انتگرال‌های مثلثاتی :

چند انتگرال مثلثاتی موجود در جدول انتگرال (به توان‌ها توجه کنید) :

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \quad ; \quad \int 1+tg^2x\,dx = \int \sec^2 x\,dx = tg x \quad ; \quad \int \sec x\, tg x\,dx = \sec x \; ;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \quad ; \quad \int 1+cotg^2 x\,dx = \int \csc^2 x\,dx = -cotg x \; ; \quad \int \csc x\, cotg x\,dx = -\csc x \; ;$$

و نیز چند انتگرال مهم دیگر

$$\int \sin x \cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)$$

$$\int tg x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -Ln|\cos x|$$ مشتق مخرج در صورت ،

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x \times \frac{\sec x + tg x}{\sec x + tg x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x\, tg x}{\sec x + tg x}\,dx = Ln|\sec x + tg x|$$

& ...

را به یاد آورید.

روش کلی کار (در دو حالت کلی کار می‌کنیم) :

الف- با فرمول‌های مثلثاتی انتگرالده را ساده می‌کنیم و حل می‌نماییم :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

ب- انتگرال‌هایی که طی دو مرحله زیر به دو قسمت تبدیل (انتگرالده از) و با یک تغییر متغیر حل می‌شوند:

دوم : جدول تبدیلات	اول : جدول مشتقات
$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$, $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$	$(\sin x)' = \cos x$ و $(\cos x)' = -\sin x$
$\sec^2 x = 1+tg^2 x$, $\csc^2 x = 1+cotg^2 x$	$(tg x)' = \sec^2 x$ و $(cotg x)' = -\csc^2 x$
$tg^2 x = \sec^2 x - 1$, $cotg^2 x = \csc^2 x - 1$	$(\sec x)' = \sec x\, tg x$ و $(\csc x)' = -\csc x\, cotg x$
قسمت مانده انتگرالده باید برحسب تابعی باشد که مشتق آن در بخش قبل جدا شده است. بدین جهت توابع نامربوط را با جدول تبدیلات به فرم دلخواه تغییر می‌دهیم.	یک مشتق که باید کاملاً مانند عبارات موجود در جدول مشتقات به عنوان مشتق قسمت مانده انتگرالده را جدا می‌کنیم.

مثال $$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \times \cos x\,dx = \ldots$$

*** $u = \sin x$ برحسب ***

مثال: در ذکر مثال‌ها به دسته‌بندی‌ها و توان‌ها نیز دقت نمائید:

* دسته $\sin^p x \cos^q x$ *

* $\int \cos^2 x \, dx$ — p و q زوج هستند با کمک (الف) حل می‌کنیم:

$$= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} \quad \Box$$

* $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ — p و q زوج هستند با کمک (الف) حل می‌کنیم:

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$

اتحاد مزدوج $= \int \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x \, dx$ مجدداً الف

$$= \int \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x \, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x \quad \Box$$

* $\int \sin^4 x \, dx$ — p و q زوج هستند با کمک (الف) حل می‌کنیم:

$$= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1 - \cos 2x)^2 dx$$

اتحاد مربع $= \int \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - 2\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4}\right)$$

* $\int \cos^3 x\,dx = I$ p یا q فرد هستند با کمک (ب) حل می‌کنیم:

$$I = \int \underbrace{\cos^{2} x}_{\text{قسمت مانده اضافه و تبدیل به سینوس شود}} \cdot \underbrace{\cos x\,dx}_{\text{از جدول مشتقات}}$$

* : توان مانده فرد و حتما زوج باشد *

$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$ ت.م.

ادامه: $I = \int (1-\sin^2 x)\cdot \cos x\,dx$

$$\overset{\text{ت.م.}}{=} \int (1-u^2)\,du = u - \frac{u^3}{3} = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$$ □

* $\int \sin^5 x \cos^5 x\,dx$ p یا q فرد هستند با کمک (ب) حل می‌کنیم

$$= \int \sin^5 x \cos^4 x\,\underline{\cos x\,dx}$$

$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$ ت.م.

$$= \int \sin^5 x (\cos^2 x)^2 \cos x\,dx$$

$$= \int \sin^5 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx$$

$$\overset{\text{ت.م.}}{=} \int u^5 (1-u^2)^2\,du = \int u^5(1-2u^2+u^4)\,du$$

$$= \int u^5 - 2u^7 + u^9 = \frac{u^6}{6} - 2\frac{u^8}{8} + \frac{u^{10}}{10}$$

$$= \frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{4}\sin^8 x + \frac{1}{10}\sin^{10} x.$$ □

به همین منوال راجع به قالب‌های $tg^p x \sec^q x$ و $\operatorname{cotg}^p x \csc^q x$ صحبت می‌کنیم. توجه کنید که در جدول مشتقات برای سینوس و کسینوس توان یک (فرد) جدا می‌شد. حال برای سکانت یا کسکانت توان زوج (۲) جدا می‌شود. و در نهایت اگر نیاز باشد می‌توان یک توان یک از تانژانت و همزمان یک توان یک از سکانت جدا کرد.

(دقیق‌تر پاسخ‌های مشتق را در جدول ببینید)

$$* \int tg^{\frac{3}{2}} x \sec^4 x \, dx$$

توان مانده لزوماً زوج باشد.

$$= \int tg^{\frac{3}{2}} x \sec^2 x \underline{\sec^2 x \, dx}$$

$\hookrightarrow u = tg x \Rightarrow du = \sec^2 x \, dx$

$$= \int tg^{\frac{3}{2}} x (1 + tg^2 x) \sec^2 x \, dx$$

$$\text{ت.م} = \int u^{\frac{3}{2}} (1 + u^2) \, du$$

$$= \int u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{7}{2}} \, du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}$$

$$= \frac{2}{5} tg^{\frac{5}{2}} x + \frac{2}{9} tg^{\frac{9}{2}} x. \quad \blacksquare$$

$* \int tg^3 x \, dx$

$= \int tg^2 x \; tg\, x \, dx = \int (sec^2 x - 1)\, tg\, x \, dx$

$= \int \underbrace{tg x \; sec^2 x \, dx}_{u = tg x \Rightarrow du = sec^2 x dx} + \int -tg\, x\, dx$

$\int -tg\,x\,dx \to \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \to$ مشتق مخرج در صورت

$\int u\, du = \frac{u^2}{2}$

$= \frac{1}{2} tg^2 x + Ln|\cos x|$

$* \int Cotg^3 x \, csc^3 x \, dx$

$= \int \underbrace{Cotg^2 x}_{\text{تبدیل}} \, csc^2 x \; \underbrace{Cotg\, x \; csc\, x \, dx}_{u = csc x \Rightarrow du = -csc x \, Cotg x \, dx} \quad \times \frac{-1}{-1}$

$= -\int (csc^2 x - 1)\, csc^2 x \cdot (-1)\, Cotg x \, csc x \, dx$

$= -\int (u^2 - 1)\, u^2 \, du = -\int (u^4 - u^2)\, du$

$= -\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right)$

$= -\frac{1}{5} csc^5 x + \frac{1}{3} csc^3 x$

Scanned by CamScanner

۱۲۴۰

- انتگرال‌گیری از حاصل ضرب‌های سینوس و کسینوس با ضرایب زاویه متفاوت:

از فرمول‌های زیر برای ساده کردن استفاده می‌کنیم:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin (a+b)x + \sin (a-b)x\right)$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos (a+b)x + \cos (a-b)x\right)$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos (a-b)x - \cos (a+b)x\right)$$

مثال: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

* $\int \cos 2z \cos 4z \, dz$

زوج $= \cos(2z)$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(6z) + \cos(-2z)\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6z}{6} + \frac{\sin 2z}{2}\right). \quad \blacksquare$$

* $\int \sin \pi x \cos 2\pi x \, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(3\pi x) + \sin(-\pi x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 3\pi x}{3\pi} + \frac{-\cos(-\pi x)}{-\pi}\right). \quad \blacksquare$$