بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

از سری جزوات آموزشی:

# فیزیک پایه 1

# (مکانیک)

تالیف : هریس بنسون

ترجمه : محمدرضا بهاری

ناشر : انتشارات دانشگاه پیام نور

# فیزیک 1 : فصل اول

## 1) یکاها:

**الف) یکاهای اصلی:** همه کمیتهای فیزیکی را می توان بر حسب سه مبنای جرم ، طول و زمان بیان کرد. یکای کمیتهای اصلی به ترتیب کیلوگرم(kg) ، متر(m) و ثانیه(s) می باشد.

**ب) یکاهای فرعی:** غیر از کمیتهای اصلی باقی کمیتهای فیزیکی ترکیبی از کمیتهای اصلی اند به همین دلیل یکاهای فرعی نامیده می شوند. به طور مثال سرعت ترکیبی از دو یکای متر و ثانیه است (سرعت ← m/s) و چگالی ترکیبی از دو یکای کیلوگرم و متر است (چگالی ←$kg/m^3$).

## 2) تبدیل یکاها:

این قسمت را با یک مثال شروع می کنیم.اگر بخواهیم کیلومتربرساعت را به متر بر ثانیه تبدیل کنیم (km/h→m/s) ابتدا باید برانیم هر کیلومتر چند متر و هر ساعت چند ثانیه است. سپس با یک تناسب به جواب می رسیم.

$$\begin{matrix} 1\ km = 1000\ m \\ 1\ h = 3600\ s \end{matrix} \quad " \quad 1\ \frac{km}{h}\ \text{٤}\ \frac{1000\ m}{3600\ s} = \frac{10}{36}\ \frac{m}{s}$$

حال برعکس برای تبدیل متربرثانیه به کیلومتربرساعت (m/s→km/h) باید اطلاعات زیر را برانیم:

$$\begin{matrix} 1\ m = \frac{1}{1000}\ km \\ 1\ s = \frac{1}{3600}\ h \end{matrix} \quad " \quad 1\ \frac{m}{s}\ \text{٤}\ \frac{\frac{1}{1000}\ km}{\frac{1}{3600}\ h} = \frac{36}{10}\ km$$

جدول زیر در تبدیل ها به ما کمک می کند.

| پیشوند | نماد | ضریب | پیشوند | نماد | ضریب |
|---|---|---|---|---|---|
| اگزا | E | $10^{18}$ | دسي | d | $10^{-1}$ |
| پتا | P | $10^{15}$ | سانتي | c | $10^{-2}$ |
| ترا | T | $10^{12}$ | ميلي | m | $10^{-3}$ |
| گیگا | G | $10^{9}$ | ميكرو | µ | $10^{-6}$ |
| مگا | M | $10^{6}$ | نانو | n | $10^{-9}$ |
| کیلو | k | $10^{3}$ | پيكو | p | $10^{-12}$ |
| هكتو | h | $10^{2}$ | فمتو | f | $10^{-15}$ |
| دكا | da | $10^{1}$ | آتو | a | $10^{-18}$ |

## 3) نمایش اعداد با توانهای 10 و ارقام با معنی:

**الف)نمایش با توانهای 10:** معمولا بهتر است اعداد خیلی بزرگ یا خیلی کوچک را به صورت مضربی از توانهای مثبت یا منفی 10 نشان دهیم. به طور مثال عدد 0.000,000,000,3 را بصورت $3\times10^{-10}$ و 0.000,000,000,000,005 را بصورت $5\times10^{-15}$ نشان می دهیم.

در بسیاری از موارد به جای توانهای 10 می توان از پیشوندها استفاده کرد به طور مثال $5\times10^{-15}$ را می توان بصورت 5fm نمایش داد

**ب) ارقام با معنی:** اندازه گیری ها همیشه با مقداری خطا همراه است مثلا اگر نتیجه اندازه گیری طول معینی 15.6m و عدم قطعیت این اندازه گیری 2% باشد (که برابر 0.3 است) مقدار واقعی می تواند عددی بین 15.3m و 15.9m باشد پس باید آن را بصورت 15.6±0.3m نوشت. اما اغلب عدم قطعیت را به جای نمایش صریح، به طور ضمنی با ارقام با معنی نمایش می دهند. به طور مثال 15.6 دارای سه رقم با معنی است که رقم آخر آن ممکن است دقیق نباشد.

### روش تعیین ارقام با معنی:

1- صفرهایی که نماینده ی توان هایی از 10 باشد جزء ارقام با معنی نمی باشند ولی صفرهای آخر به حساب می آیند. مثلا عدد 0.002560 دارای 4 رقم با معنی است $256.0\times10^{-5}$

2- تعداد ارقام با معنی 12000 مشخص نیست ولی عدد 12000.0 دارای 6 رقم با معنی است.

3- در ضرب و تقسیم تعداد ارقام با معنی نتیجه نهایی باید برابر با کمترین تعداد ارقام با معنی ای باشد که در عوامل این عملیات موجود است. به طور مثال:

$$\frac{36.479\times 2.6}{14.58} = 6.387 = 6.4$$

4- در عملیات جمع و تفریق باید کمترین تعداد رقم های اعشاری را در نتیجه نهایی منظور کرد.

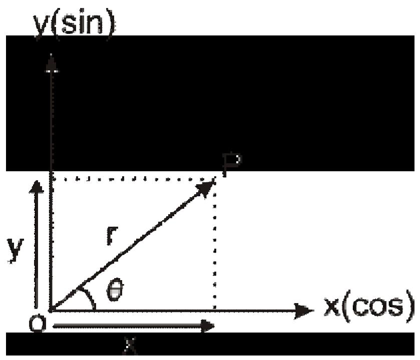
$$17.524 + 2.4 - 3.56 = 16.364 = 16.4$$

## 4) چارچوب مرجع و دستگاه مختصات:

مکان یک جسم تنها نسبت به یک چارچوب مرجع معنی دارد. چارچوب مرجع ممکن است یک موجود فیزیکی مثل میز ، اتاق و یا حتی خود کره زمین باشد.

مکان نسبت به دستگاه مختصات (که به چارچوب مرجع متصل است) مشخص می شود. در دستگاه مختصات دکارتی محورها بر هم عمودند و همدیگر را در مبدا قطع می کنند و با $x,y,z$ نمایش داده می شوند.

در دو بعد مکان نقطه $P$ را می توان با مختصات دکارتی اش $(x,y)$ مشخص کرد.



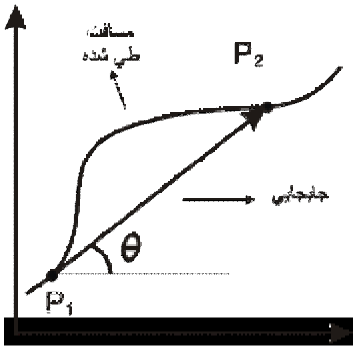

$$x = r\cos q$$
$$y = r\sin q$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$q = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

پایان فصل اول

# فصل دوم : بردارها

به کمیتهای عددی (کمیتهایی که وابسته به جهت نیستند) **اسکالر** گفته می شود. مثال: زمان، دما، چگالی و ... .
به کمیتهایی که علاوه بر مقدار به جهت نیز نیاز دارند کمیتهای **برداری** می گویند. مثل نیرو.
اسکالرها از قواعد جبر معمولی تبعیت می کنند اما بردارها از قواعد خاصی پیروی می کنند که به مجموعه آنها **جبر برداری** می گویند.
مسافت نمونه ای از کمیتهای اسکالر است و به مسیر طی شده بستگی دارد اما جابجایی نمونه ای از کمیتهای برداری است و به مسیر و مسافت بستگی ندارد.



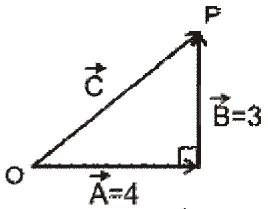

کمیتهای برداری را به همراه پیکانی در بالای نام آنها نمایش می دهیم. $\vec{A}$ نماد یک کمیت برداری است.
اندازه بردار $\vec{A}$ اسکالر مثبتی است که به صورت $|\vec{A}|$ یا به سادگی با $A$ نمایش می دهند.
در نمایش هندسی یا نموداری هر بردار بصورت یک پاره خط جهت دار است که طول آن متناسب با اندازه بردار می باشد و می تواند در هر مکانی نسبت به مبدا دستگاه مختصات قرار داشته باشد.

## نکته:

1) از آنجا که بردار دارای اندازه و جهت است هر کدام از این دو تغییر کند دیگر بردار قبلی نخواهد بود.
2) هیچگاه یک اسکالر برابر با یک بردار $(A = \vec{B})$ نمی شود و هیچگاه می توان یک اسکالر را با بردار جمع $(A + \vec{B})$ کرد و کاملا بی معنی است.
3) بردارها را میتوان در یک عدد خالص یا اسکالر ضرب نمود و اگر در عددی منفی ضرب شود جهت آن عوض می شود.

## جمع بردارها

اندازه بردار برآیند $\Longrightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\theta}$




برای روشن شدن مفهوم جمع دو بردار، دو بردار جابجایی را با هم جمع می کنیم. مطابق شکل بالا شخصی از نقطه **O**، 4 متر به سمت شرق و بعد 3 متر به طرف شمال می رود.جابجایی اول را با $\vec{A}$ و جابجایی دوم را با $\vec{B}$ نشان می دهیم.

در این جابجایی شخص از نقطه **O** به **P** منتقل شده است که جابجایی خالص نام دارد و آن را با $\vec{C}$ نمایش و به $(\vec{C})$ جمع برداری یا برآیند دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می گویند.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

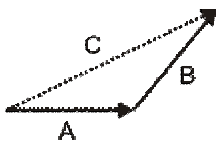
نکته: توجه کنید که معادله بالا یک معادله برداری است و طبق فرمول بالا یا قضیه فیثاغورث $(C = \sqrt{A^2 + B^2})$ اندازه $\vec{C}$ برابر با 5 است و چنانچه مشاهده می شود برآیند دو بردار با مجموع اندازه آنها برابر نیست.

$$\left|\vec{A} + \vec{B}\right| \neq A + B$$

$\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = A + B \Leftrightarrow$ دو بردار موازی و هم جهت باشند

نکته: جمع و تفریق دو بردار یک بردار است و نه یک عدد.

**روش نموداری جمع دو بردار**: ابتدا یکی از بردارها را رسم می کنیم و سپس بردار دیگر را به صورتی رسم می کنیم که دم بردار دوم بر سر بردار اول منطبق باشد. حال از دم بردار اول به سر بردار دوم رسم می کنیم تا بردار برآیند به دست آید.




## خواص جمع بردارها:

1) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ جابجایی پذیری

2) $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ انجمن پذیری

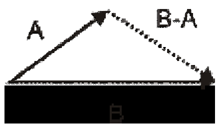
## تفریق بردارها

اندازه تفریق دو بردار $\Longrightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2\,AB\cos\theta}$

تفریق دو بردار حالت خاصی از جمع دو بردار است.

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

روش رسم: ابتدا دو بردار را از یک مبدا رسم می کنیم و در این صورت تفاضل دو بردار $(\vec{A}-\vec{B})$، برداری است که انتهای $\vec{B}$ را به انتهای $\vec{A}$ وصل می کند.

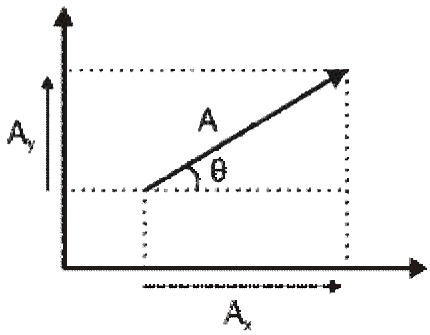



نکته:

$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$

## مؤلفه های بردار یکه

روش نموداری برای جمع بردارها روشی وقت گیر و غیر دقیق است و در سه بعد به این سادگی نمی باشد. برداری مثل $\vec{A}$ را می توان به جای مشخص کردن با اندازه و جهت $(\theta, A)$، با مولفه هایش (13/10/2007) نشان داد.

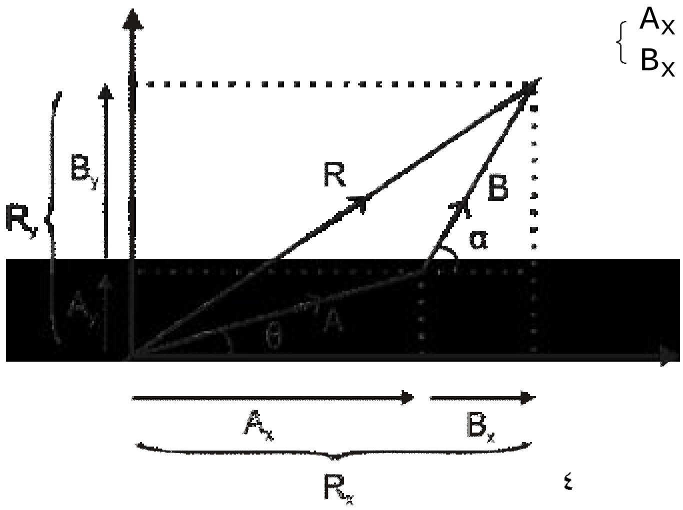



$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x} \end{cases}$$

یکی از مزیت های روش تحلیلی کار کردن با مؤلفه ها در آسانتر و دقیق کردن جمع بردارهاست.

مثال: برای این که دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را با هم جمع کنیم به صورت زیر عمل می کنیم.




$$\begin{cases} A_y = A\sin\theta \\ B_y = B\sin\alpha \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ B_x = B\cos\alpha \end{cases}$$

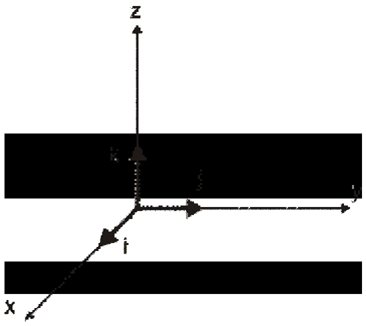
$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x \\ R_y = A_y + B_y \end{cases}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

## بردارهای یکه

برای ساده تر کردن عملیات مربوط به بردارها معمولا از سه بردار یکه $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ که به ترتیب با محورهای $x$، $y$ و $z$ موازی اند استفاده می کنیم. بردار یکه کمیت بدون بعدی است که فقط برای مشخص کردن جهت در فضا به کار می رود.

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$



به طور کلی هر بردار را می توان به صورت حاصل جمع سه بردار که هر یک موازی با یکی از محورهای مختصات است بیان کرد.

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

و اندازه آن بصورت $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ بدست می آید.

نکته: اگر دو بردار با هم برابر باشند مؤلفه های نظیر به نظیر آنها با هم برابرند.

$$\vec{A} = \vec{B} \rightarrow = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$
$$\rightarrow A_x = B_x,\ A_y = B_y,\ B_z = B_z$$

بنابراین:

## ضرب اسکالر

نتیجه حاصل از این ضرب یک عدد یا اسکالر است.

1) $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

2) $\vec{A}.\vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) . (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$

$\longrightarrow A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \Rightarrow$ یک عدد می باشد

## خواص ضرب اسکالر:

1) جابجایی پزیری $\vec{B}.\vec{A} = \vec{A}.\vec{B}$

2) توزیع پزیری $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$

3) اگر $\theta$ صفر درجه باشد آنگاه $\vec{A}.\vec{B} = AB \Longrightarrow \vec{A}.\vec{A} = A^2$

4) اگر $\theta$ برابر 90 درجه باشد آنگاه $\vec{A}.\vec{B} = 0$

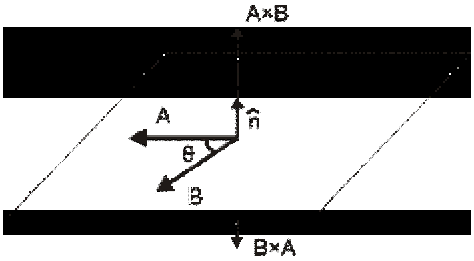
نکته: زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است با

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

## ضرب برداری:

ضرب برداری (یا چلیپایی) $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به صورت $\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$ که $\theta$ برابر زاویه کوچکتر میان بردارها می باشد.




حاصلضرب برداری یک بردار است.

نکته: بردار حاصلضرب برداری بر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است.

## خواص ضرب برداری

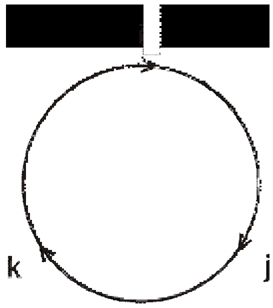
1) $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$ جابجایی پزیرنیست

2) $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$

3) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{C}$

4) $\vec{A}\times\vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{k}$

نکته: $\vec{A}\times\vec{A}=0$




$$\begin{array}{lll} i\times j=k & j\times i=-k & i\times i=0 \\ j\times k=i & k\times j=-i & j\times j=0 \\ k\times i=j & i\times k=-j & k\times k=0 \end{array}$$

ضرب برداری را بوسیله دترمینان خیلی راحت میتوان انجام داد و همان نتیجه را گرفت.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

پایان فصل دوم

# فصل 3 : حرکت یک بعدی

**سینماتیک**: توصیف چگونگی حرکت اجسام در فضا و زمان.

**جابجایی**: برداری است که فقط به مکان های اولیه و نهایی بستگی دارد و به جزئیات حرکت و نوع مسیر وابسته نیست.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

**تندی متوسط**: عبارت است از مسافت طی شده به زمان سپری شده

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\text{مسافت سپری شده}}{\text{زمان سپری شده}}$$

**سرعت متوسط**: برابر است با جابجایی به زمان.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

**سرعت لحظه ای**: برابر است با سرعت متحرک در هر لحظه یا شیب نمودار مکان- زمان در هر لحظه

$$v = \frac{da}{dt}$$

**فرمول خاص**: سرعت متوسط متحرکی که $\frac{m}{n}$ مسیری را با سرعت $V_1$ و $\frac{b}{a}$ آن را با سرعت $V_2$ طی کرده برابر است با:

$$\frac{1}{\bar{v}} = \frac{\frac{m}{n}}{v_1} + \frac{\frac{b}{a}}{v_2}$$

**شتاب متوسط**:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{تغییرات سرعت}}{\text{مدت زمان}}$$

**نکته**: منفی بودن علامت شتاب الزاما به معنی کاهش سرعت نیست. به طور کلی اگر $V$ و $a$ هم علامت باشند حرکت تند شونده و در غیر این صورت کند شونده است.

اگر شتاب ذره ای در $\Delta t$ ثابت باشد، سرعت متوسط آن را می توان با فرمول زیر محاسبه کرد.

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

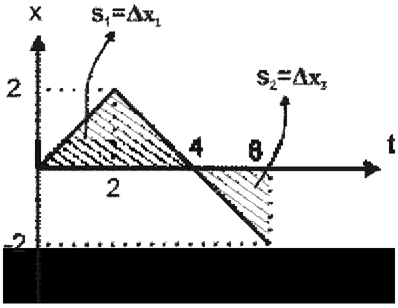
## استفاده از مساحت ها:

در این قسمت می خواهیم بررسی کنیم که چگونه می توان X را از نمودار سرعت- زمان و V را از نمودار شتاب- زمان بدست آورد.

به طور کلی مساحت زیر نودار سرعت- زمان برابر با جابجایی است.

$$\Delta x = v\Delta t$$

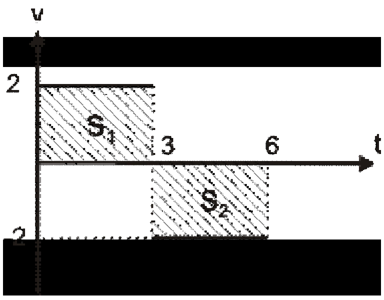
اگر مساحت بالای نمودار باشد جابجایی مثبت و اگر پایین نمودار باشد جابجایی منفی است.




$$\Delta x = s_1 + s_2$$
$$\Delta x = \Delta x_1 - \Delta x_2$$

به طور کلی مساحت زیر نمودار شتاب- زمان برابر با $\Delta v$ است.

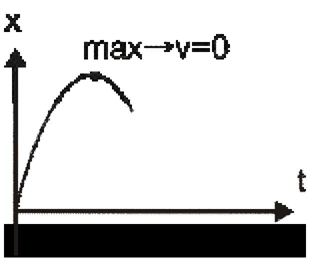
اگر مساحت بالای نمودار باشد شتاب تند شونده است و تغییرات سرعت و مساحت مثبت و اگر پایین نمودار باشد شتاب کند شونده است و تغییرات سرعت و مساحت منفی است.




$$\Delta v = a\Delta t$$
$$\Delta v = s_1 + s_2 \Longrightarrow \Delta v = 6 - 6 = 0$$

## استفاده از نمودار:

- مشتق جابجایی برابر با سرعت و مشتق سرعت برابر با شتاب است.
- در نمودار مکان- زمان هرگاه نقاط max و min وجود داشته باشد، مشتق جابجایی برابر صفر و در نتیجه سرعت در آن نقاط برابر صفر خواهد بود.




- در حرکت یکنواخت برای اینکه جهت حرکت عوض شود باید سرعت برابر صفر شود

- اگر نمودار سرعت- زمان از محور t عبور کند نتیجه اینکه v صفر شده و مسیر حرکت تغییر کرده است.

## معادلات سینماتیک در حرکت با شتاب ثابت:

$$x = vt + x_0$$

$$v = at + v_0$$

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \Delta t$$

$$\Delta x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)\, t \longrightarrow \text{مستقل از شتاب}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} a (2t - 1) + v_0 \longrightarrow \text{جابجایی در ثانیه } n\text{ام}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \longrightarrow \text{مستقل از زمان}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

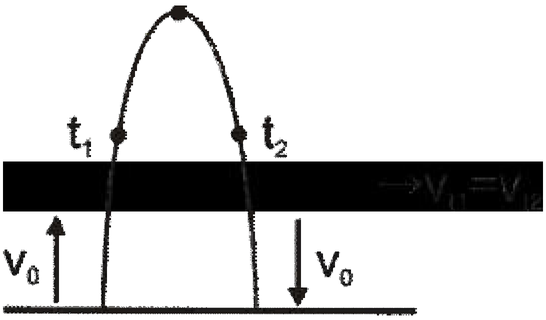
## سقوط آزاد در راستای قائم:

در سقوط آزاد و پرتاب در راستای قائم a به $-g$ تبدیل می شود و در این صورت اگر سرعت رو به بالا باشد، مثبت و اگر رو به پایین باشد منفی در نظر گرفته می شود.

نکته:

ü در پرتاب در راستای قائم سرعت در هرنقطه از رفت و برگشت برابر است.

$$t_{اوج} = \frac{t_1 + t_2}{2}$$




ü اگر زمان های رفت و برگشت $t_1$ و $t_2$ باشد $t$ اوج برابراست با

$$t_{اوج} = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

ü در نقطه اوج $v=0$ است.

## معادلات در راستای قائم:

$$v = v_0 - gt$$

$$y_{اوج} = \frac{v_0^2}{2g}$$

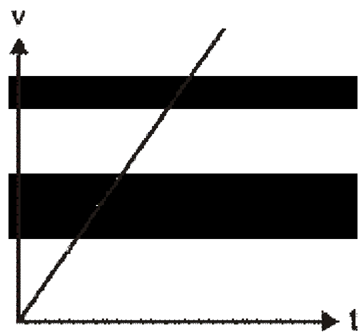
$$y = y_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t \longrightarrow \text{مستقل از شتاب}$$

$$t_{اوج} = \frac{v_0}{g}$$

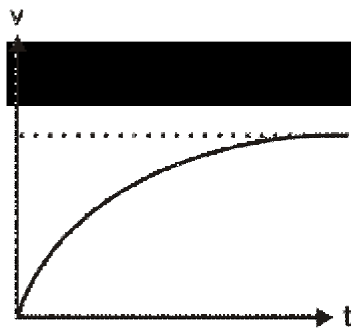
$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_2^2 - v_1^2 = -2g\Delta y \longrightarrow \text{مستقل از زمان}$$

**سرعت حد**: اجسامی که از ارتفاع نسبتا زیاد سقوط می کنند شتاب در آنها ثابت نمی ماند بلکه به تدریج کم می شود و اگر مدت سقوط کافی باشد حتی شتاب در آنها صفر می شود و با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهند و این امر به دلیل وجود مقاومت هوا می باشد.




در خلأ




در حضور مقاومت هوا

پایان فصل سوم

# فصل 4 : لختی و حرکت دو بعدی

## قانون اول نیوتن:

هر جسمی حالت سکون یا حالت حرکت یکنواخت را روی خط راست حفظ می کند مگر ناچار شود دراثر نیرویی که به آن وارد می شود حالتش را تغییر دهد که این قانون شامل خاصیتی به نام لختی (اینرسی) در همه اجسام می شود.

## حرکت دوبعدی:

در فضای سه بعدی، بردار مکان را بصورت زیر نمایش می دهیم:

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

اگر ذره ای از نقطه $P_1$ در مکان $r_1$ به نقطه $P_2$ در مکان $r_2$ برود جابجایی آن عبارتست از:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$$

در اینجا هم مانند حالت یک بعدی سرعت متوسط را برابر با جابجایی به مدت سپری شده تعریف می کنیم.

$$\bar{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

با توجه به اینکه

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} + v_z\,\hat{k}$$

پس سرعت لحظه ای برابر است با:

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}$$

به همین ترتیب شتاب لحظه ای:

$$a = \frac{d\vec{r}}{dt} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + a_z\,\hat{k}$$

## معادلات در شتاب ثابت:

در معادلات زیر: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ و $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\, t$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \frac{1}{2}(\vec{v_0} + \vec{v_1})\, t$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}\, t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2$$

با توجه به اینکه ضرب اسکالر دو بردار برابر با یک عدد است $(\vec{v}.\vec{v} = v^2)$ پس معادله مستقل از زمان به این صورت است:

$$v^2 - v_0^2 = 2\,\vec{a}.(\vec{r} - \vec{r_0})$$

در مورد حرکت در دو بعد در صفحه $(x,y)$ رابطه برداری بالا بصورت 4 معادله برای $x$ و 4 معادله برای $y$ تعریف می شود.

$$v_x = v_{0x} + a_x\, t$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)\, t$$

$$x = x_0 + v_{0x}\, t + \frac{1}{2} a_x\, t$$

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2\, a_x\, (x - x_0)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y\, t$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}(v_{0y} + v_y)\, t$$

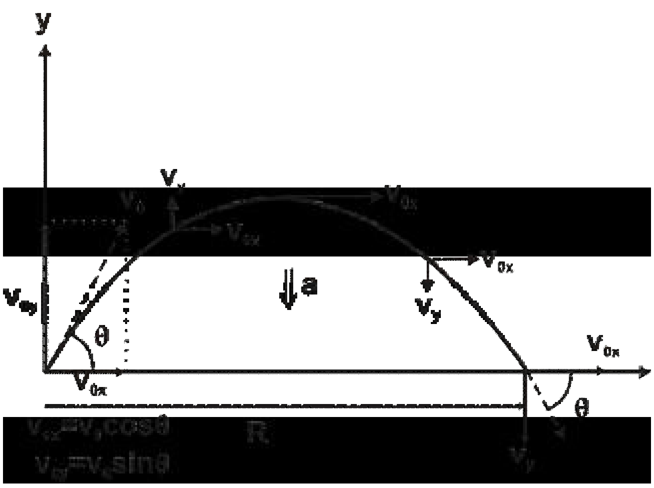
$$y = y_0 + v_{0y}\, t + \frac{1}{2} a_y\, t$$

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2\, a_y\, (y - y_0)$$

## حرکت پرتابه ها:

جسمی که در نزدیکی سطح زمین پرتاب شده باشد، به طور کلی دو حرکت مستقل دارد.

یک حرکت افقی با سرعت ثابت ($v_x = v_{0x}$ طبق قانون اول نیوتن در جهت افقی نیرویی به آن وارد نمی شود.) و دیگری شتابدار در راستای قائم ($v_y = v_{0y} - gt$ که ناشی از شتاب ثقل زمین است.).



پس با توجه به توضیحات بالا، در حرکت پرتابه ها:

$a_x = 0 \quad , \quad a_y = -g$

پس معادلات سینماتیک برای حرکت پرتابه :

1) معادلات سرعت:

a) $v_{0x} = v_0 \cos\theta$

b) $v_{0y} = v_0 \sin\theta$

c) $v_y = v_0 \sin\theta - gt$

2) معادلات مکان:

d) $x = v_{0x}.t \longrightarrow x = v_0 \cos\theta .t$

e) $y = y_0 + v_{0y}.t - \frac{1}{2} gt^2 \longrightarrow y = y_0 + v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} gt^2$

f) $v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0)$ :

$v_y = v_0 \sin\theta - gt$

$v_{0y} = v_0 \sin\theta$

3) معادله ترکیبی:

با جایگزین کردن $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$ در معادله e داریم:

g) $y = (\tan\theta)\, x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2} x^2$

4) معادلات در نقطه اوج:

چون در نقطه اوج $v_y=0$ پس داریم:

h) $t_{\text{اوج}} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$ طبق معادله e

i) $h_{\text{اوج}} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$ طبق معادله f

نکته: در نقطه اوج $v_y=0$ پس تنها $v_x$ در نقطه اوج وجود دارد پس سرعت در نقطه اوج برابر است با:

$v_{\text{اوج}} = v_0 \cos\theta$

## برد پرتابه:

طبق معادله h، زمان اوج برابر است با $\frac{v_0 \sin\theta}{g}$ پس این زمان، زمان نیمی از مسیر است پس زمان کل مسیر برابر است با:

$$T = 2\, t_{\text{اوج}} = \frac{2\, v_0 \sin\theta}{g}$$

بنابر این ما زمان پرواز را در معادله d قرار می دهیم و برد را محاسبه می کنیم:

$$R = v_0 \cos\theta \times \frac{2\, v_0 \sin\theta}{g} \Longrightarrow R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \; :$$

$$2 \sin\theta . \cos\theta = \sin 2\theta$$

نکته: اگر دو پرتابه با سرعت یکسان و یکی با زاویه $\alpha$ و دیگری با زاویه $\theta$ پرتاب شود زمانی برد آنها برابر است که: $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$

نکته: بیشترین برد پرتابه با زاویه $45^\circ$ می باشد.

نکته: $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$

نکته: اگر سه پرتابه را با سرعت های برابر به سه شکل زیر پرتاب کنیم، بلا فاصله بعد از پرتاب


$$a_A = g + a$$
$$a_B = g - a$$
$$a_C = \sqrt{g^2 + a^2}$$

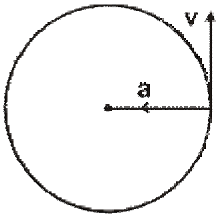
پس شتاب A از همه بیشتر است و در مورد برخورد به زمین و زمان پرواز:

$$v_A = v_B = v_C \quad \text{و} \quad t_A > t_B = t_C$$

نکته: اگر پرتابه در جهت افقی پرتاب شود زاویه پرتاب صفر است و در معادلات $\sin\alpha=0$ و $\cos\alpha=1$ می شود.

## حرکت دایره ای یکنواخت:

در حرکت دایره ای یکنواخت شتاب همیشه به مرکز گرایش دارد و سرعت نیز همیشه مماس بر مسیر می باشد پس در یک نقطه شتاب و سرعت بر هم عمودند.




**دوره تناوب:** زمانی که طول می کشد تا ذره یک دور کامل بزنند.

$$T = \frac{t \longrightarrow \text{زمان}}{n \longrightarrow \text{تعداد دور}}$$

**سرعت زاویه ای:**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

**سرعت خطی:**

$$\vec{v} = r\omega$$

پس اندازه شتاب مرکزگرا برابر است با:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

## چارچوب مرجع لخت:

همانطور که قبلا در فصل ا گفته شد مکان و یا سرعت هر جسم فقط نسبت به اجسام دیگر معنی دارد. چارچوب مرجعی که در آن قانون اول صادق باشد چارچوب مرجع لخت نامیده می شود. در چارچوب مرجع لخت جسمی که تحت اثر هیچ نیروی نباشد یا برآیند نیروها بر روی جسم صفر باشد یا ساکن می ماند یا با سرعت ثابت حرکت می کند.

هر چارچوبی که نسبت به یک چارچوب لخت با سرعت ثابت حرکت کند خودش هم یک چارچوب لخت است. اگر شتاب ذره ای در یک چارچوب لخت صفر باشد در تمام چارچوبهای دیگر نیز شتابش صفر است.

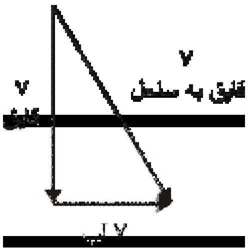
## سرعت نسبی:

گاهی لازم است حرکت جسمی را نسبت به جسم دیگر که خودش هم نسبت به زمین در حرکت است، بررسی کنیم.

به طور مثال اتومبیلی با سرعت $35\frac{m}{s}$ به دنبال اتومبیلی که با سرعت $30\frac{m}{s}$ در یک جهت در حرکت هستند، از دیدگاه مسافر اتومبیلی که در حال حرکت با $30\frac{m}{s}$ در حرکت است اتومبیل اول با سرعت $5\frac{m}{s}$ حرکت می کند.

**مثال:** یک قایق موتوری عرض رودخانه ای را طی می کند. آب با سرعت $5\frac{m}{s}$ به طرف شرق جریان دارد و سرعت قایق نسبت به آب $10\frac{m}{s}$ است و قایق ران سر قایق را در طول مسیر به سمت ساحل نگه می دارد. سرعت قایق نسبت به ساحل چقدر است؟

حل: آب با سرعت $5\frac{m}{s}$ به سمت شرق در حرکت است و قایق با سرعت $10\frac{m}{s}$ نسبت به آب در حرکت است. پس:




[redacted]

[redacted] $= \sqrt{10^2 + 5^2} = 11/2$

پایان فصل چهارم

# فصل 5 : دینامیک ذره 1

## دینامیک ذره:

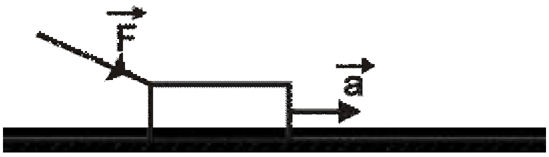
دینامیک شاخه ای درعلم است که حرکت شتابدار اجسام را با استفاده از مفهوم نیرو توضیح می دهد.

## قانون دوم نیوتن:

اگر نیرویی خالص به جسمی اثر کند حرکت آن نمی تواند یکنواخت باشد یعنی شتاب می گیرد.

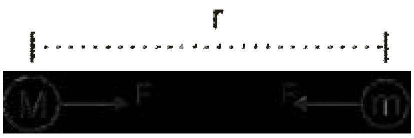
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

نکته: باید توجه داشت که در حالت کلی جهت حرکت ذره با جهت نیروی وارد بر آن همیشه یکی نیست.به طور مثال:




## وزن:

**قانون گرانش عمومی:** بین هر دو ذره به جرم $m$ و $M$ که در فاصله ی $r$ از یکدیگر واقع شده اند نیروی جاذبه ای وجود دارد که این نیرو برابر است با




$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

که در آن $r$ فاصله بین دو ذره و $G$ ثابت جهانی گرانش است و برابر است با

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N.m^2}{kg^2}$$

وزن جسمی به جرم $m$ برابر است با $W = mg$ یا

$$W = \frac{GmM_E}{R_E^2}$$

پس

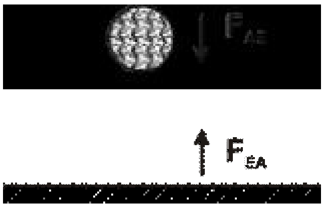
$$g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

## نکاتی در مورد جرم و وزن:

جرم کمیت اسکالری است که بر حسب کیلوگرم سنجیده می شود در حالی که وزن یک جسم در نقاط مختلف از سطح زمین (به علت نامتقارن بودن زمین و نایکنواخت بودن جرم آن) یکسان نیست.

## قانون سوم نیوتن:

اگر به جسم نیرو وارد کنیم آن جسم به ما نیرو وارد می کند اما در خلاف جهت. (به قانون سوم قانون عمل و عکس العمل نیز می گویند.)




## راهنمای حل مسائل دینامیک:

1) نموداری از وضعیت کلی مسئله می کشیم.

2) می بینیم به هر جسم چه نیروهایی از طرف محیط وارد می شود.

3) هر ذره می تواند محورهای مختصات مربوط به خود داشته باشد ولی بهتر است که یکی از محورها را در راستای شتاب ذره بگیریم.

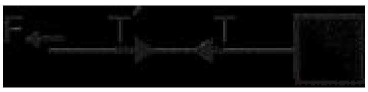
4) با استفاده از نمودار جسم آزاد، قانون دوم نیوتن را در شکل مؤلفه ای اش می نویسیم.

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_y = ma_y$$

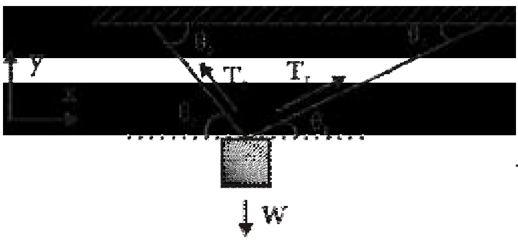
## کشش طناب (نخ):

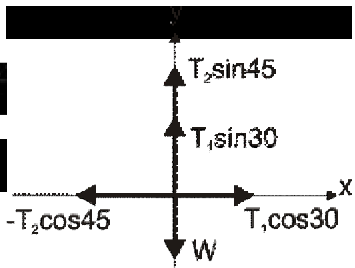
منظور از کشش طناب در یک نقطه این است که اگر آن نقطه از طناب را قطع کنیم و جای آن نیروسنج نصب کنیم مقدار نشان داده شده توسط نیروسنج همان کشش طناب در آن نقطه است. (البته در مسائلی که با آنها سرو کار داریم جرم طناب ناچیز است.)




$$T' = T$$

به طور مثال: وزنه ی $20N$ به وسیله دو رشته نخ آویزان است. اگر $\theta_1 = 30°$ و $\theta_2 = 45°$ باشد کشش در انتهای هر یک از نخها چقدر است؟




چون در حال تعادل است $\sum F = 0$

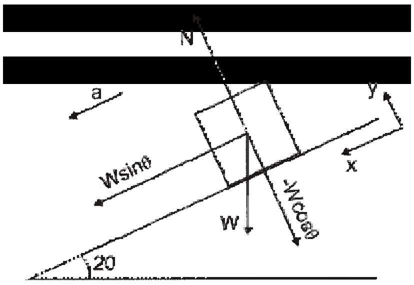
$$1)\ \sum F_x = T_1\cos30° - T_2\cos45° = 0 \longrightarrow T_1\cos30° = T_2\cos45°$$

$$2)\ \sum F_x = T_1\sin30° + T_2\sin45° - W = 0 \longrightarrow T_1\sin30° + T_2\sin45° = W$$

در معادله 1 داریم $T_2 = \dfrac{T_1\cos30°}{\cos45°} = 1/22\,T_1$ پس در معادله 2 قرار داده و جواب بدست می آید.

**مثال**: جسم به جرم $60kg$ از سطح بدون اصطکاکی که زاویه 20 درجه دارد پایین می آید.

الف) شتاب حرکت چقدر است؟

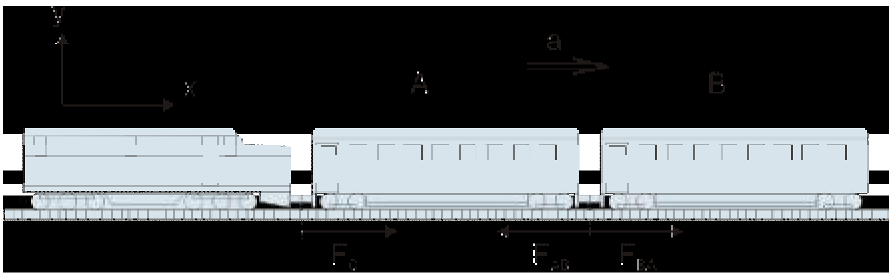



$$\sum F = ma$$
$$\sum F_x = mg\sin\theta = ma \rightarrow g\sin\theta = a$$
$$\rightarrow 9.8\,(\sin20°) = a = 3.3\,m/s^2$$
$$\sum F_y = N - mg\cos\theta = 0$$

ب) چه نیروی از سطح شیب دار به جسم وارد می‌شود؟

$$N - mg\cos\theta = 0 \longrightarrow N = mg\cos\theta = 550\ N$$

**مثال**: دو واگن $A$ و $B$ به جرم‌های $m_A = 1.2\times10^4 kg$ و $m_B = 8\times10^3 kg$ که به یکدیگر متصل‌اند می‌توانند آزادانه با اصطکاک ناچیز حرکت کنند. لوکوموتیوی با جرم $10^5 kg$ نیروی $F_0$ به واگن اول وارد می‌کند و واگن‌ها را با شتاب $2m/s^2$ به جلو می‌برد.




الف) $F_0$ چقدر است؟

$$\sum F = ma$$
$$F_0 = (m_A + m_B)\,a$$
$$F_0 = (1.2\times10^4 + 0.8\times10^4)\times2 = 4\times10^4$$

ب) چه نیروی از $B$ به $A$ وارد می‌شود؟

از آنجا که نیرویی که از $A$ به $B$ وارد می‌شود برابر است با نیرویی که از $B$ به $A$ وارد می‌شود، پس مسئله را می‌توان به دو شکل حل کرد.

$$F_{AB} = F_{BA}$$

روش اول:

$$F_0 - F_{AB} = m_A\, a \longrightarrow -F_{AB} = (1.2\times 10^4 \times 2) - 4\times 10^4$$
$$\longrightarrow f_{AB} = 1.6\times 10^4$$

روش دوم:

$$F_{BA} = m_B\, a = 0.8\times 10^4 \times 2 = 1.6\times 10^4$$

نکته: در مسائلی مانند این مسئله برای به دست آوردن جواب مسئله راه‌حل‌های مختلفی وجود دارد که همه باید یک جواب داشته باشند.

### وزن ظاهری:

وزن واقعی همان $W = mg$ است ولی وقتی انسان در آسانسوری باشد که با شتاب حرکت می‌کند، این وزن تغییر می‌کند که به آن وزن ظاهری می‌گویند.

| | |
|---|---|
| اگر آسانسور با سرعت ثابت حرکت کند | $W = mg$ |
| اگر آسانسور با شتاب تند شونده رو به بالا حرکت کند | $W = m(g+a)$ |
| اگر آسانسور با شتاب تند شونده رو به پایین حرکت کند | $W = m(g-a)$ |
| اگر آسانسور با شتاب کند شونده رو به بالا حرکت کند | $W = m(g-a)$ |
| اگر آسانسور با شتاب کند شونده رو به پایین حرکت کند | $W = m(g+a)$ |

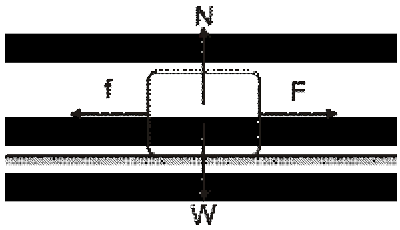
پایان فصل پنجم

# فصل ششم : دینامیک ذره 2

اصطکاک:

نوعی نیروی تماسی است که با حرکت نسبی دو جسمی که با هم در تماس‌اند مخالفت می‌کند.

اصطکاک معمولا در خلاف جهت نیرو وارد می‌شود.




ویژگی‌های اصلی مربوط به اصطکاک:

1) نیروی اصطکاک متناسب با نیرویی است که دو جسم را به هم می‌فشارد.

2)نیروی اصطکاک بستگی محسوسی به مساحت سطح تماس دو جسم ندارد.

3) نیروی اصطکاک در سرعت‌های نسبتا کم مستقل از سرعت است.

نکته: نیروی اصطکاک به سطح بستگی ندارد یعنی اگر یک مکعب را یک بار از طرف سطح بزرگ و یک بار دیگر از طرف سطح کوچکش روی جسم دیگری قرار دهیم درست است که قله‌هایی که در تماس با پستی و بلندی‌های جسم دیگر قرار می‌گیرد کمتر است اما در عوض در اثر فشار بیشتری قرار دارد.

نکته: اگر دو جسم را سمباده بزنیم اصطکاک میان آنها کم می‌شود ولی اگر آنها را بیش از حد معینی صیقلی کنیم اصطکاک دوباره زیاد می‌شود.

اصطکاک ایستایی: برای به لغزش در آوردن هر جسمی روی یک سطح مستلزم اعمال حداقل معینی نیرو است. اما پس از شروع حرکت برای اینکه جسم با سرعت ثابتی به حرکتش ادامه بدهد نیروی کمتری لازم است. در حالت اول اصطکاک ایستایی و در حالت دوم اصطکاک جنبشی است.

(اصطکاک جنبشی > اصطکاک ایستایی)

نیروی اصطکاک ایستایی را با $f_s$ نشان می‌دهیم. اگر نیرویی که ما به جسمی وارد وارد می‌کنیم صفر باشد $f_s$ نیز صفر است. حال اگر این نیرو را افزایش دهیم $f_s$ هم همپای آن بزرگ می‌شود البته تا زمانی که به یک مقدار ماکزیمم برسد. اگر نیرویی که وارد می‌کنیم از ماکزیمم بیشتر شود جسم حرکت می‌کند. در سرعت‌های زیاد اصطکاک یا ثابت می‌ماند یا به تدریج کم می‌شود. در سرعت‌های کم نیز اصطکاک ترکیبی از اصطکاک جنبشی و ایستایی است.

نیرویی که دو جسم را به هم می‌فشارد در واقع همان $N$ است. پس اصطکاک جنبشی برابر است با:

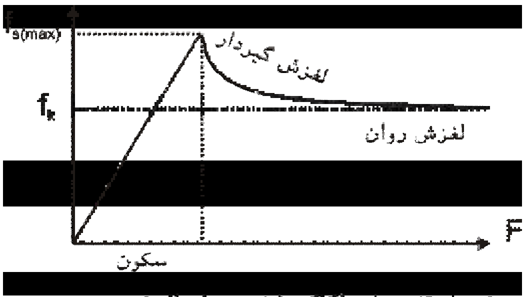
$f_k = \mu_k N$

نیروی اصطکاک ایستایی مقدار معینی ندارد ولی برای ماکزیمم آن می‌توانیم بنویسیم:

$f_{s\,(max)} = \mu_s N$

و در حالت کلی

$f_s \le \mu_s N$

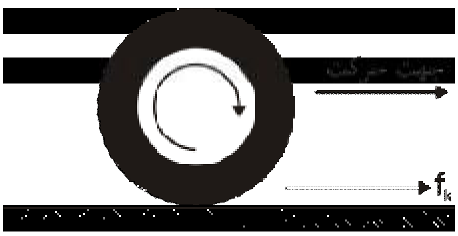


نمودار تغییر اصطکاک با نیروی اعمال شده

**اصطکاک غلتشی:**

توپ یا چرخی که روی زمین می‌غلتد دارای این نوع اصطکاک است که به صورت اصطکاک جنبشی (لغزشی) بسیار کوچکی است. جهت نیروی اصطکاک غلتشی بستگی به این دارد که غلتش آزاد باشد یا واداشته.

**غلتش واداشته:** مثل چرخ‌های عقب اتومبیل (البته اتومبیلی که نیرو از چرخ‌های عقب اعمال می‌شود) که در آن در محل تماس چرخ با زمین نیرویی به طرف عقب به جاده وارد می‌کند. (در اثر این نیرو است که در جاده‌های خاکی سنگ ریزه‌ها به عقب پرتاب می‌شود.) و جاده هم عکس‌العمل آن را رو به جلو به چرخ وارد می‌کند. پس در غلتش واداشته نیروی اصطکاک رو به جلو است. اگر نیروی چرخاننده بیش از حداکثر نیروی اصطکاک ایستایی میان چرخ و جاده باشد غلتش با لغزش همراه می‌شود.



چرخ واداشته

**غلتش آزاد:** در غلتش آزاد نیروی اصطکاک به سمت عقب می‌باشد و حرکت چرخ را کند می‌کند به همین دلیل است که وقتی چرخ در چاله می‌افتد موقع بیرون آمدن ضربه‌ای به عقب وارد می‌کند.

## دینامیک حرکت دایره‌ای:

یک نمونه مهم از حرکت شتابدار، حرکت در مسیر دایره‌ای با سرعتی به مقدار ثابت است که به آن حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌گویند. شتاب در چنین حرکتی برابر است با $\vec{a}=-\frac{v^2}{r}\hat{r}$ که در آن $v$ برابر است با سرعت و $r$ شعاع دایره است.

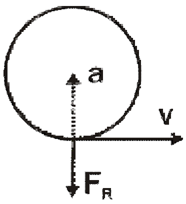
$v=\omega r$ سرعت زاویه‌ای: $\omega=\frac{2\pi}{T}$ دوره تناوب: $T=\frac{t}{n}$

پس مقدار نیرویی که این شتاب را ایجاد می‌کند برابر است با:

$$F=ma \longrightarrow F=m\frac{v^2}{r}$$

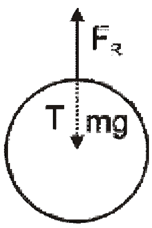
این نیرو همجهت با شتاب مرکزگراست که نیروی مرکزگرا نامیده می‌شود.

نکته: شتاب همیشه مرکزگراست و نیز سرعت مماس بر مسیر و بر هم عمودند.




## دوران نخ(کشش نخ):

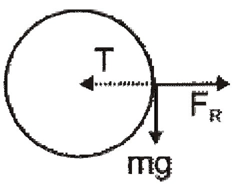
در دوران نخ فرمول کلی به صورت $T=F_R+mg\cos\alpha$ می‌باشد که $\alpha$ زاویه بین $mg$ و $F_R$ می‌باشد.



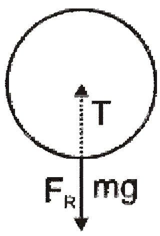

$mg+T=F_R \longrightarrow T=F_R-mg$

و از طریق فرمول $\cos180^\circ=-1$:

$T=F_R-mg$




$T=F_R$

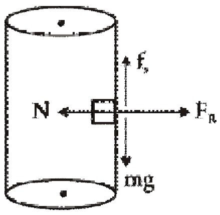



$T=F_R+mg$

پی بیشترین مقدار $T$ در پایین‌ترین نقطه از مسیر می‌باشد.

مثال: جسمی را به دیواره‌ی داخلی استوانه‌ای تکیه داده بر روی سکویی می‌گذاریم و استوانه شروع به گردش می‌کند. حال وقتی سرعت دوران به حد کافی رسید سکو را از زیر جسم برمی‌داریم. حداقل ضریب اصطکاک چقدر باید باشد تا شئ نلغزد؟ شعاع استوانه $2m$ و دوره تناوب $2s$ است. $(n^2=10)$ ، $(g=10)$

در این مواقع ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و بعد نیروهای عمودی و افقی را تفکیک می‌کنیم.




$T = 2\,s$

$r = 2\,m$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$

$v = r\omega$

$\mu_s = ?$

$f_s = mg \qquad f_s = \mu_s N$

$N = F_R \longrightarrow F_R = m\dfrac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m\pi^2 r \longrightarrow N = m\pi^2 r$

$f_s = mg \longrightarrow \mu_s N = mg \longrightarrow \mu_s m\pi^2 r = mg$

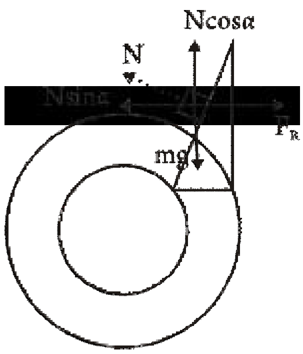
$\mu_s = \dfrac{g}{\pi^2 r} = \dfrac{10}{10 * 2} = 0.5$

## در جاده‌های مسطح:

در جاده‌های مسطح فکر می‌کنیم که $F_R = f_s$.

## در جاده‌های با شیب عرضی:

در این گونه جاده‌ها برای اینکه ماشین در آنها نلغزد باید معادلات زیر برقرار باشد.



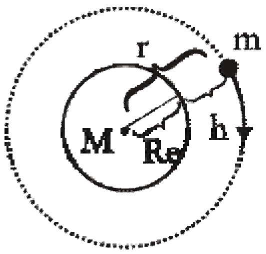

$N\sin\alpha = F_R \qquad F_R = m\dfrac{v^2}{R}$

$N\cos\alpha = mg$

$\dfrac{N\sin\alpha}{N\cos\alpha} = \dfrac{m\frac{v^2}{R}}{mg} \longrightarrow \tan\alpha = \dfrac{v^2}{Rg}$

## مدارهای ماهواره‌ای:

در گردش ماهواره‌ها به دور زمین(یا سیاره به دور خورشید) اگر جرم جسم مرکزی خیلی بزرگتر از جرم جسمی باشد که در مدار قرار گرفته است، می‌توانیم جسم مرکزی را ثابت بگیریم. پس جرم $m$ که حول جرم $M$ حرکت دورانی یکنواخت دارد در این مورد قانون دوم به شکل زیر است که در آن $G$ ثابت جهانی است.




$r = Re + h$

$F = ma \Longrightarrow \dfrac{GmM}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$

بنابر این سرعت ماهواره‌ها برابر است با $v_{\text{مداری}} = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$

نکته: همانطور که از فرمول پیداست سرعت به جرم بستگی ندارد. سرعت به شعاع مدار بستگی دارد.

دوره تناوب مدار:

$$v = r\omega = r\frac{2\pi}{T} \longrightarrow T = \frac{2r\pi}{v}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\sqrt{r^3} \longrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 = Kr^3$$

که در آن ضریب $K$ را به جای $\frac{4\pi^2}{GM}$ قرار داده‌ایم که رابطه‌ی بالا به قانون سوم کپلر معروف است.

نکته: وقتی جسمی در حالت سقوط است، در حالت بی‌وزنی است.

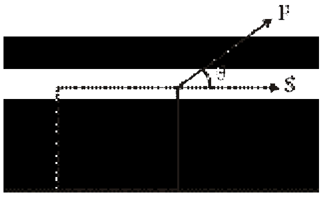
پایان فصل ششم

# فصل هفتم :کارو انرژی

در فصل قبل در بررسی دینامیک ذره دیدیم اگر مکان اولیه و سرعت اولیه ذره‌ای را بدانیم و تمام نیروهای وارد بر آن هم معلوم باشد می‌توان رفتار ذره را در تمام زمان‌های بعدی پیش‌بینی کرد.

در واقع تمام مسائلی مکانیک کلاسیک با استفاده از قوانین نیوتن قابل حل‌اند. ولی در مواردی که نیروهای وارد بر ذره ثابت نباشد و با تغییر مکان و زمان تغییر کند حل آن بسیار پیچیده است. در این فصل بـه حـل مسائل مکانیک به کمک مفهوم مفهوم کارو انرژی می‌پردازیم.

## کار نیروی ثابت:




$$W = FS\cos\theta$$

کار = نیرو × جابجایی × زاویه بین $F$ و $S$

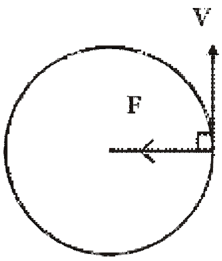
واحد کار ژول است. $1j = 1n/m$

**نکته**: کار انجام شده به نیرو $(F)$ و جابجایی $(F)$ و زاویه بین آنها $(\theta)$ بستگی دارد و مستقل از سرعت و شتاب جسم است.

**نکته**: اگر نیرو و جابجایی بر هم عمود باشند کار صفر است.

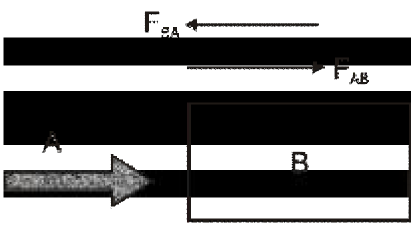
$\theta = 90 \qquad W = FS\cos 90^\circ = F.S.(0) = 0$

**نکته**: نیروی مرکزگرا کاری انجام نمی‌دهد(مثل کشش نخ) چون همواره بر مسیر حرکت عمود است.



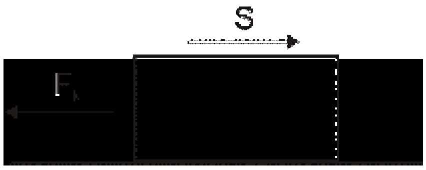

## کار منفی و نیروی اصطکاک:

نیروی $A$ جسم $B$ را هُل می‌دهد بنا به قانون سوم نیوتن نیرویی که از $A$ بـه $B$ وارد می‌شود برابر است با نیرویی که از $B$ به $A$ وارد می‌شود اما در خلاف جهت.



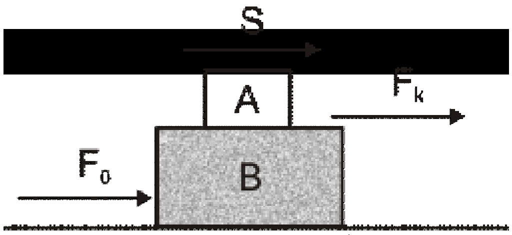

$$\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{BA} \implies W_{AB} = -W_{BA}$$

جعبه‌ای روی سطح شیب‌دار زبری می‌لغزد و نیروی اصطکاک لغزشی $F_k$ بر آن اثر می‌کند. این نیرو در خلاف جهت جابجایی جعبه می‌باشد. بنابراین زاویه بین $F_K$ و $S$ برابر $180^\circ$. $\theta = 180^\circ$




$$W_F = F_K S \cos\theta = -F_K S$$

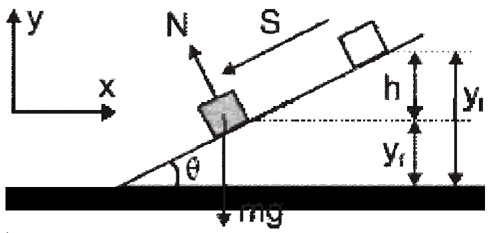
توجه کنید که در مواردی هم می‌تواند کار و نیروی اصطکاک منفی نباشد. مطابق شکل زیر اگر نیروی $F_0$ را به جعبه‌ای وارد کنیم جعبه رو به جلو حرکت می‌کند.




در صورتی که اصطکاک ایستایی بین $A$ و $B$ کافی نباشد $B$ نسبت به $A$ به عقب می‌لغزد. اما نیروی اصطکاک لغزشی بین $A$ و $B$ به جلو می‌باشد که در این صورت کاری که اصطکاک روی قطعه $A$ انجام می‌دهد مثبت است.

**کار نیروی ثقل**:(در این قسمت $i$ برابر با مرحله اول و $f$ برابر با مرحله دوم حرکت است)

اگر جسمی روی سطح شیب‌دار به اندازه $S$ جابجا شود در دستگاه مختصاتی که انتخاب کردیم نیروی ثقل عبارت است از:

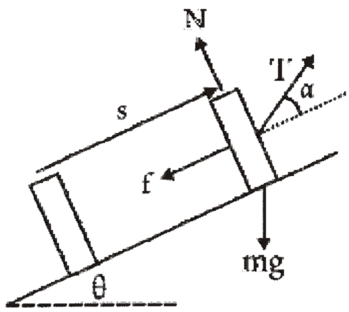



در این مثال $y_f - y_i = -h$ وشتاب رو به پایین است پس $-g$ در نظر می‌گیریم.

$$W_g = -mg\,(y_f - y_i) = mgh$$

پس به صورت کلی اگر حرکت رو به بالا باشد $W_g = -mgh$ و اگر رو به پایین باشد $W_g = mgh$ .

**مثال**: اسکی‌بازی به جرم $40kg$ توسط سیم نقاله به اندازه $20m$ روی تپه‌ای به شیب $\theta = 15^\circ$ جابجا می‌شود. کشش سیم نقاله برابر $T = 250N$ و زاویه آن نسبت به سطح شیب‌دار $\alpha = 30^\circ$ است. اگر $\mu_k = 0.1$ ، کار هریک از نیروهای وارد بر اسکی‌باز چقدر است و چه کار خالصی روی او انجام می‌شود؟




حل:چهار نیروی وارد بر اسکی‌باز در شکل مشخص شده‌اند. از شرط $\sum F_y = 0$ داریم

$$N = mg\cos\theta - T\sin\alpha = 397 - 125 = 254\,N$$

بنابراین $f = \mu N = 25.4N$ است. با استفاده از $W = FS\cos\theta$ کارها را حساب می‌کنیم:

$$W_T = \vec{T}.\vec{s} = Ts\cos30^\circ = +4330\,j$$

$$W_f = \vec{f}.\vec{s} = fs\cos180^\circ = -fs = -508\,j$$

$$W_N = \vec{N}.\vec{s} = 0$$

$$W_g = m\vec{g}.\vec{s} = mgs\cos(90^\circ + 15^\circ) = -2030\,j$$

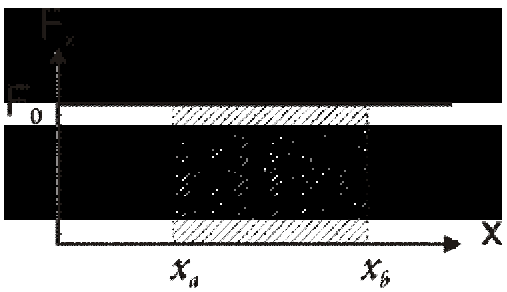
کار خالصی که روی جسم انجام شده است برابر با جمع جبری تک‌تک این کارهاست، یعنی

$$W_{خالص} = W_T + W_f + W_N + W_g = 1.79\,kj$$

که در واقع همان کاری است که نیروی برایند انجام می‌دهد.

کار نیروی متغیر در یک بعد:

**نکته**:کار برابر است با مساحت زیر نمودار $F$ بر حسب $x$ :

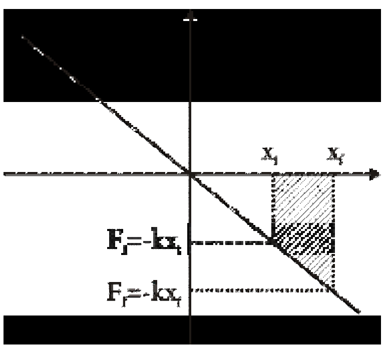



## کاری که فنر انجام می‌دهد:

رابطه نیروی کشش فنر $(F_s)$ با جابجایی انتهای فنر نسبت به وضعیت تعادلش به صورت زیر است:

$$F_S = -kx$$

(قانون هوک)




که در این فرمول $k$ ثابت فنر و $x$ جابجایی است.

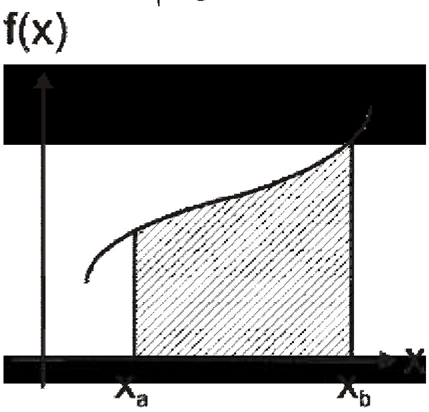
با توجه به نمودار جابجایی فنر از $i$ تا $f$ کار نیروی فنر از $x_i$ تا $x_f$ برابر است با مساحت ناحیه هاشور خورده یا تداخل دومثلث در زیر نمودار

$$W_S = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) \quad \text{یا} \quad W_S = \frac{1}{2}F_f x_f - \frac{1}{2}F_i x_i$$

توجه کنید که گاهی قانون هوک بر حسب نیروهای خارجی(مثلا نیرویی که شخص باید به فنر وارد کند تا آن را بکشد) نوشته می‌شود که در این صورت قانون هوک به صورت $F = +kx$ در می آید

**نکته**: کار نیروی فنر فقط به نقطه ابتدا و انتها بستگی دارد.

در حالت کلی وقتی نیرو تابعی از مکان باشد برای محاسبه کار از انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم.




$$W_{a\to b} = \int_{x_a}^{x_b} F\,dx$$

علامت این کار بستگی به $Fx$ و همچنین حدود انتگرال دارد اگر حدود انتگرال را عوض کنیم مثل این است که جابجایی معکوس شده باشد.

$$W_{a\to b} = -W_{b\to a}$$

اگر فنری نسبت به حالت تعادلش از $x_i$ تا $x_f$ جابجا شود، کار این جابجایی برابر است با:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = -\frac{1}{2}k\,(x_f^2 - x_i^2)$$

## قضیه کار – انرژی در یک بعد:

اگر نیروی خالص $F$ جسمی را به اندازه $\Delta x$ جابجا کند

$$W = F\Delta x = ma\Delta x$$

اما چون شتاب ثابت است داریم:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x$$

پس

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$K$ کمیت اسکالری است که انرژی جنبشی ذره نامیده می‌شود.

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

## به صورت کلی:

$$W_{\text{خالص}} = \Delta K$$

تغییرات انرژی جنبشی برابر است با کار خالص.

انرژی جنبشی: معیاری است از کار خالصی که باید روی جسم انجام شود تا سرعت آن از صفر تا مقدار معینی برسد.

## توان:

توان عبارت است از آهنگی که کار با آن انجام می‌شود.

### توان متوسط:

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

یکای **SI** توان $j/s$ است(که به افتخار جیمز وات) وات() نامیده می‌شود.

توان برابر است با:

$$P = \vec{F}.\vec{v}$$

یعنی توان در هر لحظه برابر است با نیرو در سرعت لحظه‌ای.

نکته: یکای دیگر توان اسب‌بخار است که با $hp$ نشان داده می‌شود.($1hp = 746W$)

## کار و انرژی در سه بعد:

نیرویی که مقدار و جهتش در 3 بعد تغییر کند می‌تواند بصورت تابعی از بردار مکان $\bar{r}$ یا سه مؤلفه $x, y, z$ بیان کرد.

$$dW = \vec{F}.d\vec{s}$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}\cos\theta ds$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

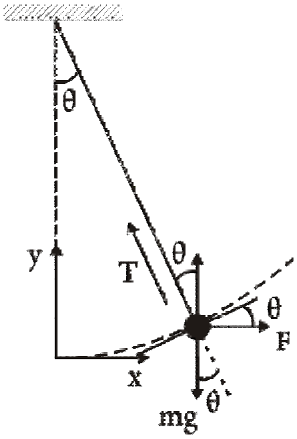
$$W_{A\to B} = \int_A^B F_x\, d_x + \int_A^B F_y\, d_y + \int_A^B F_z\, d_z$$

برای مثال اگر نیرویی که کار را انجام می‌دهد نیروی ثقل باشد چون این نیرو فقط مؤلفه قائم دارد:

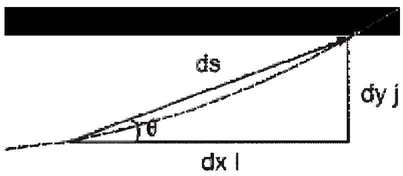
$$\vec{F}.d\vec{s} = \int_A^B m\vec{g}.d\vec{s} = -\int_{y_A}^{y_B} mgdy = -mg\,(y_B - Y_A)$$

یعنی کار نیروی ثقل مستقل از طول و شکل مسیر است و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد.

**مثال**: نیروی افقی $F$ به طور خیلی آهسته گلوله یک آونگ ساده را از وضعیت قائم تا وضعیتی که نخ آونگ با راستای قائم زاویه $\theta_0$ می‌سازد حرکت می‌دهد. اندازه این نیرو ضمن حرکت طوری تغییر می‌کند که گلوله در هر لحظه در حال تعادل است کاری که نیروی $F$ روی وزنه انجام می‌دهد چقدر است؟




الف




ب

حل: وضعیت سیستم و نیروهای وارد بر گلوله در شکل نشان داده شده است. چون گلوله شتاب ندارد برایند نیروهای وارد بر آن در هر امتداد صفر است:

$$\sum F_x = F - T\sin\theta = 0$$
$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$

اگر $T$ راز دو معادله بالا حذف کنیم نتیجه می‌شود

$$(i)\quad F = mg\tan\theta$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که $F$ با تغییر $\theta$ چگونه تغییر می‌کند. چون نیرو طبق صورت مساله فقط در جهت افقی است داریم $F = F_x$. جابجایی کوچک $d\vec{s}$ در مسیر دایره‌ای طبق شکل ب عبارت است از $d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$. پس خواهیم داشت

$$dW = \vec{F}.d\vec{s} = F_x\,dx$$
$$(ii)\quad = mg\tan\theta\,dx$$

در شکل ب می‌بینیم که $\tan\theta = dy/dx$، یعنی $dy = \tan\theta dx$ است و معادله $(ii)$ به صورت $dw = mgdy$ در می‌آید. بنابراین

$$W = \int_0^{y_0} mgdy = mgy_0$$
$$= mg\,(L - L\cos\theta_0) = mgL\,(1 - \cos\theta_0)$$

که در آن $L$ طول نخ آونگ است. نکته جالب این است که جواب فقط شامل جابجایی در راستای قائم، $y_0 = L(1-\cos\theta_0)$ است

پایان فصل هفتم

# فصل هشتم : پایستگی انرژی

**انرژی پتانسیل:**

وقتی جسمی را تا ارتفاعی بالا می‌بریم، جسم در آن ارتفاع دارای انرژی می‌باشد که در سطح زمین آن را نداشته و به واسطه تغییر وضعیت یا موقعیت جسم حاصل شده است که به آن انرژی پتانسیل می‌گویند.

**انرژی پتانسیل:** انرژی است که به وضعیت نسبی دو یا چند ذره که با یکدیگر برهم‌کنش دارند بستگی دارد.

**انرژی پتانسیل و کار خارجی:**

عامل کار خارجی می‌تواند انرژی پتانسیل یک سیستم را تغییر بدهد.

$W_{\text{خارجی}} = \Delta U = U_f - U_i$

آنچه اهمیت دارد تغییرات انرژی پتانسیل می‌باشد بنابراین می‌توان مرجع انرژی پتانسیل یعنی $U = 0$ را در هر جای دلخواهی که برایمان راحت‌تر است انتخاب کنیم. مثلا برای ذره‌ای که در نزدیکی سطح زمین حرکت می‌کند می‌توان هر سطح افقی مانند کف یک اتاق را سطح انرژی پتانسیل بگیریم.

**نیرهای پایستار:**

کاری است که فقط به ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد.

شکل ریاضی کار نیروی ثقل $W_g = -mg(y_f - y_i)$ و کار نیروی فنر $W = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$ نشان می‌دهد که اگر نقطه اولیه بر نقطه نهایی منطبق باشد $W = 0$ می‌شود.

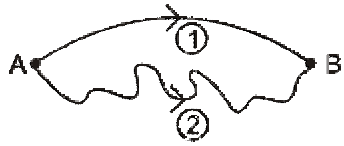
**نکته:** کار نیروی پایستار در یک سفر رفت و برگشت صفر است.

به طور مثال: مکعبی روی سطح شیب‌دار رو به بالا پرتاب می‌شود. کار نیروی ثقل در مرحله رفت $W_g = -mgh$ و در مرحله برگشت $W_g = +mgh$ است. در نتیجه کار نیروی ثقل در رفت و برگشت $W_g = 0$ می‌باشد. ولی کار نیروی اصطکاک در رفت $W_f = -fd$ و در برگشت $W_f = -fd$ است پس در رفت و برگشت $W_f = -2fd$ می‌باشد.

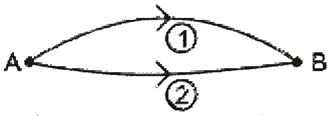
**نکته:** کار نیروی پایستار در هر مسیر بسته‌ای صفر است.

$W_{A \to B} + W_{B \to A} = 0$

**نکته:** در دو مسیر زیر کار نیروی پایستار با هم برابر است.




$W_1 = W_2$




**نکته:** برای اینکه کار نیروی پایستار به مسیر بستگی نداشته باشد لازم است که نیرو فقط تابعی از مکان باشد نه تابعی از سرعت یا زمان.

**نکته:** انرژی پتانسیل را فقط برای نیروهای پایستار می‌توان تعریف کرد چون فقط کار چنین نیروهایی است که به مسیر بستگی ندارد.

در تعریفی $W_{\text{خارجی}} = \Delta U$ که قبلا از انرژی پتانسیل کردیم چون سرعت ثابت بود پس $\Delta K = 0$ است.

کار خالص که روی جسم انجام می‌شود(مجموع کار نیروی خارجی $(W_{Ex})$ و کار نیروی پتانسیل داخلی $(W_C)$) مساوی صفر است. یعنی $W_{Ex} + W_C = 0$ و یا $W_C = -W_{Ex}$ بنابراین می‌توان تغییرات انرژی پتانسیل را بدست آورد.

$$W_C = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

**نکته:** نیروی پایستار همیشه علاقه دارد که انرژی پتانسیل را به حداقل برساند.

در 3 بعد: نیروی پایستار می‌تواند هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت تغییر می‌کند. برای یک تغییر بسیار کوچک(دیفرانسیلی) در انرژی پتانسیل که در اثر جابجایی بسیار کوچک حاصل می‌شود، می‌توان معادله بالا را بصورت زیر نوشت:

$$dU = -dW_C = -\vec{F}_C . d\vec{s}$$

وقتی ذره از $A$ تا $B$ حرکت می‌کند.

$$U_B - U_A = \int_A^B \vec{F}_C . d\vec{s}$$

**نکته:** وقتی نیروی داخلی یک سیستم پایستار باشد کار خارجی که روی آن سیستم صورت می‌گیرد به صورت انرژی در سیستم ذخیره می‌شود و کاملا قابل بازیابی است. اگر کار خارجی در حضور اصطکاک باشد، بخشی از آن صرف افزایش دما می‌شود که دیگر قابل بازیابی نیست.

## تابع انرژی پتانسیل:

بدیهی است که انرژی پتانسیل تابعی از مکان است. در فصل قبل دیدیم که کار نیروی ثقل روی جسم $m$ که از $y_i$ به $y_f$ جابجا می‌شود عبارت است از:

$$W_g = -mg\,(y_f - y_i)$$

از معادله $W_C$ هم می‌دانیم $W_g = -\Delta U g = -(U_f - U_i)$ است پس از این دو معادله نتیجه می‌گیریم:

$$U_g = mgh$$

در مورد نیروی فنر هم وقتی که سر آن از $x_i$ تا $x_f$ جابجا می‌شود

$$U_S = \frac{1}{2}kx_2$$

## پایستگی انرژی مکانیکی:

$$K_f + U_F = K_i + U_i$$

انرژی مکانیکی: که آن را با $E$ نمایش می‌دهند و به صورت حاصل جمع انرژی جنبشی و پتانسیل تعریف می‌شود. $(E = K + U)$

$$E_f - E_i = 0 \longrightarrow E_f = E_i$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad U = mgh$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i$$

بررسی سقوط آزاد توسط پایستگی انرژی:

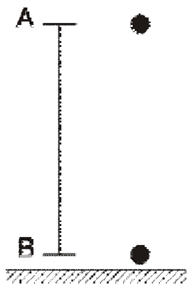
در این صورت انرژی مکانیکی عبارت است از

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

و قانون پایستار به شکل زیر در می آید.

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i$$

جسمی سقوط آزادش را از حالت سکون در ارتفاع $H$ آزاد کرده در این نقطه انرژی جنبشی آن $U = mgh$ است در ضمن با کم شدن ارتفاع سرعت جسم زیاد می‌شود یعنی جسم انرژی از دست می‌دهد و انرژی جنبشی به دست می‌آورد ولی حاصل عبارت $E = U + K$ همواره ثابت می‌ماند.




در لحظه برخورد به زمین انرژی پتانسیل صفر و انرژی جنبشی ماکزیمم است، پس قانون پایستگی به شکل روبرو در می آید.

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 = mgh$$

## بررسی سیستم فنر و پایستار انرژی:

وزنه متصل به فنری روی سطح بدون اصطکاکی قرار گرفته است. وزنه متصل به فنر را به اندازه $x = A$ می‌کشیم و رها می‌کنیم قبل از رها شدن انرژی جنبشی صفر و انرژی پتانسیل max است، یعنی $E = \frac{1}{2}kx^2$ و بعد از رها شدن فنر می‌خواهد به حالت تعادل برگردد و در حین حرکت انرژی پتانسیل به انرژی جنشی تبدیل می‌شود. به طوری که $E = K + U$ مقدار ثابتی می‌ماند. در نقطه تعادل فنر یعنی $x = 0$ تمام انرژی پتانسیل فنر به جنبشی تبدیل شده و در این نقطه $E = \frac{1}{2}mv_{max}^2$. البته در چنین حرکتی وزنه به حرکتش ادامه می‌دهد و دوباره انرژی جنبشی به پتانسیل تبدیل می‌شود تا به $-A$ برسد (در واقع یک حرکت نوسانی است)

## نکاتی درباره کاربرد اصل پایستگی انرژی مکانیکی در حل مسائل:

1) در حالت کلی ممکن است بیش از یک ذره در انرژی جنبشی سیستم سهیم باشد و امکان دارد بیش از یک نوع انرژی پتانسیل (مثلا پتانسیل گرانشی و هم پتانسیل فنر) در کار باشد.

2) اگر اصل پایستگی انرژی مکانیکی را به صورت $K_f + U_f = K_i + U_i$ به کار ببریم باید سطح مرجع پتانسیل $(U=0)$ را مشخص کنیم.

3) اگر از شکل $\Delta K + \Delta U = 0$ استفاده کنیم نیازی نیست که برای انرژی پتانسیل سطح مرجع در نظر بگیریم چون در این شکل فقط تغییرات این انرژی مطرح است. اما باید مواظب باشیم علامت این تغییرات درست تعیین شود.

**مثال**: تخته‌ای به جرم $m = 0.8kg$ به یک سر فنری با ثابت $k = 20\,N/m$ متصل است و روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد. فنر را به اندازه $12cm$ می‌کشیم و رها می‌کنیم

الف) بیشترین سرعت تخته چقدر است؟

ب) وقتی فنر به اندازه $8cm$ متراکم شده است سرعت تخته چقدر است؟

ج) در چه مکان‌هایی انرژی جنبشی تخته با انرژی پتانسیل فنر برابر است؟

د) در چه نقاطی سرعت تخته نصف سرعت ماکزیمم آن است؟

حل:

الف) ماکزیمم سرعت در جایی است که تمام انرژی پتانسیل اولیه به انرژی جنبشی تبدیل شده باشد، یعنی در $x = 0$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \implies v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,A = \pm 0.6\,m/s$$

ب) پایستگی انرژی مکانیکی در این مورد ایجاب می‌کند که

$$0 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k\,(A^2 - x^2)}{m}}$$

به ازای $A = 0.12m$ و $x = -0.08m$ خواهیم داشت $v = \pm 0.45\,m/s$. دو علامت مثبت و منفی حاکی از آن است که در هر نقطه معین سرعت می‌تواند در هر یک از دو جهت باشد. توجه کنید که به ازای انبساطی برابر با $x = +0.08m$ هم همین دو مقدار برای سرعت به دست می‌آید

ج) اگر انرژی‌های پتانسیل و جنبشی برابر باشند، هریک باید نصف انرژی کل باشد، یعنی $k = U = \frac{1}{2}E$. پس می‌توانیم بنویسیم

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kA^2\right) \implies x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} = \pm 0.085\,m$$

د) می‌خواهیم نقاطی را پیدا کنیم که در آنها $v=\frac{1}{2}v_{max}=\pm 0.03\,m/s$ باشد(بنابر قسمت الف). پایستگی انرژی ایجاب می‌کندکه داشته باشیم $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$، که از آن نتیجه می‌شود

$$x=\sqrt{\frac{(kA^2-mv^2)}{k}}=\pm 0.1\,m$$

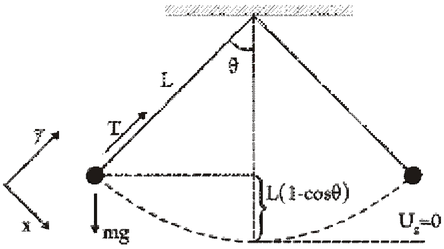
پس به ازای هر سرعتی دو نقطه خواهیم داشت که به طور قرینه در دو طرف مبدا واقع شده‌اند.

**مثال**: آونگ ساده‌ای داریم که طول نخ آن $L=2m$ و جرم گلوله‌اش $m=2kg$ است. وقتی زاویه نخ آونگ با راستای قائم $\theta=35^\circ$ باشد سرعت گلوله آونگ $v=1.2\,m/s$ است. کشش نخ این آونگ وقتی که گلوله:

الف) از پایین‌ترین نقطه مسیر

ب) از بالاترین نقطه مسیر

می‌گذرد چقدر است؟




حل: برای حل این مسئله باید هم از دینامیک و هم از اصل پایستگی انرژی مکانیکی استفاده کنیم. نیروهای وارد بر گلوله در شکل نشان داده شده‌اند. معادله نیوتن در راستای نخ($y$) عبارت است از:

$$(i)\qquad T-mg\cos\theta=\frac{mv^2}{L}$$

می‌بینیم که برای پیدا کردن کشش نخ باید سرعت گلوله را داشته باشیم. سرعت را از ملاحظات مربوط به انرژی به دست می آوریم. مرجع پتانسیل را در پایین‌ترین نقطه مسیر انتخاب می‌کنیم. توجه کنید که ارتفاع گلوله در هر وضعیت $\theta$ عبارت است از

$$y=L-L\cos\theta$$

انرژی مکانیکی سیستم (که همواره در حین حرکت نوسانی آهنگ ثابت می‌ماند) برابر است با

$$(ii)\qquad E=\frac{1}{2}mv^2+mgL(1-\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(2\,kg)(1.2\,m/s)^2+(2\,kg)(9.8\,m/s^2)(2\,m)(1-0.82)=8.5\,j$$

الف) در پایین ترین نقطه $\theta=0$ است. بنابراین از معادله $(ii)$ داریم

$$E=\frac{1}{2}mv_{max}^2+0$$

که اگر $E=8.5\,j$ را در آن قرار دهیم نتیجه می‌شود که $v=\pm 2.9\,m/s$ است. از معادله $(i)$ داریم

$$T=mg\cos\theta+\frac{mv^2}{L}=19.6+8.5=28.1\,N$$

به صورت زیر در می‌آید $(ii)$ است، پس معادله $v=0$ ب) در بالاترین نقطه مسیر

$$E = 0 + mgL\,(1 - \cos\theta_{max})$$

که با استفاده از مقدار $E=8.5j$، معلوم می‌شود $\cos\theta_{max} = 0.783$ است. در این حالت (چون $v=0$ است) از معادله $(i)$ خواهیم داشت.

$$T = mg\cos\theta = 15.3\,N$$

## انرژی مکانیکی و نیروهای ناپایستار:

اصل بقای انرژی مکانیکی را فقط می‌توان به سیستمی اعمال کرد که هیچ نیروی ناپایستاری (داخلی یا خارجی) کاری انجام ندهد. حالا می‌خواهیم ببینیم که کار نیروی ناپایستار چه تغییری در ملاحظات مربوط به انرژی مکانیکی پدید می‌آورد.

قضیه کار-انرژی جنبشی می‌گوید که کار خالصی که روی یک ذره انجام می‌شود برابر با تغییرات انرژی جنبشی ذره است. در حالت کلی

$$W = W_C + W_{NC} = \Delta K$$

$$W_{NC} = \Delta K + \Delta U$$

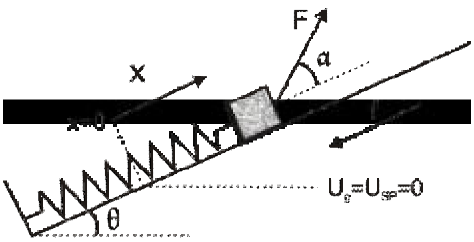
که در آن $W_C$ کار نیروی پایستار و $W_{NC}$ کار نیروی ناپایستار است.

یا از آنجا که $\Delta K + \Delta U = \Delta E$:

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{NC}$$

در واقع معادله بالا اصلاح شده معادله انرژی مکانیکی برای مواردی است که نیروهای ناپایستار هم کار انجام می‌دهند و حاکی از آن است که نیروهای ناپایستار موجب تغییر در انرژی مکانیکی می‌شود.

**مثال**: جسمی به جرم $m$ که به فنری با ثابت $k$ متصل است می‌تواند روی سطح شیب‌داری با زاویه‌شیب $\theta$ حرکت کند. در ابتدا جسم ساکن است و فنر طول عادی‌اش را دارد. جسم با نیروی $F$ که با سطح شیب‌دار زاویه $\alpha$ می‌سازد کشیده می‌شود. نیروی اصطکاک برابر با $f$ است. شکل اصلاح شده قضیه کار- انرژی را برای این سیستم بنویسید.




حل: انرژی پتانسیل فنر در $x=0$ صفر است. چون حرکت از $x=0$ شروع می‌شود بهتر است که انرژی پتانسیل ثقلی را هم در همین نقطه صفر بگیریم. در شروع حرکت $E_i = 0$ است و در ضمن حرکت داریم

$$E_f = K + U_g + U_s = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx^2$$

توجه کنید که $h = x\sin\theta$ است.

نیروهای $F$ و $f$ هر دو ناپایستارند. پس

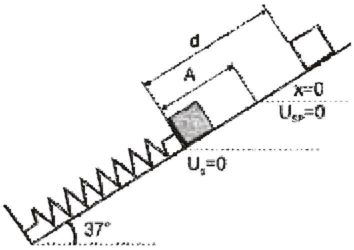
$W_{NC} = Fx\cos\alpha - fx$

بنابراین قضیه کار - انرژی برای این سیستم چنین است:

$(\Delta E = E_f - E_i = W_{NC})$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx\sin\theta + \frac{1}{2}kx^2 = Fx\cos\alpha - fx$$

**مثال:** در شکل زیر جسمی به جرم $0.2kg$ را به فنری با ثابت $50\ N/m$ تکیه داده و فنر را به اندازه $20cm$ منقبض کرده‌ایم. اگر دستمان را برداریم جسم می‌تواند قبل از توقف به اندازه $50cm$ روی سطح شیب‌دار به سمت بالا بلغزد.




الف) نیروی اصطکاک چقدر است؟

ب) سرعت جسم درست در لحظه‌ای که از فنر جدا می‌شود چقدر است؟

حل: اگر $U_g$ را (به جای $x = 0$) در پایین‌ترین نقطه صفر بگیریم، خوبی‌اش این است که مقادیر بعدی انرژی پتانسیل مثبت خواهند بود. می‌دانیم که انرژی مکانیکی شامل سه جمله است.

$E = K + U_g + U_s$

الف) $K_i$ و $K_f$ هردو صفرند. $A = 0.2m$ و $d = 0.5m$ 02/01/2002 است. بنابراین خواهیم داشت:

$$E_i = \frac{1}{2}kA^2 \quad , \quad E_f = mgd\sin\theta$$

که اگر اینها را در معادله کار و انرژی قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$mgd\sin\theta - \frac{1}{2}kA^2 = -fd$$

با استفاده از معلومات مسئله $f = 0.82N$ به دست می‌آید.

ب) در این مورد $E_i$ همان مقدار قبلی است، ولی $E_f$ در $x = 0$ برابر است با

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + mgA\sin\theta$$

بنابراین

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgA\sin\theta - \frac{1}{2}kA^2 = -fA$$

که از آن $v = 2.45m/s$ به دست می‌آید.

## نیروی پایستار و تابع انرژی پتانسیل :

می‌خواهیم ببینیم که چگونه می‌توان نیروی پایستار وابسته به یک تابع انرژی پتانسیل را پیدا کنیم. بنابر معادله $dU = -dW_C = -\vec{F}_C.d\vec{s}$ کاری که نیروی پایستار $\vec{F}_C$ در جابجایی کوچک $d\vec{s}$ 02/01/2002 انجام می‌دهد با رابطه زیر به تغییر بسیار کوچک $dU$ که در انرژی پتانسیل پدید می‌آید مربوط می‌شود.

$$dU = -\vec{F}_C.d\vec{s}$$

این معادله در یک بعد به صورت $dU = -\vec{F}_C.dx$ در می‌آید بنابراین:

$$F_x = \frac{dU}{dx}$$

به طور کلی: هر مؤلفه‌ی یک نیروی پایستار برابر با منفی مشتق تابع انرژی پتانسیل در جهت همان محور است. علامت منفی به این معناست که نیرو در جهت کاهش انرژی پتانسیل است.

$$U_g = mgy \Longrightarrow F_y = -\frac{dU}{dy} = -mg$$

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

پایان فصل هشتم