پایداری سیستم‌های غیرخطی (پایداری براساس لیاپانوف)

روش غیرمستقیم لیاپانوف : خطی‌سازی حول نقطه تعادل (در پاورپوینت 2 ارائه شد)

روش مستقیم لیاپانوف :

- تابع $V(x)$ را مثبت معین می‌نامیم هرگاه برای $x\neq 0$ داشته باشیم $V(x)>0$ و برای $x=0$ داشته باشیم $V(0)=0$

تابع مثبت معین یک تابع اسکالر می‌باشد (یک مولفه دارد) و x یک بردار است.

- تابع اسکالر $V(x)$ را مثبت نیمه معین گوییم هرگاه برای $x\neq 0$ داریم $V(x)\geq 0$ و برای $x=0$ داریم $V(x)=0$ (یا نیمه معین مثبت)

تعریف :

* برای سیستم $\dot{x}=f(x)$ که $x=0$ نقطه تعادل آن است. نقطه تعادل $x=0$ پایدار (پایدار لیاپانوف) است هرگاه تابع مثبت معین $V(x)$ با مشتقات جزئی پیوسته وجود داشته باشد که در روی مسیرهای سیستم $\dot{V}(x)\leq 0$ باشد. (پایداری لیاپانوف)

* نقطه تعادل $x=0$ پایدار مجانبی است هرگاه تابع مثبت معین $V(x)$ با مشتقات جزئی پیوسته $\dot{V}(x)<0$ باشد.

* نقطه تعادل $x=0$ پایدار مجانبی سراسری است هرگاه $V(x)$ مثبت معین با مشتقات جزئی پیوسته $\dot{V}(x)<0$ و $\|x\|\to\infty \Rightarrow V(x)\to\infty$ به ازای هر نقطه در فضای حالت این رابطه برقرار باشد.

مثال : (برای پایداری سراسری روش خطی‌سازی جواب نمی‌دهد.) برای پایداری سراسری روش مستقیم لیاپانوف را بررسی می‌کنیم. $\ddot{x}+x+x^3=0$

باید $V(x)$ تابع مثبت معین را پیدا کنیم. در این روش بدون اینکه مایل باشیم x های خاص و منفی را نسبت به زمان (بدون اینکه پاسخ سیستم را داشته باشیم) می‌توانیم بگوییم پایدار هست یا نه، اما در این روش اینکه پیدا کردن $V(x)$ مشکل است.

یکی از روش‌های به دست آوردن $V(x)$، تابع انرژی سیستم را پیشنهاد می‌دهیم. در اصل انرژی ذخیره شده در سیستم که به صورت انرژی پتانسیل و جنبشی ذخیره شده است.

انرژی سیستم = انرژی تلف شده − کل انرژی

مثال : سیستم جرم و فنر

نقطه تعادل $(0,0)$ و $x=\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$

$$V(x)=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\int_0^x (x+x^3)dx$$: انرژی ذخیره شده در سیستم

(انرژی جنبشی ، انرژی فنر)

$$\dot{V}(x)=\frac{1}{2}\times 2\dot{x}\ddot{x}+(x+x^3)\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x}+x+x^3)=\dot{x}(0)=0 \Rightarrow$$ پایدار لیاپانوف است.

if $\|x\|\to\infty \Rightarrow V(x)\to\infty \Rightarrow$ پایداری سراسری ✓

* تابع $V(x)$ برای هر سیستم یکتا نیست

مثال :

$\ddot{x}+\dot{x}+\sin x=0$

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\ \dot{x}\end{pmatrix}$ $\qquad V(x)=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\int_0^x \sin\sigma \, d\sigma$

$x=0$ نقطه تعادل سیستم است.

بسیاری از سیستم های دینامیکی در عمل عمدتا مرتبه 2 هستند.

برای $x\neq 0 \rightarrow V(x)>0 \Rightarrow$ $V(x)$ مثبت معین است.

برای $x=0 \rightarrow V(x)=0$

$\dot{V}(x)=\dot{x}\ddot{x}+\dot{x}\sin x=\dot{x}(\ddot{x}+\sin x)=-\dot{x}^2$

در روی مسیرهای سیستم حرکت می‌کنیم در نتیجه از روی معادله دیفرانسیل سیستم جاگذاری می‌کنیم.

$\dot{V}(x)=-\dot{x}^2$ $\begin{cases} \dot{V}(0)=0 \\ \dot{V}(x)\le 0 \end{cases}$ برای $x\neq 0 \Leftarrow$ $\Rightarrow$ پایداری لیاپانوفی

x بردار است وقتی می‌گوییم $x\neq 0$ یعنی بردار x مخالف صفر است اما $\dot{x}$ می‌تواند صفر باشد.

$\|x\|\rightarrow\infty \Rightarrow |V(x)|\rightarrow\infty$ پایداری سراسری ✓

این یک سیستم آونگ میرا است. یک نقطه تعادل دیگر هم دارد که در آن حالت نمی‌توانیم بگوییم پایداری سراسری است.

شرط دیگر پایداری سراسری این است که فقط یک نقطه پایداری داشته باشد، در این مثال چون این شرط را نقض می‌کند پس پایداری سراسری نیست.

مجموعه ناوردا (Invariant set)

مجموعه G یک مجموعه ناوردا در یک سیستم دینامیکی است اگر هر مسیری که از نقطه‌ای در G شروع شود برای همیشه در G باقی بماند.

برای مثال، هر نقطه تعادل یک مجموعه ناوردا است. قلمرو جذب یک نقطه تعادل نیز یک مجموعه ناوردا است. کل فضای حالت، یک مجموعه ناوردای بدیهی است. در یک سیستم خودگردان، هر مسیر فضای حالت یک مجموعه ناوردا است. از آنجایی که چرخه‌های حدی (منحنی‌های بسته در فضای حالت) موارد خاصی از مسیرهای سیستم‌اند، آن‌ها نیز مجموعه‌های ناوردا هستند.

ناحیه جذب : اگر پایداری از نوع سراسری و جهانی باشد در این صورت ناحیه جذب کل فضای حالت است.

در صورتی که قلمرو جذب یک نقطه تعادل به بزرگترین ناحیه آن اطلاق می‌شود یعنی مجموعه تمام نقاطی که اگر مسیرها از این نقاط آغاز شوند نهایتا به مبدا همگرا می‌شوند.

روش مستقیم در بررسی پایداری : $\dot{X} = F(x)$ که $x=0$ نقطه تعادل آن است.

$\left\{ \begin{array}{l} V(x) \text{ مثبت معین با مشتقات جزئی} \\ \dot{V}(x) \text{ منفی معین یعنی } \dot{V}(x)<0 \end{array} \right.$ جانبی بودن اثبات میشود

$\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty$ از هر طرف | سراسری بودن را اثبات میکند.

در این صورت نقطه تعادل $x=0$ پایداری جانبی سراسری دارد.

دسته‌بندی سیستم‌های غیرخطی

- یک کلاس از سیستم‌های غیرخطی به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$\ddot{x} + b(\dot{x}) + C(x) = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

تابع منتخب لیاپانوف به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x C(y)dy$$

برای آنکه $x=0$ نقطه تعادل باشد باید $C(0)=0$ باشد.

حالت با انتخاب معادلات $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -b(\dot{x}) - C(x) \end{array} \right. \xrightarrow{x=0} x_2 = 0 \rightarrow \dot{x} = 0$

$-b(\dot{x}) - C(x) = 0$

باید $C(0)=0 \rightarrow \boxed{\dot{x}=0, x=0}$

$-b(\dot{x}) - C(x) = 0$

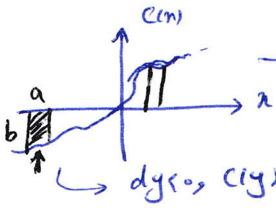
اگر $C(0)=0$ و $b(0)=0$ باشد رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$\dot{V}(x) = \dot{x}\ddot{x} + C(x)\dot{x}$$
$$= \dot{x}(\ddot{x} + C(x))$$
$$= -\dot{x}\, b(\dot{x})$$

اگر $\dot{x}b(\dot{x})>0 \Rightarrow \dot{V}(x)<0$ برای $\dot{x} \neq 0$

چون برای $\dot{x}=0$ هم رابطه برقرار نیست پس جانبی بودنش هنوز اثبات نشده است.

برای آنکه برای $x \neq 0$ تابع $V(x)>0$ باشد باید $\int_0^x C(y)dy > 0$ ، این مفهوم است که $C(x)$ تابع ربع اول و سوم است.



$\rightarrow dy>0,\ C(y)>0 \Rightarrow$ سطح زیر منحنی مثبت است

$dy<0,\ C(y)<0 \rightarrow$ جواب انتگرال مثبت می‌شود

نتیجه: هرگاه در این دسته از معادلات سیستم انتگرال $\int_0^x C(y)dy$ برای $x \neq 0$ مثبت باشد.

$C(x)$ تابع ربع اول و سوم

و $\forall \dot{x} \neq 0 \quad \dot{x}b(\dot{x})>0$

$b(\dot{x})$ تابع ربع اول و سوم است.

در اینصورت نقطه تعادل $X=0$ پایدار است.

مثال: $\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = 0$

$\dot{x}$ تابع ربع اول و سوم است.

x^3 تابع ربع اول و سوم

$$V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x \sigma^3 d\sigma$$ پیشنهاد تابع لیاپانوف

$$\dot{V}(x) = \dot{x}\ddot{x} + x^3\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + x^3) = -\dot{x}^2$$

$\dot{V}(x) \leq 0 \Rightarrow$ پایداری از نوع لیاپانوف

$\dot{x}=0 \rightarrow \ddot{x}=0 \rightarrow$ در معادله $x^3=0 \rightarrow x=0$ (اجتهش) برای این کلاس $C(0)=0$ و $b(0)=0$ در اینصورت پایداری مجانبی دارد

$|x| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty$ از هر طرف — پایداری جانبی سراسری

یک بحث: برای اینکه دریابیم پایداری مجانبی دارد یا نه؟

فرض کنید $\dot{x}=0$ اگر x در $\dot{x}$ برابر صفر باشد و مقدار دیگری نداشته باشد، در این صورت فقط در (نقطه) $x=0$ محقق شده است نه در نقطه دیگری. در این صورت پایداری مجانبی دارد.

یعنی: در هر $\dot{x}\neq 0$ و $x\neq 0$ ⟸ $\dot{v}(x)<0$ مثلاً اگر $\dot{x}=0$ ⟸ $x=1$ ✗ پایدار مجانبی نیست (چون $x=0$ نشده است)

قضیه La Salle: در سیستم $\dot{x}=f(x)$ فرض کنیم $v(x)$ مشتق‌پذیر و pdf باشد و $\dot{v}\le 0$ برای $x\in R^n$ و با توجه به سیستم، اگر $\dot{v}(x)$ فقط در $x=0$ برابر با صفر شود آنگاه نقطه تعادل پایداری مجانبی است.

مثال: $\ddot{x}+\dot{x}^2+x^3=0$

$$v(x)=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\int_0^x \alpha^3 d\alpha$$

ϵx^2 جمع ربع اول و سوم نیست.

$v(x)$ مثبت معین است. به این دلیل: $v(x)=0$ برای $x=0$ و $v(x)>0$ برای هر $x\neq 0$

$$\dot{v}(x)=\dot{x}\ddot{x}+\dot{x}x^3$$
$$=\dot{x}(\ddot{x}+x^3)=-\dot{x}^3$$

برای $\dot{x}\neq 0$ داریم $\dot{v}(x)<0$ ⟸ پس در این نقطه تعادل ناپایدار است.

بررسی پایداری سیستم‌های خطی با روش لیاپانوف:

$\dot{X}=AX$ که $x=0$ در آن نقطه تعادل سیستم باشد. تابع مشتق لیاپانوف بصورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$v(x)=\frac{1}{2}X^TPX$$
$$\dot{v}(x)=\frac{1}{2}(\dot{X}^TPX)+\frac{1}{2}(X^TP\dot{X})$$
$$\dot{X}^T=X^TA^T$$
$$\dot{v}(x)=\frac{1}{2}(X^TA^TPX)+\frac{1}{2}(X^TPAX)\implies \dot{v}(x)=\frac{1}{2}X^T(A^TP+PA)X$$

اگر:
$$\begin{cases}A^TP+PA=-Q\\ \dot{v}(x)=-\frac{1}{2}X^TQX\end{cases}$$

ماتریس مثبت معین، ماتریسی است که minterm های آن مثبت باشند:

$$P=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{21}&P_{22}&P_{23}\\P_{31}&P_{32}&P_{33}\end{bmatrix}\rightsquigarrow P_{11}>0,\ \begin{vmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{21}&P_{22}\end{vmatrix}>0,\ |P|>0$$

اگر P یک ماتریس pdm باشد آنگاه $V=X^TPX$ است.

P مثبت معین ⟵ $v=\frac{1}{2}X^TPX$ مثبت معین

Q مثبت معین ⟵ X^TQX مثبت معین

$v(x)$ مثبت معین، $\dot{v}(x)$ منفی معین } ⟸ پایداری مجانبی دارد، یعنی مقادیر ویژه A در سمت چپ محور $j\omega$ قرار خواهند گرفت.

نتیجه: شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه تعادل پایداری مجانبی داشته باشد، این است که P و Q هر دو مثبت معین باشند و در رابطه $A^TP+PA=-Q$ صدق نمایند.

فرض کنید که یک P پیشنهاد می‌دهیم و از رابطه $A^TP+PA=-Q$، Q را محاسبه می‌کنیم. اما Q مثبت معین نیست. در اینصورت در مورد پایداری نمی‌توان اظهار نظر کرد.

اما اگر برای هر Q مثبت معین که در رابطه فوق می‌گذاریم P بدست آمده مثبت معین باشد در اینصورت نقطه تعادل $x=0$ پایدار مجانبی است.

- در سیستم‌های خطی پایداری مجانبی، پایداری نمایی را نتیجه می‌دهد. (تمام سیستم‌های خطی پایداری نمایی دارند.)

اگر Q مثبت معین پیشنهاد دهیم و از روی آن P منفی معین بدست آید، آنگاه نقطه تعادل ناپایدار خواهد بود.

- برای سیستم های غیر خطی، اگر سیستم تناوبی باشد حتما جاذب هم هست اما اگر جاذب باشد معلوم نیست که تناوبی هم باشد و پایدار باشد.

مثال: $\ddot{x}+\dot{x}+x=0$

$\begin{cases} x_1=x \\ x_2=\dot{x} \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \dot{x}_1=x_2 \\ \rightarrow \dot{x}_2=-x_1-x_2 \end{matrix} \longrightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ سیستم پایدار است

P پیشنهادی: $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، P مثبت معین است (مقادیر ویژه ماتریس P همگی مثبت است [illegible] باشد ماتریس مثبت معین می شود.)

$\hookrightarrow \lambda=1,1$

$A^TP+PA=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

برای $x\neq 0$: $x^TPx>0$

همان شرط مثبت معین بودن تابع لیاپانوف

$-Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow \det\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}=\lambda^2-2\lambda=0 \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=2 \end{cases}$ ⟵ Q مثبت معین نیست چون صفر است.

اما در این حالت نمی‌توان در مورد پایداری و ناپایداری اظهار نظر کرد.

* بهترین راه این است که Q را فرض کنیم و از روی آن P را بدست آوریم.

$\forall P \longrightarrow Q$ P : آنگاه Q

شرط کافی: درستی P، درستی Q را نتیجه می‌دهد.

شرط لازم: غلط بودن P، غلط بودن Q را نتیجه می‌دهد (یعنی اگر P برقرار نباشد Q نیز برقرار نیست)

شرط لازم و کافی: درستی P، درستی Q را نتیجه دهد. نادرستی P، نادرستی Q را نتیجه دهد.

* شرایط مطرح شده برای پایداری با روش لیاپانوف، شرط کافی است.

برای سیستم های خطی:

$\dot{X}=AX$

$V(X)=X^TPX$

$A^TP+PA=-Q$

- هرگاه به ازای P مثبت معین در رابطه فوق Q مثبت معین بدست آید X=0 پایدار مجانبی است.
- هرگاه به ازای P مثبت معین ~ ~ منفی معین ~ ~ ناپایدار است.
- هرگاه Q مثبت معین، P مثبت معین را نتیجه دهد سیستم پایدار است و نقطه تعادل $x=0$ پایدار مجانبی است.
- هرگاه به ازای P مثبت معین، Q مثبت معین نشد در مورد پایداری $x=0$ نمی‌توان اظهار نظر کرد.

مثال: $\ddot{x}+10\dot{x}-x=0$ $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda I-A=\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda+10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda^2+10\lambda-1=0$ سیستم ناپایدار است

$P=I$ $A^TP+PA=A^T+A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -20 \end{bmatrix}$

$\lambda I+Q \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \lambda & +2 \\ +2 & \lambda-20 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda=10\pm\sqrt{100+4}$ نمی‌توان درباره پایداری اظهار نظر کرد.

راه مشخص برای بررسی پایداری سیستم‌های خطی $\dot{x}=AX$ این است که:

الف - یک ماتریس مثبت معین متقارن پیشنهاد می‌دهیم.

ب - از معادله $A^TP+PA=-Q$ ماتریس P را محاسبه می‌کنیم.

ج - اگر ماتریس P مثبت معین متقارن بود نتیجه می‌گیریم که سیستم پایدار است وگرنه ناپایدار می‌باشد.

(اگر حتی یک مورد Q مثال بزنیم که به ازای آن Q مثبت معین، P مثبت معین نباشد، سیستم ناپایدار می‌باشد. یعنی در اثبات ناپایداری یک Q که شرط گفته شده را برآورده نکند برای ما کافی است) (اثبات)

- P تماماً یگانه است، یعنی برای هر Q فقط یک جواب P وجود دارد. (اثبات)

- ماتریس A متقارن است هرگاه $A^T=A$ باشد.
- ماتریس A پادمتقارن است هرگاه $A^T=-A$ باشد.
- ماتریس A معین است هرگاه $X^TAX=0$ برای $X\neq 0$
- ماتریس A پادمتقارن است هرگاه $X^TAX=0$ (اثبات)
- هرگاه A مثبت معین باشد، (اثبات)

$$\lambda_{min}(A)\|x\|^2 \leq X^TAX \leq \lambda_{max}(A)\|x\|^2$$

$\lambda_{min}(A), \ldots, \lambda_{max}(A)$ مقادیر ویژه A

روش‌های پیشنهادی برای تعیین تابع لیاپانوف

روش Krasovskii: از این روش برای تعیین تابع لیاپانوف برای سیستم‌های غیرخطی نامتغیر با زمان استفاده می‌شود.

قضیه Krasovskii: برای یک سیستم غیرخطی $\dot{x}=f(x)$ که نقطه تعادل آن مبدا می‌باشد و با تعریف ماتریس ژاکوبین $A(x)$ به صورت $A(x)=\frac{\partial f}{\partial x}$ داریم:

اگر ماتریس $F=A+A^T$ در یک همسایگی Ω از مبدا، منفی معین باشد آنگاه نقطه تعادل مبدا پایدار مجانبی است. تابع لیاپانوف برای این سیستم عبارت است از: $V(x)=f^T(x)f(x)$

اگر Ω کل فضای حالت سیستم باشد و در حالی که $\|x\|$ به سمت ∞ میل می‌کند، $V(x)$ نیز به سمت بی‌نهایت میل کند ($V(x)\to\infty$ as $\|x\|\to\infty$)، آنگاه نقطه تعادل در این صورت به طور سراسری پایدار مجانبی است.

مثال:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-6x_1+2x_2\\ \dot{x}_2=2x_1-6x_2-2x_2^3\end{cases}$$

ماتریس ژاکوبین: $A=\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 2 & -6-6x_2^2\end{bmatrix}$

$$F=A+A^T=\begin{bmatrix}-12 & 4\\ 4 & -12-12x_2^2\end{bmatrix}$$

چون F منفی معین است (مینورهای اصلی آن مثبت نیستند) پس طبق قضیه کراسوسکی نقطه مبدا پایدار مجانبی است.

تابع لیاپانوف نمونه: f^Tf

$$f=\begin{bmatrix}-6x_1+2x_2\\ 2x_1-6x_2-2x_2^3\end{bmatrix} \qquad V=f^Tf=(-6x_1+2x_2)^2+(2x_1-6x_2-2x_2^3)^2$$

یافتن تابع لیاپانوف سخت است و روش کلاسیک ندارد، همیشه نمی‌توان با تکیه بر آن برای همه سیستم‌ها آن را معین کرد.
برای هر کلاس می‌توان یک تابع لیاپانوف مشخص کرد.

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ V(x) = x^T P x \end{cases}$$

(1) سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI)

لیاپانوف تابعی است [illegible] است اما تابع منتخب لیاپانوف صرفاً یک تابع مثبت معین است و ممکن است پیدا بشود یا نشود.

(2) تابع انرژی ذخیره شده در سیستم: نیاز به شناخت فیزیکی از سیستم دارد

(3) روش کراسوفسکی:

$\dot{X} = F(X)$ نقطه تعادل است $X = 0$

$V(X) = F^T F$ تابع منتخب لیاپانوف

تابع منتخب لیاپانوف مثبت معین است ولی معلوم نیست $\dot V(X) = 0$ یا $\dot V(X) \neq 0$ باشد.

$$\dot V(x) = \dot F^T F + F^T \dot F$$

$$\dot f = \frac{\partial f}{\partial x}\dot x = A(x)\dot x = A(x) f \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = A(x)}$$ ماتریس ژاکوبین

$$\dot v = f^T A^T(x) f + f^T A(x) f \longrightarrow \dot v = f^T (A^T(x) + A(x)) f$$

شرط کافی برای پایداری مجانبی:

یعنی: $A(x)^T + A(x)$ ماتریس نیم منفی معین (مقادیر ویژه سمت چپ و حداقل یک λ روی محور باشد (نیم معین منفی))

اگر $\dot v < 0$: یعنی: $A(x)^T + A(x)$ ماتریس منفی معین باشد.

در این صورت نقطه تعادل پایداری مجانبی دارد.

اگر $\|x\| \to \infty \Rightarrow v(x) \to \infty$ از طرف پایداری مجانبی سراسری دارد

این روش برای سیستم‌های زیر صادق است:

$$\dot x_1 = x_2$$
$$\dot x_2 = x_3$$
$$\vdots$$

مشکل این روش: پایداری خیلی از سیستم‌ها را با این روش نمی‌توان تحقیق ساخت.

مثال:

$$\dot x_1 = -x_1 + x_2$$
$$\dot x_2 = -x_2 - x_1^3$$

محاسبه نقطه تعادل:

$\dot x_1 = 0 \to x_1 = x_2$

$\dot x_2 = 0 \to x_1^3 = -x_2 = -x_1 \to x_1 = 0 \checkmark ,\ (1+x_1)^2 = 0$ غ ق ق

پس نقطه تعادل $(0,0)$ بدست می‌آید.

تابع لیاپانوف:

$$V(x) = f^T f = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & -x_2 - x_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_2 - x_1^3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V(x) = (-x_1 + x_2)^2 + (-x_2 - x_1^3)^2$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3x_1^2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1-3x_1^2 \\ -3x_1^2 & -2 \end{bmatrix} = B$$

$$\det(\lambda I - B) \rightsquigarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{4 - 4 + (-1 + 3x_1^2)^2}$$

$$4 - 4 + (-1 + 3x_1^2)^2 < 4 \Rightarrow -1 + 3x_1^2 < 2 \Rightarrow |x_1| < 1$$

تا جایی که در آن پایداری ناحیه‌ای local برقرار است.

$|x_1| < 1$ شرط کافی برای پایداری است.

④ روش کراسوفسکی تعمیم یافته:

P: مثبت معین

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ v(x) = f^T P f \end{cases} \qquad \dot{v}(x) = \dot{f}^T P f + f^T P \dot{f}$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} f = Af$$

$$\dot{v} = f^T A^T P f + f^T P A f = f^T (A^T P + PA) f = f^T (P - Q) f = f^T P f - f^T Q f$$

$$\boxed{A^T P + PA + Q = P} \qquad \dot{v} < 0$$

Q مثبت معین و متقارن معین

اگر این رابطه برقرار باشد پایداری مجانبی نقطه تعادل (که نقطه صفر می‌شود) بدست می‌آید.

⑤ روش گرادیان در تشکیل تابع لیاپانوف

$v(x)$ تابع لیاپانوف سیستم هست که نمی‌دانیم چیه!

پیشنهاد می‌دهیم: $\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}$: گرادیان v (یعنی شیب)

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \dot{x}$$

$$\dot{x} = f(x) \longrightarrow \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot f$$

اگر $\dot{v}$ منفی معین باشد و v مثبت معین باشد، در اینصورت v تابع لیاپانوف سیستم است.

و نقطه تعادل $x=0$ پایداری مجانبی دارد.

$$\text{if } \|x\| \to \infty \Rightarrow v(x) \to \infty$$ پایداری مجانبی سراسری

مثلاً پیشنهاد می‌دهیم: $\nabla v = (AX)^T$

فرض A ثابت باشد

برای آنکه شرط کرل برقرار باشد باید $A^T = A$

شرط کرل:

$$\frac{\partial^2 \nabla v}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \nabla v}{\partial x_j \partial x_i}$$

نحوه محاسبه v به این صورت است:

$$v = \int_0^x \nabla v \, dx = \int_0^x (Ax)^T dx$$

$$v = \int_0^x \nabla \, dx = \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x_n} dx_n$$

$$\nabla v = \left[\frac{\partial v}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial v}{\partial x_n} \right]$$

مثال: اگر تابع ∇v پیشنهادی به صورت زیر باشد:

بطور مثال $\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = 0$

① $$\nabla v = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$ شرط کرل برقرار است

② $$v = \int_0^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 + \int_0^{x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_2$$

③ $$\begin{cases} \frac{\partial \nabla v}{\partial x_1} = 3x^2 & \frac{\partial^2 \nabla v}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \nabla v}{\partial x_2} = 1 & \frac{\partial^2 \nabla v}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \end{cases}$$ شرط کرل برقرار است

$$v = \int_0^{x_1} x_1^3 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \int_0^x x^3 dx + \int_0^{\dot{x}} \dot{x} d\dot{x} \Rightarrow v = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\dot{x}^2$$ مثبت معین

$$\dot{v} = x^3 \dot{x} + \dot{x}\ddot{x} = x^3 \dot{x} + (-\dot{x} - x^3)\dot{x} = -\dot{x}^2 \Rightarrow \dot{v} < 0$$

اما پیشنهاد دادن گرادیان برای اینکه شرط کرل برقرار باشد سخت است، می‌تواند یک تابع برای یک سیستم باشد،

پس این روش هم خیلی موفق نیست. چون پایداری مجانبی را نشان نمی‌دهد

در تئوری خوب می‌توان این تعمیم را اعمال کرد

- قضیه (تئوری) مجموعه تغییر ناپذیر (ناوردا)

اگر بزرگترین مجموعه ناوردا در فضای $\dot V=0$ (منحصراً دربرگیرنده نقطه تعادل باشد) تنها یک عضو داشته باشد و آن نقطه تعادل سیستم باشد در اینصورت $\dot V\le 0$ پایداری مجانبی فقط نقطه تعادل $x=0$ را نتیجه می‌دهد.

این قضیه می‌گوید که از هر نقطه‌ای در فضای $\dot V\le 0$ آغاز نماییم مسیر حالت به بزرگترین مجموعه ناوردا وارد می‌شود.

این قضیه می‌گوید که $\dot V \to 0$

این فضا یک فضای کراندار است و تابع لیاپانوف از پایین کراندار است و $\dot V\le 0$ پس از هر ناحیه‌ای آغاز کنیم از آن ناحیه خارج نمی‌شویم. V حالت کاهش دارد و به صفر میل می‌کند و تا زمانی که $\dot V\neq 0$ است و کم می‌کند تا به صفر که می‌رسد متوقف می‌شود روی مرزهای صفحه $\dot V=0$ هستند. و در اینجا فقط یک نقطه (یک عضو) دارد و آن هم نقطه تعادل است.

نحوه استفاده:

$$\ddot x+\dot x+x^3=0 \qquad (1)$$

$$V=\frac{1}{2}\dot x^2+\int_0^x \sigma^3 d\sigma$$

$$V=\frac{1}{2}\dot x^2+\frac{1}{4}x^4 \longrightarrow \dot V=\dot x\ddot x+\dot x x^3=\dot x(\ddot x+x^3)=-\dot x^2 \Rightarrow \dot V\le 0$$

باید گفت که در فضای $\dot V=0$ بزرگترین مجموعه ناوردا فقط نقطه تعادل $x=0$ است.

$\dot V=0 \qquad \dot x=0 \longrightarrow \ddot x=0$

در معادله (1) می‌گذاریم:

$x^3 \longrightarrow x=0$

پس مجموعه ناوردا فقط یک عضو $x=0$ دارد.

بررسی پایداری سیستم‌های متغیر با زمان

$\dot X=f(X,t)$

سیستم‌های خطی تغییرپذیر با زمان: $\dot x=A(t)x$

مثال:
$$\begin{cases}\dot x_1=x_2\\ \dot x_2=-x_2+(\sin t)\cdot x_1\end{cases}$$

سیستم غیرخطی متغیر با زمان:
$$\dot x=f(x,t) \qquad \begin{cases}\dot x_1=x_2\\ \dot x_2=-x_2-x_2^3+\sin^2(t)x_1\end{cases}$$

$\dot x=f(x,t)$: اگر x^* نقطه تعادل سیستم باشد $\Rightarrow \forall t\ge t_0 \quad f(x^*,t)=0$

$\dot x=0$

نقطه تعادل $x=0$ پایدار است هرگاه: (متغیر با زمان)

$$\exists r(t_0,R)\quad \forall R>0 \quad \|x(t_0)\|<r \Rightarrow \|x(t)\|<R \quad \forall t\ge t_0$$

شعاع کره وابسته به زمان

در این صورت می‌گوییم پایدار لیاپانوف است.

حال پایدار مجانبی است هرگاه

1) نقطه تعادل $x=0$ پایدار است.

2) $x\to 0$ as $t\to\infty$

و پایدار نمایی است هرگاه:

1) نقطه تعادل $x=0$ پایدار باشد و

$$\exists\ \alpha>0,\ \lambda>0 \quad \|x(t)\|\le \alpha e^{-\lambda(t-t_0)}\cdot\|x(t_0)\|$$

پایداری یکنواخت:

- سیستم پایداری یکنواخت است هرگاه رفتار x بستگی به t_0 نداشته باشد.

$$\exists\ r(R) \quad \forall R>0 \quad \|x(t_0)\|<r \Rightarrow \|x(t)\|<R \quad \forall t\geq t_0$$

پایداری هر سیستم TI (تغییرناپذیر با زمان) از نوع پایداری یکنواخت است. (چون به t_0 بستگی ندارند.) که r تابعی از R است

بررسی پایداری سیستم‌های متغیر با زمان با روش مستقیم لیاپانوف:

فرض کنید $x=0$ نقطه تعادل سیستم $\dot{x}=f(x,t)$ است.

$V(x,t)$ یک تابع مثبت معین است (با مشتقات جزئی پیوسته) و $\dot{V}(x,t)$ یک تابع منفی نیمه معین است.

a) در این صورت نقطه تعادل $x=0$ پایدار است.

b) اگر $\dot{V}(x,t)$ یک تابع منفی معین باشد، نقطه تعادل پایدار مجانبی خواهد بود.

c) اگر $V(x,t)$ به ازای $\|x\|\to\infty$ از هر طرف آنگاه $V(x,t)\to\infty$ باشد، پایداری از نوع سراسری می‌شود.

d) پایداری از نوع یکنواخت خواهد بود:

1. پایدار باشد
2. $V(x,t)$ کاهشی باشد.

$V(x,t)$ مثبت معین است هرگاه $V(x,t)\geq V(x)$ که در آن $V(x)$ یک تابع مثبت معین است یعنی: $V(0,t)=0$

$V(x)=0$ if $x=0$

$V(x)>0$ if $x\neq 0$

مثال: $V(x,t)=(1+\sin^2 t)x_1^2+x_2^2$

این تابع مثبت معین است چون $V(x)=x_1^2+x_2^2$ مثبت معین داریم که شرط زیر را برآورده می‌کند: $(V(0)=0,\ V(x)>0 \text{ if } x\neq 0)$

$V(x,t)\geq V(x)$

$V(x,t)$ کاهشی است هرگاه

1. $V(x,t)$ مثبت معین باشد
2. $V_2(x)\geq V(x,t)$ که $V_2(x)$ مثبت معین است.

Page 82

مثال: $V(x,t)=(1+\sin^2 t)x_1^2+x_2^2$

$$(1+\sin^2 t)x_1^2+x_2^2 \leq \underbrace{2x_1^2+x_2^2}_{V_2(x)} \Rightarrow V(x,t) \text{ کاهشی}$$

$V(x,t)\geq x_1^2+x_2^2$: چون $V(x,t)$ مثبت معین است

پس اگر برای یک سیستم متغیر با زمان بتوان $V(x)$ مثبت معین با مشتقات جزئی معرفی کرد که $\dot{V}(x)\leq 0$ باشد، در این صورت $x=0$ پایدار است.

مثال:

$$\ddot{x}+(1+e^{-t})\dot{x}+x=0$$

نقطه تعادل سیستم: $\dot{x}=0\,,\ \ddot{x}=0 \longrightarrow x=(0,0)$

پیشنهاد $v(x)$: $v(x)=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}x^2$

$$\dot{v}(x)=\dot{x}\ddot{x}+x\dot{x}=\dot{x}(\ddot{x}+x)=\dot{x}(-(1+e^{-t})\dot{x})=-\dot{x}^2(1+e^{-t})\leq 0 \Longrightarrow \dot{v}(x)\leq 0$$

(همواره مثبت، همواره مثبت)

برهان خلف. برای آنکه نشان دهیم $\dot{x}=0$ فقط در مبدا اتفاق می‌افتد.

فرض کنید که $x=0$ در نقطه‌ای غیر از نقطه تعادل باشد یعنی $x\neq 0$ باشد.

فرض

$x\neq 0,\ \dot{x}=0 \Longrightarrow$ جایگذاری در معادله دیفرانسیل سیستم $\ddot{x}\neq 0 \Longrightarrow \dot{x}\neq 0$

فرض $\dot{x}=0$ نقض شد.

پایداری از نوع مجانبی است.

از هر طرف $\|x\|\longrightarrow\infty \Longrightarrow V(x)\longrightarrow\infty$ پایداری از نوع سراسری

$v(x)<\dot{x}^2+x^2$ پایداری از نوع یکنواخت

$\ddot{x}+\dot{x}^3+x=0 \longrightarrow$ نقطه تعادل $x=0$

x به سمت نقطه تعادل می‌رود به شرطی که t به سمت ∞ برود.

پایداری سیستم‌های خطی متغیر با زمان

فرض کنید که $x=0$ نقطه تعادل سیستم $\dot{x}=A(t)x$ باشد.

غلط ✗: $x=0$ پایدار است هرگاه مقادیر ویژه A در سمت چپ باشد.

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_1+e^{2t}x_2\\ \dot{x}_2=-x_2\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \dot{x}_2=-x_2 \Longrightarrow x_2=x_2(0)e^{-t}$$

$$\dot{x}_1=-x_1+e^{2t}x_2 \longrightarrow \dot{x}_1+x_1=x_2(0)e^{t}$$

$$t\to\infty \Longrightarrow x_1\to\infty$$

در این حالت نقطه تعادل ناپایدار می‌شود.

$$\dot{x}=A(t)x \Longrightarrow A(t)=\begin{bmatrix}-1 & e^{2t}\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-A)=\det\begin{bmatrix}\lambda+1 & -e^{2t}\\ 0 & \lambda+1\end{bmatrix}=0 \Longrightarrow \lambda=-1,-1$$

مقادیر ویژه سمت چپ هستند اما ناپایدار است.

✓ برای سیستم‌های تغییرپذیر با زمان نمی‌شود مانند سیستم‌های تغییرناپذیر با زمان گفت اگر مقادیر ویژه سمت چپ باشند، پایدار است.

روش لیاپانوف:

سیستم خطی و تغییرپذیر با زمان $\dot{x}=A(t)x$

$$v(x)=x^Tx \longrightarrow \dot{v}(x)=\dot{x}^Tx+x^T\dot{x}=x^TA^T(t)x+x^TA(t)x$$

$$=x^T(A^T(t)+A(t))x=-x^TQx$$

برای سیستم‌های خطی و تغییرپذیر با زمان، لزومی ندارد که تابع لیاپانوف تابعی از t هم باشد.

هرگاه Q مثبت معین باشد $\dot{V}(x) < 0$

یعنی مقادیر ویژه ماتریس Q همگی در سمت راست باشد.

یا مقادیر ویژه ماتریس $A^T(t)+A(t)$ همگی در سمت چپ باشند.

$$A^T+A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ e^{2t} & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & e^{2t}\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & e^{2t}\\ e^{2t} & -2\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-(A^T+A))=\begin{bmatrix}\lambda+2 & -e^{2t}\\ -e^{2t} & \lambda+2\end{bmatrix}=\lambda^2+4\lambda+4-e^{4t} \rightsquigarrow \lambda=-2\pm e^{2t}$$

λ را بدست آورید و بازه زمانی که در آن پایدار است را بیابید.

$$\dot{x}=A(t)x \longrightarrow x(t)=e^{\int_0^t A(t)dt}\,x(0)$$

لازم است که $e^{\int_0^t A(t)dt}$ محدود باشد.

شرط لازم $A(t)$ پایدار یا لاگرانژ باشد و محدود باشد. $\int_0^t A(t)dt<\infty$

$A(t)=A_1+A_2(t)$

1) اگر مقادیر ویژه بخش ثابت A، یعنی A_1 همگی در سمت چپ صفحه s باشد، در این صورت می‌توان گفت که نقطه تعادل $x=0$ پایدار است.

2) $A_2(t)\to 0$ as $t\to\infty$

$$x(t)=e^{\int_0^t (A_1+A_2(t))}x(0)=e^{\int_0^t A_1dt}\cdot e^{\int_0^t A_2(t)dt}\cdot x(0)$$

همچنین با این شرط که $\int_0^t A_2(t)dt<\infty$ محدود باشد.

یعنی هم باید $A_2\to 0$ برود و هم انتگرالش هم محدود باشد.

بررسی پایداری با روش‌های خطی‌سازی در سیستم‌های متغیر با زمان

$\dot{x}=F(x,t)$

خطی‌سازی در $x=0$: $F(x,t)=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0}x+F_{h.o.t}$

سیستم خطی شده : $F(x,t)=A(t)x$

اگر این رابطه برقرار باشد $F_{h.o.t}$ قابل صرف‌نظر کردن می‌شود.

$$\lim\sup_{\|x\|\to 0}\frac{\|F_{h.o.t}\|}{\|x\|}=0\longrightarrow$$

تفسیر 1 :

$$A(t)=\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=0}$$

چنانچه سیستم خطی شده تغییر ناپذیر با زمان باشد یعنی در $\dot{x}=Ax$ ، A ثابت باشد. هرگاه مقادیر ویژه A در سمت چپ محور $j\omega$ باشد، $F(x,t)$ پایداری مجانبی محلی دارد. اگر حتی یک مقدار ویژه در سمت راست محور $j\omega$ باشد، $F(x,t)$ ناپایدار است. و هرگاه بعضی از مقادیر ویژه روی محور $j\omega$ و سایرین در سمت چپ باشند نمی‌توان اظهار نظر کرد.

تفسیر 2 :

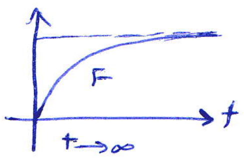
اگر سیستم خطی شده به صورت $\dot{x}=A(t)x$ باشد چنانچه $A(t)$ پایداری یکنواخت داشته باشد در این صورت نقطه تعادل $x=0$ در سیستم $\dot{x}=F(x,t)$ پایداری یکنواخت خواهد داشت. البته پایداری از نوع محلی مورد نظر است.

مثال: $\dot{x} = -x + t^{-1}x^2 = -x + \frac{x^2}{t}$ $\quad t>0$

پس از خطی شدن $\dot{x} = -x$ ، که در اینجا $A=-1$ و ثابت است.

و در اینجا $\lambda - A$ و $\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ مقدار ویژه

در نتیجه نقطه تعادل $x=0$ پایداری یکنواخت مجانبی دارد.



- همگرایی یک تابع

تعریف همگرایی: F به یک مقدار متناهی میرسد اگر t به سمت بی‌نهایت برود.

- اگر F همگرا شود، آیا $\dot{F}$ نیز همگرا می‌شود؟

$$F = e^{-t}\sin(e^{2t}) \qquad t\to\infty \Rightarrow F\to 0$$

$$\dot{F} = -e^{-t}\sin(e^{2t}) + 2e^{2t}\cos(e^{2t})\cdot e^{-t}$$
$$= -e^{-t}\sin(e^{2t}) + 2e^{t}\cos(e^{2t}) \Rightarrow t\to\infty : \dot{F}\to\infty$$

با این حال که بعضی F به سمت صفر میرود اما در صفر
با نوسانش بی‌نهایت sin نوسانی می‌کند $\dot{F}$ نیز به بی‌نهایت می‌رود.

- اگر $\dot{F}$ همگرا باشد آیا F نیز همگرا می‌شود؟

$\dot{F} = 1 \longrightarrow F = t$
محدود $\quad F\to\infty$

$\dot{F} = \frac{1}{t} \longrightarrow F = \log(t)$
$\dot{F}\to 0$, $t\to\infty$ $\qquad F\to\infty$, $t\to\infty$

- اگر F به یک مقدار همگرا شد یعنی F از پایین کراندار باشد و $\dot{F}\le 0$ در صورتی که $\dot{F}$ پیوسته یکنواخت باشد، در این صورت $\dot{F}\to 0$ می‌رود.

لم باربالات

بطور کلی: اگر F همگرا باشد و $\dot{F}$ پیوسته یکنواخت باشد در این صورت $\dot{F}\to 0$

$\dot{F}$ پیوسته یکنواخت است هرگاه $\ddot{F}$ محدود باشد.

اگر یک تابع مشتق‌پذیر بود پیوسته هم است.

تفسیر مشابه لیاپانوف با استفاده از لم باربالات:

V مثبت معین، $\dot{V}\le 0$ } V همگرا است.

$\ddot{V}$ محدود باشد ← یعنی $\dot{V}$ پیوستگی یکنواخت دارد.

در این صورت $\dot{V}\to 0$ as $t\to\infty$

از آن می‌توان برای پایداری مجانبی در نقطه تعادل استفاده کرد.

توجه کنید که شرط $\dot{V}\le 0$ بطور کلی پایداری لیاپانوف را نتیجه می‌دهد، ولی اگر $\ddot{V}$ محدود بود در این صورت می‌توان $\dot{V}\to 0$ بررسی کرد که آیا پایداری مجانبی برقرار است یا خیر.

سیستم زیر را در نظر بگیرید: $\ddot{x}+\dot{x}+x^3=0$ نقطه تعادل سیستم: $x=0$

$V(x)=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{4}x^4$ V مثبت معین

V از پایین کراندار است.

$\dot{V}=\dot{x}\ddot{x}+\dot{x}x^3=\dot{x}(-\dot{x})=-\dot{x}^2 \Rightarrow \dot{V}\leq 0$ این شرط برقرار است.

$\ddot{V}=-2\dot{x}\ddot{x}=-2\dot{x}(-\dot{x}-x^3) \longrightarrow \ddot{V}$ محدود $\longrightarrow$ V همگرا شد.

~~[illegible]~~ چون x و $\dot{x}$ محدود هستند

از محدود شدن $\ddot{V}$ به دلیل اثبات قبل پایداری لیاپانوف ($\dot{V}\leq 0$ و $V>0$) و محدود بودن x و $\dot{x}$ می‌توان همگرا شدن V را نتیجه گرفت.

V همگرا، $\ddot{V}$ محدود $\Big\}\longrightarrow \dot{V}\longrightarrow$ همگرا $\Rightarrow \dot{x}\to 0$ پایداری مجانبی

$\dot{x}=F(x,t) \longrightarrow V=V(x,t)$

$\dot{V}=\frac{dV}{dx}\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial t}$

$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial x}F(x,t)+\frac{\partial V}{\partial t}$

اگر $\frac{\partial V}{\partial t}=0$ باشد و اگر $\frac{\partial V}{\partial x}\neq 0$ برای $x\neq 0$، در این صورت:

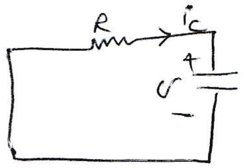
$\text{If } \dot{V}\to 0 \Rightarrow F(x,t)\to 0$

یعنی $\dot{x}\to 0$،

توجه کنید که $x=0$ نقطه تعادل را مشخص می‌سازد پس $x\to 0$. این برای سیستم‌های تغییرناپذیر با زمان برقرار است. ($\frac{\partial V}{\partial t}=0$)

اگر بتوان نتیجه گرفت که $F(x,t)\to$، در این صورت می‌توان گفت که $x\to 0$.

مثال: $1+e^{-t}$



$i_c=C\frac{dV}{dt} \Rightarrow$

$Ri_c=-V$

$RC\frac{dV}{dt}+V=0$ معادله حالت

$V_c(0)=V_0$

معادله حالت $\dot{V}=-\frac{1}{RC}V$

$\longrightarrow \dot{V}=0 \longrightarrow V=0$ نقطه تعادل

هرچند سیستم تغییرپذیر با زمان است اما ورودی نداریم که نقطه تعادل را جابجا کند چون خازن ولتاژ اولیه هم ندارد ($V_0=0$)

نقطه تعادل، نقطه‌ای است که سیستم در آنجا بی‌حرکت است الزاماً تغییر نمی‌کند اما state ها با زمان تغییر می‌کنند.

لیاپانوف تحلیل سیستم‌ها بدون حضور ورودی است.

اگر $\dot{v} = -\frac{1}{RC}v + t \Rightarrow -\frac{1}{RC}v + t = 0$ ؟ $v=0$ نقطه تعادل نخواهد بود آیا این سیستم نقطه تعادل دارد؟

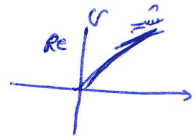
مثال: فرض کنید داریم $\dot{v} = -\frac{1}{RC}v + t$

$v = RCt \rightarrow \dot{v} = 0 \Rightarrow e = v - RCt$

$\dot{e} = \dot{v} - RC \Rightarrow \dot{e} = -\frac{1}{RC}(e + RCt) + t - RC$

- هر سیستمی که داریم باید اول به نقطه تعادل ببریم سپس سیستم را بررسی کنیم که پایدار است یا نه! ما در بحث پایداری نقطه تعادل $x=0$ فکر می‌کنیم.

$\rightarrow \dot{e} = -\frac{1}{RC}e - RC$



v محدود نخواهد بود ولی $e = -RCe \rightarrow -RC$ نقطه تعادل سیستم

قضایای ناپایداری نقطه تعادل صفر

- برای سیستم $\dot{x} = f(x,t)$ که $x=0$ نقطه تعادل سیستم است.

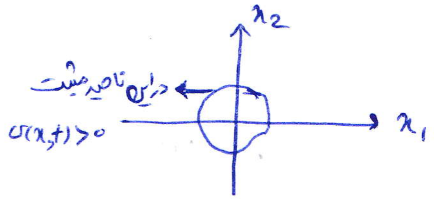
$x=0$ در t_0 ناپایدار است هرگاه $v(x,t)$ مثبت معین باشد و مشتق پذیر پیوسته است.

$\dot{v}(x,t)$ مثبت معین باشد.

- برای سیستم $\dot{x} = f(x,t)$ که $x=0$ نقطه تعادل سیستم است.

$x=0$ در t_0 ناپایدار است هرگاه $v(x,t_0)$ مشتق پذیر و پیوسته وجود دارد که کاهشی است و در همسایگی نقطه تعادل مثبت است.

$\dot{v}(x,t_0)$ مثبت است.



- برای سیستم $\dot{x} = f(x,t)$ که $x=0$ نقطه تعادل سیستم است.

$x=0$ در t_0 ناپایدار است هرگاه:

$\dot{v}(x,t_0) > \lambda v(x,t_0)$

$v(x,t_0) \longrightarrow$ مشتق پذیر و پیوسته

وجود دارد که کاهشی است و در همسایگی نقطه تعادل مثبت است.

* بهترین راه برای بررسی ناپایداری سیستم‌های متغیر پذیر با زمان این است که ابتدا سیستم را خطی‌سازی کنیم و سپس ناپایداری این سیستم را مورد بررسی قرار دهیم (مقادیر ویژه)

$v > 0 \Rightarrow \dot{v} > 0$

سیستم غیرخطی را خطی‌سازی می‌کنیم حتی اگر یک λ سمت راست باشد سیستم ناپایدار می‌باشد، به شرطی که سیستم خطی شده متغیر با زمان نباشد.

- معرفی توابع تبدیل PR (حقیقی مثبت)

توابع تبدیل SPR (اکیداً حقیقی مثبت) strictly اکیداً

در آنالیز و طراحی سیستم‌های غیرخطی بخصوص سیستم‌های خطی و غیرخطی بسیار مفید است. اگر تابع تبدیل PR باشد، آنگاه به دلیل خواص مهم آن تابع لیاپانوف مناسب حاصل می‌کند که برای کل سیستم مناسب است.

$$h(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} \quad n \geq m$$

پایدار بودن $h(s)$ شرط لازم است:

$h(s)$ حقیقی مثبت است هرگاه:

$$Re[s] \geq 0 \Rightarrow Re[h(s)] \geq 0$$

مثال:

$\frac{1}{s+1}$ $\quad s=\sigma+j\omega \Rightarrow \frac{1}{\sigma+j\omega+1} = \frac{\sigma+1-j\omega}{(\sigma+1)^2+\omega^2}$

$$Re[h(s)] = \frac{\sigma+1}{(\sigma+1)^2+\omega^2}$$

$Re[s]=\sigma$ $\quad \sigma \geq 0 \Longrightarrow Re[h(s)] \geq 0 \Longrightarrow$ PR است

- $h(s)$ اکیداً حقیقی مثبت است هرگاه: $\exists\, \varepsilon>0 \quad Re[s]\geq 0 \Longrightarrow Re[h(s-\varepsilon)] \geq 0$

(اکیداً پایدار بودن $h(s)$ شرط لازم است.)

برای مثال قبلی: $\exists\, \varepsilon>0 \quad Re(s)\geq 0 \Longrightarrow Re[h(s-\varepsilon)] = \frac{\sigma+1-\varepsilon}{(\sigma+1-\varepsilon)^2+\omega^2}$

اگر همه ریشه‌های $h(s)$ سمت چپ باشند اکیداً پایدار است.

اگر برخی از ریشه‌های ساده روی محور $j\omega$ بود و بقیه هم سمت چپ باشند پایدار است.

مثلاً با انتخاب $\varepsilon = \frac{\sigma}{2}$ خواهیم داشت: $Re[h(s-\varepsilon)] \geq 0$

به شکل ساده می‌توان تشخیص داد که آیا $h(s)$ اکیداً حقیقی مثبت است؟

هرگاه:

1) $h(s)$ اکیداً پایدار باشد. (همه قطب‌ها در سمت چپ صفحه s باشند)

2) $Re[h(j\omega)] \geq 0 \quad \forall \omega \geq 0$

3) $h(s)$ اکیداً مینیمم فاز باشد. (همه صفرها در سمت چپ صفحه s باشند)

4) درجه نسبی $h(s)$ یعنی $n-m$ برابر صفر یا یک باشد. (درجه نسبی $h(s)$ یعنی درجه صورت − درجه مخرج)

مثلاً:

$h(s) = \frac{s+1}{s^3+s^2+s+1} \Rightarrow n-m=2$ پس SPR نیست.

$h(s) = \frac{s-1}{s^3+3s+1} \Rightarrow$ مینیمم فاز نیست

$h(s) = \frac{s+1}{s^2-2s+5} \Rightarrow$ اکیداً پایدار نیست

حل کنید آیا $\frac{1}{(s+1)^2}$، SPR هست یا خیر.

غیرفعال بودن در سیستم‌های غیرخطی:

- نگاشت از $u \to y$ غیرفعال است هرگاه: تابعی کراندار از پایین v وجود داشته باشد که رابطه زیر برقرار باشد:

$\dot{v} = y^T u - g \quad g \geq 0$

طبق قانون بقای انرژی: توان تولیدی + توان مصرفی خارجی = (انرژی ذخیره شده)

- نگاشت $u \to y$ غیرفعال اتلاف است هرگاه:
← Passive

$\dot{v} = y^T u - g, \quad g \geq 0, \quad \int_0^\infty g\,dt > 0$

حسب لیاپانوف؛ انرژی سیستم مرتبط است و چون انرژی ذخیره شده در اجزاء یک سیستم قابل جمع کردن است پس تابع لیاپانوف یک سیستم هم مجموع توابع لیاپانوف اجزاء مرتبط است بعقیده Passivity و حتی تابع لیاپانوف را بصورت ترکیبی از توابع لیاپانوف زیرسیستم‌ها بیان کرد.

* نوع passive (اتلاف) سیستم‌هایی هستند که از المان‌های passive (مصرف) تشکیل شده‌اند.

- در مدارهای الکتریکی که از عناصر سلف، خازن و مقاومت تشکیل شوند passive یا غیرفعال هستند چنانچه مدار شامل مقاومت نیز باشد غیرفعال اتلاف است (یعنی انرژی از دست می‌دهد).

- با توصیف انرژی می‌توان سیستم‌های غیرفعال را معرفی کرد.

v: انرژی ذخیره شده در سیستم
u: ورودی سیستم
y: خروجی سیستم
$y^T u$ = توان ورودی
g: توان مصرفی

اینکه v باید از پایین کراندار باشد و $g \geq 0$ باشد برای passive بودن شرط لازم است.

مثال:

$\dot{x} + x^3 = u$
$y = h(x)$
$h(x)$ تابع ربع اول و سوم است.

آیا نگاشت $u \to y$ غیرفعال اتلاف است؟

$v = \int_0^x h(x)\,dx$ $v \geq 0$ کراندار است.

$\dot{v} = h(x)\dot{x}$
$= h(x)(u - x^3) = y(u - x^3) = yu - h(x)x^3 \Rightarrow \dot{v} = yu - g \quad g \geq 0 \quad g = h(x)\,x\,x^2 \geq 0$

$x h(x) \geq 0$
$x^2 \geq 0$

- سیستم غیرفعال غیراتلاف است هرگاه $g = 0$ باشد.

تمرین: آیا $\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = u$، $y = \dot{x}$ با یک نگاشت $u \to y$ پسیو اتلاف است؟

با توجه به اینکه v کراندار از پایین است و هرگاه v پیوسته یکنواخت باشد یعنی $\dot{v}$ محدود باشد در این صورت $\dot{v} \to 0$
$t \to \infty$

- لم کالمن - یاکوبوویچ: برای سیستم‌های خطی، ارتباط تنگاتنگی بین پایداری و Passivity سیستم وجود دارد.

در سیستم $\dot{x} = Ax + bu$، $y = cx$ تعریف کنید. $v = \frac{1}{2}x^T P x$ کراندار از پایین (کران پایین صفر)

$$\dot{v} = (\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x})\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(x^T A^T + u^T b^T) P x + \frac{1}{2} x^T P (Ax + bu)$$
$$= \frac{1}{2} x^T (A^T P + PA) x + \frac{1}{2} x^T P b u + \frac{1}{2} u^T b^T P x$$

هرگاه ماتریس مثبت معین P و Q وجود داشته باشند که،

$$A^T P + PA = -Q \qquad C^T = Pb$$

تابع تبدیل سیستم:

$h(s) = C(sI - A)^{-1} b$

SPR است (اکیدا حقیقی مثبت است).

$\dot{V} = -\frac{1}{2} x^T Q x + x^T P b u = y^T u - g$

$y = Cx \longrightarrow y^T = x^T C^T$ $\qquad g = \frac{1}{2} x^T Q x$

$C^T = Pb$ هرگاه

$C = B^T P$ برقرار باشد. $\qquad$ dissipative

نگاشت $u \to y$ غیرفعال است هرگاه لم کالمن یاکوبوویچ در آن برقرار باشد.

لم KY بیان می‌کند برای هر سیستم خطی معادلهٔ پایدار می‌توان با انتخاب یک مناسب ورودی و خروجی، تبدیل به نگاشت ورودی خروجی dissipative ایجاد کرد

اگر در یک سیستم خطی لم کالمن-یاکوبوویچ برقرار باشد می‌توان آن را فرم پسیو درآورد.

آیا می‌توان گفت هر سیستم پسیوی پایدار است؟ نمی‌توان اظهار نظر کرد.

اگر سیستم صرفا از عناصر پسیو تشکیل شده باشد و دائم انرژی سیستم تغییری نمی‌کند اما اگر پسیو اتلاف باشد انرژی سیستم کاهش می‌یابد

آنگاه لیاپانوف، این سیستم پایدار لیاپانوفی می‌باشد.

در این سیستم‌ها ورودی حضور دارد و در اثبات پایداری لیاپانوف ورودی حضور ندارد. این باعث ایجاد مشکل می‌شود و موضوع زیر سؤال می‌رود

پس نمی‌توان گفت لیاپانوف هستند یا نه.

اما اگر ورودی در سیستم نباشد و سیستم از نوع پسیو اتلاف یا اتلاف باشد در این صورت حتما می‌توانیم بگوییم سیستم پایدار است

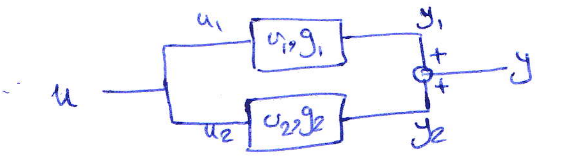
نتیجه‌گیری:

اگر یک سیستم غیرفعال باشد و ورودی نداشته باشد ($u=0$). آیا می‌توان گفت که پایداری لیاپانوف دارد؟

$\dot{V} = y^T u - g \Longrightarrow \dot{V} = -g \;,\; g \geq 0 \Longrightarrow \dot{V} \leq 0$

اگر V مثبت معین باشد در این صورت بله می‌توان گفت که پایداری لیاپانوف دارد

توابع لیاپانوف برای بلوک دیاگرام‌ها:



فرض کنید که $u_1 \to y_1$ و $u_2 \to y_2$ غیرفعال هستند.

آیا $u \to y$ غیرفعال است؟

$\dot{V}_1 = y_1^T u_1 - g_1$

$\dot{V}_2 = y_2^T u_2 - g_2$

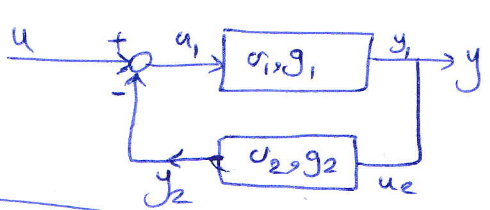
$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = (y_1^T + y_2^T) u - g_1 - g_2$

(اگر هر یک از سیستم‌ها (زیرسیستم) غیرفعال باشند آیا کل سیستم نیز غیرفعال می‌باشد؟)

$\dot{V} = y^T u - g$

$V = V_1 + V_2$

$g = g_1 + g_2$



$y_1 = y$

$u_1 = u - y_2$

$\dot{V}_1 = y_1^T u_1 - g_1 = y^T (u - y_2) - g_1$

$\dot{V}_2 = y_2^T u_2 - g_2 = y_2^T y - g_2$

$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = y^T u - (g_1 + g_2)$

$\dot{V} = y^T u - g$

اگر لم کالمن برقرار باشد ← سیستم اکیدا حقیقی مثبت است. این یعنی سیستم پایدار نیز هست و می‌توان یک فرم پسیو برای آن نوشت

اما نمی‌توان گفت که هر سیستم پسیوی پایدار است.

تابع توصیف کننده :

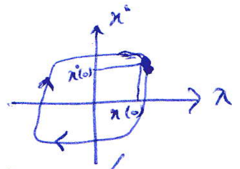
آنالیز حوزه فرکانسی را نمی‌توان مستقیماً به سیستم‌های غیرخطی اعمال کرد، چون پاسخ فرکانسی برای سیستم‌های غیرخطی ... به منظور پیش‌بینی تقریبی رفتار سیستم، نمونه خاصی از روش پاسخ فرکانسی به نام تابع توصیف به کار گرفته می‌شود. این روش، نسبت به سایر روش‌های تحلیل غیرخطی از روش سریع بوده و با آنکه جواب آن تقریبی است اما به خوبی در تحلیل رفتار سیستم استفاده می‌شود.

به منظور بررسی وجود، فرکانس و پایداری چرخه حدی استفاده می‌شود.

معادله دیفرانسیل واندرپل را در نظر بگیرید.

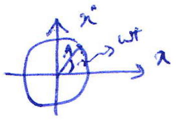
$$\ddot{x}+\alpha(x^2-1)\dot{x}+x=0$$

اگر چرخه حدی وجود داشته باشد x متناوب خواهد بود.



x از این نقطه اگر دور بزند یعنی یک بار دورش را طی کرده.

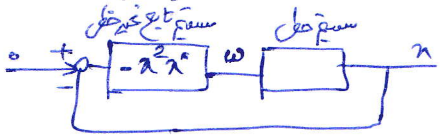
فرض کنید که x یک موج سینوسی باشد $x=\cos(\omega t)$. در این صورت چرخه حدی یک دایره است، به شعاع A و فرکانس زاویه‌ای ω.



فرض کنید : $x=A\sin(\omega t)$ / $\ddot{x}+\alpha(x^2-1)\dot{x}+x=0$

این را به صورت دیاگرام درمی‌آوریم $\rightsquigarrow$ $\ddot{x}-\alpha\dot{x}+x=-\alpha x^2\dot{x}$

سیستم را به این فرم در نظر بگیرید:



$$\ddot{x}-\alpha\dot{x}+x=\alpha\omega$$

$$\omega=-x^2\dot{x}$$

تابع غیرخطی

$$\frac{x}{\omega}=\frac{\alpha}{s^2-\alpha s+1}$$

سیستم حلقه بسته را به دو بخش خطی و غیرخطی تقسیم کنید.

✓ تابع توصیف کننده برای بخش غیرخطی به کار می‌رود و تابع غیرخطی را به صورت خطی تقریب می‌زند.

ω یک تابع غیرخطی است چگونه می‌توان یک تقریب خطی زد.

فرض کنید : $x=A\sin\omega t$

داریم $\omega=-x^2\dot{x}$

$$\omega=-A^2\sin^2\omega t(A\omega\cos(\omega t))$$

جایگزاری / نشانه : $\frac{A^3\omega}{2}\cos(2\omega t)\cos(\omega t)$

$$\omega=-A^2\frac{1-\cos 2\omega t}{2}(A\omega\cos(\omega t))=-\frac{A^3\omega}{2}\cos(\omega t)+\frac{A^3\omega}{2}\cos(2\omega t)\cos(\omega t)$$

$$=-\frac{A^3\omega}{2}\cos(\omega t)+\frac{A^3\omega}{4}\left[\cos(3\omega t)+\cos(\omega t)\right]$$

$$=-\frac{A^3\omega}{2}\cos(\omega t)+\frac{A^3\omega}{4}\cos(\omega t)+\frac{A^3\omega}{4}\cos(3\omega t)$$

$$\omega=-\frac{A^3\omega}{4}\cos\omega t+\frac{A^3\omega}{4}\cos(3\omega t)$$

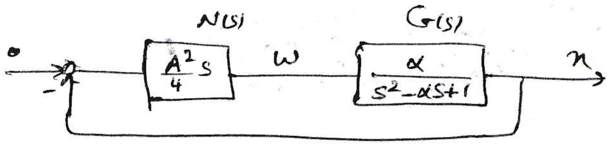
صرف نظر از هارمونیک‌های بالاتر از ۱، داریم:

ω را به این فرم تقریب می‌زنیم $\quad \omega\simeq-\frac{A^3\omega}{4}\cos\omega t$

جایگذاری $x=A\sin\omega t$ $\Leftarrow$

$$\omega=-\frac{A^2}{4}(\omega A\cos\omega t)$$

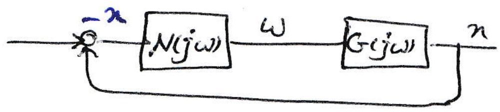
$$\Rightarrow \omega=-\frac{A^2}{4}\dot{x} \Rightarrow \frac{\omega(s)}{X(s)}=-\frac{A^2}{4}s$$



پاسخ فرکانسی برای سیستم های غیرخطی و تغییرپذیر با زمان تعریف نمی‌شود. پاسخ فرکانسی برای سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان است، به همین دلیل است که ابتدا فرض کنیم و بعد در حوزه فرکانس می‌بریم.

$s = j\omega$

به طور کلی سیستم را به صورت زیر در آورید:



N, G خطی و تغییرناپذیر با زمان هستند

رابطه بین w و x در حوزه فرکانس

$w = N(A,\omega)(-x)$

$G(j\omega)\cdot N(A,\omega)(-x) = x$

$(1+GN)x = 0 \Rightarrow 1+GN=0$

ریشه های چند جمله‌ای مشخصه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$G = \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega)+1}$ $\quad N = \frac{A^2}{4}(j\omega)$

$$1+GN = 1+\frac{\alpha}{(j\omega)^2-\alpha(j\omega)+1}\cdot\frac{A^2}{4}(j\omega) = \frac{4(1-\omega^2-j\alpha\omega)+\alpha A^2 j\omega}{4(1-\omega^2-j\alpha\omega)}$$

$$4(1-\omega^2)+j\omega(\alpha A^2-4\alpha)=0 \Rightarrow 1-\omega^2=0 \rightarrow \boxed{\omega=1}$$

$$\alpha A^2-4\alpha=0 \rightarrow \boxed{A=2} \rightsquigarrow x = A\sin(\omega t)$$

چرخه حدی در عمل به فرم دایره در نمی‌آید اما اینجا چون از تقریب استفاده کردیم، شکل دایره درآورده.

بررسی پایداری:

$1+GN=0$

بررسی پایداری در حوزه s انجام می‌شود

$$1+\frac{\alpha}{s^2-\alpha s+1}\cdot\frac{A^2 s}{4}=0 \Rightarrow \frac{4(s^2-\alpha s+1)+\alpha A^2 s}{4(s^2-\alpha s+1)}=0$$

$$\Rightarrow 4s^2+(\alpha A^2-4\alpha)s+4=0 \rightsquigarrow s=\frac{-\alpha(A^2-4)\pm\sqrt{\alpha^2(A^2-4)^2-64}}{8}$$

if $A=2 \rightarrow s_{1,2}=\pm j$

قطب روی محور موهومی، نشان‌دهنده یک سیکل حدی است که دامنه آن ۲ و فرکانس آن ۱ است.

پایداری سیکل حدی:

اگر $A>2$ ریشه‌ها بخش حقیقی منفی هستند و وضعیت پایدار است. دامنه سیگنال کاهش می‌یابد $A \rightarrow 2$

اگر $A<2$ ریشه‌ها بخش حقیقی مثبت دارند وضعیت ناپایدار است. دامنه سیگنال افزایش می‌یابد $A \rightarrow 2$

دامنه و فرکانس سیکل حدی به ارتباطی با α (به خاطر تقریب)

یعنی اگر از داخل چرخه حدی شروع کنیم، به چرخه حدی می‌رسیم و اگر از خارج چرخه شروع کنیم، به چرخه می‌رسیم.

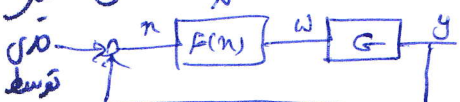
بنابراین چرخه حدی پایدار است، زیرا از خارج و داخل چرخه حدی آغاز نمائیم، به سمت آن می‌رویم.

$N(A,\omega) = \frac{A^2}{4}s$

مرحله اشکال کار، جایگزینی بلوک غیرخطی سیستم با بلوک خطی ... بعد N را تابع توصیف عامل غیرخطی سیستم می‌نامیم. دامنه و فرکانس سیکل حدی توسط رابطه

بررسی تابع توصیف کننده با فرضیات زیر:

تا الان به طور کلی بحث کردیم حال به طور خاص مسائل را بررسی می‌کنیم.



1) سیستم به صورت زیر درآید که در آن G خطی و $w=F(x)$ غیرخطی است.

2) N خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

3) تابع $F(x)$ فرد است.

4) در تقریب خطی $F(x)$ فقط هارمونیک اول را در نظر می‌گیریم.

$1+G(j\omega)N(A,\omega)=0$

به دست می‌آید

فرض کنید : $x = A\sin(\omega t)$ ، بنابراین $F(x)$ متناوب است زیرا $F(x) = F(A\sin\omega t)$
چون متناوب است و توان سری فوریه نوشت

بسط سری فوریه $w(t)$:

$$w(t) = F(x, t)$$

$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$$

از فرض 3 $\Longrightarrow w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$

از فرض 3 و 4 $\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} w(t) = b_1 \sin(\omega t) \\ x = A\sin(\omega t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{N = \frac{b_1}{A}}$ ✓

$x \rightarrow \boxed{N(j\omega)} \rightarrow w$

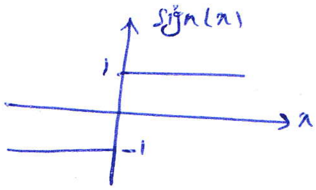
بنابراین تبدیل خطی $F(x)$ ،
بجای تابع $F(x)$ تابع تبدیل $N = \frac{b_1}{A}$ که حقیقی است قرار دهیم.

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)\sin(\omega t)\, d(\omega t)$$

$$\boxed{b_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} w(t)\sin(\omega t)\, d(\omega t) \quad \text{و} \quad N = \frac{b_1}{A}}$$

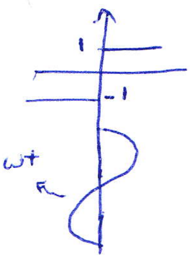
به شرطی که فرضیات گفته شده برقرار باشند.
تابع توصیف عوامل غیرخطی مشترک
درسیستم ها : (نحوه محاسبه تابع توصیف عوامل غیرخطی) :
ویژگی های غیرخطی S :

1. $sign(x)$ تابع علامت غیرخطی و قرار



وجود $sign(x)$ باعث ارتعاش (نوسان) در سیستم، چون داریم
در حال سوئیچ است با تغییر اندکی x از صفر سوئیچ می کند به یک مقدار بالا یا پایین، در عمل این تابع
ناپیوسته است در صفر تعریف شده است.

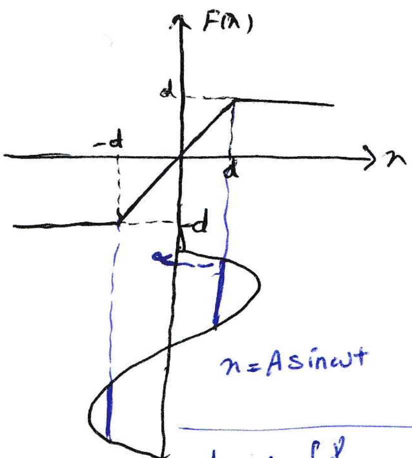
$$sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(\omega t)\, d\omega t = \frac{4}{\pi}\left(-\cos(\omega t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

$$\Longrightarrow N = \frac{4}{\pi A}$$

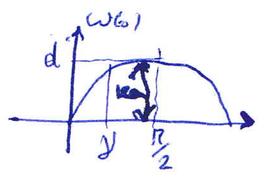
2. تابع اشباع $F(x) = Sat(x)$



$F(x) = Sat(A\sin\omega t)$
از نظر ریاضی

if $A < d$ $\quad F(x) = x \longrightarrow$ خطی است و نیازی به تقریب نیست
$N = 1$ ✓
$w = F(x) = x$

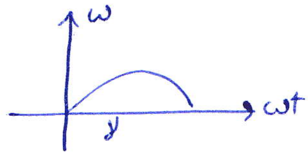
if $A > d$



$A\sin\gamma = d$
$\Longrightarrow \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{d}{A}\right)$

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\gamma} A\sin(\omega t)\sin(\omega t) + \frac{4}{\pi}\int_{\gamma}^{\frac{\pi}{2}} d\,\sin\omega t\, d(\omega t)$$

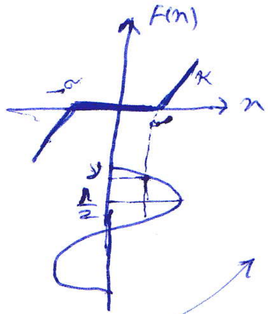
3) ناحیه مرده



$\omega = f(A\sin\omega t)$

$A \sin \gamma = \sigma$

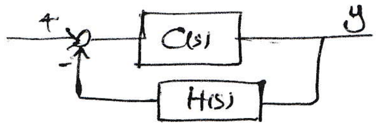
$\gamma = \sin^{-1}\frac{\sigma}{A}$



$$F(n) = \begin{cases} 0 & 0<n<\sigma \\ K(n-\sigma) & \sigma<n \\ 0 & -\sigma<n<0 \\ K(n+\sigma) & n<-\sigma \end{cases}$$

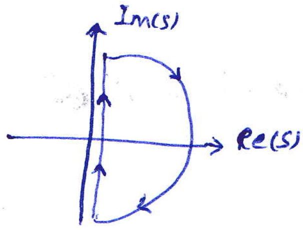
$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_{\gamma}^{\frac{\pi}{2}} K(A\sin\omega t-\sigma)\sin\omega t \, d\omega t$$

معیار نایکوئیست



چند جمله‌ای مشخصه: $1+G(s)H(s)=0$

در بررسی پایداری سیستم حلقه بسته یک مسیر نایکوئیست رسم می‌کنیم، بشرطی که هیچ قطب و صفری روی محور نباشد.

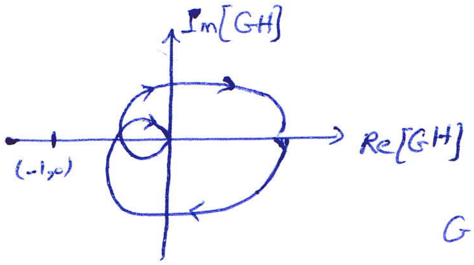


$s=\sigma+j\omega$ صفحه s

اگر یک سیستم حلقه بسته قطبی در سمت راست (در حوزه فرکانس) داشته باشد این قطب باعث ناپایداری سیستم می‌شود.

با روش نایکوئیست می‌بینیم که آیا قطبی از سیستم حلقه بسته در سمت راست صفحه s وجود دارد یا خیر.

سپس مسیر را در صفحه GH پردازش می‌کنیم.



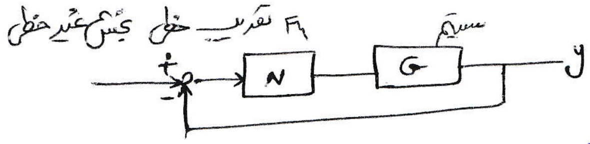
Z: تعداد ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه در سمت راست

با توجه به نقطه (-1,0) در صفحه GH ~~[illegible]~~ هرگاه مسیر در صفحه GH نقطه (-1,0) را N بار دور بزند (البته در جهت عکس عقربه‌های ساعت)، این N برابر است با: $N=Z-P$

که Z تعداد صفرهای 1+GH و P: تعداد قطبهای 1+GH یا قطبهای GH

روش به این صورت است که تعداد قطبهای GH را بدست می‌آوریم. تعداد دور زدن در جهت عکس عقربه‌های ساعت حول نقطه (-1,0) را نیز بدست می‌آوریم. سپس Z را محاسبه می‌کنیم. $\Rightarrow Z=N+P$

نقطه (-1,0) با توجه به رابطه GH=-1 تعیین شده است.



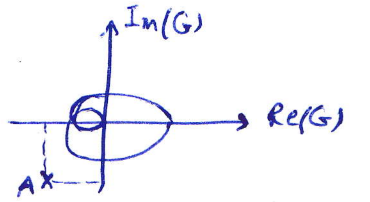
$1+GN=0 \rightsquigarrow GN=-1$

~~این بار~~ پایداری با پردازش مسیر نایکوییست در صفحه GN با همان منطق قبلی است.

یا می‌توان نوشت $G=-\frac{1}{N}$

در این صورت بررسی پایداری با پردازش مسیر نایکوییست در صفحه G قابل انجام است ولی نقطه $(-1,0)$ به نقطه $A=(Re(-\frac{1}{N}), Im(-\frac{1}{N}))$ تغییر یافته است.

N تعداد دور زدن حول نقطه فوق است.



$A=(Re(-\frac{1}{N}), Im(-\frac{1}{N}))$

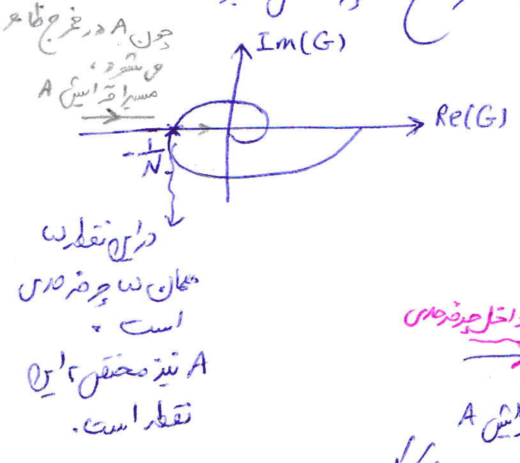
ایرادی که ما سیستم غیرخطی را تقریب زدیم با این روش نمی‌توان به طور کامل پایداری را تحلیل کرد.
این روش تحلیل تقریبی از پایداری خواهد بود.

وجود چرخه حدی با ترسیم کامپیوتری:

اگر N حقیقی باشد $\quad 1+GN=0 \quad , \quad G=-\frac{1}{N}$

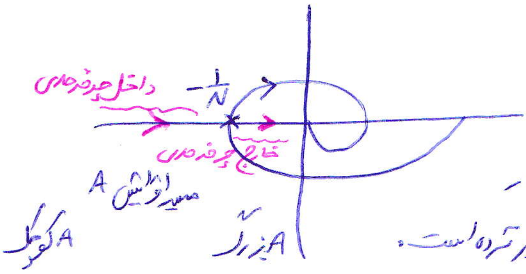
اگر یک چرخه حدی با دامنه A و فرکانس ω وجود داشته باشد، در این صورت به ازای A و ω رابطه $G=-\frac{1}{N}$ برقرار است.

در صورتی که مسیر G بخش منفی محور حقیقی را قطع کند چرخه حدی وجود دارد، اگر قطع نکند چرخه حدی وجود ندارد.

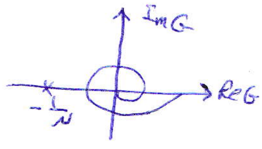


به هر تعداد که آن را قطع کند چرخه حدی دارد.

در نقطه‌ای که داخل چرخه حدی است و یا نقطه‌ای که داخل چرخه حدی است توجه کنید.

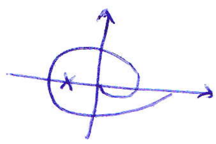


اگر $-\frac{1}{N}$ داخل چرخه حدی باشد وضعیت پایدار داریم زیرا مسیر نایکوییست $-\frac{1}{N}$ را دور کرده است.



دامنه مسیر کاهش می‌یابد پس حرکت به سمت چپ خواهد بود.

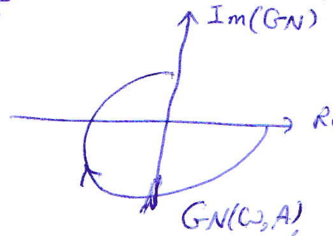
و اگر در خارج چرخه حدی باشیم A بزرگتر شده است و در مسیر نایکوییست شده‌ایم و وضعیت ناپایدار داریم پس دامنه افزایش می‌یابد و به ترتیب مسیر $\frac{1}{N}$ به سمت مبدا می‌رود.



پس چرخه حدی ناپایدار است.

(در حالت کلی N تابعی از A و ω است.)

$1+GN=0 \longrightarrow GN=-1 \ , \ G=-\frac{1}{N}$

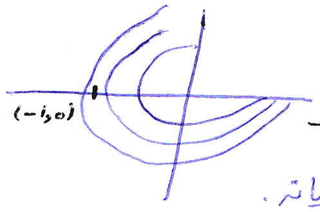


اگر چرخه حدی با دامنه A و فرکانس ω وجود داشته باشد باید رابطه فوق برقرار باشد : $GN=-1$

اگر مسیر GN نقطه $(-1,0)$ را قطع کرد چرخه حدی وجود دارد.

GN تابع دو مقدار است هم به A بستگی دارد هم به ω ، رسم کردنش سخت است.

یکبار ω را ثابت می‌گیریم و A را مختلف می‌گیریم و رسم می‌کنیم بعد نگاه می‌کنیم سیستم یکی از آنها ۱- را قطع می‌کند یا نه.

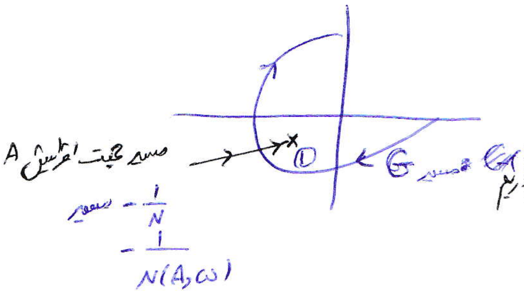


→ در ω ثابت A تغییر می‌کند

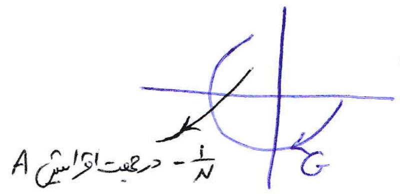
و یا A را ثابت نگه داریم و ω را تغییر دهیم تا ببینیم از نقطه $(-1,0)$ عبور می‌کند یا نه.

روش ترسیم GN :

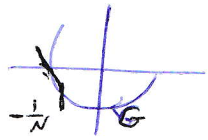
A را ثابت نگه داریم و ω را تغییر دهیم برای A های مختلف مسیرهای مختلف بدست می‌آید، چنانچه یکی از مسیرها از $(-1,0)$ عبور کند چرخه حدی وجود دارد ، A ها چرخه حدی نیز بدست می‌آید.



چرخه حدی ناپایدار :
① نقطه داخل قرار گرفته و با افزایش A ناپایداری داریم



چرخه حدی پایدار :

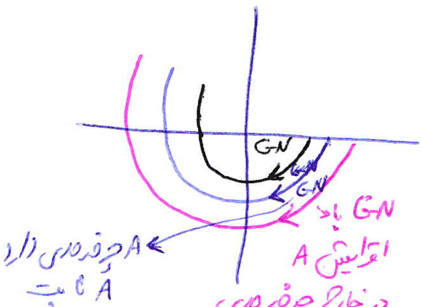


تقریبی بودن نتایج : $G=-\frac{1}{N}$

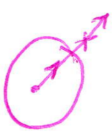
تعداد چرخه‌های حدی ۲ است.

پس نتایج قابل اطمینان نیست زیرا مسیرها تقریبا موازی و مماس با هم هستند.

ممکن است با توجه به تقریبی بودن N مسیر $-\frac{1}{N}$ اصلا مسیر G را قطع نکند.

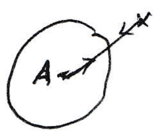


GN با افزایش A در خارج چرخه حدی هستیم، مسیر نایکوئیست ناپایداری را نشان می‌دهد پس چرخه حدی ناپایدار است.



GN برای A بزرگتر،

خارج چرخه حدی هستیم نقطه $(-1,0)$ خارج مسیر نایکوئیست است پایداری داریم پس دامنه کاهش می‌یابد به روی چرخه حدی برمی‌گردیم.



مقدمه‌ای برای طراحی سیستم‌های کنترل غیرخطی

در طراحی باید به موارد زیر توجه کرد:

۱) هدف
- الف. پایدارسازی $y \to 0$ (y خروجی سیستم است.)
- ب. تنظیم $y \to y_d$ (y_d ثابت است.)
- ج. ردیابی $y \to y_d(t)$

هر سه مورد پایدارسازی، تنظیم و ردیابی با تحقق $e \to 0$ میسر است. $e = y_d - y$

در پایدارسازی $y_d = 0$، در تنظیم y_d ثابت و در ردیابی y_d متغیر با زمان است.

- تنظیم مانند تنظیم دمای کوره روی $1500^\circ C$
- ردیابی مانند ردیابی یک مسیر توسط موشک، هواپیما یا ربات

شرط لازم برای ردیابی مسیر y_d، آن است که y_d و مشتقات آن تا بالاترین مرتبه مورد استفاده در سیستم در اختیار و محدود باشد.

(مثلاً اگر y_d تابع پله باشد مشتق‌پذیر نیست. باید y_d پیوسته باشد.)
- y_d باید نرم و مشتق‌پذیر باشد
- تابع پله قابل ردیابی نیست (در همان پله و در زمان بالا، پله را نمی‌توانیم ردیابی کنیم)
- هرگاه y_d نویز داشته باشد قابل ردیابی نیست. بهتر است فیلتر شده y_d، ردیابی شود.

اگر y_d نویز داشته باشد، در مشتقات بالاتر آن نویز با دامنه بسیار بالا ظاهر خواهد شد به طوری که مشتقات y_d گم خواهند شد.

y_d: سیگنال اصلی $\qquad y_s = y_d + y_n$

y_n: سیگنال نویز

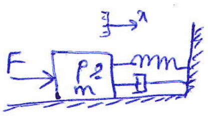
- ممکن است y_n به y_d نزدیک باشد ولی $\dot{y}_n$ هرگز نزدیک $\dot{y}_d$ نخواهد بود. هرچه فرکانس نویز بالاتر باشد این فاصله بیشتر خواهد شد.

مسئله عدم قطعیت در مدلسازی:

مثلاً یک سیستم جرم-فنر-دمپر ممکن است دارای مدل دینامیکی زیر باشد.

معادله واقعی سیستم: $m\ddot{x} + b\dot{x} + k_1 x + k_2 x^3 = F$ (2)

m و b و k_1، k_2 پارامترهای سیستم هستند.



F نیروی وارد بر سیستم و x جابجایی یا موقعیت جرم (جسم)

در مدلسازی از مقادیر واقعی پارامترها و ترم‌های دینامیکی به طور دقیق اطلاع نداریم، بنابراین یک مدل تقریبی برای سیستم پیشنهاد می‌شود.

مدل تقریبی یا مدل اسمی سیستم: $\hat{m}\ddot{x} + \hat{b}\dot{x} + \hat{k}_1 x = F$

مثال: $m = 10\ kg \rightsquigarrow \hat{m} = 10.1\ kg$

$\hat{m}$ تخمین m
$\hat{b}$ تخمین b
$\hat{k}_1$ تخمین k_1

بنابراین می‌توان معادله دینامیکی سیستم را بصورت زیر پیشنهاد داد:

$\underbrace{\hat{m}\ddot{x} + \hat{b}\dot{x} + \hat{k}_1 x}_{\text{مدل تقریبی}} + \underbrace{\eta}_{\text{خطای مدلسازی}} = F$ (1)

اختلافی که نشان دهنده مدل واقعی سیستم و مدلی که طراح فرض کرده مدل سیستم آن است. $\eta \rightsquigarrow$ عدم قطعیت است.

از جاگذاری ① در ② بدست می‌آید:

$$\hat m\ddot x+\hat b\dot x+\hat k_1 x+\eta = m\ddot x + b\dot x + k_1 x + k_2 x^3$$

$$\eta = \underbrace{(m-\hat m)\ddot x + (b-\hat b)\dot x + (k_1-\hat k_1)x}_{\text{عدم قطعیت پارامتری}} + \underbrace{k_2x^3}_{\text{دینامیک مدل نشده}} + \lambda(t)$$

$\lambda(t)$: اغتشاش خارجی

عدم قطعیت پارامتری: خطای مدلسازی است به خاطر ندونستن مقادیر واقعی پارامترها

دینامیک مدل نشده: یعنی ترم‌های دینامیکی که در مدل اسمی سیستم وجود ندارد اما در سیستم‌های واقعی هستند.

سیستم ممکن است با اغتشاش خارجی نیز مواجه شود. در این صورت معادله دینامیکی سیستم با حضور اغتشاش چنین خواهد بود.

$$m\ddot x + b\dot x + k_1x + k_2x^3 + \lambda(t) = F$$

اغتشاش خارجی ($\lambda(t)$) تابعی از state های سیستم ~~سیستم~~ نیست، تابع زمان است.
(در واقع، ربطی به متغیرهای حالت سیستم ندارد)

- دینامیک مدل نشده و عدم قطعیت‌های پارامتری تابعی از متغیرهای حالت هستند.
- خود یک اغتشاش خارجی در سیستم است.

باید سیستم کنترل در مقابل عدم قطعیت پایدار باشد برای همین منظور روش‌های کنترل زیر مطرح شده‌اند:

1. کنترل تطبیقی: مدلسازی ناقص فقط با عدم قطعیت پارامتری مواجه است ولی مقدار پارامترها نامعلوم ~~هستند~~.

2. کنترل مقاوم: مدل ناقص یا عدم قطعیت پارامتری، دینامیک مدل نشده و اغتشاش خارجی ممکن است مواجه شود ولی لازم است که حدود عدم قطعیت‌ها معلوم باشند. مثلاً بدانیم که حد $|\lambda(t)|$ که حد معلوم است.

$$|(m-\hat m)\ddot x + (b-\hat b)\dot x + (k_1-\hat k_1)x| \le |m-\hat m||\ddot x| + |b-\hat b||\dot x| + |k_1-\hat k_1||x| \le a_1|\ddot x| + a_2|\dot x| + a_3|x|$$

عدم قطعیت پارامتری

$|m-\hat m|\le a_1$ $\quad a_1,a_2,a_3>0$ $\quad |k_2x^3|\le a_4|x^3|$ $\quad a_4$: مثبت

$|b-\hat b|\le a_2$ $\quad |k_2|<a_4$

$|k-\hat k|\le a_3$

باید دینامیک مدل نشده را بدانیم $\Leftarrow$ a_4 معلوم، $|k_2x^3|<a_4$

سوال: آیا ردیابی در هر سیستمی میسر است؟

✓ - اگر سیستم غیرمینیمم فاز باشد ردیابی y_d میسر نخواهد بود.

مثال:

$$\ddot y + \dot y + y = \dot u - u \;\rightarrow\; \frac{Y}{U} = \frac{s-1}{s^2+s+1}$$

سیستم الزاماً مینیمم فاز است اگر همه صفرهای سیستم در سمت چپ صفحه s باشد.

سیستم الزاماً پایدار است اگر همه قطب‌های سیستم در سمت چپ صفحه s باشد.

در مثال فوق یک صفر سمت راست است پس غیرمینیمم فاز است. $s=1$

در این سیستم نمی‌شود ردیابی انجام داد. چرا؟ برهان خلف: $y=y_d$ یعنی ردیابی میسر باشد. ردیابی کامل بدون خطا

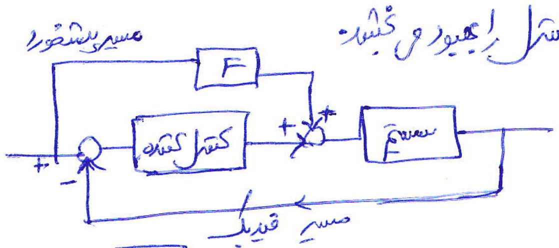
$$u = \frac{s^2+s+1}{s-1}\, y_d \Rightarrow u \text{ ناپایدار}$$

(چون تابع تبدیل ناپایدار است) u نامحدود است حتی اگر y_d محدود باشد، چون $s=1$ در مخرج ظاهر شده

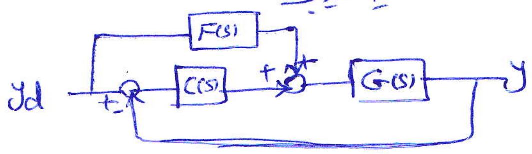
نکته: برای چنین ردیابی، باید ورودی سیستم نامحدود باشد

مسیرهای فیدبک و پیشخورد در طراحی کنترل کننده غیرخطی :

مسیر فیدبک پایداری را تضمین می‌کند و مسیر پیشخورد عملکرد سیستم کنترل را بهبود می‌بخشد.



در سیستم‌های خطی داریم :



$$y = G(s)\left[F(s)y_d + C(s)(y_d - y)\right]$$
$$y = G(s)\left(F(s)+C(s)\right)y_d - G(s)C(s)y$$
$$\left(1+G(s)C(s)\right)y = G(s)\left(F(s)+C(s)\right)y_d$$
$$\frac{y}{y_d} = \frac{G(s)\left(F(s)+C(s)\right)}{1+G(s)C(s)}$$

ریشه‌های $1+G(s)C(s)$ همگی باید در سمت چپ صفحه s باشند، یعنی $C(s)$ باید گونه‌ای طراحی شود که این خاصیت برای تضمین پایداری فراهم شود.

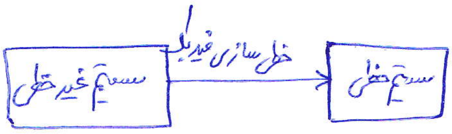
از نقطه نظر عملکرد دنبال $y=y_d$ هستیم.

$$G(s)\left[F(s)+C(s)\right] = 1+G(s)C(s)$$
$$G(s)F(s)+G(s)C(s) = 1+G(s)C(s) \Rightarrow G(s)F(s)=1 \Rightarrow F(s)=G^{-1}(s)$$

اگر $F(s)$ عکس $G(s)$ باشد، در اینجا به ردیابی کامل می‌رسیم. (لازم است که $G(s)$ مینیمم فاز باشد. (صفرها سمت چپ باشد که در $G^{-1}(s)$ که قطب‌ها می‌شوند باید سمت چپ باشد تا $G^{-1}(s)$ و $F(s)$ را پایدار کند.)

تکنیک خطی سازی فیدبک :

به طور تراکمی در طراحی سیستم‌های کنترل غیرخطی استفاده می‌شود.



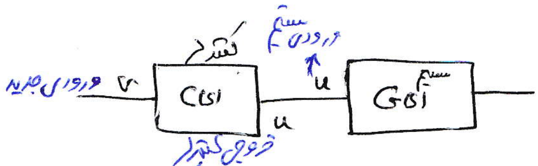
با اعمال خطی سازی فیدبک، سیستم غیرخطی به سیستم خطی تبدیل می‌شود سپس با تئوری کنترل خطی به آسانی سیستم حاصل کنترل خواهد شد.

(1) $\ddot{x}+\dot{x}+\sin x = u$ ورودی سیستم ← سیستم غیرخطی

خطی سازی پیشخورد { با قانون کنترل $u = v+\dot{x}+\sin x$ (u: خروجی کنترل کننده، v: ورودی جدید) خواهیم داشت :

(2) $v=\ddot{x}$ که یک سیستم خطی است.

$$\ddot{x} = u - \dot{x} - \sin x$$



با اعمال این تکنیک (خطی سازی) سیستم غیرخطی (1) با خطی سازی پیشخورد تبدیل به سیستم خطی (2) می‌شود.

- مثال برای ردیابی : $y=x$ خروجی (متغیر حالت) $y \to y_d$

کافی است پیشنهاد دهیم :

قانون کنترل برای ردیابی : $\ddot{x}_d + k_d(\dot{x}_d-\dot{x})+k_p(x_d-x)=v$ معادله ورودی جدید

از طرفی داریم : $\ddot{x}=v$

$$(\ddot{x}_d-\ddot{x})+k_d(\dot{x}_d-\dot{x})+k_p(x_d-x)=0$$

as $t\to\infty$, $x\to x_d$

طراحی سیستم های کنترل غیرخطی:

Feedback linearization — خطی سازی پسخورد (فیدبک)

در دو گروه اصلی زیر قرار می گیرد: ۱- خطی سازی ورودی حالت

2- خطی سازی ورودی خروجی

۱- خطی سازی از نوع ورودی-حالت: (معین با فیدبک ورودی پیشنهاد دهیم (معادله 2))

EX.

هدف: ردیابی $x \to x_d$

$$\ddot{x} + \dot{x}^2 + x^3 = u \qquad (1)$$

قانون کنترل زیر پیشنهاد می شود:

$$v + \dot{x}^2 + x^3 = u \qquad (2)$$

با اعمال قانون کنترل 2 به سیستم 1 بدست می آید:

$$\ddot{x} + \dot{x}^2 + x^3 = v + \dot{x}^2 + x^3 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = v \qquad (4)$$

تعمیم ← سیستم جدیدی که حاصل گرفته است

حالا برای ردیابی، قانون کنترل زیر پیشنهاد می شود:

$$v = \ddot{x}_d + K_d(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_p(x_d - x) \qquad (5)$$

با اعمال قانون کنترل (5) به سیستم (4) بدست می آید:

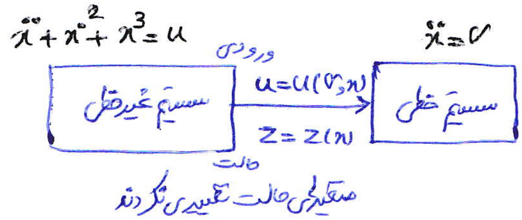
$$\ddot{x} = \ddot{x}_d + K_d(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_p(x_d - x)$$

$$\ddot{x}_d - \ddot{x} + K_d(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_p(x_d - x) = 0$$

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = 0$$

$$e \to 0,\ \dot{e} \to 0 \quad \text{as } t \to \infty$$

$$K_d > 0,\ K_p > 0$$

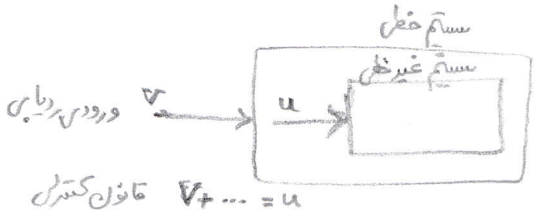


که در این حالت خاص داریم:

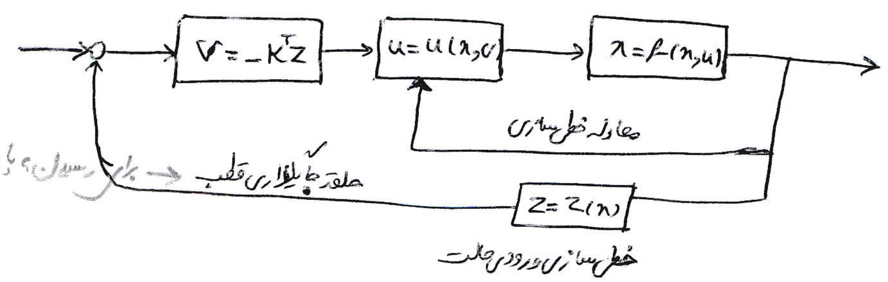
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$z_1 = x_1$

$z_2 = x_2$



با یک تبدیل روی ورودی و یک تبدیل روی حالت، سیستم جدیدی بدست می آید که خطی است.



EX.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

سیستم غیرخطی

$$z_1 = x_1 \quad z_2 = x_2^2 \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = 2x_2\dot{x}_2 = 2x_2(-x_2 + u) \\ \dot{z}_2 = -2x_2^2 + 2x_2 u \end{cases}$$

سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان

$$\dot{z}_1 = -z_1 + z_2$$
$$\dot{z}_2 = v$$

ورودی سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان

$$v = -2x_2^2 + 2x_2 u \Rightarrow u = \frac{v + 2x_2^2}{2x_2}$$

سیستم غیرخطی $\xrightarrow[z(x)]{u(v,x)}$ سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases} \xrightarrow[z_1 = x_1,\ z_2 = x_2^2]{u = \frac{v+2x_2^2}{2x_2}} \begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = v \end{cases}$$

در این تکنیک تمام بخش‌های غیرخطی حذف می‌شود و مثل تیلور تقریب نمی‌زند.

به طور کلی،

سیستم $\dot{x} = F(x,u)$ با خطی‌سازی پسخورد ورودی-حالت که در آن ورودی:

$u = u(x,v)$ و حالت: $z = z(x)$

به سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان $\dot{z} = Az + Bv$ که در آن A ماتریس ثابت حالت و B ماتریس ثابت ورودی است تبدیل می‌شود.

بعد از اینکه سیستم خطی بدست آمد، قانون کنترلی دلخواه را برای ردیابی انجام می‌دهیم.

چنانچه معادلات دینامیکی سیستم به فرم مشابه به همراه با کانونیکال کنترل‌پذیر باشد (مثلاً) معرفی داشته باشیم:

$x^{(n)} = F(x,u)$

در این صورت خطی‌سازی پسخورد ورودی-حالت سیستم را به صورت زیر در می‌آورد:

$$x^{(n)} = v$$

که $x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$ و

$$v = F(x,u) \longrightarrow u = g(x,v)$$

یعنی با تبدیل $u = g(x,v)$ سیستم به فرم خطی در می‌آید، برای ردیابی $x \to x_d$، قانون کنترلی زیر پیشنهاد می‌شود:

$$x_d^{(n)} + k_1\left(x_d^{(n-1)} - x^{(n-1)}\right) + \dots + k_n(x_d - x) = v$$

اگر سیستم به فرم کانونیکال کنترل‌پذیر همراه باشد، در نتیجه قابلیت خطی‌سازی ورودی-حالت را خواهند داشت.

$x^{(n)} = F(x,u)$

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = x_3$

$\vdots$

$\dot{x}_n = F(x,u)$

بعد از خطی‌سازی به این شکل در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad v_s$$

این ضرایب می‌توانند صفر باشند.

که یک فرم خطی از نوع کانونیکال کنترل‌پذیر است.

---

② خطی‌سازی پسخورد خروجی-حالت ← ورودی-خروجی

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x) \end{cases} \rightsquigarrow$$

u در خروجی ظاهر شده

در اینجا با مشتق گرفتن از y یک رابطه خطی ورودی-خروجی ایجاد می‌کنیم و سپس یک کنترل‌کننده براساس کنترل خطی تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \qquad (1)$$

خروجی تابع حالت است $y = x_1$

برای ایجاد یک رابطه صریح بین خروجی y و ورودی u، از خروجی یک‌بار مشتق می‌گیریم و می‌گویند سیستم مرتبه نسبی ۲ دارد.

سیستم خطی معادل تعداد قطبی یا افق نسبی صفر است.

$\dot y = \dot x_1$ (2)

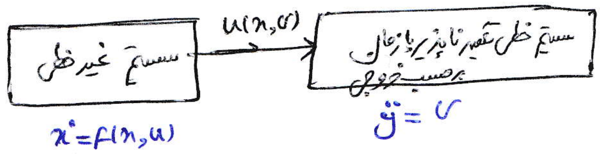
$= -x_1 + x_3$

$\ddot y = -\dot x_1 + \dot x_3 = -\dot x_1 + u$ (3)

با اعمال u داریم

$\Rightarrow -\dot x_1 + u = v \longrightarrow u = v + \dot x_1$

$\ddot y = v$



در اکثر کنترل‌ها، به دنبال ردیابی خروجی هستیم.

با هدف ردیابی : $y \to y_d$

$$v = \ddot y_d + k_d(\dot y_d - \dot y) + k_p(y_d - y) \quad (4)$$

در نتیجه

$$\ddot y_d - \ddot y + k_d(\dot y_d - \dot y) + k_p(y_d - y) = 0 \quad (5)$$

چنانچه بیش از n مشتق‌گیری به کار گرفته می‌شد سیستم از مرتبه بالاتر از n می‌بود، از ورودی کنترل هرگز ظاهر نمی‌شد سیستم کنترل‌ناپذیر می‌بود.

بررسی پایداری :

برای $k_p>0$ و $k_d>0$ سیستم 5 پایدار است در نتیجه e و $\dot e$ محدود هستند.

$$\boxed{\ddot e + k_d \dot e + k_p e = 0}$$

$e(0) = \dot e(0) = 0 \longrightarrow \forall t \geq 0 ,\; e(t) = 0$ یعنی ردیابی کامل بدست آمده است ⟵ در شرایط صفر اولیه

که به این تکنیک دینامیک خطای پایدار تعاریف است.

حال اگر y_d و $\dot y_d$ محدود باشند خواهیم داشت y و $\dot y$ محدود هستند.

x_1 محدود ⟵ $y = x_1$ و y محدود

x_3 محدود است ⟵ x_1 محدود ، $\dot y = -x_1 + x_3$ و $\dot y$ محدود

سوال : آیا u محدود است؟

$$u = v + \dot x_1 = \ddot y_d + k_d(\dot y_d - \dot y) + k_p(y_d - y) + \dot y$$

همه متغیرهای سمت راست معادله محدود هستند پس u محدود است.

تا قانون کنترلی که ما به سیستم اعمال می‌کنیم حتما باید خودش هم محدود باشد یعنی باید ورودی حتما محدود باشد زیرا ممکن است سیستم در اثر ورودی نامحدود بشکند.

برای بررسی محدود بودن x_2 به معادله $\dot x_2 = -x_2 + x_1^2$ توجه کنید.

$\dot x_2 + x_2 = x_1^2$ ⟵ یک سیستم خطی که x_1^2 به عنوان ورودی است
چون x_1^2 محدود می‌باشد بنابراین با توجه به پایداری سیستم خطی $\dot x_2 + x_2 =$ می‌توان نتیجه گرفت که x_2 محدود است.

در این حالت اصطلاحاً گوییم خطی‌سازی ورودی-خروجی که در این سیستم دینامیک داخلی $\dot x_2 = -x_2 + x_1^2$ را داریم که در معادله ظاهر نشده‌اند و ما باید پایداری دینامیک داخلی (محدود بودنشان) را بررسی کنیم و به پایدار بودنش بر سیستم وگرنه سیستم کار نمی‌کند.

عملکرد سیستم از روی معادله دینامیکی خطا (5) قابل ارزیابی است.

و با ضرایب k گوناگون بیشتری را بدهیم که سیستم عملکرد مطلوب را داشته باشد.

y_d نمی‌تواند یک پله باشد چون با پله مرتبه n که ما می‌خواهیم مشتق‌پذیر باشد.

آیا ممکن است دینامیک داخلی ناپایدار شود؟
(سیستم قبلی را دستکاری کنید.)

$\dot{x}_1 = -x_1 + x_3$

$\boxed{\dot{x}_2 = x_2 + x_1^3}$ ⟹ دینامیک داخلی ناپایدار است.

$\dot{x}_3 = u$

علی‌رغم اینکه خروجی به نظر خودمان پایدار است اما x_2 ناپایدار می‌باشد.

این حالت در داخل سیستم (این state) به بی‌نهایت می‌روند، مثلاً ممکن است خروجی ما ولتاژ باشد، اما جریان در جایی به ∞ رفته و فقط صرف اینکه خروجی محدود باشه کفایت نمی‌کند.

- این مثال را حل کنید.

EX. $\dot{x}_1 = -x_2 + u$

$\boxed{\dot{x}_2 = u}$ دینامیک داخلی

$y = x_1$

$\dot{y} = \dot{x}_1 = -x_2 + u = v \longrightarrow \boxed{v + x_2 = u}$

با اعمال قانون کنترل $v = \dot{y}_d + k_p(y_d - y)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{y}_d + k_p(y_d - y) \\ \dot{e} + k_p e = 0 \end{cases}$$

⇝ e محدود، y_d محدود ⟶ y محدود، $y = x_1$ ⟶ x_1 محدود

$\dot{x}_2 = v + x_2 = \dot{y}_d + k_p(y_d - y) + x_2$

x_2 نامحدود ⟵ سیستم ناپایدار است.

$\dot{x}_2 - x_2 = \dot{y}_d + k_p(y_d - y)$

دو مثال دیگر:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 + x_2^3 = \dot{y}_d + k_p e & \text{پایدار} \\ \dot{x}_2 - x_2^3 = \dot{y}_d + k_p e & \text{ناپایدار} \end{cases}$$

$u = v + x_2 = \dot{y}_d + k_p(y_d - y) + x_2$ (x_2 نامحدود) ⇝ u نامحدود

- تابع تبدیل سیستم را بدست آورید. آیا سیستم مینیمم فاز است؟

$\frac{y}{u}$ $\quad \dot{x}_1 = -x_2 + u \longrightarrow \ddot{x}_1 = -\dot{x}_2 + \dot{u}$

$\ddot{x}_1 = -u + \dot{u}$

$\ddot{y} = -u + \dot{u}$ ⇝ $\frac{y}{u} = \frac{s-1}{s^2}$

- این سیستم غیر مینیمم فاز است پس دینامیک داخلی ناپایدار می‌شود. ~~در سیستم‌های خطی~~ در این حالت ردیابی میسر نیست.

در سیستم‌های غیرخطی این مطالب چگونه بحث می‌شود؟ ← اگر سیستم مینیمم فاز نباشد دینامیک داخلی ناپایدار می‌شود (در سیستم‌های خطی)

- سیستم غیرخطی $\dot{x} = f(x) + g(x)u$، $y = h(x)$ ؟ طبق چه تعریفی مینیمم فاز نامیده می‌شود اگر دینامیک صفر آن، به طور مجانبی پایدار باشد.

یک سیستم خطی که با معادلات حالت روبرو توصیف شده است توجه کنید:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

این سیستم را به فرم همراه درآورید.

$$\frac{y}{u} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$

فرم همراه:
$$\dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = x_3,\quad \dots,\quad \dot{x}_n = \text{معادله مشخصه}$$

$$* \quad x_1 = \frac{u}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$
$$y = b_0 x_1 + b_1 s x_1$$
$$x_2 = s x_1$$
$$\boxed{y = b_0 x_1 + b_1 x_2} \quad (3)$$

معادلات حالت ⇒
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 = -\frac{a_0}{a_2} x_1 - \frac{a_1}{a_2} x_2 + \frac{1}{a_2} u \end{cases}$$

$$* \Rightarrow a_0 x_1 + a_1 s x_1 + a_2 s^2 x_1 = u$$
$$a_0 x_1 + a_1 x_2 + a_2 \dot{x}_2 = u \quad \rightsquigarrow \quad \dot{x}_2 = -\frac{a_0}{a_2} x_1 - \frac{a_1}{a_2} x_2 + \frac{1}{a_2} u$$

خطی سازی ورودی-خروجی:

هدف $y \to y_d$

$$\dot{y} = b_0 \dot{x}_1 + b_1 \dot{x}_2$$
$$\dot{y} = b_0 x_2 + b_1 \left(-\frac{a_0}{a_2} x_1 - \frac{a_1}{a_2} x_2 + \frac{1}{a_2} u \right)$$
$$\dot{y} = \left(b_0 - b_1 \frac{a_1}{a_2}\right) x_2 - \frac{b_1 a_0}{a_2} x_1 + \frac{b_1}{a_2} u \quad (1)$$

هدف در این جا کنترل این است که y به سمت y_d برسد.

قانون کنترل:
$$v = \left(b_0 - \frac{b_1 a_1}{a_2}\right) x_2 - \frac{b_1 a_0}{a_2} x_1 + \frac{b_1}{a_2} u \quad (2)$$

اعمال ① و ② ⇐ $\boxed{v = \dot{y}}$

قانون کنترل ردیابی:

$$\begin{cases} v = \dot{y}_d + K_p (y_d - y) \\ \dot{y}_d - \dot{y} = K_p (y_d - y) = 0 \\ K_p > 0 \Rightarrow y \to y_d \end{cases}$$

(معادله دینامیکی خروجی از مرتبه ① است درحالیکه دینامیک سیستم مرتبه 2 است، پس در اینجا یک دینامیک "داخلی" داریم.)

معادله دینامیکی خطا بصورت زیر است:

$$\dot{e} + K_p e = 0$$

این معادله از مرتبه 1 است درحالیکه سیستم از مرتبه 2 است پس یک دینامیک داخلی داریم.

(متغیرهای جدید حالت : x_1, y)

وقتی می‌خواهیم فضای جدیدی درست کنیم، باید متغیرهای حالت همراه روی متغیرهای جدید قابل حصول باشند.

بررسی پایداری دینامیک داخلی:

توصیف دینامیک داخلی سیستم:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$b_0 x_1 + b_1 \dot{x}_1 = y$$
$$\Rightarrow \dot{x}_1 + \frac{b_0}{b_1} x_1 + \frac{1}{b_1} y$$

$\dot{e} + K_p e = 0 \longrightarrow$ e محدود؛ چون سیستم پایدار است → y محدود

پایداری دینامیک داخلی سیستم به $\frac{b_0}{b_1}$ بستگی دارد.

$$e = y_d - y$$

دینامیک صفر خاصیت ذاتی سیستم غیرخطی است که به نوع انتخاب قانون کنترل یا مسیرهای دلخواه بستگی ندارد.

یک تابع تبدیل سیستم توجه کنید:

$$\frac{y}{u} = \frac{b_0+b_1 s}{a_0+a_1 s+a_2 s^2}$$

محل صفر: $b_0+b_1 s=0 \Rightarrow s=-\frac{b_0}{b_1}$ محل صفر

اگر $\frac{b_0}{b_1}>0$ صفر در سمت چپ است و دینامیک داخلی پایدار است.

در سیستم های خطی:

✓ دینامیک داخلی همان دینامیک صفر است.

(یعنی در سیستم های خطی چه دینامیک داخلی را بررسی کنیم و چه دینامیک صفر را. هر دو یکی هستند.)

اگر دینامیک صفر ناپایدار باشد دینامیک داخلی هم ناپایدار خواهد شد.

- با توجه به این موضوع می توان پایداری دینامیک داخلی را به پایداری دینامیک صفر مرتبط کرد.

- در سیستم های غیرخطی، دینامیک های صفر به صورت زیر تعریف می شوند:

✓ دینامیک های صفر همان دینامیک های داخلی است به شرط آنکه خروجی صفر شود.

در این مثال دینامیک های صفر توسط رابطه زیر ارائه می شود.

$$b_0 x_1 + b_1 \dot{x}_1 = 0$$

✓ پس در دینامیک داخلی y و مشتقات بالاتر را صفر کرده جایگذاری می کنیم سپس به بررسی پایداری آن می پردازیم.

پایداری دینامیک های صفر را بررسی کنید اگر پایدار باشد جهانی سراسری یا مجانبی می توان نتیجه گرفت که دینامیک های داخلی پایداری هم چنین شکل دارند.

- در سیستم قابلیت خطی سازی ورودی حالت را دارد؟

اگر سیستم قابلیت خطی سازی ورودی حالت را داشته باشد اصلاً قابلیت خطی سازی ورودی خروجی را نیز خواهد داشت.

مقدمه ریاضی

- تابع اسکالر $h(x)$ را در نظر بگیرید که در آن $h \in R$ اسکالر و $x \in R^n$ بردار است. $h(x): R^n \to R$

یک ماتریس ردیفی: گرادیان h

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \ \cdots \ \frac{\partial h}{\partial x_n}\right]$$

EX. $h(x) = x_1^2 + x_2^2$

$$\nabla h = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \ \ \frac{\partial h}{\partial x_2}\right] = [2x_1 \ \ 2x_2]$$

گرادیان بیانگر شیب در جهت مولفه های بردار شماست.

$\frac{\partial h}{\partial x_1}$ نرخ تغییر h به ازای x_1

- تابع برداری $f(x): R^n \to R^n$ را در نظر بگیرید:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

EX.
$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x_1 & 1 \end{bmatrix}$$

مشتق لی :

$$L_F^h = \nabla h \cdot F = \frac{\partial h}{\partial x} F \qquad F \in R^n,\ h \in R^n,\ x \in R^n$$

سیستم $\dot{x} = F(x)$ را در نظر بگیرید :
$y = h(x)$ خروجی

$$\dot{y} = \dot{h}(x) = \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} F$$

$\Rightarrow \dot{y} = L_F^h$ مشتق لی h در جهت f

$\ddot{y} = L_F^2$

- کروشه لی

$$\begin{cases} F(x) \in R^n \\ g(x) \in R^n \end{cases} \longrightarrow [F\ g] = \frac{\partial g}{\partial x} F - \frac{\partial F}{\partial x} g$$

($\frac{\partial g}{\partial x} F$: مشتق لی g در جهت f ؛ $\frac{\partial F}{\partial x} g$: مشتق لی F در جهت g)

$$[F\ g] = L_F^g - L_g^F$$

EX :
$$F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2x_2 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[F\ g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1 \\ x_1 + 2x_2^2 - x_1 - x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$$

- الحاق $\qquad ad_{F^i}^{\,g}$

$$ad_{F^i}^{\,g} = [F \quad ad_{F^{i-1}}^{\,g}]$$

$$ad_F^{0}g = g$$

$$ad_F^{1}g = [F \quad ad_F^{0} g] = [F\ g] \qquad ad_F^2 g = [F, [F\ g]]$$

خواص کروشه لی :

۱. دوخطی
$$[\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2, g] = \alpha_1 [F_1, g] + \alpha_2 [F_2, g]$$

2. جابجایی پذیری کج
$$[F, g] = -[g, F]$$

3. اتحاد ژاکوبی
$$L^h_{ad_f g} = L_f L_g h - L_g L_f h$$

فرض کنید که مرتبه سیستم غیرخطی $\dot{x}=f(x)$ از n است. ($x\in R^n$)

و یا $\dot{x}=f(x)+g(x)u$

سیستم $\dot{x}=f(x)$ قابلیت خطی‌سازی ورودی حالت دارد هرگاه

1) مجموعه بردارهای $\{g \quad ad_f^1 g \quad ad_f^2 g \dots ad_f^{n-1} g\}$ مستقل خطی باشند. (1)

! مثل یک شرط کنترل‌پذیری در سیستم غیرخطی است و عدم استقلال (1) عامل معکوس‌پذیری ماتریس کنترل‌پذیری خطی است.

2) مجموعه بردارهای تشکیل شده از براکت لی هر دو بردار از مجموعه $\{g \quad ad_f^1 g \quad ad_f^2 g \dots ad_f^{n-2} g\}$ غیرپیچش باشند.

- فرض کنید مجموعه حاصل بصورت $\{f_1,\dots,f_m\}$ باشد یعنی

$$\{g \quad ad_f^1 g \dots ad_f^{n-2} g\} = \{f_1,\dots,f_m\}$$

- مجموعه تشکیل شده از بردارهای مستقل خطی $\{f_1,\dots,f_m\}$ غیرپیچش است هرگاه:

$$f_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ijk}(x)\,[f_i \; f_j]$$

مثال: سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید.

(به فرم همراه است قابلیت خطی‌سازی ورودی حالت را دارد.)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 + u \end{cases}$$

حل: $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ $\quad f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

شرط 1

$$\{g \quad ad_f^1 g \quad \dots \quad ad_f^{n-1} g\}$$

$n=2$ (که مرتبه سیستم) $\longrightarrow \{g \quad ad_f^1 g\} = \{g \quad [f \; g]\} = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ مستقل خطی هستند.

$$[f \; g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

شرط (1) برقرار است.

شرط 2

$\{g\}$ آیا غیرپیچش است؟

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

در این حالت اگر مجموعه فقط یکی بود حتما غیرپیچش است.

اگر بردارها همگی ثابت باشند باز غیرپیچش است (براکت لی هر دو بردار ثابت صفر می‌شود).

(براکت دو به دو بردارهای (1) را تشکیل می‌دهیم و سپس در [illegible] آن‌ها را بررسی می‌کنیم اگر مساوی صفر شد یعنی وابستگی خطی را دارند.

در شرط (1) مستقل بودن بود، اما در شرط (2) وابسته بودن است. پس این سیستم قابلیت خطی‌سازی ورودی حالت را دارد.

نکته: هر سیستمی که به فرم همراه در بیاید قابلیت خطی‌سازی فیدبک را دارد. ✓

سیستم مثال قبل به فرم همراه است. یک روش این و روش دیگر [illegible]. روش ریاضی است.