ساختمان اعداد

مقدمه : همه ما تصور نسبتاً روشنی از اعداد طبیعی داریم همچنین، البته نه در آن اندازه ، از اعداد صحیح ، گویا و گنگ و بطور کلی اعداد حقیقی . آیا همین اندازه کافی است؟ بلی ، اگر به تلاش عظیم ریاضیدانان در طول تاریخ اعتماد کنیم و بپذیریم که مبنای محکمی برای دستگاههای مختلف اعداد فراهم کرده‌اند . در این صورت می‌توانیم از بررسی دقیق‌تر اعداد صرف‌نظر کنیم و به شهود خود اعتماد کنیم ، و هرجا با ابهامی مواجه شدیم و تنها در اینصورت مراجعه‌ای به تاریخچه مطالعات دقیق ریاضیدانان در مورد اعداد بکنیم تا تصویری کلی از وضع موجود در ذهنمان شکل بگیرد . هدف این یادداشت چنین چیزی است .

بخش اول (اعداد طبیعی)

اعداد طبیعی ابزار شمارش هستند ، البته نه شمارش هر چیزی ! مثلاً تعداد دانه‌های سیب از قواعد جمع اعداد تبعیت می‌کند ولی تعداد قطرات آب نه . دو راه کلی برای معرفی ساختار اعداد طبیعی وجود دارد ، اصل موضوعی و ساختن آنها توسط اشیاء بنیادی‌تر ریاضی .

توجه کنید که در اینجا $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ در نظر گرفته می‌شود .

اصول موضوع پئانو برای اعداد طبیعی

فرض کنید که M یک مجموعه و $S: M\to M$ یک تابع باشد . فرض کنید اصول زیر بطور همزمان برقرار باشند :

① $0\in\mathbb{N}$ ② به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $S(n)\neq 0$

③ S یک به یک است

④ اصل استقرای ریاضی : اگر $A\subseteq\mathbb{N}$ به گونه‌ای باشد که $0\in A$ و به ازای هر $n\in A$ ، از $n\in A$ نتیجه شود $S(n)\in A$ ، آنگاه $A=\mathbb{N}$

در اینصورت گوییم $(M,S,0)$ در اصول پئانو صدق می‌کند .

توجه کنید که اصول فوق تضمین نمی کنند که مجموعهٔ $\mathbb{N}$ و $0 \in \mathbb{N}$ و تابع $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ با شرایطِ یاد شده وجود دارند (یعنی مدلی برای اصول مذکور). پس به عنوان یک اصل جدید می پذیریم که چنین است.

۵) اصل موضوع وجود: مجموعهٔ $\mathbb{N}$ و $0 \in \mathbb{N}$ و $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ با شرایطِ یاد شده وجود دارد. (مدلی برای اصول پئانو)

تذکر: تا اینجا ادعا نکرده ایم که اصول پئانو، مدل منحصر به فردی دارند و در واقع چنین نیست. (چرا؟) بعداً خواهیم دید که به یک معنای ضعیف، چنین خاصیتی برقرار است.

با همین چند اصل یاد شده، می توان همهٔ خواص آشنای اعداد را ثابت کرد. در این قسمت چند اثبات را برای نمونه می آوریم.

قضیه ۱. اگر $0 \neq n \in \mathbb{N}$ آنگاه عضو منحصر به فرد $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $n = S(m)$ (عضو ماقبل)

اثبات: فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی باشند که یا 0 اند یا عضو ماقبل دارند. اولاً $0 \in A$. ثانیاً اگر $0 \neq n \in A$ آنگاه $m \in S$ وجود دارد به طوری که $n = S(m)$. در اینصورت $S(n) = S(S(m)) \in A$ پس بنا به استقراء، $A = \mathbb{N}$،
منحصر به فردی عضو ماقبل نتیجه ای از اصل ۳ است.

با استفاده از استقراء می‌توان خواص اعداد را اثبات کرد، اما به ابزاری برای تعریف توابع بر روی اعداد طبیعی هم نیاز داریم. قضیهٔ بازگشت که در زیر می‌آید، ابزار اصلی در این مورد است. اثبات این قضیه در صفحهٔ ۱۶۴ کتاب استیوارت و تال آمده است.

قضیه (تعاریف بازگشتی). فرض کنید $f: X \to X$ یک تابع و $c \in X$ باشد.
در اینصورت تابع یکتایی چون $\phi: \mathbb{N} \to X$ وجود دارد به طوری که

۱) $\phi(0) = c$

۲) $\phi(S(n)) = f(\phi(n))$ به ازای هر n

مثال. ۱) تعریف جمع اعداد طبیعی:

$$\begin{cases} m+0=m \\ m+S(n)=S(m+n) \end{cases}$$

۲) تعریف ضرب اعداد طبیعی:

$$\begin{cases} m\cdot 0=0 \\ m\cdot S(n)=m\cdot n+m \end{cases}$$

۳) تعریف توان اعداد طبیعی: به ازای $m \neq 0$

$$\begin{cases} m^0=1 \\ m^{S(n)}=m^n\cdot n \end{cases}$$

قضیه. به ازای هر عدد طبیعی m داریم $0+m=m$

اثبات. فرض کنید $A=\{m\in \mathbb{N} : 0+m=m\}$

اولاً $0\in A$. ثانیاً اگر $m\in A$ آنگاه $0+m=m$ پس

$S(0+m)=0+S(m)=S(m)$ پس $S(m)\in A$

خواص آشنای $+$ و $\cdot$ اعداد طبیعی را می‌توان با همین روش ولی معمولاً با جزئیات زیاد اثبات کرد. از اینجا به بعد قرار می‌دهیم $1 = S(0)$ داریم $S(m) = m+1$

تعریف (ترتیب اعداد طبیعی). می‌نویسیم $m \geq n$ اگر و تنها اگر عدد طبیعی r موجود باشد به طوری که $m = r+n$ به علاوه

$$m > n \iff m \geq n \quad m \neq n$$

$$m \leq n \iff n \geq m$$

$$m < n \iff n > m$$

قضیه (تمرین). اگر $m \geq n$ و $n \geq p$ آنگاه $m \geq p$

اثبات. اعداد طبیعی r و s وجود دارند به طوری که $m = r+n$ و $n = s+p$.

بنابراین $m = r+(s+p) = (r+s)+p$. پس $m \geq p$.

قضیه (یکتایی ساختار اعداد طبیعی). هر دو مدل اصول پئانو یکریختند.

خلاصهٔ اثبات. فرض کنید $\mathbb{N}'$ و $0'$ و S' هم در اصول پئانو صدق می‌کنند. حال

تابع
$$\begin{cases} \phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}' \\ \phi(0) = 0' \\ \phi(S(m)) = S'(\phi(n)) \end{cases}$$
را با بازگشت تعریف می‌کنیم.

می‌توان نشان داد که تابع ϕ یک به یک و پوشا است

$$\phi(m+n) = \phi(m) +' \phi(n)$$

$$\phi(mn) = \phi(m) \cdot' \phi(n)$$

$$m \geq n \Rightarrow \phi(m) \geq' \phi(n)$$

پس $\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}'$ یکریخت هستند و ساختار مشابهی دارند.

روبکرد بنیادی تر به اعداد. تا اینجا اعداد طبیعی را به روش اصل موضوعی، اصول پئانو، معرفی کردیم. یعنی خواص پایه‌ای اعداد را فرض گرفتیم و تلاش کردیم بقیهٔ خواص را به کمک آنها ثابت کنیم. یک روش دیگر بررسی اعداد طبیعی، ساختن آنها به کمک مجموعه‌ها و سپس اثبات خواص اعداد به کمک اصول مجموعه‌هاست. این کاریست که معمولاً در نظریهٔ مجموعه‌ها که شاخه‌ای مستقل از ریاضیات است، به تفصیل انجام می‌شود. در اینجا تنها اشاره‌ای به تعریف مجموعه‌ای اعداد طبیعی می‌کنیم. تفصیل موضوع را در کتابهای نظریهٔ مجموعه ببینید.

تعریف. ①

$$\begin{cases} 0 = \emptyset \\ S(n) = n \cup \{n\} \\ n < m \iff n \in m \end{cases}$$

② جمع و ضرب این اعداد مانند قبل به روش بازگشتی تعریف می‌شوند.

بخش دوم : اعداد صحیح

به ازای دو عدد طبیعی m و n ، اگر $m \geq n$ آنگاه عدد طبیعی r وجود دارد به طوری که $m=n+r$. در این حالت تعریف می‌کنیم $r=m-n$. اما اگر $m<n$ باشد ، $m-n$ به عنوان یک عدد طبیعی تعریف نشده است . اگر بخواهیم دامنه اعداد را با این اشیاء گسترش دهیم ، می‌توانیم به روش زیر عمل کنیم .

تعریف . رابطه $\sim$ را روی مجموعه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم .

$$(m,n) \sim (r,s) \iff m+s=r+n$$

تمرین . رابطه $\sim$ ، یک رابطه هم‌ارزی است .

تعریف . اگر دسته هم‌ارزی شامل (m,n) را با $[m,n]$ نشان دهیم آنگاه تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{Z}=\{[m,n] : m,n \in \mathbb{N}\}$$

تعریف .

$$\langle m,n\rangle +_{\mathbb{Z}} \langle p,q\rangle = \langle m+p , n+q\rangle$$

$$\langle m,n\rangle \cdot_{\mathbb{Z}} \langle p,q\rangle = \langle mp+nq , mq+np\rangle$$

تمرین . اعمال $+$ و $\cdot$ فوق خوش‌تعریفند (یعنی مستقل از انتخاب نماینده دسته هم‌ارزی‌اند .)

تعریف . ① $\mathbb{Z}^{+}=\{[m,n] : m \geq n\}$ ② $0_{\mathbb{Z}}=[0,0]$

قضیه . اگر $m \geq n$ داریم $\langle m,n\rangle=\langle m-n,0\rangle$ و تابع

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$f(n)=\langle n,0\rangle$ در شرایط زیر صدق می‌کند .

$$f(m+n)=f(m)+_{\mathbb{Z}}f(n)$$

$$f(m\cdot n)=f(m)\cdot_{\mathbb{Z}}f(n)$$

$m\geq n \Rightarrow f(m)\geq_{\mathbb{Z}}f(n)$ ($f(m)-f(n)\in \mathbb{Z}^{+}$ یعنی)

از اینجا به بعد می‌توانیم $f(n)=\langle n,0\rangle$ و n را یکی بگیریم و فرض کنیم $\mathbb{N}\subseteq \mathbb{Z}$.

داریم $Z=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

~~قضیه $(\mathbb{Z},+_{\mathbb{Z}},\cdot_{\mathbb{Z}},\leq_{\mathbb{Z}})$ یک حلقه مرتب است.~~

قضیه. مجموعه $\mathbb{Z}$ با اعمال $+_{\mathbb{Z}}$ و $\cdot_{\mathbb{Z}}$ و رابطه ترتیبی $\leq_{\mathbb{Z}}$ یک حلقه مرتب است

به عبارت دیگر،

$$a+b=b+a$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$a+0=a$$

$$a+(-a)=0$$

$$ab=ba$$

$$a(bc)=(ab)c$$

$$1a=a$$

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$a,b\in Z^{+}\Rightarrow\begin{cases}a+b\in Z^{+}\\ a\cdot b\in Z^{+}\end{cases}$$

$a\in Z\Rightarrow a\in Z^{+}$ یا $-a\in Z^{+}$

$$\left.\begin{array}{l}a\in Z^{+}\\ -a\in Z^{+}\end{array}\right\}\Rightarrow a=0$$

بخش سوم: اعداد گویا

به روش مشابه ساخت $\mathbb{Z}$ برحسب $\mathbb{N}$، می‌توان اعداد گویا را از $\mathbb{Z}$ ساخت. برای این منظور رابطهٔ $\sim$ را روی همهٔ زوج‌های مرتب $(a,b)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}$ تعریف می‌کنیم:

$$(a,b)\sim(a',b') \Leftrightarrow ab'=ba'$$

تمرین: $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

تعریف. مجموعهٔ اعداد گویا را شامل همهٔ دسته‌های هم‌ارزی رابطهٔ فوق در نظر می‌گیریم، $\langle a,b\rangle$، برای راحتی قرار می‌دهیم $\langle a,b\rangle = a/b$

تعریف.

$$\frac{a}{b} +_Q \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot_Q \frac{c}{d} = \frac{a\cdot_Q c}{b\cdot_Q d}$$

تعریف. $0_Q=[0,1]$ و $1_Q=(1,1)$ ، $Q^+=\{\frac{a}{b} : a,b\in \mathbb{Z}^+, b\neq 0\}$

قضیه: Q با 0_Q و 1_Q و $+_Q$ و $\cdot_Q$ و ترتیب برآمده از Q^+، یک میدان مرتب است، یعنی علاوه بر اینکه یک حلقهٔ مرتب است، در شرایط زیر هم صدق می‌کند.

۱) $0\neq 1$ و به ازای هر $0\neq p\in Q$، داریم $1\cdot p=p$

۲) به ازای هر $0\neq p\in Q$، $p^{-1}\in Q$ وجود دارد که $p\cdot p^{-1}=1$

اعداد حقیقی

اعداد حقیقی در ابتدا بعنوان ابزاری برای اندازه‌گیری طول‌ها مطرح شدند (و لحظه‌ی کمیت‌های به هم پیوسته). یونانیان باستان متوجه شدند که اندازه همه طول‌ها را نمی‌توان بصورت کسری نشان داد. قضیه فیثاغورث بیان می‌کند که طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با طول اضلاع واحد، گویا نیست.

اعداد حقیقی از دیدگاه شهودی

فرض کنید که $a_0 \leq x < a_0+1$ و به ازای $0 \leq a_1 \leq 9$

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1+1}{10}$$ و به ازای $0 \leq a_2 \leq 9$

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2}$$ و به همین ترتیب

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n+1}{10^n}$$

در این صورت

$$x \simeq a_0/a_1a_2\cdots$$

منظور ما از اعداد حقیقی، همه اعداد از نوع فوق هستند.

قضیه: اعداد گویا دقیقاً اعدادی هستند که بسط اعشاری آنها متناهی یا متناوب است.

مثال. $2/31$ ، $2/\overline{34} = 2/343434\ldots$ اعداد گویا هستند.

مثال. $\sqrt{2}$ گویا نیست. (گنگ است)

تمرین. به ازای اعداد گویای $p, q \neq 0$ ، $p+q\sqrt{2}$ گنگ است.

تمرین. بین هر دو عدد گویا، عددی گنگ وجود دارد.

روش یاد شده برای معرفی اعداد حقیقی از نظر شهودی مفید است ولی پیگیری همه جزئیات با این روش چندان آسان نیست. روش های مختلفی برای ساختن اعداد حقیقی از اعداد گویا وجود دارد. مثلاً تعریف جمع و ضرب این اعداد مشکل است. معمولاً جزئیات این کار در درس های مقدماتی آنالیز ریاضی بسط داده می شود.

به هر حال همه روش های یاد شده منجر به این حقیقت می شوند که مجموعه اعداد حقیقی با جمع و ضرب و ترتیب تعریف شده برای آنها، یک میدان مرتب کامل است، یعنی یک میدان مرتب کامل که در اصل کمال صدق می کند. همه خواص دیگر اعداد حقیقی از اصول مذکور نتیجه می شوند.

اصل کمال برای $\mathbb{R}$: هر زیرمجموعه ناتهی کراندار از بالا اعداد حقیقی، یک کمترین کران بالا دارد.

توجیه اصل کمال: ابتدا حکم را در مورد بزرگترین کران پایین اثبات می کنیم. فرض کنید $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ دارای کران پایین باشد. فرض کنید a_1 بزرگترین عدد صحیح باشد که کران پایین برای A است، a_1 بزرگترین رقم باشد بطوریکه a_0 / a_1 یک کران پایین است، .... در اینصورت $a_0 / a_1 a_2 \cdots$ بزرگترین کران پایین است. اصل کمال از این حکم به دست می آید. (چطور؟)

تمرین: (خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی)؛ به ازای اعداد حقیقی x, y، $x > 0$، y، عدد طبیعی $n > 0$ وجود دارد که $nx > y$.

یک تعریف دقیق اعداد حقیقی با استفاده از دنباله های کوشی در صفحات ۲۱۲-۲۰۴ از کتاب مبانی ریاضیات استیوارت و تال آمده است.