

اعداد طبیعی: ۱، اعداد اول، اعداد مرکب

* شرایط یک دسته بندی درست:

۱- دسته ها نباید اشتراک داشته باشند.

۲- مرعفون باید در دسته ای باشد.

مثال: جمله زیر درست است یا غلط؟

«هر عدد طبیعی حداقل یک مقسوم علیه اول دارد.» غلط. به خاطر ۱.

* اعداد اول: اعداد طبیعی که فقط ۲ مقسوم علیه داشته باشند.

* اعداد اول زیر ۱۰۰: ۲-۳-۵-۷-۱۱-۱۳-۱۷-۱۹-۲۳-۲۹-۳۱-۳۷-۴۱-۴۳-۴۷-۵۳-۵۹-۶۱-۶۷-۷۱-۷۳-۷۹-۸۳-۸۹-۹۷

~~۹۱~~ ۹۷

* اعداد اول دوقلو: اعداد اولی که دو تا اختلاف دارند (مثل ۳ و ۵ و ۷ یا ۱۷ و ۱۹)

* بیشترین اختلاف بین ۱۹ و ۹۷ و کمترین اختلاف بین ۲ و ۳ است.

* اعداد مرکب: اعداد طبیعی که بیش از ۲ مقسوم علیه دارند.

مثال: مجموع ۲ عدد اول ۱۱ است. تفاضل آنها چند است؟ ۷۷ (۲ و ۷۹)

نتیجه: اگر مجموع ۲ عدد اول فرد شود، حتما یکی از آنها ۲ است.

* اگر تفاضل ۲ عدد اول فرد شود، حتما یکی از آنها ۲ است.

* اگر حاصلضرب ۲ عدد اول زوج شود، حتما یکی از آنها ۲ است.

مثال: مجموع مکعبات ۲ عدد اول ۲۲۰۵ است. مکعب مجموع آنها برابر است با:

$$x^3 + y^3 = 2205 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 2^3 + y^3 = 2205 \Rightarrow y^3 = 2197 \Rightarrow y = 13; (2+13)^3 = 15^3 = 3375$$

مثال: اویلر ادعا کرد که حاصل عبارت $n^2 + n + 41$ به ازای هر عدد طبیعی اول است.

بررسی کن که حرت است یا درست؟ $40^2 + 40 + 41 = 40 \times (40+1) + 41 = 40 \times 41 + 41$ هر دو بر ۴۱ بخشپذیرند.

مثال: ۱۰۰۰ عدد متوالی مرکب بیابند.

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, (n+1)! + 4, \dots, (n+1)! + (n+1)$$

تفصیل: تعداد اعداد اول نا محدود است.

اثبات: فرض می کنیم تعداد اعداد اول متناهی است یعنی فقط n عدد اول داشته باشیم. (با اسمی)

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \quad \text{حالا: } (p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n) + 1$$

اگر مرکب باشد به عدد اولی غیر از p_1 تا p_n بخشپذیر است. $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ بخشپذیر نیست.

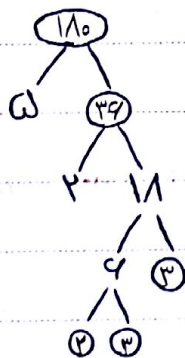
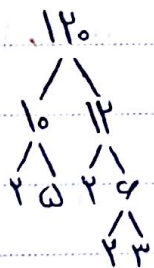
باقیمانده تقسیم این عدد بر تمام اعداد اول 1 است پس بر هیچکدام بخشپذیر نیست.

اگر این عدد اول باشد، عدد اولی غیر از p_1 تا p_n یافتیم. اگر مرکب باشد یعنی بر عدد اولی غیر از p_1 تا p_n بخشپذیر است و عدد اول جدیدی یافتیم.

* تجزیه یک عدد به حاصلضرب عوامل اول:

یعنی نوشتن آن عدد به صورت ضرب اعداد اول

۱- روش درختی:



مثال: نمودار درختی زیر را کامل کن.

۲) روش خطی:

$$\begin{array}{r|l} 1200 & 2 \times 5 \\ 120 & 2 \times 5 \\ 12 & 3 \times 2^2 \end{array}$$

مثال: عدد $110^3 \times 24^5$ را تجزیه کن.

$$24000 \left| \begin{array}{l} 2^3 \times 5^3 \\ 2^3 \times 3 \end{array} \right.$$

$$24000 = 2^6 \times 3 \times 5^3$$

مثال: مقسوم علیه های اول 24000 را بیابید.

$$2^1 \times 2^2 \times \dots \times 2^{50} = 2^{\frac{51 \times 50}{2}} = 2^{1275} = 2^{1275}$$

مثال: حاصلضرب مقسوم علیه های 2^{50} :

$$\frac{1 + 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{50}}{2} = 2^{50} - 1$$

مثال: حاصل جمع مقسوم علیه های 2^{50} :

مثال: حاصل تفریق مقسوم علیه‌های 3^{50} :

$$A = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{50}$$

$$3A = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{51}$$

$$2A = 3^{51} - 1 \Rightarrow A = \frac{3^{51} - 1}{2}$$

مثال: چند عدد طبیعی ۳ رتبی داریم که تنها عامل اولش ۳ باشد؟ $3^0, 3^1$

مثال: اعداد طبیعی بین ۱۰۰ و ۴۰۰ را بیابید که دامل اولشان ۲ و ۳ باشند.

$$3^0 \times 2^1 = 121, 3^1 \times 2^0 = 192, 3^2 \times 2^4 = 144, 3^3 \times 2^2 = 108, 3^4 \times 2 = 162$$

مثال: عدد $1294 \dots 94$ چند عامل دو دارد؟

روش اول: $\rightarrow$

روش دوم: $\rightarrow$

قفسه: اگر تجزیه عددی به صورت $p^a \times q^b \times r^c \times \dots$ شود، تعداد مقسوم علیه‌ها

طبیعی آن برابر است با: $(a+1) \times (b+1) \times (c+1) \times \dots$

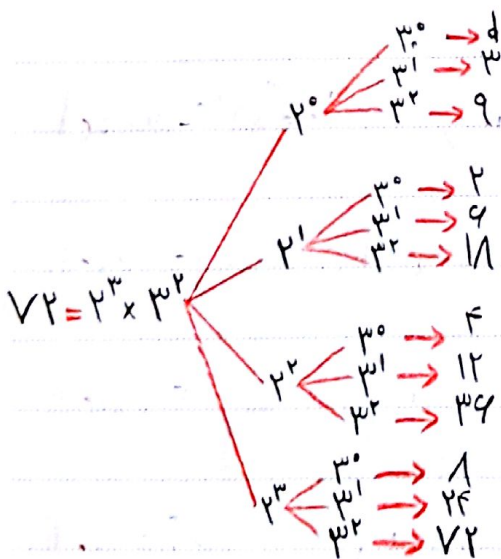
اثبات: برای نوشتن مقسوم علیه‌ها ابتدا سراغ پایه p

ی رویم. پایه p ، $a+1$ حالت دارد (از p^0 تا p^a). سپس

سراغ پایه q ی رویم که $b+1$ حالت دارد و همین طوری

آخر طبق اصل ضرب تعداد شمارنده‌ها برابر است با:

$$(a+1) \times (b+1) \times (c+1) \times \dots$$



مثال: ۱۰! چند مقسوم علیه دارد؟

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 2V\%$$

مثال: اگر x ، ۱۳ شماره داشته باشد، x^3 چند شماره دارد؟ $۱۳!$ در تجزیه x ، ۱۳ عامل اول داریم.

در تجزیه x^3 هم همین ۱۳ شمارنده را داریم که توانشان ۳ برابر شده است.

مثال: کوچکترین عدد طبیعی که ۱۱ شمارنده دارد:

$\rightarrow 12 \rightarrow \psi'' = \psi_0 \psi_1$

$$12. \quad \omega_x \omega \rightarrow \omega_x \omega = V \omega$$

$$y \times y = y^2 \quad y \times y^a = y^{a+1}$$

جواب درست $\rightarrow 6 \times 3 \times 2 = 6\%$

مثال: ۷۲۰ چند شمارنده مرکب دارد؟
 $۷۲۰ = ۲^4 \times 3^2 \times 5 \Rightarrow ۵ \times ۳ \times ۲ = ۳۰ \rightarrow$ کل شمارنده‌ها

شماره ها مجرب $30 - 3 - 1 = 26 \rightarrow 1, 2, 3, 5$

مثال: ۷۲۰ چند شمارنده زوج دارد؟
 $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ → شمارنده‌های زوج: ۲۶

فردھا → ۴ = ۲۹ - ۳۰ ← کل

مثال: ۷۲۰ چند شمارنده فرد دارد؟

تعداد سحرآمیزها

۲

زوجها

قضیه: حاصل ضرب مقسوم علیه‌های n برابر است با

اثبات: مقسم علیها جفتند و حاصل ضرب هر جفت برابر n است. پس موقع حساب کردن

جمله‌های توانیم تمام شماره‌ها را $\sqrt{n}$ بگیریم. (اگر شماره تکی هم داشتیم، خودش $\sqrt{n}$ ✓)

ی شود و مشکلی پیش نمی آید) بنابراین حامل ضرب کل شماره ها برابر است با $n^{\frac{1}{2}}$ تعداد شماره ها

$$720^{15}$$

مثال: حامل ضرب شماره های 720:

مثال: حامل ضرب شماره های 900: $900 = 3^2 \times 2^2 \times 5^2 \Rightarrow 3 \times 3 \times 3 = 27 \Rightarrow 900^{\frac{27}{4}} = (3^2)^{\frac{27}{4}} = 3^{\frac{27}{2}}$

* ب 22 و ک 22:

* ب 22 (بزرگترین مقسوم علیه مشترک): ب 22 و a را با (a, b) یا a b نشان می دهیم.

برای بدست آوردن ب 22 اعداد را تجزیه می کنیم و پایه های مشترک با کمترین را انتخاب

کرده و در هم ضرب می کنیم.

* ک 22 (کوچکترین مضرب مشترک): ک 22 دو عدد را با [a, b] یا a b نشان می دهیم.

برای بدست آوردن ک 22 اعداد را تجزیه کرده و تمام پایه ها با بیشترین توان را انتخاب کرده

و در هم ضرب می کنیم.

* قواعد:

۱- اگر a بر b بخش پذیر باشد: $[a, b] = a$ $(a, b) = b$

۲- اگر $a = (a, b)$ باشد (یعنی a و b عامل مشترک نداشته باشند)، می گوئیم a و b نسبت به هم اول

یا متباینند.

۳- دو عدد اول متفاوت همواره متباینند.

۴- دو عدد متوالی متباینند. (اثبات: اگر دو عدد بر x بخشپذیر باشند، حاصله آنها مضرب x است.

افقط مضرب ۱ است. پس تنها عددی که دو عدد متوالی می‌توانند بر آن بخشپذیر باشند، ۱ است.)

۵- $(a, b) \times [a, b] = a \times b$

۶- اگر a, b متباین باشند: $[a, b] = ab$ ۷- اگر $(a, b) = d$ داریم: $(ak, bk) = dk$

۸- $(a, b) = d \Rightarrow (a^n, b^n) = d^n$

۹- اگر $[a, b] = d$ باشد: $[ak, bk] = dk$

۱۰- $[a, b] = d \Rightarrow [a^n, b^n] = d^n$

۱۱- اگر عددی بر a, b بخشپذیر باشد، بر $[a, b]$ هم بخشپذیر است. مثلاً اگر عددی بر۱۲، ۱۱ بخشپذیر باشد، بر $[۱۲, ۱۱]$ یعنی ۳۶ هم بخشپذیر است.۱۲- اگر a, b بر عددی بخشپذیر باشند، (a, b) هم بر آن عدد بخشپذیر است. مثلاً

اگر ۱۲، ۱۱ بر عددی بخشپذیر باشند، ۴ هم بر آن عدد بخشپذیر است.

مثال: کوچکترین عدد ۳ رقمی که باقیمانده تقسیم آن بر ۳، ۴ و ۱۰ برابر ۱ شود، چند است؟

$$[3, 4, 10] = 30 \rightarrow 30 \times 4 + 1 = 121$$

اگر ۱۲، ۱۱ بود، حاصل ۳ رقمی نمی شد.

مثال: کوچکترین عددی که باقیمانده تقسیم آن بر ۳، ۴ و ۱۰ برابر ۱ شود، چند است؟

$$[3, 4, 10] = 30 \rightarrow 30 \times 0 + 1 = 1$$

مثال: کوچکترین عدد طبیعی که بر ۷ بخشپذیر باشد و در تقسیم بر ۲، ۳، ۴ و ۵ به ترتیب باقیمانده ۱، ۲، ۳ و ۴ داشته باشد، چند است؟

$$[2, 3, 4, 5, 6] = 60$$

$$60 \times 1 - 1 = 59 \quad \text{بر ۷ بخشپذیر نیست} \rightarrow 60 \times 2 - 1 = 119 \checkmark$$

غریب اراستن (بر ۹ یا ۱۱ اعداد اول اتان):

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

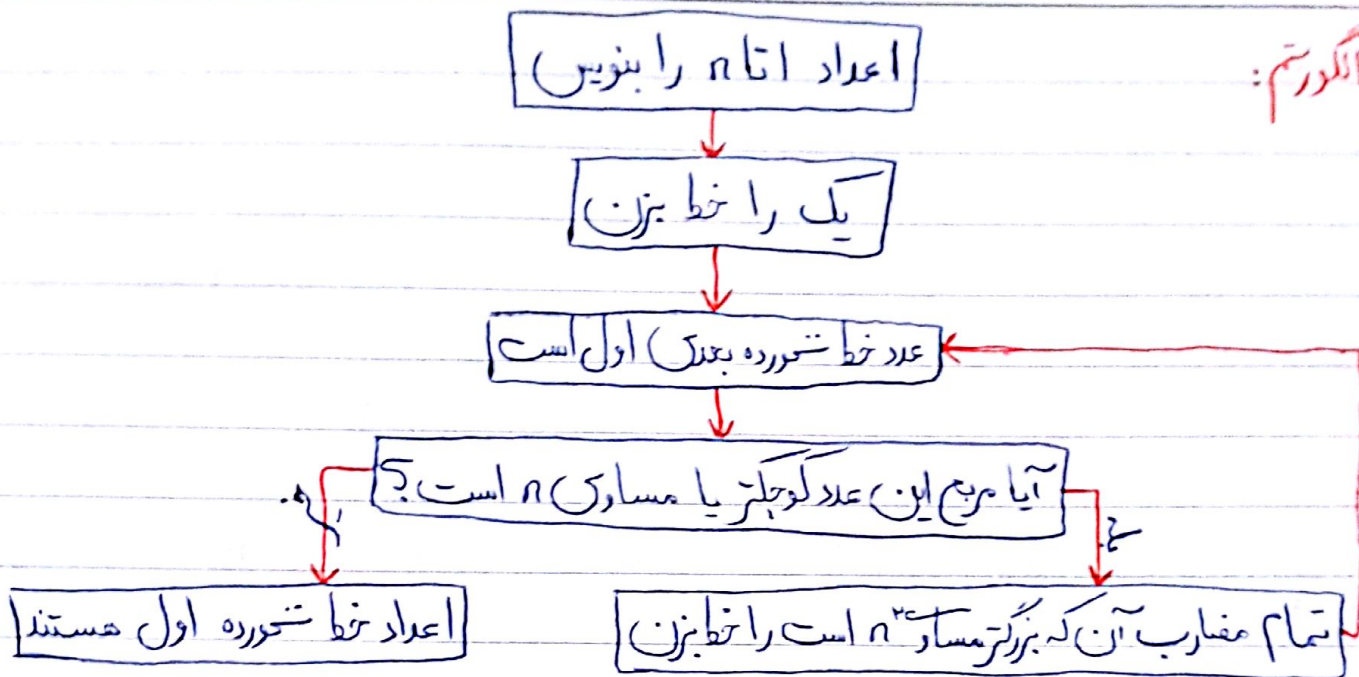
مضارب ۲: آبی

۳: قرمز

۵: سیاه

۷: قهوه ای

الگوریتم:



مثال: در روش غربال برای یافتن اعداد اول اتان ۱۰۰، ۶۲ امین عددی که خط می خورد

چند است؟

$$\begin{aligned}
 & \text{خورد ۱} \quad 49 + 1 = 50 \\
 & \text{خورد ۲} \quad 49 - 1 = 48 \quad \frac{100}{2} = 50 \quad \text{مضارب ۲} \\
 & \text{۱۲ امین عدد} \quad x = 9 + 11 \times 6 \Rightarrow 75 \quad \text{مضارب ۳: ۹، ۱۵، ۲۱، ...}
 \end{aligned}$$

مثال: در غربال اتان ۱۰۰، ۶۵ چندمین عدد خط می خورد؟

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{مضارب ۲: } \frac{100}{2} = 50 \Rightarrow 49 \\
 & \text{مضارب ۳: } \frac{100}{3} = 33 \Rightarrow 32 \Rightarrow 16 \\
 & \text{مضارب ۵: } 25, 35, 55, 65
 \end{aligned} \right\} 49 + 16 + 1 = 66$$

هفتاد و ششمین عدد

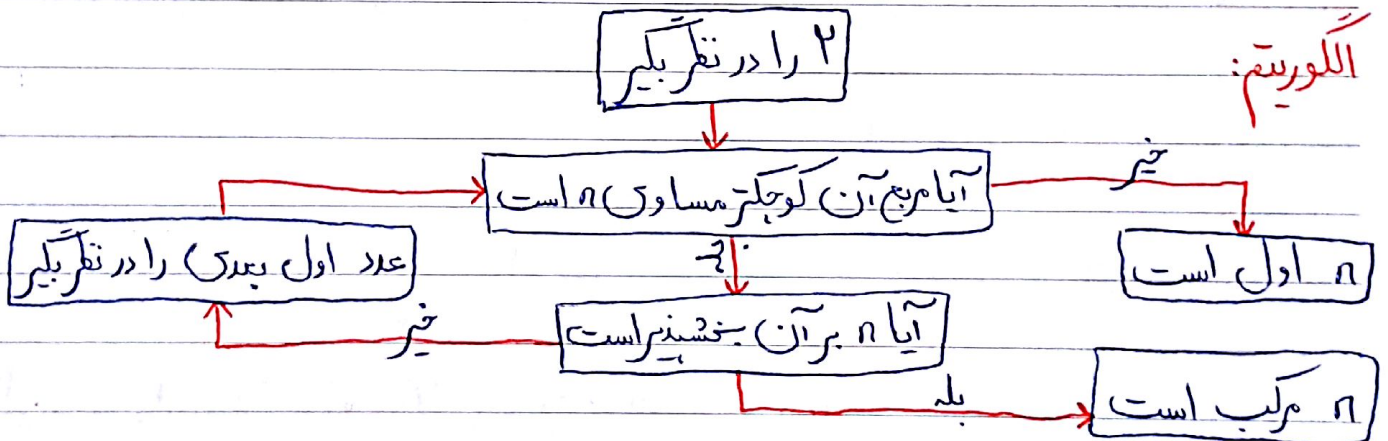
تست‌های اول یا مرکب بودن یک عدد:

از اتان آن عدد را در ذهنمان نوشته و غربال را روی‌شان انجام می‌دهیم.

مثال: 203 اول است یا مرکب؟
 $203 \div 2 = 101,5 \times$ $203 \div 3 = 67,6 \times$
 $203 \div 5 = 40,6 \times$ $203 \div 7 = 29 \checkmark \rightarrow$ مرکب

مثال: 211 اول است یا مرکب؟
 $211 \div 2 = 105,5 \times$ $211 \div 3 = 70,3 \times$
 $211 \div 5 = 42,2 \times$ $211 \div 7 = 30,1 \times$ $211 \div 11 = 19,1 \times$ $211 \div 13 = 16,2 \times$
 تقسیم بر ۱۷ انی کنیم چون 17^2 از 211 بزرگتر است پس 211 اول است.

نتیجه: n را به تمام اعداد اول که مربع آنها کوچکتر یا مساوی n است، تقسیم می کنیم. اگر بر هیچکدام بخشیدر نبود، اول است.

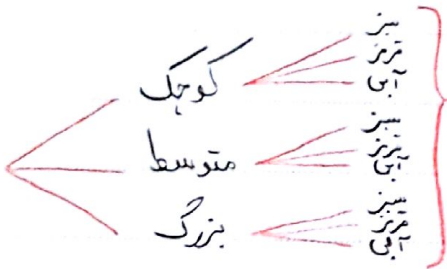


مثال: در غربال ااتا ۱۰۰، ۱۵ چندمین عددی است که خط می خورد؟

$$\begin{aligned}
 2 & : \frac{100}{2} = 50 \Rightarrow 49 \\
 3 & : \frac{100}{3} \approx 33 \Rightarrow 32 \Rightarrow 19 \\
 5 & : 20, 25, 35, 45, 55, 65
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 2 \\ 3 \\ 5 \end{aligned}} \right\} 1 + 49 + 19 + 5 = 71$$

اصل ضرب

مثال ۱: یک تولیدی در اندازه های کوچک، متوسط و بزرگ و رنگ های سبز و قرمز و آبی لباس تولید می کند. این تولیدی چند نوع لباس دارد؟



۹ نوع

مثال ۲: الف) چند عدد ۲ رقمی داریم؟

$$9 \times 10 = 90$$

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹

ب) چند عدد ۲ رقمی با ارقام فرد داریم؟

$$5 \times 5 = 25$$

۱, ۳, ۵, ۷, ۹

ج) چند عدد ۲ رقمی با ارقام متمایز داریم؟

$$9 \times 9 = 81$$

از ۹ تا ۱

مثال ۳: با استفاده از رنگ های زرد و آبی و قرمز می خواهیم خانه های جدول را رنگ آمیزی کنیم.

--	--	--	--

الف) به چند طریق می توان اینکار را کرد (می توانید خانه ای را رنگ نکنید)؟ $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$

ب) به چند طریق می توان اینکار را کرد، طوری که رنگ خانه ها متمایز باشد؟ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$

* اصل ضرب: هرگاه انجام عملی متشکل از دو جز مختلف (۲ مرحله مستقل) باشد به طریقی عمل اول به

m روش مختلف قابل انجام باشد و به ازای هر کدام از این روش ها عمل دوم به n روش مختلف

قابل انجام باشد کل کار را می توان mn روش مختلف انجام داد این اصل برای بیش از ۲ چیز

متن مختلف هم قابل تصمیم است.

سوال ۴: در یک امتحان که شامل ۶ سوال ۴ گزینه ایست تعداد حالات را حساب کن اگر:

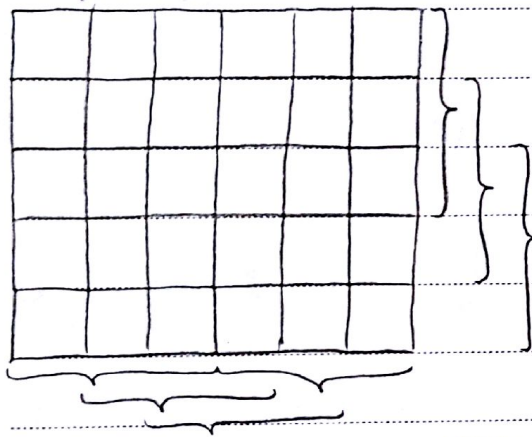
$$4^6 = 4096$$

(الف) در هر سوال باید دقیقاً یک گزینه انتخاب شود.

$$5^6 = 15625$$

(ب) در هر سوال باید حداکثر یک گزینه انتخاب شود.

سوال ۵: در یک صفحه 5×6 چند مربع 3×3 داریم؟



$$3 \times 4 = 12$$

مربع های در طول صفحه مربع های در عرض صفحه

$$A \supset B \supset C$$

سوال ۶: با توجه به نقشه مقابل جواب ده.

$$3 \times 4 = 12$$

(الف) به چند طریق می توان از A به C رفت؟

(ب) به چند طریق می توان از A به C رفت و به A برگشت؟ روش ۱: $3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144$

$$12 \times 12 = 144 \quad \text{روش ۲:}$$

(ج) به چند طریق می توان بدون ۲ بار عبور از یک جاده از A به C و از C به A رفت؟ $3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$

(د) همان قسمت ب بطوریکه مسیر رفت و برگشت فرق کند؟ $12 \times 11 = 132$

سوال ۷: به چند طریق می توان یک رخ سفید و یک رخ سیاه را به خانه از یک صفحه 8×8 منتقل کرد؟

$$1^2 \times 7^2 = 3136$$

مزار داد شود که هم را تهیه کنند؟

مثال ۱: چند طریق می توان یک سیب، یک پرتقال و یک گلابی را بین ۵ نفر تقسیم کرد:

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$$

الف) اگر محدودیت نداشته باشیم؟

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

ب) اگر به هر نفر حداقل یک میوه برسد؟

$$5 \times 4^2 \times 3 \times 4^2 \times 7$$

مثال ۹: عدد روبرو چند مقسم علم مغرب ۱۰ دارد؟

$$5 \times 2^2 \times 3 \times 4^2 \times 7 = 5 \times 2^4 \times 3^3 \times 7 \Rightarrow 1 \times 4 \times 4 \times 2 = 32$$

$\begin{matrix} \text{اره} & \text{اره} & \text{اره} \\ \text{۱، ۲، ۳، ۴} & \text{۵، ۶، ۷، ۸} & \text{۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲} \end{matrix}$

اصل جمع

مثال ۱: مخرج کون از تهران به یزد ۲ راه هوایی، ۲ راه دریایی و ۳ راه زمینی داریم. چند طریق

$$2 + 2 + 3 = 7$$

می توان از تهران به یزد رفت؟

مثال ۲: چند عدد ۳ رقمی زوج با ارقام متمایز داریم؟

روش اول: $9 \times 8 \times 1 = 72$ یکان غیر صفر، $8 \times 1 \times 4 = 32$ $\Rightarrow 72 + 32 = 104$ یکان صفر

$$9 \times 9 \times 1 - 8 \times 1 \times 5 = 81 - 40 = 41$$

$\begin{matrix} \text{مزد یا ارقام} \\ \text{متمایز} \end{matrix}$

روش دوم:

مثال ۳: در صفحه 8×8 چند مستطیل با مساحت ۱۶ داریم؟

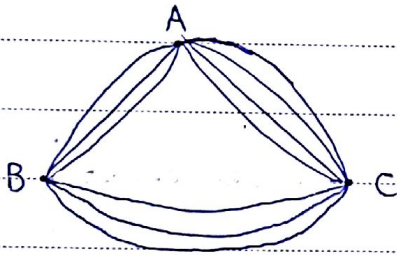
$$16 \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \times 8 : 7 \times 7 - 14 \\ 4 \times 4 : 5 \times 5 - 25 \end{array} \right\} 14 + 25 = 39$$

Subject,

Year, Month, Date, ()

مثال ۴: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۸ چند عدد طبیعی با ارقام مختلف می توان ساخت؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{یک رقمی: } 4 \\ \text{دو رقمی: } 4 \times 3 = 12 \\ \text{سه رقمی: } 4 \times 3 \times 2 = 24 \\ \text{چهار رقمی: } 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \end{array} \right\} 4 + 12 + 24 + 24 = 64$$



مثال ۵: با توجه به نقشه ی رویرو بلوید با طی حداقل دو جاده

به چند طریق می توان از A به B رفت؟

$$A \rightarrow B: 3 \text{ تا}, A \rightarrow C \rightarrow B: 4 \times 3 = 12 \Rightarrow 12 + 3 = 15$$

* اصل جمع: فرض کن عمل اول به m روش و عمل دوم به n طریق قابل انجام باشد. اگر

بخواهیم فقط یکی از این ۲ عمل با انجام دهیم، $m+n$ طریق داریم.

* اصل متمم:

مثال ۱: چند عدد ۲ رقمی داریم که بر ۷ بخش پذیر نباشند؟

$$\left. \begin{array}{l} 99 \div 7 = 14 \\ 9 \div 7 = 1 \end{array} \right\} 14 - 1 = 13 \Rightarrow 90 - 13 = 77$$

مثال ۲: چند عدد ۴ رقمی داریم که ۵ دارند؟

$$9000 - 5132 = 3468 \Rightarrow 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 5132 \text{ پنج دارند}$$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

* فاکتوریل:

$$0! = 1$$

$$\left. \begin{aligned} (2+3)! &= 120 \\ 2! + 3! &= 8 \end{aligned} \right\} 2! + 3! \neq (2+3)!$$

مثال: حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $\frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

ب) $\frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35$

ج) $7! - 5! \times 5 = 5! (7 \times 6 - 5) = 5! \times 37 = 120 \times 37 = 4440$

د) $\frac{4!}{2^2} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = 1.5$

ه) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = (n+2) \times (n+1) \times n$

* مثال: ثابت کنید $n(n! + (n-1)!) = (n+1)!$

$$n(n! + (n-1)!) = n \times n! + n \times (n-1)! = n \times n! + n! = n!(n+1) = (n+1)!$$

* جایگشت

$$3 \times 2 = 6$$

مثال: قلی و کامیز و تاجیک به چند طریق می توانند صف بسازند؟

* جایگشت: هر روشی قرار گرفتن یک شی در یک ردیف را جایگشت آن می نامیم.

مثال ۱: چند جایگشت از حروف کلمه table با + شروع می شوند؟

۱	۴	۳	۲	۱
---	---	---	---	---

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

مثال ۲: چند جایگشت از حروف کلمه nature به حروف صدادار ختم می شوند؟

۵!	۳
----	---

$$5! \times 3 = 120 \times 3 = 360$$

مثال ۳: ۴ معلم، ۳ دانش آموز به چند طریق می توانند در یک صف بایستند طوری که دو معلم کنار هم نباشند؟

$$2-2-2-2-2-2 \rightarrow 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4! \times 3! = 144$$

باید اینطور بایستند

مثال ۴: در چند جایگشت از حروف logarithm عبارت log دیده می شود؟

۷!

عبارت log را یک حرف در نظر می گیریم: جایگشت یک کلمه ۷ حرفی

مثال ۵: در چند جایگشت از حروف talking بین t و k دقیقاً ۲ حرف وجود دارد؟

$$t \dots k \times 3! = 5 \times 4 \times 3! \times 2 = 5! \times 2 = 120 \times 2 = 240$$

چون k و t می توانند ۵ و ۴ یا ۴ و ۵ تغییر کنند

$$3! \times 2! = 4320$$

باقیه صدادها

مثال ۶: در چند جایگشت از حروف triangle صدادار می آیند؟

جایگشت ناقص

مثال: تعداد جایگشت‌ها ۲ حرفی A, B, C, D چند تا است؟

$$\left. \begin{array}{llll} AB & BA & CA & DA \\ AC & BC & CB & DB \\ AD & BD & CD & DC \end{array} \right\} \text{ تا } 12$$

مثال: ۱۰ نفر در یک مسابقه آب خوری شرکت کرده اند. به چند طریق ممکن است تفرات اول

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

تا سرم مشخص شوند؟

جایگشت ناقص: هرگاه از بین n شیء متمایز تنها k شیء را انتخاب کرده و در

یک ردیف بچینیم، تعداد حالات برابر است با:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال ۱: در چند جایگشت ۵ حرفی از triangle حرف اول بی‌مدراست؟

روش ۱: $\underline{5} \quad \underline{7} \quad \underline{9} \quad \underline{5} \quad \underline{4} \Rightarrow 5 \times 7 \times 9 \times 5 \times 4 = 420$

روش ۲: $\boxed{5 \quad \frac{7!}{3!}} \Rightarrow 5 \times \frac{7!}{3!} = 420$

مثال ۲: در چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز، ارقام اول و آخر فرد و بقیه ارقام زوجند؟

$\underline{5} \quad \underline{5} \quad \underline{4} \quad \underline{3} \quad \underline{4} \Rightarrow 5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 4 = 1200$ یا $\boxed{5 \quad \frac{5!}{(5-3)!} \quad 4} \Rightarrow 5 \times \frac{5!}{2!} \times 4 = 1200$

مثال ۳: با a, b, c, d, e, f بدون تکرار حروف:

$$\frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

(الف) چند کلمه ۴ حرفی درون ۵ می توان نوشت؟

(ب) چند کلمه ۳ حرفی با C می توان نوشت؟

$$120 - 90 = 90 \quad \frac{5!}{(5-3)!} = 90 \quad \frac{4!}{(4-3)!} = 90 \quad \frac{3!}{(3-3)!} = 90$$

روشی ۱: ۳ × ۵! / (۵-۲)!
جایی که C
می تواند قرار بگیرد

روشی ۲: ۴! / (۴-۳)!
آنها را که C
نداردند

مثال ۴: چند طریق می توان ۹ کتاب ستاین را بین ۱۵ نفر توزیع کرد به طوریکه:

(الف) محدودیت نداشته باشیم؟

$$15 \times 15 \times \dots \times 15 = 15^9$$

(ب) به هر نفر حداقل یک کتاب برسد؟

$$15 \times 14 \times 13 \times 12 \times \dots \times 7$$

کار اول: همین کتاب ها به ترتیب دلخواه ← حالت

کار دوم: انتخاب ۹ نفر از ۱۵ نفر و همین آنها بگو کتابها ← $15 \times 14 \times 13 \times \dots \times 7$

$$\frac{15!}{(15-9)!}$$

مثال ۵: ۱۱ خند و ۱۴ گلوله به چند طریق می توانند:

(الف) ۱۱ جفت تسلیلی دهند؟

$$14 \times 13 \times 12 \times \dots \times 5 \times 4 \quad \frac{14!}{(14-11)!}$$

(ب) ۱۰ جفت تسلیلی دهند؟

کار اول: ۱۰ جفت تسلیلی دهند ← حالت
کار دوم: تسلیلی ها زوج با ۱۰ خند و ۱۴ گلوله ←

$$\frac{14!}{(14-10)!}$$

$$11 \times \frac{14!}{4!}$$

نتیجه:

مثال ۶: در چند جایگشت به صورت $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_9$ از ارقام ۱ تا ۹ داریم: $a_1 < a_2 < a_3$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

$$\text{کار اول: } \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!}$$

حالت: کار دوم

$$\frac{9!}{5!} \times 1 = \frac{9!}{5!}$$

سوال ۷: در چند جایگشت ۴ حرفی از حروف profile حرف f وجود دارد؟

$$\text{روش ۱: } \frac{7!}{(7-4)!} - \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{7!}{3!} - \frac{4!}{0!} = 7 \times 4 \times 5 \times 4 - 4 \times 5 \times 4 \times 3 = 4 \times 5 \times 4 (7-3) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 = 5! \times 4 = 480$$

$$\text{روش ۲: } 4 \times 4 \times 5 \times 4 = 4 \times 3 \times 2 \times 5 \times 4 = 4 \times 5! = 480$$

بقیه حرف $\rightarrow$ بجا حرف f

* انتخاب (ترکیب):

انتخاب r شی متمایز بین n شی متمایز را ترکیب r شی از n شی می نامیم و با علامت $\binom{n}{r}$

نشان می دهیم. در این حالت ترتیب اشیای انتخاب شده مهم نیست (قرار نیست آنها را کنار هم

بچینیم).

$$\text{تعریف: تعداد حالات انتخاب r شی متمایز از بین n شی متمایز (} 0 \leq r \leq n \text{): } \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

اثبات: در جایگشت ما ابتدا n شی را انتخاب می کنیم و سپس آنها را می چینیم. می دانیم تعداد

جایگشت های r شی برابر $r!$ است. پس برای رسیدن به فرمول انتخاب باید فرمول جایگشت

$$\frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

ناقص را در $\frac{1}{r!}$ ضرب کنیم که می شود:

مثال ۱: از بین ۱۰ دانش آموز به چند طریق می توان ۲ نفر را انتخاب کرد طوری که:

(الف) نفر اول نماینده و نفر دوم آبدارچی شود؟

$$\frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = 10 \times 9 = 90$$

(ب) مرد را به اردو ببریم؟

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{8! \times 2!} = \frac{9 \times 8}{2} = 45$$

مثال ۲: ۸ کلب با ابعاد متفاوت داریم. به چند طریق می توان ۳ تا از آنها را انتخاب کرد طوری که:

(الف) محدودیت نداشته باشیم؟

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} = 56$$

(ب) ادلی را متزو دوی را آبی کنیم و سویی را بنویسیم؟

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

(ج) بزرگترین کلب انتخاب شود؟

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

مثال ۳: ۱۰ چراغ بزرگ ردیف داریم:

(الف) به چند طریق می توان ۳ چراغ را روشن کرد؟

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = 120$$

(ب) به چند طریق می توان ۷ چراغ را روشن کرد؟

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$$

(ج) چه نتیجه ای می گیرید؟ چرا؟

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

چون انتخاب ۷ چراغ روشن مثل انتخاب ۳ چراغ خاموش است.

مثال ۴: در یک آپارتمان ۱۱ خانواده زندگی می کنند. قرار است یک شورای ۴ نفره تشکیل شود.

از هر خانواده تنها پدر یا مادر می تواند انتخاب شود. به چند طریق ممکن است این سودا

تسلیل شود؟ $\frac{22 \times 20 \times 18 \times 16}{4!}$ یا پدر یا مادر $\binom{11}{4} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

مسئله: به چند طریق می توان یک گروه ۴ نفره از ۳ معلم و ۵ دانش آموز انتخاب کرد طوری که

حتما ۱ معلم در گروه باشد؟

$$\binom{5}{4} - \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{1} \times \binom{3}{3} + \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} + \binom{5}{3} \times \binom{3}{1}$$

مسئله: در شکل روبرو چند مثلث می توان ساخت؟



۳ نقطه روی یک خط

$$1 \text{ روش: } \binom{6}{3} - \binom{4}{3} - \binom{5}{3} = 70$$

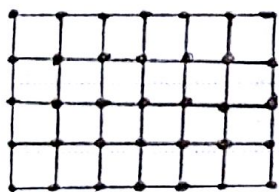
انتخاب ۳ نقطه

$$2 \text{ روش: } \binom{4}{1} \times \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = 70$$

۲ نقطه روی ۵ و یک نقطه روی ۱

۲ نقطه روی ۵ و یک نقطه روی ۱

مسئله: در یک جدول ۴×۴ چند مستطیل می بینیم؟



$$\binom{5}{2} \times \binom{5}{2} = 100$$

راس ها را انتخاب می کنیم:

مسئله: ۱۰ نفر را به چند طریق می توان به ۲ تیم:

$$\binom{10}{4} \text{ یا } \binom{10}{6}$$

الف) ۴، ۶ نفره تقسیم کرد؟

$$\binom{10}{5} \div 2$$

ب) ۵ نفره تقسیم کرد؟

$$\binom{10}{5}$$

ج) ۵ نفره به نام هرستقلال و استولیس تقسیم کرد؟

د) ۱۵ نفر را به چند طریق می توان به ۳ تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟

$$3! \times \binom{10}{5} \times \binom{5}{5}$$

مثال ۹: در چند جایگشت از حروف galler حرف l غیر مجاورند؟

$$7! - \frac{7!}{2}$$

روش ۲: در مربع ها باید حروف g, a, e, r, l باشند و در دو تا از دایره ها باید a

$$\Rightarrow \binom{4}{2} \times 4! \quad \text{باشد}$$

• جایگشت با تکرار:

$$\frac{4!}{2}$$

مثال: چند کلمه ۴ حرفی با حروف call می توان نوشت؟

$$\frac{4!}{2! \times 3!}$$

مثال: چند عدد ۵ رقمی شامل سه رقم ۱ و دو رقم ۲ وجود دارد؟

$$\underbrace{\square \square \dots \square}_{t_a} \underbrace{\triangle \triangle \dots \triangle}_{t_b} \underbrace{\circ \circ \dots \circ}_{t_c} \underbrace{* * \dots *}_{t_k}$$

* فرق کن n شی به این صورت داریم:

$$\frac{n!}{a! \times b! \times c! \times \dots \times k!}$$

تعداد جایگشت ها برابر است با:

مثال ۱: چند کلمه ۹ حرفی با حروف barbabapa می توان نوشت؟

$$\frac{9!}{2! \times 4! \times 2!}$$

مثال ۲: در یک کیسه ۵ سکه ۵ تومانی، ۷ سکه ۱۰ تومانی و ۱ سکه ۲۵ تومانی هست. هر بار از این

کیسه یک سکه در می آوریم تا سکه ها تمام شوند. به چند طریق می توان اینکار را کرد؟

۱: جواب اول

۲۰! = (۵! ۷! ۸!): جواب دوم

۲۰! : جواب سوم
۵! ۷! ۸!

مثال ۳: یک زمین اوما را به چند طریق می توان با ۲ کاشی ۱×۳، یک کاشی ۱×۲، دو کاشی ۱×۱

پوشاند؟
۵! : جواب دوم
۲! ۲! ۱! = ۵! : جواب اول

مثال ۴: در چند کلمه ۱۰ حرفی با a, b, c هر یک از این حروف حداکثر ۴ بار ظاهر شده اند؟

$$\begin{aligned}
 & 4, 4, 2 \rightarrow \frac{10!}{4! \times 4! \times 2!} \times 3 \\
 & 4, 3, 3 \rightarrow \frac{10!}{4! \times 3! \times 3!} \times 3
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{جمع} \rightarrow \frac{3 \times 10!}{4!} \left(\frac{1}{4! 2!} + \frac{1}{3! 3!} \right)$$

مثال ۵: چند عدد ۷ رقمی با ارقام ۴, ۵, ۵, ۶, ۶, ۷, ۷ می توان نوشت که اعداد فرد در

ف	ف	ف	ف
---	---	---	---

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{3!}{2!}$$
 جایگاه ها فرد قرار گیرند؟

فصل ۳: آمار و احتمال

* علم آمار علم جمع آوری، بررسی (پژوهش)، نتیجه گیری از اطلاعات (داده ها) است.

* جمع آوری اطلاعات به ۲ روش انجام می شود: ۱- سرشماری: در این روش تمام اعضای جامعه ی

آماري مورد مطالعه قرار می گیرند (دقیق، کند و پرهزینه). ۲- نمونه گیری: در این روش تعدادی از

اعضای جامعه آماری مورد مطالعه قرار می گیرند (نا دقیق، سریع و کم هزینه). برآیند کمتر شدن خطا در این

Subject:

Year:

Month:

Date: ()

ردیف نمونه باید برآکنده باشد.

داده تغییرات: اختلاف کوچکترین و بزرگترین داده

مثال: اگر داده تغییرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر ۱۷ باشد، داده تغییرات $3x_1 - 2, 3x_2 - 2, \dots, 3x_n - 2$ چقدر است؟

اولیه $\left\{ \begin{array}{l} \text{کوچک: } x_a \\ \text{بزرگ: } x_b \end{array} \right. \rightarrow x_b - x_a = 17$

ثانیه $\left\{ \begin{array}{l} \text{کوچک: } 3x_a - 2 \\ \text{بزرگ: } 3x_b - 2 \end{array} \right. \rightarrow (3x_b - 2) - (3x_a - 2) = 3x_b - 3x_a = 3(x_b - x_a) = 3 \times 17 = 51$

* میانگین (معدل): $\bar{x} = \frac{S}{n}$
 مجموع $\rightarrow$ S
 تعداد $\rightarrow$ n
 میانگین مجموعه x

$$n = \frac{S}{\bar{x}}$$

$$S = n\bar{x}$$

مثال: میانگین قد چند نفر ۱۹۷ cm است. اگر قد بلندترین آنها ۲۳۰ cm است، میانگین

قد بقیه ۱۹۰ cm می شود. تعداد افراد را بیاب.

$$\frac{197n - 230}{n - 1} = 190 \Rightarrow 197n - 230 = 190n - 190 \Rightarrow 7n = 40 \Rightarrow n = 10$$

مثال: اگر میانگین $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر ۱۰۰ باشد میانگین $x_1 + 1, x_2 + 2, \dots, x_n + 20$ چقدر است؟

$$\frac{x_1 + 1 + x_2 + 2 + \dots + x_n + 20}{n} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (1 + 2 + \dots + 20)}{n} = \frac{100 \times 20 + \frac{21 \times 20}{2}}{20} = \frac{4000 + 210}{20} = 110.5$$

* **تفصیل:** اگر تمام داده‌ها مقدار یکسانی اضافه یا کم کنیم به میانگین هم همان مقدار اضافه یا کم می‌شود.

اثبات: $\bar{x}$: میانگین $x_1, x_2, \dots, x_n$: داده‌ها: قدر

جواب: $x_1+t, x_2+t, \dots, x_n+t$: داده‌ها

$$\text{میانگین جدید} = \frac{x_1+t+x_2+t+\dots+x_n+t}{n} = \frac{(x_1+x_2+\dots+x_n)}{n} + \frac{n \times t}{n} = \bar{x} + t$$

اگر t مثبت باشد به میانگین اضافه می‌شود و اگر t منفی باشد از میانگین کم می‌شود.

* **تفصیل:** اگر تمام داده‌ها را در عددی ضرب کنیم میانگین هم در همان عدد ضرب می‌شود.

$$\frac{tx_1+tx_2+\dots+tx_n}{n} = \frac{t(x_1+x_2+\dots+x_n)}{n} = t \times \bar{x}$$

اثبات:

مثال: اگر میانگین $2x_1-3, 2x_2-3, \dots, 2x_n-3$ برابر ۱۷ باشد، میانگین $3x_1+2, 3x_2+2, \dots, 3x_n+2$ چقدر است؟

$$\begin{array}{l} 2x_1-3 \xrightarrow{\div 2, \times 3, +2} 3x_1+2 \\ 17 \xrightarrow{\div 2, \times 3, +2} 32 \end{array}$$

* **دسته بندی داده‌ها:**

$$\text{طول دسته} = \frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}}$$

* **مثال:** فرض کن نمرات ریاضی دانش آموزان یک کلاس اینطور باشد:

۳، ۵، ۱۵، ۱۲، ۵، ۱۹، ۳، ۱۶، ۵، ۱، ۵، ۰، ۴، ۱۳، ۵، ۱۱، ۴، ۱۷، ۵، ۲، ۱۶، ۱۱، ۷، ۵

Subject :

Year . Month . Date . ()

۳، ۵، ۱، ۵، ۵، ۱، ۵، ۷، ۲، ۱۱، ۵، ۱۳، ۱، ۵، ۳، ۵، ۵، ۶، ۵، ۴، ۳، ۵، ۲، ۱۹، ۱۱، ۱۷،
۱۵، ۵، ۱، ۲۵، ۱۹، ۵، ۷، ۷۵

داده‌ها بالا را در ۵ دسته طبقه‌بندی کنید.

$$\frac{\text{طول هر دسته}}{\text{دسته}} = \frac{20-0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

میانگین دسته نمراتی	متوسط دسته	فراوانی	خط نشان	حدود دسته
۲۶	۲	۱۳	###	$0 \leq x < 4$
۴۲	۶	۷	###	$4 \leq x < 8$
۴۵	۱۵	۴	####	$8 \leq x < 12$
۵۶	۱۴	۴	####	$12 \leq x < 16$
۲۱۶	۱۱	۱۲	###	$16 \leq x \leq 20$

* میانگین اعداد در دنباله متغیر (تساعده عددی):

$$\frac{\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}}{2}$$

اثبات:

$$\Rightarrow \text{میانگین} = \frac{(\text{عدد اول} + \text{عدد آخر}) \times \text{تعداد}}{2}$$

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}$$

$$\text{میانگین} = \frac{\text{عدد اول} + \text{عدد آخر}}{2}$$

مثال: مجموع ۲۰ عدد زوج متوالی ۹۲۰ است. عدد سیم چند است؟

$$\text{میانگین} = \frac{920}{20} = 46 \Rightarrow 30, 32$$

$$\text{عدد سوم} = 30 - \left(\frac{20}{4} - 3\right) \times 2 = 30 - 14 = 16$$

مثال: میانگین n عدد برابر ۹ شده. اگر ۲ را حذف کنیم، میانگین ۲ واحد افزایش می‌یابد. p چند است؟

$$\frac{n \times 9 - p}{n-1} = 9+2 \Rightarrow n \times 9 - p = 9n - 9 + 2n - 2 \Rightarrow p = 9 + 2 - 2n$$

PAPCO

* احتمال:

* آزمایش تصادفی: یعنی آزمایشی که نتیجه در آن از قبل معلوم نباشد.

* فضای نمونه (S): یعنی مجموعه تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی. مثلاً: شیر، خط = $S = \{ \text{شیر، خط} \}$

یا مثلاً در به دنیا آمدن ۳ نوزاد: $S = \{ \text{ب، د، د، ب، ب، د، د، ب، د، ب، د، د، د، د، د، د، د، د، د، د} \}$

مثال: در هرتاب یک سکه و یک تاس، فضای نمونه چند عضو دارد؟ $2 \times 6 = 12$

* پیشامد (A): یعنی مجموعه‌ای متشکل از تعدادی از اعضای فضای نمونه. مثلاً پیشامد به دنیا آمدن

۲ پسر و یک دختر در آزمایش تولد ۳ نوزاد: $A = \{ \text{ب، ب، د، ب، د، ب، د، د، ب، د، د، د} \}$

* احتمال یک پیشامد میزان انتظار (باید) ما به رخ دادن آن پیشامد.

* احتمال رخ دادن یک پیشامد = $\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}}$ یا $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

* شرط استفاده از رابطه بالا: هم سانس بودن اعضای فضای نمونه

مثال: ۲ سکه را می‌هتایم. احتمال متفاوت آمدنشان چقدر است؟ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

مثال: سکه‌ای را ۳ بار می‌هتایم. احتمال هر کدام را حساب کن.

الف) ۲ بار شیر و یک بار خط بیاید: $\frac{3}{8}$ $A = \{ \text{شش، شش، خ، شش، شش، خ، شش، شش، خ} \}$

ب) بار اول و دوم شیر و بار سوم خط بیاید: $\frac{1}{8}$ $A = \{ \text{شش، شش، خ} \}$

(ج) حداقل ۲ بار شیر بیاید: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(د) حداکثر ۲ بار شیر بیاید: $\frac{7}{8}$

$A = \{\text{خ ش ش ش، ش خ ش ش، ش ش ش ش، ش ش ش ش}\}$

$A = \{\text{ش ش ش ش، ش ش ش ش، ش ش ش ش، ش ش ش ش، ش ش ش ش، ش ش ش ش، ش ش ش ش}\}$

مثال: ۲ تاس را سی مرتباً بچین. احتمال هر کدام را حساب کن.

(A) مجموع اعداد > ۵: $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$A = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,4)\}$

(B) اعداد اول بیایند: $n(B) = 3 \times 3 = 9 \Rightarrow \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$\{2,3,5\}$

(C) حداقل یکی ۵ بیاید: $n(C) = 9 + 9 - 1 = 17 \Rightarrow \frac{17}{36}$

$\{5,5\}$

مثال: از کیسه شامل تعدادی مهر سفید و ۵ مهر سیاه یکی را خارج می‌کنیم. احتمال سفید بودن آن $\frac{1}{10}$

است. تعداد مهرها سفید چند تاست؟ $\frac{x}{5+x} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10x = 5+x \Rightarrow 9x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{9}$

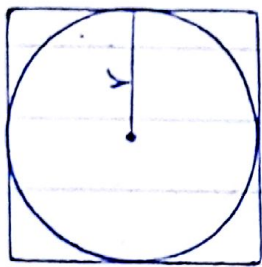
$\frac{1}{10} = \frac{5}{5+x} \Rightarrow 5+x = 50 \Rightarrow x = 45$

مثال: یک سکه را ۵ بار سی مرتباً بچین. احتمال اینکه فقط ۲ بار شیر بیاید چقدر است؟

$\frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

* احتمال پیوسته گاهی اوقات فضای نمونه پیوسته اند و تعداد برایشان معنی ندارد در این

حالت برای محاسبه حجم پیوسته را بر حجم فضای نمونه تقسیم می‌کنیم.



سؤال: در شکل روبرو نقطه ای در مربع می‌گذاریم. احتمال اینکه در فضای بین

مربع و دایره بیفتد، چقدر است؟

مساحت مربع

مساحت دایره

$$\frac{(2r)^2 - \pi r^2}{(2r)^2} = \frac{4r^2 - \pi r^2}{4r^2} = \frac{r^2(4 - \pi)}{4r^2} = \frac{4 - \pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

* اصل جمع و اصل ضرب در احتمال ها هم صادق است.

* اگر ۲ پاشامد مستقل باشند (به هم وابسته نباشند) احتمال رخ دادن هر دوی آنها از ضرب

احتمال تک تک آنها بدست می‌آید.

سؤال: ۲ تاس را می‌اندازیم. احتمال اینکه ادلی عدد مرکب و دوی مغرب ۳ باشد، چقدر است؟

$$\frac{2 \times 2}{6 \times 6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

سؤال: از کیسه ای شامل ۵ مهره سیاه و ۴ مهره سفید، ۲ مهره همزمان خارج می‌کنیم. احتمال هر کدام

را حساب کن.

A) هر ۲ سیاه بیایند: $\frac{\binom{2}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

B) هر ۲ سفید بیایند: $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

C) هر ۲ سفید یا هر ۲ سیاه بیایند: $\frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{4}{9}$

D) مهره ها ناهمباز بیایند: $\frac{9}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

DATE / / SUBJECT:

سؤال: احتمال قبولی علی در آزمون ۲۰٪ و احتمال قبولی نعمت در همان آزمون ۱۰٪

است. احتمال اینکه یکی از آنها قبول شود چقدر است؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{علی} \checkmark, \text{نعمت} \times : 0.2 \times 0.1 = 0.02 \\ \text{علی} \times, \text{نعمت} \checkmark : 0.1 \times 0.1 = 0.01 \end{array} \right\} 0.02 + 0.01 = 0.03$$

سؤال: امروز احتمال بیرون رفتن قلی ۴۰٪، احتمال باران آمدن ۳۰٪ و احتمال اینکه

قلی با خودش چتر ببرد ۱۰٪ است. احتمال خیس شدن قلی چقدر است؟

$$0.4 \times 0.3 \times 0.1 = 0.012$$