

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارتهای گویا

درس دوم: محاسبات عبارتهای گویا

درس سوم: تقسیم چندجمله‌ای‌ها

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارتهای گویا

مثال ۱۵۰: طول مستطیلی ۴ سانتی متر از عرض آن بیشتر است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل $\frac{۲}{۳}$ باشد. طول و عرض آن را به دست آورید.

* به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد.

با توجه به تعریف بالا عبارتهای زیر گویا هستند.

$$\frac{۲x - ۵}{۵x^۳ - ۲x^۲ + ۱} \quad \text{و} \quad \frac{x + ۵}{x - ۱} \quad \text{و} \quad -\frac{a}{۴} \quad \text{و} \quad \frac{۲}{۵} \quad \text{و} \quad \frac{x}{y}$$

$$\frac{x^۲ - \sqrt{۳}x + ۱}{۹xy} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{x} \quad \text{و} \quad \frac{۱۰}{x + ۲} \quad \text{و} \quad \frac{۳x + \sqrt{۷}}{x^۲} \quad \text{و} \quad x^۳ + ۲x - ۷$$

اما عبارتهای زیر گویا نیستند.

$$\sqrt{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x + y} \quad \text{و} \quad |x - y| \quad \text{و} \quad \frac{۱}{\sqrt{x - ۲}}$$

مثال ۱۵۱: کدام یک از عبارتهای زیر گویاست؟

$$\frac{۷}{x - ۱} \quad \text{و} \quad \frac{x + ۶}{۳} \quad \text{و} \quad \frac{ah}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{۳} + x}{۵} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{۲}x}{۲۵} \quad \text{و} \quad \frac{|x| + |y|}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{y} + ۱}{x^۲} \quad \text{و} \quad \frac{x - ۵}{\sqrt{۳} + ۱} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} \quad \text{و} \quad \frac{mn + n^۲}{۵ - n} \quad \text{و} \quad ۱۴ \quad \text{و} \quad \frac{۳ - a}{۲ + x}$$

مثال ۱۵۲: مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر را به دست آورید:

x	-2	7	$\frac{1}{2}$	0	-1	-5
$\frac{x+5}{x-3}$						

به ازای $x = 3$ مخرج عبارت گویای $\frac{x+5}{x-3}$ مساوی صفر می شود و همانگونه که از قبل می دانید، $\frac{0}{0}$ به عنوان عدد تعریف نمی شود.

* برای تعیین مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می شود، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به ازای آنها مخرج کسر صفر می شود؛ به عبارت دیگر این مقادیر را نمی توان به جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

مثال ۱۵۳: عبارت گویای $\frac{7x^2+1}{(x-1)(x+2)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

مثال ۱۵۴: هر یک از عبارتهای زیر را به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف) $\frac{8x+5}{2}$

ب) $\frac{7+x}{x}$

پ) $\frac{2b+1}{2b-1}$

$$\text{ت) } \frac{3x}{x^2 + 4}$$

$$\text{ث) } \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\text{ج) } \frac{a + 5}{a^2 - 5a + 6}$$

ساده کردن یک عبارت گویا

کسر $\frac{36}{48}$ با کسرهایی $\frac{3}{4}$ ، $\frac{6}{8}$ ، $\frac{9}{12}$ و $\frac{18}{24}$ مساوی است. بین این کسرها $\frac{3}{4}$ کسری است که دیگر قابل ساده شدن نیست؛ در واقع:

$$\frac{36}{48} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{3}{4}$$

در ساده کردن هر عدد گویا می توان صورت و مخرج را به عددی غیر صفر تقسیم کرد؛ یعنی:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای $\frac{AC}{BC}$ داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (A \text{ و } B \text{ و } C \text{ چند جمله ای هستند و } C \neq 0 \text{ و } B \neq 0)$$

مثال ۱۵۵: هر یک از عبارتهای گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{۱۸y^۳}{۶ \cdot y^۵} =$

ب) $\frac{x^۲ + ۶x + ۹}{x^۲ + ۴x + ۳} =$

پ) $\frac{y^۲ - ۹}{۳y + ۹} =$

ت) $\frac{۸ab^۷}{۲ \cdot a^۳b^۳} =$

ث) $\frac{b - ۵}{۵ - b} =$

ج) $\frac{m^۲ - ۱۶}{۴ - m} =$

چ) $\frac{۶m + ۱۸}{۷m + ۲۱} =$

۱- برای هر عبارت گویا، مقداری را به دست آورید که عبارت به ازای آن‌ها تعریف نشده است.

الف) $\frac{5x}{3ab^2}$

ب) $\frac{2y}{y(2y-6)}$

پ) $\frac{2p}{p^2-p-12}$

ت) $\frac{2x+5}{x}$

ث) $\frac{x^2-1}{x+5}$

۲- عبارتهای را که حاصل آنها ۱ یا -۱ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{2y+3}{2y-3}$

ب) $\frac{2y-3}{3-2y}$

پ) $\frac{2y+3}{3+2y}$

ت) $\frac{2y+3}{-2y-3}$

۳- هر یک از عبارتهای داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

۱) $\frac{a-2}{a+5}$	۲) $\frac{a+2}{a+5}$	۳) $\frac{2-a}{a+5}$
۴) $\frac{-a-2}{-a-5}$	۵) $\frac{a-2}{-a-5}$	۶) $\frac{2-a}{-a-5}$

۴- از عبارتهای زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

الف) $\frac{z}{t}(x+y)$

ب) $\frac{zx+y}{t}$

پ) $\frac{1}{t} \times z(x+y)$

ت) $z \times \frac{x+y}{t}$

ث) $\frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$

ج) $\frac{zx}{t} + y$

۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\text{الف)} \quad \frac{3-x}{x^2-5x+6} =$$

$$\text{ب)} \quad \frac{4x^2+8x}{12x+24} =$$

$$\text{پ)} \quad \frac{a^2-5a-14}{a^2+a-2} =$$

$$\text{ت)} \quad \frac{x^4-y^4}{y-x} =$$

$$\text{ث)} \quad \frac{24x^2}{12x^2-6x} =$$

$$\text{ج)} \quad \frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y} =$$

$$\text{ج)} \frac{1-t^4}{t^2+1} =$$

$$\text{ح)} \frac{6a^4b^2}{4ab^4} =$$

۴- ابتدا صورت و مخرج هر کسر را تجزیه نموده، سپس تا حد امکان ساده کنید.

$$\text{الف)} \frac{2b-2a}{4a+4b} \times \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} =$$

$$\text{ب)} \frac{4x^2-9a^2}{ab-a^2} \div \frac{2x-2a}{a^2b-a^4} =$$

۵- عبارتهای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\text{الف)} \frac{1}{a} + 2 =$$

$$\text{ب)} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$$

$$\text{پ)} \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b} =$$

$$\text{ت)} \frac{b+1}{a-1} + \frac{a+1}{b-1} =$$

$$\text{ث)} \frac{1}{x} + \frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)} =$$

$$\text{ج)} \frac{2x-1}{x^2+x} - \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} =$$

درس دوم: محاسبات عبارتهای گویا

ضرب و تقسیم عبارتهای گویا

عبارتهای گویا را همانند عددهای گویا می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. در مورد عددهای گویا قوانین زیر را داریم:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$(b, d \neq 0) \quad (b, c, d \neq 0)$$

در ضمن در مورد عبارات گویا هم هر جا که امکان داشته باشد، می‌توان عبارت را ساده کرد.

مثال ۱۵۶: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{5xy^3}{8x^2z^2} \times \frac{16z^3}{15y^2} =$

ب) $\frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{x^2-2x-15} =$

پ) $\frac{x-6}{x^2-12x+36} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12} =$

$$\text{ت) } \frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^3} =$$

$$\text{ث) } \frac{a^2 - 4a - 5}{a^2 - 4a} \div \frac{a^2 + 3a + 2}{a - 4} =$$

مثال ۱۵۷: حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\text{الف) } \frac{a^2 - a - 6}{a + 3} \times \frac{a + 3}{a^2 - 4} =$$

$$\text{ب) } \frac{a^2b + ab^2}{a} \times \frac{3ab}{(a + b)^2} =$$

$$\text{پ) } \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} \div \frac{x + 1}{x + 5} =$$

$$\text{ت) } \frac{4x^6}{3xy^2} \div \frac{8x}{9y^5} =$$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

جمع و تفریق عبارت‌های گویا مشابه جمع و تفریق عددهای گویاست؛ در مورد عددهای گویا داریم:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$(b \neq 0) \qquad (b, d \neq 0)$

به طریق مشابه می‌توان دو عبارت گویا را جمع یا تفریق کرد.

مثال ۱۵۸: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{3x+7}{x+2} + \frac{2x-3}{x+2} =$$

$$\text{ب) } \frac{3x+7}{x+2} - \frac{2x-3}{x+2} =$$

$$\text{پ) } \frac{a^2-20}{a^2-4} + \frac{a-2}{a+2} =$$

$$\text{ت) } \frac{2}{x+2} - \frac{x-1}{x+4} =$$

مثال ۱۵۹: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x} =$$

$$\text{ب) } \frac{6}{5x} - \frac{4}{x} =$$

$$\text{پ) } \frac{2x^2 - 16}{x^2 - 4} - \frac{x+4}{x+2} =$$

$$\text{ت) } \frac{7}{x^2 - x - 2} + \frac{x}{x^2 + 4x + 3} =$$

ساده کردن عبارتهای مرکب

هنگام ساده کردن هر عبارت گویای مرکب، همانند کسرهایی مرکب می‌توان صورت و مخرج را جداگانه ساده و سپس آن‌ها را بر هم تقسیم کرد و یا از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب (و غیرصفر) ضرب کرد.

مثال ۱۶۰: حاصل عبارت زیر را از دو روش ساده کنید. ($x \neq 0$)

$$\text{الف) } \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} =$$

$$\text{ب) } \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{\frac{x^2 - x - 6}{x^2}}{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}} =$$

مثال ۱۶۱: حاصل عبارت زیر را از دو روش ساده کنید. $(a \neq 0 \text{ و } a \neq -1)$

$$\text{الف) } \frac{\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}} =$$

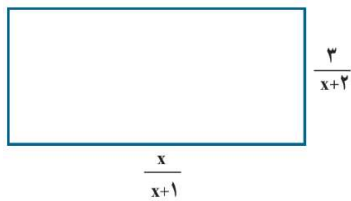
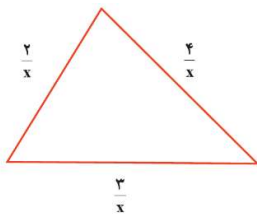
$$\text{ب) } \frac{\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}} =$$

مثال ۱۶۲: حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید. (مخرج همه کسرها مخالف صفر فرض شده است)

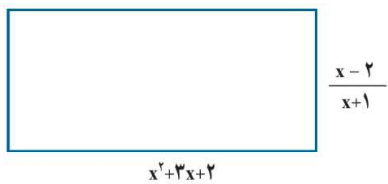
$$\text{الف) } \frac{n - \frac{n^2}{n-m}}{1 + \frac{m^2}{n^2 - m^2}} =$$

ب)
$$\frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} =$$

مثال ۱۶۳: محیط هر شکل را بر حسب x به دست آورید و آن را ساده کنید. ($x > 0$)



مثال ۱۶۴: مساحت مستطیل زیر را بر حسب x به دست آورید. ($x > 2$)



۱- ضرب و تقسیمهای زیر را انجام دهید. (در همه تمرینها مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است)

الف)
$$\frac{a^2 - 16}{a + 4} \times \frac{a + 2}{a^2 - 8a + 16} =$$

ب)
$$\frac{m^2 - 49}{m + 1} \div \frac{7 - m}{m^2 - 1} =$$

پ)
$$\frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x + 18} =$$

ت)
$$\frac{1 - c^2}{b^2} \times \frac{b^2}{1 - 2c + c^2} =$$

۲- جمع و تفریقهای زیر را انجام دهید.

الف)
$$\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x - y)^2}{x^4 - y^4} =$$

$$\text{ب)} \quad \frac{x+7}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay} =$$

$$\text{پ)} \quad \frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2} =$$

$$\text{ت)} \quad \frac{4+x^2-2x}{2+x} - 2 - x =$$

۳- فقط یکی از عبارتهای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$$\frac{a^2+5}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2+3}{3} \quad \text{و} \quad \frac{a^2+b^2}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2-5a}{a}$$

۴- از میان عبارتهای زیر، هر کدام را که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{x+3}{y+3}$ ب) $\frac{3-x}{3-y}$ پ) $\frac{3x}{3y}$ ت) $\frac{x^3}{y^3}$ ث) $\frac{a^3x}{a^3y}$

۵- عبارت $\frac{-x+3}{x+5}$ با کدام یک از عبارتهای زیر برابر است؟

الف) $-\frac{x+3}{x+5}$ ب) $-\frac{x-3}{x+5}$ پ) $\frac{x-3}{x+5}$ ت) $-\frac{3-x}{x+5}$

۶- اگر $A = a^2 - b^2$ و $B = a^2 + b^2$ و $C = 2ab$ ، حاصل عبارت $\frac{A^2 - B^2}{C^2}$ را به دست آورید.

۷- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \quad \frac{a}{b} - \frac{b}{a} =$$

$$\text{ب)} \quad \frac{x^{13}}{x^{20}} =$$

$$\text{پ)} \quad \frac{a}{5} - \frac{y-b}{5} =$$

$$\text{ت)} \quad \frac{a-b}{b-a} =$$

$$\text{ث)} \quad \frac{a^y - b^y}{a - b} =$$

$$\text{ج)} \quad \frac{ca + cb}{c + cd} =$$

$$\text{چ)} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} =$$

۸- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.

۹- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

الف)
$$\frac{\frac{a - a^2}{a^2 - 1}}{\frac{a}{a + 1} - a} =$$

ب)
$$\frac{\frac{1}{x - y} - \frac{2}{x + y}}{\frac{x^2 - 4y^2}{(x - y)^2}} =$$

۱۰- عرض مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید. مساحت مستطیل $9 - x^2$ است.

$$\frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$$

$$A = x^2 - 9$$

درس سوم: تقسیم چندجمله‌ای‌ها

۱- تقسیم تک جمله‌ای بر تک جمله‌ای (در تمام این درس مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است.)

برای تقسیم دو تک جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن توان‌ها استفاده می‌کنیم.

به عنوان مثال:

$$\frac{14x^5y}{2x^2y^2} = \frac{7x^3}{y} \quad \text{و} \quad \frac{-18a^2xz^4}{27x^6z} = \frac{-2a^2z^3}{3x^5}$$

۲- تقسیم چند جمله‌ای بر تک جمله‌ای

اگر a و b و c اعدادی صحیح و d عددی صحیح و غیر صفر باشد، داریم:

$$\frac{a + b + c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

به طور مشابه برای تقسیم چند جمله‌ای $12x^3 - 18x + 2$ بر 6 به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{12x^3 - 18x + 2}{6} = \frac{12x^3}{6} - \frac{18x}{6} + \frac{2}{6} = 2x^3 - 3x + \frac{1}{3}$$

مثال ۱۶۵: هر یک از تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{2a^4 + 5a^3 - 8a}{4a^2} =$

ب) $\frac{14x^3yz - 6xy + 3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} =$

$$\text{پ)} (8y^3 - 4y^2 + 12y) \div (-4y^3) =$$

$$\text{ت)} \frac{-21a^5b^4c}{28ab^6} =$$

$$\text{ث)} \frac{24x^6y - 2z + 3xyz}{x^2z} =$$

۳- تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای:

در تقسیم عدد ۲۶ بر ۸، ۸ را مقسوم‌علیه، ۳ را خارج قسمت و ۲ را باقی‌مانده می‌نامیم. رابطه‌ی تقسیم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} 3 \times 8 + 2 = 26 \\ 2 < 8 \end{cases}$$

مثال ۱۶۶: چند جمله‌ای $2x^2 - 7x - 15$ را بر چند جمله‌ای $x - 5$ تقسیم کنید.

* وقتی باقیمانده صفر باشد، می‌گوییم مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر است.

مثال ۱۶۷: تقسیم‌های زیر را انجام دهید و رابطه تقسیم را بنویسید.

الف) $(4x^3 - 3x^2 + x + 7) \div (x^2 - 2)$

ب) $(x^2 - 5x - 24) \div (x - 8)$

پ) $(10x^4 - 3x^2 + 2x - 19) \div (-3 + 2x^2)$

$$\text{ت) } (6x^3 - 19x^2 + 16x - 4) \div (2 - x)$$

$$\text{ث) } (-x^3 - 12 + 8x) \div (x + 6)$$

$$\text{ج) } (x^3 - 27) \div (x - 3)$$

۱- تقسیمهای زیر را انجام دهید.

الف)
$$\frac{-۲x^۳y^۳z^۷}{۱۸xz^۵}$$

ب)
$$(۲a^۳y - a^۴y^۳ + ۱۵xy) \div (-۵y^۳)$$

پ)
$$(۳y^۳ - ۱۰y - ۲۴) \div (۳y - ۴)$$

$$(2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3) \div (x + 3) \quad \text{ت)}$$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط تقسیم نشان دهید.

$$(-3x^4 + 4x^6 + x^2 + 5) \div (1 - x^3)$$

۳- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر با $2x^3 + 15x^2 + 28x$ است. اگر ارتفاع این جعبه x و طول آن $4 + x$ باشد، عرض آن را به دست آورید.

۴- اگر چند جمله‌ای $a + 10x - 23x^2 + 20x^3 + 4x + 3$ بخش پذیر باشد، a را به دست آورید.

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت $9x^2 - 9x + 9$ را بر هر یک از عبارتهای زیر به دست آورید.

$$x + 3 \quad \text{و} \quad x - 3 \quad \text{و} \quad 2x - 3 \quad \text{و} \quad 2x + 3$$

۱- هریک از عبارتهای گویای زیر به ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

الف) $\frac{x}{x+1}$

ب) $\frac{y^2-y+x}{x^2-1}$

پ) $\frac{x^2+x}{1+x^2}$

۲- با استفاده از تجزیهی صورت و مخرج، کسرهایی زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{6ab^4}{9a^3b^2} =$

ب) $\frac{x^3-x-6}{x^2+4x+4} =$

پ) $\frac{4ax+1ay}{3bx+6by} =$

ت) $\frac{ax-bx-ay+by}{(b^2-a^2)(x-y)} =$

۳- ابتدا صورت و مخرج هر کسر را تجزیه نموده، سپس عملیات مورد نظر را انجام دهید.

الف)
$$\frac{2b-2a}{2a+2b} \times \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} =$$

ب)
$$\frac{4x^2-9a^2}{ab-a^2} \div \frac{2x-3a}{a^2b-a^2} =$$

۴- اگر $A = \frac{x}{x+1}$ و $B = \frac{x^2}{x-1}$ باشد، در هر قسمت عبارت گویا C را تعیین کنید.

الف) $A + B = C$

ب) $A \times C = B$

پ) $\frac{A}{B} = C$