیش همه‌ی گونه‌های رده‌ی پستانداران وجود داشت. فرض این بود که سلّولِ جنسی ماده منفعل و بی‌حرکت است، و سلول‌های جنسی نر به طورِ تصادفی حرکت می‌کنند تا برخوردی بین‌شان صورت گیرد. یافته‌های نه‌چندان اخیر، غلط بودنِ این دید را نشان داده است. معلوم شده است که سلولِ جنسی ماده با ترشّحِ پروژسترون (که توسّطِ سلول‌های کومولوس دیواره‌ی سلّول جنسی ماده انجام می‌شود)، سیگنال‌های شیمیایی‌ای می‌فرستد که با آن، می‌تواند روی حرکتِ سلّول‌های جنسی نر اثر بگذارد (با تحریکِ یون‌های Ca^{2+} در کانال‌های یونی CatSper). طبقِ این دیدِ جدید، سلولِ ماده نقشی فعّال در فرایند تولید مثل دارد.

در این مسئله، مدل خیلی ساده‌شده‌ای از حرکت سلول‌های جنسی نر را در نظر می‌گیریم.

الف) ابتدا مدلِ خیلی‌ساده‌شده‌ای از دیدِ جدید (که در آن سلّولِ ماده فعّال است) در نظر می‌گیریم. مسئله‌ی حرکتِ تصادفی یک‌بُعدی را، همان‌طور که در کلاس دیدیم، در نظر بگیرید. سلّولِ نر ابتدا $x = x_0 > 0$ است، و در هر گامِ زمانی، با احتمالِ p در جهتِ مثبتِ محورِ x به اندازه‌ی 1 واحد جلو می‌رود، و با احتمال $q=1-p$ در جهتِ منفی محورِ x به اندازه‌ی 1 واحد حرکت می‌کند. این عدمِ تقارن در حرکت، به خاطرِ سیگنال‌های دریافتی از سلولِ ماده بروز می‌کند.

سلّولِ ماده در $x = L$ ثابت است. اگر سلّولِ نر به $x = L$ برسد، موفّق به تولیدِمثل می‌شود (x_0 و L اعدادی مثبت و طبیعی هستند و $L > x_0$ است). اگر سلّولِ نر به $x = 0$ برسد، بدونِ تولیدِمثل می‌میرد. احتمالِ موفّقیّتِ سلّول را بیابید. (یادآوری مفهومی: احتمالِ موفّقیّتِ را این طور تعریف می‌کنیم که اگر این فرایند تعدادِ دفعاتِ زیادی تکرار شود، احتمالِ موفّقیّتِ سلّولِ نر برابر است با کسری از این دفعات که سلّولِ نر قبل از این‌که از $x = 0$ عبور کند، از $x = L$ عبور کند). (راهنمایی ریاضیِ پایانِ سئوال، ممکن است مفید باشد)

ب) دقّت کنید چه سلّول اوّل به $x = L$ برسد و چه به $x = 0$ عمرش در همان لحظه به پایان می‌رسد (که خب در حالتِ اوّل این مصادف می‌شود با آغازِ یک زندگی جدید، در حالتِ دوم با هیچ). فرض کنید برای سلّولِ نر، عمر تعریف کنیم، به این ترتیب که اگر ذرّه در گامِ T اُم به نقطه‌ی $x = 0$ یا به نقطه‌ی $x = L$ برسد، حرکتش پایان می‌یابد و عمرش T است. نشان دهید متوسّطِ عمرِ ذرّه در این معادله صدق میکند: $T(x) = 1 + a\,T(x+1) + b\,T(x-1)$ ،

که در آن a و b ثوابتی هستند که باید تعیین کنید. (یادآوریِ مفهومی: منظور از متوسّطِ عمر، همان‌طور که درِ کلاس دیدیم، این است که تعداد دفعات زیادی فرایندِ بالا تکرار شود و از مقادیرِ T های این دفعات، متوسّط گرفته شود.) با حلّ این معادله (که برایش می‌توانید از راهنمایی پایانِ مسئله کمک بگیرید)، متوسّطِ عمرِ سلّولِ نر را بیابید.

حالا می‌خواهیم مدلِ خیلی‌ساده‌شده‌ای از دیدِ قدیمی را در نظر بگیریم.

سلّولِ نر را به عنوانِ یک ذرّه را در نظر می‌گیریم که حرکتِ تصادفی در سه بُعد انجام می‌دهد. برای ساده‌گی فرض می‌کنیم حرکتش این طور است که در زمانِ کوتاهِ δ، جابه‌جایی‌ای به اندازه‌ی Δ دارد که جهتِ آن یکی از این حالت‌ها است: یا در جهتِ مثبتِ محورِ x، یا در جهتِ منفیِ محورِ x یا در جهتِ مثبتِ محورِ y، یا در جهتِ منفیِ محورِ y، یا در جهتِ مثبتِ محورِ z، و یا در جهتِ منفیِ محورِ z. همان‌طور که در کلاس دیدیم، فرض می‌کنیم در حدِّ $\delta \to 0, \Delta \to 0$ داریم $\frac{\Delta^2}{\delta} \to D$، که D ثابتیِ معلوم است. فرض می‌کنیم که حرکت، کاملاً تصادفی و همسانگرد است، یعنی همه‌ی جهت‌های مذکور هم احتمال هستند. این فرضِ "کاملاً تصادفی بودن"، متناظر با دیدِ قدیمی است (که گفتیم غلط از آب در آمد، که البتّه اصلاً معلوم هم نیست از اوّل چرا فرضِ دیفالت باید آن می‌بوده).

دو ناحیه‌ی بسته‌ی مجزا در فضا در نظر می‌گیریم و آن‌ها را با Ω_1, Ω_2 نشان می‌دهیم. اگر ذرّه به هر نقطه‌ای از Ω_1 برسد، حرکتش پایان می‌یابد و تولیدمثل با موفّقیّت انجام می‌شود. اگر قبل از آن که به نقطه‌ای از Ω_1 برسد، به نقطه‌ای از Ω_2 برسد، می‌میرد و حرکتش پایان می‌پذیرد. در نقاطِ خارج از این دو ناحیه، حرکت به شکلی است که در بالا بیان شد (یعنی حرکتِ تصادفیِ کاملاً همسانگرد).

احتمالِ موفّقیّتِ سلّول را وقتی در مکانِ $\vec{r}$ است با $S(\vec{r})$ نشان می‌دهیم. یعنی $S(\vec{r})$ احتمالِ این است که اگر سلّول را در نقطه‌ی $\vec{r}$ رها کنیم، سلّول بالاخره با موفّقیّت به کارِ خود پایان دهد. به طورِ هم‌ارز می‌توان گفت که اگر تعدادِ دفعاتِ بسیار زیادی سلّول را از نقطه‌ی $\vec{r}$ رها کنیم، $S(\vec{r})$ کسری از این دفعات است که سلّول با موفقیّت به کارش پایان می‌دهد. به عبارتِ دیگر،

$S(\vec{r})$ کسری از این دفعات است که در آن‌ها، سلول قبل از اینکه از ناحیه‌ی Ω_2 عبور کند، به ناحیه‌ی Ω_1 برسد.

پ) معادله‌ی دیفرانسیلی (در مختصات دکارتی) بیابید که $S(\vec{r})$ در آن صدق می‌کند، و اگر حل شود $S(\vec{r})$ به طورِ یکتا تعیین می‌شود (پس دقّت کنید که شرایطِ مرزی این معادله را هم باید بنویسید).

فرض کنید به مرکزِ مبدأ مختصات، کره‌ای به شعاعِ R_1 داریم و کره‌ای بزرگ‌تر، هم‌مرکز با آن، به شعاعِ $R_2 > R_1$ قرار دارد. همچنین فرض کنید سلول در ابتدا در فاصله‌ی r از مبدأ قرار دارد، که r کمتر از R_2 و بیشتر از R_1 است. فرض کنید اگر سلول به فاصله‌ی R_1 از مبدأ برسد، حرکتش پایان می‌یابد و تولیدمثل انجام می‌شود. اگر قبل از آن به فاصله‌ی R_2 از مبدأ برسد، می‌میرد و حرکتش پایان می‌پذیرد.

ت) دقّت کنید برای سادگی فرض کرده‌ایم مسئله تقارن کروی دارد. بنابراین، $S(\vec{r})$ فقط به فاصله از مبدأ بستگی دارد. با این فرض، معادله‌ی دیفرانسیلی را که در بخش قبل یافته بودید، بازنویسی کنید. با حلّ این معادله و اعمالِ شرایطِ مرزی، احتمالِ موفّقیتِ سلول را بیابید.

ث) معادله‌ی دیفرانسیلی بیابید که متوسّطِ عمرِ سلول در آن صدق کند. شرایطِ مرزی را هم بنویسید (یعنی برای $r = R_1$ و در $r = R_2$ متوسّطِ عمر را بنویسید). معادله را با توجّه به تقارن کروی، ساده کنید. سپس آن را حل کنید و متوسّطِ عمرِ سلول را بیابید.

راهنمایی ریاضی 1

برای حلّ معادله‌ای به شکلِ $\psi(n) = a\,\psi(n-1) + b\,\psi(n+1)$، که در آن n عدد صحیح است و a و b ثابت اند، پاسخی به شکلِ $\psi(n) = r^n$ در معادله‌ی بالا جاگذاری کنید و دو پاسخِ ممکن برای r بیابید، که آن‌ها را با r_1, r_2 نشان می‌دهیم. سپس پاسخِ کلی را به صورتِ $\psi(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ بنویسید و C_1, C_2 را از روی شرایط مرزی تعیین کنید. اگر احیاناً r_1, r_2 مساوی بودند، شکلِ پاسخ را $\psi(n) = C_1 n\, r_1^n + C_2 r_2^n$ می‌گیریم.

برای حلّ معادله‌ای به شکلِ $\psi(n) = a\,\psi(n-1) + b\,\psi(n+1) + c$، ابتدا پاسخی به شکلِ $\psi_{خ}(n) = K_1 n + K_2$ در این معادله جاگذاری می‌کنیم و K_1, K_2 را با برابر گذاشتنِ توان‌های مختلفِ n در دو طرفِ معادله (بدونِ توجّه به شرایطِ مرزی)، می‌یابیم. به $\psi_{خ}(n)$، "پاسخِ خصوص" می‌گویند. قدمِ بعدی این است: c را صفر می‌گیریم و مانندِ پاراگرافِ قبل عمل می‌کنیم، و پاسخِ به دست آمده (که دو ثابتِ مجهول هم دارد) را با $\psi_h(n)$ نشان می‌دهیم (آن‌را "پاسخِ همگن" می‌نامند). پاسخِ نهایی را به صورتِ $\psi(n) = \psi_h(n) + \psi_{خ}(n)$ می‌نویسیم. این پاسخ دو ثابتِ مجهول دارد که با توجّه به شرایطِ مرزی باید تعیین شوند.

راهنمایی ریاضی 2

برای حلّ معادله ای به شکلِ $\frac{df(x)}{dx} + p(x)f(x) = q(x)$، یک راه این است که تابعِ $\mu(x) = \exp\left[\int p(x)dx\right]$ را در دو طرف ضرب کنیم و دقت می‌کنیم که سمتِ چپ برابر می‌شود با $\frac{d}{dx}[\mu(x)f(x)]$.

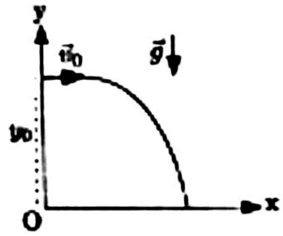
باسمه تعالی

امتحان المپیاد فیزیک (مرحله‌ی دوم)

۹۵/۶/۱۱

مدت: ۵ ساعت

مسئله‌ی 5) پرتابه‌ای به جرم m مطابق شکل در لحظه‌ی $t = 0$ از ارتفاع y_0 نسبت به سطح زمین با سرعت اولیه‌ی v_0 موازی سطح زمین پرتاب می‌شود. پرتابه همواره در یک صفحه‌ی قائم مانند x-y حرکت می‌کند.



علاوه بر نیروی وزن، نیروی مقاومت هوا به صورت $-mbv(t)\vec{v}(t)$ در تمام مسیر به پرتابه اعمال می‌شود که $\vec{v}(t)$ بردار سرعت لحظه‌ای و $v(t)$ اندازه‌ی آن است. b پارامتر ثابتی است. کمیت‌های بدون بعد $X = \frac{g}{v_0^2}x$، $Y = \frac{g}{v_0^2}y$، $T = \frac{g}{v_0}t$ و $B = \frac{v_0^2}{g}b$ را در نظر بگیرید.

آ) قانون دوم نیوتن را برای حرکت پرتابه، بر حسب کمیت‌های بدون بعد تعریف شده و در مختصات دکارتی بنویسید. (۱ نمره)

ب) با در نظر گرفتن B به عنوان پارامتر اختلال و نیز

$$X(T) = X^{(0)}(T) + BX^{(1)}(T) + B^2X^{(2)}(T) + \cdots$$
$$Y(T) = Y^{(0)}(T) + BY^{(1)}(T) + B^2Y^{(2)}(T) + \cdots$$

معادلاتی که از حل آن‌ها $X^{(0)}(T)$، $X^{(1)}(T)$، $X^{(2)}(T)$، $Y^{(0)}(T)$، $Y^{(1)}(T)$ و $Y^{(2)}(T)$ به دست می‌آید، بنویسید. (۲ نمره)

پ) $X(T)$ و $Y(T)$ را تا مرتبه‌ی اول B به دست آورید. (۴ نمره)

ت) زمان رسیدن پرتابه به سطح زمین و فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد به زمین تا مبدأ مختصات (برد پرتابه) را تا مرتبه‌ی اول b به دست آورید. (۳ نمره)

انتگرال‌های زیر ممکن است سودمند باشد:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$
$$\int (x^2 + a^2)^{3/2}\, dx = \frac{x}{4}(x^2 + a^2)^{3/2} + \frac{3a^2x}{8}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$
$$\int \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})\, dx = x\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}$$
$$\int x\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})\, dx = (\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4})\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{x}{4}\sqrt{x^2 + a^2}$$

مسئله6) لوزی $ABCD$ را در صفحه افقی و بدون اصطکاک xy در نظر بگیرید که مختصات رئوس آن به ترتیب چنین است: $A(a,0)$، $B(0,b)$، $C(-a,0)$ و $D(0,-b)$. چهار ذره به جرم m در چهار رأس این لوزی قرار دارند. چهار میله بدون جرم که روی اضلاع این لوزی قرار دارند جرم های مجاور را به هم وصل کرده اند. جرم های رو به رو نیز توسط دو فنر به ضرایب k_1 و k_2 که به ترتیب روی قطرهای افقی و عمودی لوزی قرار دارند و طول عادی آن ها $2a$ و $2b$ است به هم وصل هستند. این دستگاه چهار درجه آزادی دارد و حرکت آن از دو مد انتقالی، یک مد دورانی و یک مد نوسانی تشکیل شده است.

الف) بسامد و نسبت دامنه های نوسان اجزای دستگاه را در مد نوسانی آن به دست آورید. دامنه نوسان را نسبت به ابعاد لوزی کوچک بگیرید. دقت کنید که مد نوسانی باید عاری از حرکت انتقالی و دورانی باشد. همچنین می توان نشان داد که میله های بدون جرم به اجسامی که در دو انتهای آن ها قرار دارند نیرویی در امتداد میله وارد می کنند.

ب) مختصات لحظه ای جرم ها (شامل $x_A(t)$، $y_A(t)$، $x_B(t)$، ...) را برای کلی ترین حل دستگاه که شامل هر چهار مد است به دست آورید. فرض کنید در لحظه $t=0$ جرم ها در چهار راس لوزی ذکر شده در مقدمه قرار دارند، اما لزوما ساکن نیستند.

ج) فرض کنید در لحظه $t=0$ جسم واقع در نقطه C بر اثر ضربه ای افقی با سرعت اولیه v_0 در راستای x به حرکت در می آید و ذره واقع در نقطه A ساکن است. تحت این شرایط ثابتهای باقی مانده در جواب دستگاه (قسمت ب) را تعیین کنید و جواب کلی دستگاه را با این شرایط بنویسید. در لحظه شروع حرکت سرعت ذره های واقع در نقاط B و D چه هستند؟

د) فرض کنید در لحظه $t=0$ جسم واقع در نقطه D بر اثر ضربه ای افقی با سرعت اولیه v_0 در راستای x به حرکت در می آید و ذره واقع در نقطه B ساکن است. تحت این شرایط ثابت های باقی مانده در جواب دستگاه(قسمت ب) را تعیین کنید و جواب کلی دستگاه را با این شرایط بنویسید. در لحظه شروع حرکت سرعت ذره های واقع در نقاط A و C چه هستند؟

مسئله7)

در یک مدل فرضی از اتم فرض می کنیم بار $+Q$ در کره ای به شعاع R با چگالی یکنواخت توزیع شده و در بیرون آن بار $-Q$ از شعاع R تا بینهایت با چگالی دارای تقارن کروی و متناسب با r^{-4}، یعنی عکس توان چهارم شعاع، توزیع شده است.

الف) چگالی بار را در همه جای فضا به دست آورید.

ب) میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی را در بازه $r > R$ به دست آورید.

بار نقطه ای q به جرم m با سرعت اولیه v_0 از فاصله بسیار دور در سمت منفی محور x به سمت اتم حرکت می کند. مسیر حرکت ذره در فواصل دور از اتم موازی محور x و در فاصله $b < R$ از آن است. (به این فاصله پارامتر برخورد می گویند.) مرکز اتم در مبدا مختصات میخکوب است. هیچ نوع میدان گرانشی در کار نیست و حرکت ذره در اتم توزیع بار آن را بر هم نمی زند. برای توصیف حرکت از مختصات قطبی استفاده کنید.

ج) ثابت های حرکت را به دست آورید و مقدار آنها را تعیین کنید.

د) کمترین فاصله ذره از مرکز اتم را r_0 بنامید و آن را حساب کنید.

ه) کمیتهای $d\theta/dt$، dr/dt و $dr/d\theta$ را به عنوان توابعی از r به دست آورید.

و) زاویه انحراف نهایی ذره تابیده (زاویه پراکندگی) یعنی زاویه بین مسیرهای مجانبی ذره تابیده و پراکنده شده در زمانهای خیلی قبل و خیلی بعد از رسیدن به کمترین فاصله را حساب کنید.

کلیه جواب ها در هر مرحله باید بر حسب پارامترهایی که تا آن مرحله معرفی شده اند به ساده ترین شکل ممکن بیان شوند!

مسئله ی ۸)

دو استوانه رسانا که ارتفاع آنها نامتناهی است درون یکدیگر قرار گرفته اند. شعاع استوانه بزرگتر b و شعاع استوانه کوچکتر a است. در ابتدا محور این دو استوانه بر هم منطبق اند و از مبدا مختصات می گذرند.(مسئله دو بعدی است و محور هردو استوانه در راستای محور z است.) سپس محور استوانه کوچکتر را به طور موازی با محور استوانه بزرگتر کمی(به اندازه δ) در راستای محور y پایین می آوریم. استوانه بیرونی را به پتانسیل صفر و استوانه کوچکتر را به پتانسیل V_0 وصل می کنیم. می دانیم پتانسیل در فضای میان دو استوانه از رابطه زیر تبعیت میکند:

$$\Phi = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos(n\theta)$$

که در آن r فاصله از مبدا مختصات و θ زاویه با محور y میباشد .

الف) پتانسیل را در فضای بین دو استوانه تا مرتبه دوم نسبت به پارامتر اختلال δ به دست آورید.

ب) با در نظر گرفتن این سیستم به عنوان یک خازن، ظرفیت بر واحد طول(در راستای محور استوانه) را به دست آورید.

(تذکر مهم: جواب های نهایی خود را در کادر های مشخص شده بنویسید وگرنه ...)

هیچ موقع تیک عمودی را تمیز نکنید!!!