

## مسئله‌ی تعقیب

امیر آقامحمدی

مسئله‌ی تعقیب یعنی مسئله‌ی حرکت یک جسم (شکارچی) که بردار سرعتش همواره به سمت یک جسم متوجه دیگر (شکار) است. در این مقاله این مسئله برای چند وضعیت خاص مطالعه می‌شود.

### ۱ مقدمه

سوار دوچرخه‌ای هستیم و از جایی که زمین خیس است رد می‌شویم. وقتی به جایی که زمین خشک است برسیم، رد چرخ‌ها بر روی زمین می‌ماند. ممکن است جوری که ما چرخ را می‌رانیم رد کج و کوله‌ای از چرخ جلو بر روی زمین بماند ولی رد چرخ عقب حتماً انحرافی کمتری دارد. در حین حرکت دوچرخه، رد چرخ جلو روی زمین یک خم می‌سازد و چرخ عقب هم‌واره نقطه‌ی تماس چرخ جلو با زمین را تعقیب می‌کند. البته بدیهی است که هیچ‌گاه به آن نمی‌رسد. پدیده‌ای شبیه این را در تعقیب مورچه‌ها می‌بینیم. فایمن<sup>(۱)</sup> زمانی قطاری از مورچه‌ها را دید که به دنبال هم در حرکت‌اند. تکه‌ای قند را در وان حمام گذاشت و منتظر شد که مورچه‌ای آن را پیدا کند. او مسیر مورچه‌ی اول را با مدادرنگی روی زمین علامت گذاشت. مسیر مورچه‌ی اول یک مسیر کج و کوله‌ی و زیگزاگی بود. مورچه‌های بعدی که به دنبال غذا می‌آمدند دقیقاً همان مسیر را طی نمی‌کردند بلکه در مسیر هم‌وارتی به سمت غذا می‌آمدند [۱, ۲]. در واقع وقتی هر مورچه مورچه‌ی قبلی را تعقیب می‌کند به جای مسیر خمیده روی مسیر مستقیمی که به سمت مورچه‌ی جلویی است حرکت می‌کند. بنا بر این به تدریج مسیر حرکت مورچه‌ها هم‌وارت می‌شود. شکل ۱ را ببینید. در واقع مادامی که بردار سرعت دو مورچه‌ی مجاور موازی نیست فاصله‌ی دو مورچه کم می‌شود و وقتی که این دو مورچه روی خط راستی حرکت کنند فاصله‌شان ثابت می‌ماند. بالاخره اگر زمانی بردار سرعت همه‌ی مورچه‌ها موازی شود، آن‌ها روی یک خط مستقیم حرکت می‌کنند و فاصله‌شان هم ثابت می‌ماند.

مسئله‌ی تعقیب اصولاً به دو دسته تقسیم می‌شود. در دسته‌ی اول یک پیش‌قراروں وجود دارد که توسط تعقیب گر یا دسته‌ای از تعقیب گرها دنبال می‌شود. در این مسئله غیر از پیش‌قراروں هر کدام از

ثابت است و ما آن را با  $v$  نمایش می‌دهیم. قیدی که وجود دارد در مورد جهت سرعت شکارچی است که همواره رو به شکار است

$$\dot{r} = v \text{ s.} \quad (16)$$

$\ddot{S}$  بردار پکه‌ی در راستای بردار  $S$  است. بردار سرعت نسبی  $v$  شکار و شکارچی دو مؤلفه دارد

$$\dot{S} = R\omega \sin(\phi - \omega t) - v,$$

$$S\dot{\phi} = R\omega \cos(\phi - \omega t). \quad (17)$$

در حالتی که سرعت شکارچی از سرعت شکار بیشتر است،  $R\omega > v$ . پس  $0 < \dot{S}$  و بنا بر این پس از مدتی  $S = 0$  می‌شود.

در حالتی که  $v = R\omega$  است جز موقعی که  $\sin(\phi - \omega t) = 1$  است  $0 < \dot{S}$  می‌شود. در این حالت  $\phi = \omega t + k\pi/2$  و از رابطه‌ی دوم (17) نتیجه می‌شود

حالتي که باقی می‌ماند  $R\omega < v$  است. اگر دو معادله‌ی جفت‌شده‌ی (17) را بشود حل کرد بردار  $S$  و از آنجا بردار مکان شکارچی  $r$  و بالاخره معادله‌ی مسیر شکارچی به دست می‌آید. با تغییر متغیر

$$\psi = \phi - \omega t, \quad (18)$$

معادله‌های جفت‌شده‌ی (17) تبدیل می‌شوند به

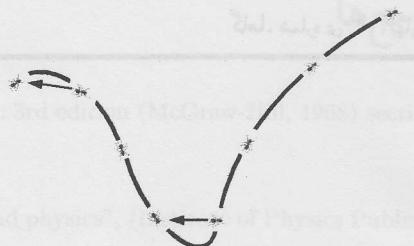
$$\dot{S} = R\omega \sin \psi - v,$$

$$S\dot{\psi} = -S\omega + R\omega \cos \psi. \quad (19)$$

اگر از معادله‌ی دوم نسبت به زمان مشتق بگیریم و  $S$  و  $\dot{S}$  را در آن جای‌گذاری کنیم به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی برای  $\psi$  می‌رسیم.

$$\ddot{\psi} \left( \frac{R \cos \psi}{\dot{\psi} + \omega} \right) + \dot{\psi} (2R \sin \psi - v) + \omega (R\omega \sin \psi - v) = 0. \quad (20)$$

اگرچه این معادله یک معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی است اما یک جواب برای آن می‌شود حدس زد. فرض کنید در لحظه‌ای  $\psi_c := v/(R\omega)$  است، و در همین لحظه  $\dot{\psi} = 0$  باشد، یا  $S = R \cos \psi_c$ ، در آن صورت از معادله‌ی دیفرانسیل (20) پیداست که  $0 = \ddot{\psi}$ . در این صورت از این پس  $\psi$  ثابت می‌ماند بعنی  $\psi = \psi_c$ . در این حالت  $\dot{S} = 0$  می‌شود. این جواب مربوط به حالتی است که شکارچی هم روی دایره‌ای کوچکتر به شعاع  $r = r_c := R \sin \psi_c$  با همان سرعت زاویه‌ای شکار به دنبالش می‌رود. در این حالت شکارچی هیچ‌گاه به شکار نمی‌رسد.

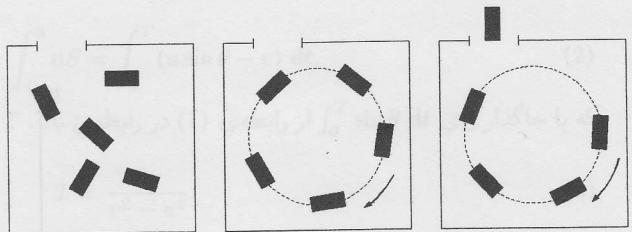


شکل ۱: هموار شدن مسیر مورچه‌هایی که به دنبال یک مورچه‌ی پیش‌فراول به دنبال غذا می‌روند.

تعقیب‌گرها همسایه‌ی جلویی خود را تعقیب می‌کند. دسته‌ی دیگری از مسائل تعقیب هستند که پیش‌فراول متمایزی وجود ندارد و هر کدام دیگری را تعقیب می‌کند. به این دسته از مسائل تعقیب چرخه‌ای می‌گویند. اولین مثال برمی‌گردد به مسئله‌ای که توسط لوکاس<sup>(۱)</sup> در سال ۱۸۷۷ مطرح شد [۳]. در این مسئله سه سگ روی رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. سرعت سگ‌ها یکسان است و هر کدام سگ مجاور خود را تعقیب می‌کند. سه سال بعد در [۴] راه حلی برای این مسئله ارائه شد. تعمیم آن به عنوان مسئله‌ی  $n$  حشره نیز حل شده است [۵]. اگر سرعت حشره‌ها با هم برابر باشد و آن‌ها روی رأس‌های یک  $n$  ضلعی‌ی منتظم باشند چنان‌که خواهیم دید پس از زمان محدودی همگی‌ی آن‌ها در مرکز  $n$  ضلعی‌ی به هم می‌رسند. اگر حشره‌ها روی رأس‌های  $n$  ضلعی‌ی منتظم نباشند یا اگر سرعت آن‌ها برابر نباشد چه می‌شود؟ پاسخ بخشی از این سؤال‌ها را می‌توانید در [۶] بیابید.

یکی از مسائلی که اخیراً مورد توجه قرار گرفته مسئله‌ی تعدادی ربات است. فرض کنید تعدادی ربات را به طور کثراهای درون اتاقی رها کردی‌ایم. این اتاق یک در دارد و می‌خواهیم این ربات‌ها این در را پیدا کرده و به طور منظم از اتاق خارج شوند. یک راه آن است که این ربات‌ها در مرحله‌ی اول روی یک مسیر دایره‌ای حرکت کنند و پس از آن هر رباتی که به در نزدیک‌تر بود از در خارج شود و بقیه‌ی ربات‌ها هم به ترتیب هر کدام پشت سر ربات دیگر از در خارج شوند. حالا سؤال این است که هر ربات چه‌گونه حرکت کند تا مجموعه‌ی ربات‌ها حرکتش روی دایره باشد [۷]. چنین مجموعه‌ی خودگردانی از ربات‌ها علاوه بر کاربردهای نظامی، در گروههای نجات مثلاً ربات‌های آتش‌نشان مورد توجه قرار گرفته.

آنچه در این مقاله می‌خواهیم بحث کرد این است که چه مجموعه‌ای از روابط می‌تواند یک مجموعه متمایز را در میان گروهی از ربات‌ها تشکیل دهد. این مسئله بسیار متشکل است و در این مقاله نیز تنها یک روش برای حل آن ارائه شده است. این روش از ایده‌ای استفاده می‌کند که در مقاله‌ای دیگر<sup>(۲)</sup> معرفی شده است. این روش این را ممکن می‌کند تا مجموعه متمایزی را در میان گروهی از ربات‌ها تشکیل دهد.



شکل ۲: مرتب شدن ربات‌ها و خروج منظم آن‌ها از یک راه فرار

## ۲ شکار و شکارچی

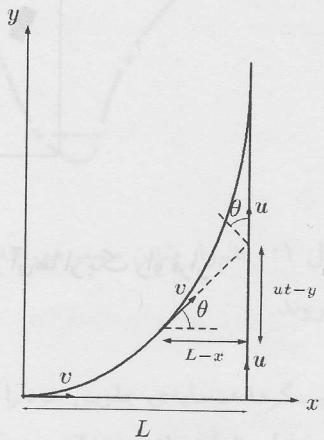
اگر در مسئله‌ی تعقیب با پیش‌قراری، خودمان را به دو موجود محدود کنیم مسئله تبدیل می‌شود به مسئله‌ی شکار و شکارچی. شکار، مثلًاً آهو، روی یک خم حرکت می‌کند و شکارچی، مثلًاً یوزپلنگ، او را تعقیب می‌کند. مدل ساده‌تر آن است که شکار روی یک خم داده شده و با سرعت ثابت حرکت کند. اندازه‌ی سرعت شکارچی را ثابت ولی جهت بردار سرعتش را هم‌واره به سمت شکار می‌گیریم. در مدل واقعی تر شکار روی خم معینی حرکت نمی‌کند. احتمالاً وقتی یوزپلنگ از حد معینی به آهو نزدیک‌تر می‌شود آهو تغییر جهت می‌دهد. پاسخ یوزپلنگ هم آنی نیست و این باعث می‌شود یوزپلنگ عقب بیفتد. یوزپلنگ نیز احتمالاً دقیقاً به سمت آهو نمی‌رود بلکه کمی جلوتر را نشانه می‌گیرد. در واقع هم شکار و هم شکارچی یک تأخیر زمانی در تصمیم‌گیری دارند. علاوه بر این سرعت و شتاب شکار و شکارچی هم ثابت نیست. توجه داشته باشیم که در مسئله‌ی واقعی شکار و شکارچی هر کدام خصوصیات ویژه‌ای دارند، مثلًاً روباه به عنوان شکارچی قدرت مأثُور زیادی دارد. روباه دُم بزرگی دارد. با چرخاندن دُم و استفاده از پایستگی‌ی تکانه زاویه‌ای به راحتی می‌تواند جهت حرکت خودش را به سرعت عوض کند. در نظر گرفتن همه‌ی این‌ها مسئله را سخت‌تر می‌کند.

بردار مکان شکار را  $\mathbf{R}$ ، سرعت شکار را « $\dot{\mathbf{R}}$ »، بردار مکان شکارچی را  $\mathbf{r}$  و سرعت شکارچی را  $\dot{\mathbf{r}}$  می‌گیریم. بردار فاصله‌ی نسبی‌ی آن‌ها  $\mathbf{r} - \mathbf{R}$ . بردار سرعت شکارچی را هم در راستای خط واصل شکار و شکارچی می‌گیریم؛ داریم

$$\dot{\mathbf{r}} = v \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}.$$

این معادله هم راه با معادله‌ی  $\dot{\mathbf{R}} = u^2 \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}$  و یک  $R(t)$  داده شده یک دسته معادله‌ی دیفرانسیل جفت‌شده برای مؤلفه‌های مکان شکارچی می‌دهند. ما دو مدل را این‌جا بررسی می‌کیم:

(۱) شکار روی خط، مستقیم حرکت می‌کند،



شکل ۳: شکار روی خطی مستقیم حرکت می کند و شکارچی او را تعقیب می کند.

(۲) شکار روی یک دایره حرکت می کند.

## ۱۰.۲ شکار روی خطی مستقیم حرکت می کند

ممکن است سؤال این باشد که که آیا بالاخره شکارچی شکار را می گیرد و این زمان چه قدر است. یا آن که سؤال در مورد مسیر شکارچی باشد. جواب سؤال اول را با محاسبه‌ی کوتاهتری می توانیم به دست آوریم.

برای سادگی فرض کنیم شکارچی در ابتدا در مبدأ و شکار روی محور  $x$  و در نقطه‌ی  $L = x$  است. اگر شکارچی به شکار برسد جایی که مولفه‌ی  $y$  مکان هر دو یک چیز مثلاً  $D$  است. در نقطه‌ای از مسیر زاویه‌ای که بردار سرعت شکارچی با محور  $x$  می‌سازد را  $\theta$  می‌گیریم. با توجه به این که مولفه‌ی  $y$  سرعت شکارچی  $v \sin \theta$  است نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} D = \int_0^T v \sin \theta \, dt, \\ D = uT, \end{cases} \Rightarrow \int_0^T \sin \theta \, dt = \frac{uT}{v} \quad (1)$$

که  $T$  زمان رسیدن شکارچی به شکار است. فاصله‌ی آن‌ها در ابتدا  $L$  است. اگر فاصله‌ی آن‌ها را با

$$-L = \int_L^0 dS = \int_0^T (u \sin \theta - v) dt, \quad (2)$$

که با جاگذاری  $y$  از رابطه  $(1)$  در رابطه  $y$  بالا،  $T$  به دست می آید

$$T = \frac{Lv}{v^2 - u^2}. \quad (3)$$

تنها در صورتی که  $v > u$  باشد شکارچی در زمان محدود به شکار می رسد. در این حالت

$$D = \frac{Lvu}{v^2 - u^2}. \quad (4)$$

حالا بیایید معادله مسیر شکارچی را به دست آوریم. اگر  $x$  و  $y$  را مختصه های مربوط به مکان شکارچی بگیریم

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

شرط آن که سرعت شکارچی رو به شکار باشد را می توان به صورت قیدی روی شیب مسیر شکارچی نوشت

$$\tan \theta = \frac{ut - y}{L - x}. \quad (6)$$

با مشتق گیری از این رابطه نسبت به زمان و جاگذاری  $\dot{x}$  و  $\dot{y}$  از رابطه های  $(5)$  نتیجه می شود

$$u \cos \theta = \frac{L - x}{\cos \theta} \dot{\theta}. \quad (7)$$

این رابطه را جوهر دیگری هم می توانستیم به دست آوریم. سرعت شکار در چارچوب شکارچی،  $w = u - v$ ، دو مؤلفه دارد یکی در راستای خط واصل شکار و شکارچی است

$$\dot{S} = w_{||} = u \sin \theta - v, \quad (8)$$

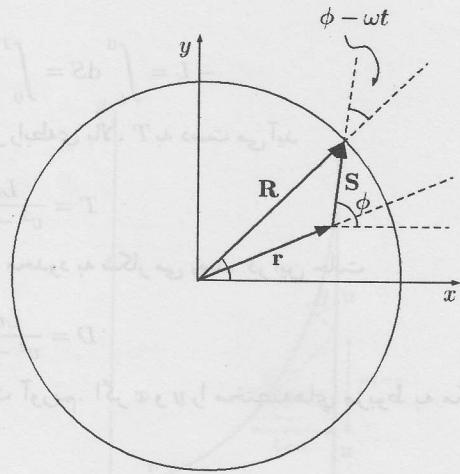
و دیگری مؤلفه عرضی این سرعت است،

$$S \dot{\theta} = w_{\perp} = u \cos \theta. \quad (9)$$

با جاگذاری  $S = (L - x) / \cos \theta$  در رابطه بالا،  $(7)$  به دست می آید. با تقسیم  $\dot{x}$  بر  $\dot{\theta}$  و استفاده از  $(5)$  و  $(9)$  نتیجه می شود

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{v(L - x)}{u \cos \theta} \Rightarrow \int_0^\theta \frac{u dx'}{v(L - x')} = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\cos \theta'}. \quad (10)$$

با انتگرال گیری از دو طرف نتیجه می شود



شکل ۴: شکار روی یک دایره حرکت می کند.

$$\tan \theta = \sinh \left[ \frac{u}{v} \ln \left( \frac{L}{L-x} \right) \right]. \quad (11)$$

اما  $\tan \theta$  شبیه مسیر شکارچی است. پس

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \left[ \frac{u}{v} \ln \left( \frac{L}{L-x} \right) \right] \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{L}{L-x} \right)^{u/v} - \left( \frac{L}{L-x} \right)^{-u/v} \right]. \quad (13)$$

با انتگرال گیری از این رابطه  $y(x)$  به دست می آید

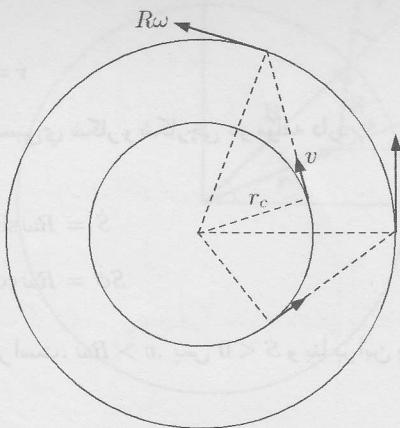
$$y(x) = \frac{L}{2} \left[ \frac{1 - (1-x/L)^{1-(u/v)}}{1-(u/v)} - \frac{1 - (1-x/L)^{1+(u/v)}}{1+(u/v)} \right]. \quad (14)$$

## ۲۰۲ شکار روی یک دایره حرکت می کند

فرض می کنیم شکار روی دایره ای به شعاع  $R$  با سرعت زاویه ای ثابت حرکت می کند. بردار مکان شکار عبارت است از

$$\mathbf{R} = R(\mathbf{i} \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t). \quad (15)$$

بردار مکان شکارچی  $\mathbf{r}$  و بردار مکان نسبی آنها  $\mathbf{S} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$  است. اندازه سرعت شکارچی نیز



شکل ۵: شکار و شکارچی روی دایره حرکت می کنند.

حالا باید پایی داری جواب را بررسی کنیم یعنی اگر  $r$  حول و حوش  $r_c$  و  $\psi$  نیز حول و حوش  $\psi_c$  باشد چه اتفاقی می افتد. تغییر متغیری به صورت زیر می دهیم.

$$S = R \cos \psi_c + \delta,$$

$$\psi = \psi_c + \epsilon. \quad (21)$$

وقتی  $\psi_c \approx \psi$  و  $r \approx r_c$  و  $\epsilon \approx \delta$  است. با استفاده از (19) و (21) و تقریب اول بر حسب  $\delta$  و  $\epsilon$  به معادله های زیر برای آنها می رسیم.

$$\dot{\delta} = \epsilon R \omega \cos \psi_c,$$

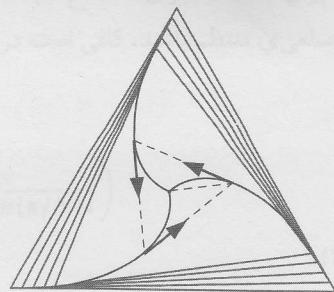
$$\dot{\epsilon} = -\frac{\delta \omega + \epsilon R \omega \sin \psi_c}{R \cos \psi_c}. \quad (22)$$

با حل این دو معادله، معادله دیفرانسیل مرتبه دویی برای  $\delta$  به دست می آید

$$\ddot{\delta} + \omega \tan \psi_c \dot{\delta} + \omega^2 \delta = 0. \quad (23)$$

برای به دست آوردن جواب معادله، نهاده  $e^{pt}$  را به عنوان جواب می گیریم. با جایگذاری این جواب دو مقدار برای  $p$  به دست می آید

$$p = -\frac{\omega}{2} \left( \tan \psi_c \pm \sqrt{\tan^2 \psi_c - 4} \right). \quad (24)$$



شکل ۶: سه ذره که روی رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند و با سرعتی یکسان هم‌دیگر را تعقیب می‌کنند.

بخشِ حقیقی‌ی هر دوی این جواب‌ها منفی هستند. پس با گذشت زمان  $0 \rightarrow \delta$ . یعنی اگر از جوابی شروع کنیم که  $r_c \approx \psi$  و  $r = r_c$  باشند این جواب به سمتی  $\psi = \psi_c$  و  $r = r_c$  می‌میل می‌کند.

### 3 تعقیب چرخه‌ای

#### 1.۳ حالت سه ذره

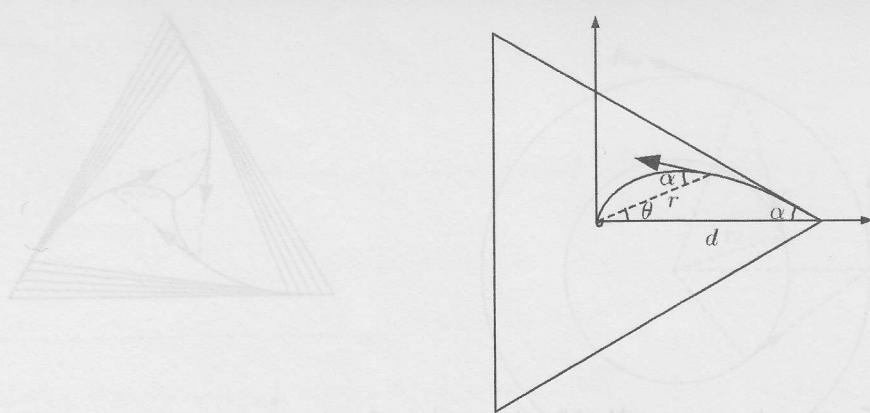
فرض کنید سه ذره روی رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی هستند. حرکت آن‌ها به گونه‌ای است که هر یک ذره‌ی جلویی خود را تعقیب می‌کند. در زمان کوتاه  $dt$  هر ذره به اندازه‌ی  $vdt$  جایه‌جا می‌شود. در این لحظه سه ذره روی رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری که کمی کوچک‌تر است قرار دارند. این مثلث کمی هم چرخیده است. همان‌طور که در شکل ۶ می‌بینید مثلثی که سه ذره روی رأس آن هستند می‌چرخد و کوچک می‌شود تا این که سه ذره در مرکز مثلث به هم برسند.

بردار سرعتی هر ذره در راستای یکی از اضلاع مثلث است و با خطی که به مرکز مثلث وصل می‌شود هم‌واره زاویه‌ی  $\alpha = \pi/6$  می‌سازد. کافی است مؤلفه‌های سرعت را در دستگاه قطبی بنویسیم.

$$\dot{r} = -v \cos \alpha,$$

$$r\dot{\theta} = v \sin \alpha. \quad (25)$$

از این معادله‌ها  $r(t)$  و  $\theta(t)$  به دست می‌آیند



شکل ۷: تعقیب چرخه‌ای سه‌ذره‌ای در چارچوبی که همراه مثلث می‌چرخد.

$$r(t) = d - v \cos \alpha t,$$

$$\theta(t) = \tan \alpha \ln \left( \frac{d}{d - v \cos \alpha t} \right). \quad (26)$$

با حذف  $t$  می‌توانیم معادله‌ی مسیر  $r(\theta)$  را نیز به دست آوریم. یک راه دیگر این است که دو معادله‌ی (25) را بر هم تقسیم کیم

$$\frac{dr}{r} = -\cot \alpha d\theta, \Rightarrow r(\theta) = d \exp(-\theta \cot \alpha). \quad (27)$$

زمانی که ذرات به هم می‌رسند  $r(T) = 0$  است و از اینجا  $T$  به دست می‌آید

$$T = \frac{d}{v \cos \alpha}. \quad (28)$$

از معادله‌ی دوم (26) پیداست که در زمان  $T$ ,  $\theta$  بی‌نهایت می‌شود. در واقع وقتی ذرات در مرکز مثلث به هم می‌رسند بی‌نهایت دفعه دور مرکز مثلث چرخیده‌اند. ممکن است این نتیجه غیرفیزیکی به نظر برسد ولی باشد توجه داشته باشیم این مطلب از فرض غیرفیزیکی ی بی‌بعد بودن ذرات ناشی شده است. اگر برای ذرات بعد قائل شویم وقتی ذرات به هم می‌رسند فاصله‌شان از مرکز مثلث دیگر صفر نیست و در این مدت هم  $\theta$  مقداری محدود دارد.

یک راه، ساده‌ی دیگر آن است که مسئله را در چارچوب دوّاری که همراه مثلث با سرعت زاویه‌ای  $\dot{\theta}$  می‌چرخد بررسی کنیم. در این چارچوب مثلث دیگر نمی‌چرخد بلکه فقط کوچک می‌شود و هر ذره روی خط راستی با سرعت  $v \cos \alpha$  به مرکز مثلث که ثابت است نزدیک می‌شود.

برای مثلث متساوی الاضلاع  $\alpha = \pi/3$ . اگر به جای سه ذره،  $N$  ذره داشتیم که روی رأس‌های یک  $N$  ضلعی منتظم باشند، کافی است در معادله‌های (26-28) به جای  $\alpha$ ،  $\pi/N$  قرار دهیم.

$$\begin{aligned} r(t) &= d_N - v \cos(\pi/N) t, \\ \theta(t) &= \tan(\pi/N) \ln \left( \frac{d_N}{d_N - v \cos(\pi/N) t} \right) \\ T &= \frac{d_N}{v \cos(\pi/N)}, \end{aligned} \quad (29)$$

$d_N$  فاصله‌ی رأس تا مرکز چندضلعی منتظم است.

## 4 یادداشت‌ها

- [1] R. P. Feynman; *Surely you are joking Mr. Feynman*, W. W. Norton & Company, 1985
- [2] G. S. Ranganath; *Why is an ant's trial straight? problems of pursuit*, Resonance (1996) 74.
- [3] E. Lucas; Nouvelles Correspondance Mathematique 3 (1877)
- [4] H. Brocard; Nouvelles Correspondance Mathematique 6 (1880)
- [5] A. Watton, D. W. Kydon; *Analytical aspects of the N-bug problem*, Amer. J. Phys. 37 (1969) 220-221.
- [6] F. Behroozi, R. Gagnon; *Cyclic pursuit in a plane*, J. Math Phys. 20 (1979) 2212-2216, T. Richardson; *Non-mutual captures in cyclic pursuit*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 31 (2001), 127-146, T. Richardson; *Stable polygons of cyclic pursuit*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 31 (2001), 147-172
- [7] J. A. Marshall, M. E. Broucke, B. A. Francis; *Formation of vehicles in cyclic pursuit*, IEEE Transactions of automatic control 49 (2004) 1963-1974.

اسامی-خاص

a) Feynman, b) Lucas