سوال۱) ریشه های معادله $z^{۶}+۲z^{۳}+۲=۰$ را بیابید.

سوال۲) نشان دهید معادله $e^{x^{۲}}-x-۴=۰$ حداقل دو ریشه در اعداد حقیقی دارد.

سوال۳) از بین حدود زیر یکی را به دلخواه حل کنید:

الف) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۲}{\pi}arctan(n)\right)^{n}$

ب) $\lim_{x\to۰}\left(\frac{۱}{\sinh x}-\frac{۱}{x}\right)$

سوال۴) اگر $ln(x+۲y)=۲xy^{۲}$ آنگاه:

الف) $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

ب) معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه $x=۰$ بنویسید.

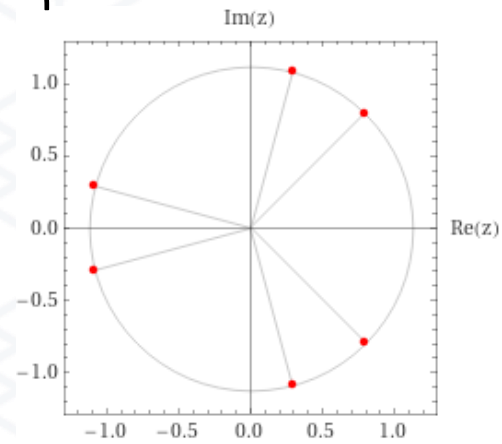
سوال۱) ریشه های معادله $z^{۶}+۲z^{۳}+۲=۰$ را بیابید.

حل:

$$\xrightarrow{z^{۳}=t} t^{۲}+۲t+۲=۰ \rightarrow (t+۱)^{۲}+۱=۰ \rightarrow (t+۱)^{۲}=-۱ \rightarrow t+۱=\pm i \rightarrow \underline{t=-۱\pm i}$$

$$\xrightarrow{z^{۳}=t} z^{۳}=-۱\pm i \rightarrow \begin{cases} z^{۳}=-۱+i \\ z^{۳}=-۱-i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z^{۳}=\sqrt{۲}e^{\frac{۳\pi}{۴}} \\ z^{۳}=\sqrt{۲}e^{-\frac{۳\pi}{۴}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=\sqrt[۶]{۲}e^{(۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴})\frac{i}{۳}} \\ z=\sqrt[۶]{۲}e^{(۲k\pi-\frac{۳\pi}{۴})\frac{i}{۳}} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{k=۰,۱,۲} \begin{cases} z=\sqrt[۶]{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i}, \sqrt[۶]{۲}e^{\frac{۱۱\pi}{۱۲}i}, \sqrt[۶]{۲}e^{\frac{۱۹\pi}{۱۲}i} \\ z=\sqrt[۶]{۲}e^{-\frac{\pi}{۴}i}, \sqrt[۶]{۲}e^{\frac{۵\pi}{۱۲}i}, \sqrt[۶]{۲}e^{\frac{۱۳\pi}{۱۲}i} \end{cases}$$



سوال۲) نشان دهید معادله $e^{x^2} - x - 4 = 0$ حداقل دو ریشه در اعداد حقیقی دارد.

حل:

$\xrightarrow{(-2,0)} f(-2) = e^4 + 4 - 4 = e^4 > 0$

$\xrightarrow{(-2,0)} f(0) = 1 - 4 = -3 < 0$

تابع در بازه $(-2,0)$ پیوسته بوده و $f(-2)f(0) < 0$

بنابراین طبق نتیجه قضیه مقدار میانی(قضیه بولتزانو)

حداقل یک ریشه در بازه $(-2,0)$ وجود دارد.

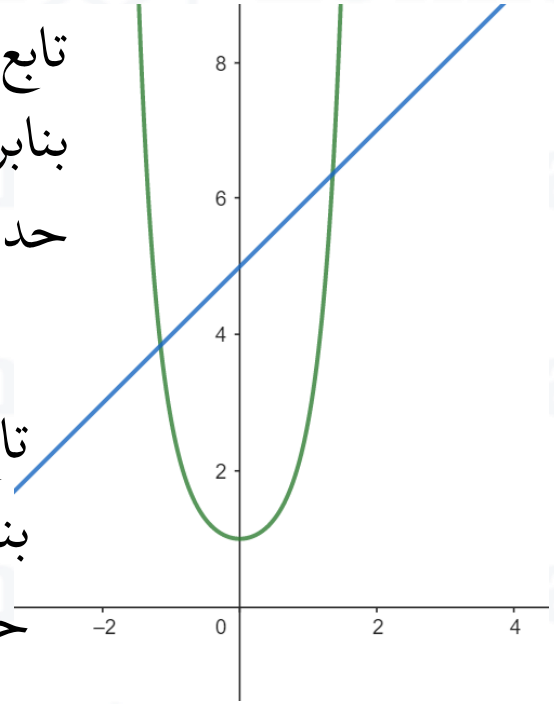
$\xrightarrow{(2,0)} f(2) = e^4 - 2 - 4 = e^4 - 6 > 0$

$\xrightarrow{(2,0)} f(0) = 1 - 4 = -3 < 0$

تابع در بازه $(0,2)$ پیوسته بوده و $f(2)f(0) < 0$

بنابراین طبق نتیجه قضیه مقدار میانی(قضیه بولتزانو)

حداقل یک ریشه در بازه $(0,2)$ وجود دارد.



سوال۳) از بین حدود زیر یکی را به دلخواه حل کنید:

الف) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۲}{\pi}arctan(n)\right)^n$ ب) $\lim_{x\to۰}\left(\frac{۱}{\sinh x}-\frac{۱}{x}\right)$

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۲}{\pi}arctan(n)\right)^n = ۱^\infty \to y=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۲}{\pi}arctan(n)\right)^n \to \ln y = \lim_{n\to\infty} n\ln\frac{۲}{\pi}arctan(n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{۲}{\pi}arctan(n)}{\frac{۱}{n}} \xrightarrow{hop} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱}{۱+n^۲}}{-\frac{۱}{n^۲}arctan(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{-(۱+n^۲)arctan(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{-arctan(n)} = \boxed{-\frac{۲}{\pi}} \to \ln y = -\frac{۲}{\pi} \to \boxed{y = e^{-\frac{۲}{\pi}}}$$

سوال۳) از بین حدود زیر یکی را به دلخواه حل کنید:

الف) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۲}{\pi}\arctan(n)\right)^n$ ب) $\lim_{x\to۰}\left(\frac{۱}{\sinh x}-\frac{۱}{x}\right)$

حل:

$$\lim_{x\to۰}\left(\frac{۱}{\sinh x}-\frac{۱}{x}\right)=\infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{x-\sinh x}{x\sinh x}=\lim_{x\to۰}\frac{x-(x+\frac{x^{۳}}{۶})}{x^{۲}}=\lim_{x\to۰}-\frac{x}{۶}=\boxed{۰}$$

سوال۴) اگر $ln(x+2y)=2xy^2$ آنگاه:

الف) $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

ب) معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه $x=0$ بنویسید.

حل:

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{1}{x+2y}+\frac{2y'}{x+2y}=2y^2+4xyy' \rightarrow \frac{dy}{dx}=y'=\frac{2y^2-\frac{1}{x+2y}}{\frac{2}{x+2y}-4xy}$$

$$\xrightarrow{x=0} ln(2y)=0 \rightarrow 2y=1 \rightarrow y=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{x=0,y=\frac{1}{2}} y'_{(0,\frac{1}{2})}=\frac{\frac{1}{2}-1}{2-0}=-\frac{1}{4} \rightarrow y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-0) \rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}$$