



نام و نام خانوادگی :
پایه تحصیلی : دهم ریاضی و تجربی
نام دبیر : نوردی
عنوان آزمون : کاربرگ ۱۲ - معادله درجه ۲ و سهمی

نام درس : ریاضی ۱
نام آموزشگاه : شهید حقانی (سمپاد)
تاریخ برگزاری ۱۴۰۱/۱۱/۰۳

۱ ریشه بزرگتر معادله $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ کدام است؟

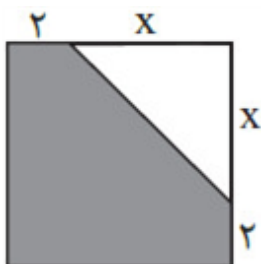
$\sqrt{3}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$-\sqrt{3}$ (۲)

$-\sqrt{2}$ (۱)

۲ در شکل مقابل، مساحت ناحیه رنگ شده ۲۸ واحد مربع است، x کدام است؟



$4/5$ (۴)

۴ (۳)

$3/5$ (۲)

۳ (۱)

۳ به ازای کدام مجموعه مقادیر a معادله درجه دوم $x^2 + \frac{2}{3}ax + 4 = 0$ فقط یک ریشه مثبت دارد؟

$\emptyset$ (۴)

$\{-6\}$ (۳)

$\{6\}$ (۲)

$\{-6, 6\}$ (۱)

۴ برای حل معادله $15x^2 - 15x + 6 = 0$ به روش مربع کامل، کدام عدد را می‌توانیم به دو طرف تساوی اضافه کنیم؟

$\frac{13}{4}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

۵ معادله $-2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{13}{18} = 0$ را به صورت $-2(x+h)^2 + k = 0$ می‌نویسیم. در این صورت خط

$y = -2kx + h$ با جهت مثبت محور x ها، چه زاویه‌ای می‌سازد؟

150° (۴)

125° (۳)

45° (۲)

30° (۱)



۶ در حل معادله درجه دوم، $ax^2 + 2x + c = 0$ ، یکی از جوابها به صورت $\frac{\sqrt{19} - 1}{3}$ است، کدام می‌تواند باشد؟

$\frac{7}{3}$ (۴)

۹ (۳)

$\frac{5}{3}$ (۲)

۳ (۱)

۷ اگر 2 و m ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + (n - 3)x = 8$ باشند، مقدار $5n + 6m$ کدام است؟

۳۲ (۴)

۳۳ (۳)

۳۴ (۲)

۳۵ (۱)

۸ به‌ازای چه حدودی از a نمودار تابع درجه دوم $y = (a + 1)x^2 - ax + \frac{1}{4}(a + 3)$ دارای ماکزیمم است و محور x ها را قطع نمی‌کند؟

هیچ مقدار a (۴)

هر مقدار a (۳)

$-1 < a < -\frac{3}{4}$ (۲)

$a < -1$ (۱)

۹ اگر معادله $3x(mx - 4) + m + 1 = 0$ دارای ریشه مضاعف مثبت باشد، ریشه بزرگ‌تر معادله $2x^2 + mx + 1 = 0$ کدام است؟

۳ (۴)

-۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

۱۰ در یک مثلث قائم‌الزاویه اضلاع مثلث تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند، اندازه‌ی کسینوس زاویه‌ی متوسط کدام است؟

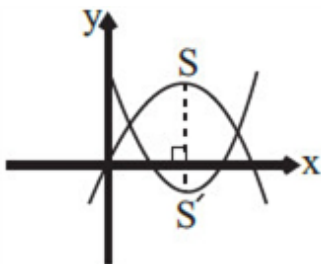
$\frac{\sqrt{5} - 2}{4}$ (۴)

$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ (۳)

$\frac{\sqrt{5} - 2}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (۱)

۱۱ نمودار سهمی‌های $y = x^2 - 4x - b$ و $y = -2x^2 + bx + c$ در شکل مقابل رسم شده است. فاصله رأس‌های دو سهمی (طول پاره‌خط SS') کدام است؟



۲۰ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۴ (۱)



۱۲) رأس سهمی $y = \frac{-x^2}{2} + bx + c$ بر رأس سهمی $y = (2x - 1)^2 - 3$ واقع است، مقدار $b + c$ کدام است؟

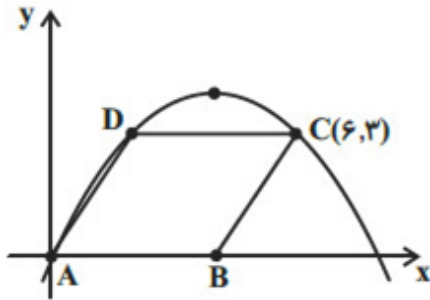
$-\frac{16}{7}$ (۴)

$-\frac{7}{11}$ (۳)

$-\frac{5}{6}$ (۲)

$-\frac{21}{8}$ (۱)

۱۳) اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، به طول رأس ۴، به صورت زیر باشد و ABCD تشکیل یک متوازی‌الاضلاع دهد، مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟



$2\sqrt{13}$ (۴)

۱۲ (۳)

$13/5$ (۲)

۱۵ (۱)

۱۴) فاصله‌ی خط تقارن سهمی $y = -2x^2 + 4x + 3$ تا خط $x + 3 = 0$ کدام است؟

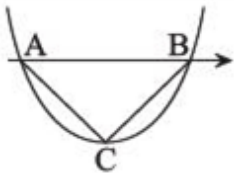
۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

۱۵) نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ شکل زیر است. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، مقدار $b^2 - 4ac$ کدام است؟



$\frac{48}{9}$ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

$\frac{64}{3}$ (۱)

۱۶) نمودار تابع $y = 3x^2 + (2m - 1)x + m + \frac{4}{3}$ در ناحیه دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$-\frac{7}{6}$ (۳)

$-\frac{5}{18}$ (۲)

$-\frac{1}{18}$ (۱)



۱۷ اگر نقطه‌ی $(-2, 6)$ رأس سهمی به معادله‌ی $y = -2x^2 + ax + b$ باشد، مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟

۳۸۸ (۴)

۶۸ (۳)

۹۰۰ (۲)

۹۶۴ (۱)

۱۸ اگر دو نقطه‌ی (a, m) و (b, m) روی سهمی $y = 2x^2 + 7x + 1$ باشند، حاصل $(a + b)^2$ کدام است؟

$\frac{49}{16}$ (۴)

$\frac{49}{4}$ (۳)

۴۹ (۲)

$\frac{49}{2}$ (۱)

۱۹ حدود a برای آن‌که سهمی $y = ax^2 + (a - 1)x$ از ناحیه‌ی سوم عبور نکند، کدام است؟

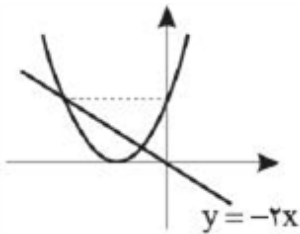
$a \geq 1$ (۴)

$0 < a \leq 1$ (۳)

$a > 1$ (۲)

$0 < a < 1$ (۱)

۲۰ نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ شکل مقابل است. مقدار b کدام است؟



۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱

$$x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0 \Rightarrow (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

پس $x = \sqrt{3}$ ، ریشه بزرگتر معادله است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مساحت ناحیه رنگ شده از تفاضل مساحت مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین سفید رنگ

۲

از مساحت مربع اصلی به دست می‌آید:

$$S = (2 + x)^2 - \frac{x \times x}{2} \Rightarrow 28 = 4 + 4x + x^2 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow 24 = x^2 - \frac{x^2}{2} + 4x$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + 4x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 12)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -12 \text{ ق ق} \\ x = 4 \text{ ق ق} \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای آنکه تابع درجه دوم فقط یک ریشه داشته باشد باید $\Delta = 0$

۳

$$\Delta = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - 4(4) = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}a = 4 \Rightarrow a = 6 \\ \frac{2}{3}a = -4 \Rightarrow a = -6 \end{cases}$$

حالا باید ببینیم به ازای کدامیک از مقادیر بالا ریشه معادله مثبت است:

$$a = -6 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$a = 6 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ق ق ق}$$

پس فقط $a = -6$ قابل قبول است.

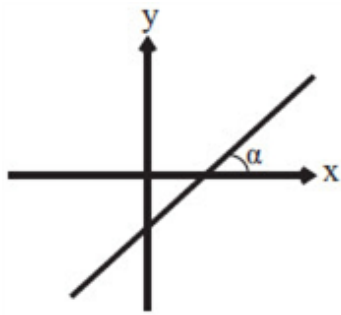
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۴

$$15x^2 - 15x + 6 = 0 \Rightarrow 15\left(x^2 - x + \frac{6}{15}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{6}{15} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{20}$$

با اضافه کردن عدد $\frac{1}{4}$ می‌توانیم معادله را به فرم مربع کامل تبدیل کنیم.



$$-2\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) - \frac{13}{18} = 0$$

$$\Rightarrow -2\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) - \frac{13}{18} = 0$$

$$\Rightarrow -2\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) - \frac{13}{18} = 0 \Rightarrow -2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9} - \frac{13}{18} = 0$$

$$-2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} h = -\frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{y = -2kx + h} y = x - \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{m = \tan \alpha} \tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا جواب معادله را به روش Δ به دست می‌آوریم، سپس در مقایسه با صورت سؤال a و c را به دست آوریم:

$$\frac{\sqrt{19} - 1}{2} = \frac{-1 + \sqrt{19}}{2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-2 + \sqrt{19}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{19}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4ac}}{2a} \Rightarrow a = 2$$

$$4 - 12c = 19 \Rightarrow c = -1$$

$$a - c = 2 + 1 = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷

$$x = -2 \xrightarrow{\text{ریشه معادله}} 3(-2)^2 + (n - 3)(-2) = 8 \Rightarrow n = 5$$

$$3x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 100, x = \frac{-2 \pm 10}{6} \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{4}{3} = m \end{cases}$$

$$5n + 6m = 5(5) + 6\left(\frac{4}{3}\right) = 33$$



$$y = (a+1)x^2 - ax + \frac{1}{4}(a+3) \Rightarrow \begin{cases} a = a+1 \\ b = -a \\ c = \frac{1}{4}(a+3) \end{cases}$$

$$a+1 < 0 \Rightarrow a < -1$$

اگر تابع دارای ماکزیمم است، پس $a < 0$ یعنی:

از طرفی چون تابع محور x ها را قطع نمی‌کند، پس $\Delta < 0$ است، یعنی:

$$(-a)^2 - 4(a+1)\left(\frac{1}{4}(a+3)\right) = a^2 - a^2 - 4a - 3 < 0 \Rightarrow -4a < 3 \Rightarrow a > -\frac{3}{4}$$

دو نامعادله هیچ اشتراکی ندارند.

$$\begin{cases} a < -1 \\ a > -\frac{3}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \emptyset (\text{تهی})$$

$$3x(mx-4) + m + 1 = 0 \Rightarrow 3mx^2 - 12x + m + 1 = 0$$

$$\xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه مضاعف}} (-12)^2 - 4(3m)(m+1) = 0 \Rightarrow 144 - 12m^2 - 12m = 0$$

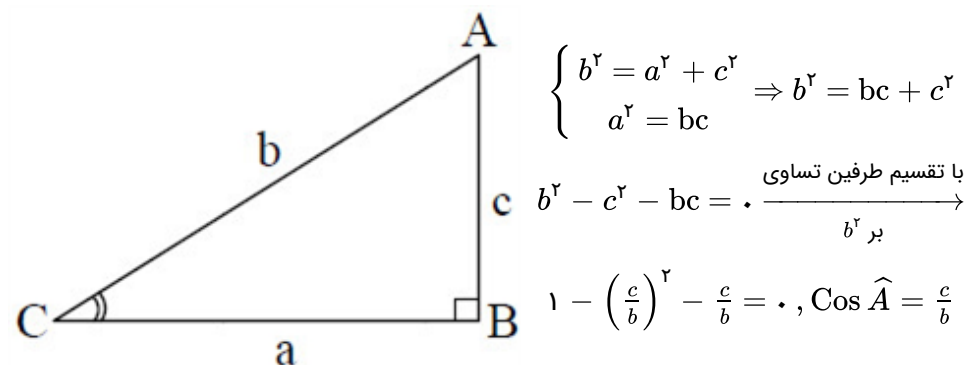
$$\xrightarrow{\div(-12)} m^2 + m - 12 = 0 \Rightarrow (m+4)(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 3 \end{cases}$$

$$m = -4 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{6m} = \frac{12}{-24} = -\frac{1}{2} \quad (\text{غ ق ق})$$

$$m = 3 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{6m} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \quad (\checkmark)$$

حال با داشتن $m = 3$ داریم:

$$3x^2 + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{ریشه بزرگ تر:}$$



$$1 - \left(\frac{c}{b}\right)^2 - \frac{c}{b} = 0, \cos \hat{A} = \frac{c}{b}$$

$$\cos^2 A + \cos A - 1 = 0 \Rightarrow \cos A = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. سهمی رو به پایین از مبدأ می‌گذرد پس در $y = -2x^2 + bx + c$ داریم:

$$y(\cdot) = \cdot \Rightarrow c = \cdot$$

همچنین طول رأس در سهمی‌ها یکسان است، پس:

$$\left. \begin{aligned} y = -2x^2 + bx &\Rightarrow x_s = \frac{-b}{2(-2)} = \frac{b}{4} \\ y = x^2 - 4x - b &\Rightarrow x_s' = -\frac{-4}{2(1)} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{b}{4} = 2 \Rightarrow b = 8$$

پس معادله سهمی‌ها $y = -2x^2 + 8x$ و $y = x^2 - 4x - 8$ بوده و مقدار آن‌ها در $x = 2$ برابر است با:

$$y_s = -2(2)^2 + 8(2) = 8$$

$$y_{s'} = 2^2 - 4(2) - 8 = -12$$

$$8 - (-12) = 20.$$

فاصله رأس سهمی‌ها از هم برابر است با:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. رأس دو تابع بر هم واقع است یعنی باید مختصات هر دو رأس را برابر هم قرار دهیم:

$$y = (2x - 1)^2 - 3 = 4x^2 - 4x - 2$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_s = \frac{-(-4)}{2(4)} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_s = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = -3$$

حال x_s و y_s به دست آمده، در معادله $y = \frac{-x^2}{2} + bx + c$ صدق می‌کند:

$$x_s = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-b}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow -3 = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{-25}{8}$$

$$b + c = \frac{1}{2} - \frac{25}{8} = \frac{4 - 25}{8} = \frac{-21}{8}$$



۱۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه نمودار از مبدأ می‌گذرد، $c = 0$ است. داریم:

$$\frac{A + M}{2} = 4 \Rightarrow M = 8$$

در حالت کلی:

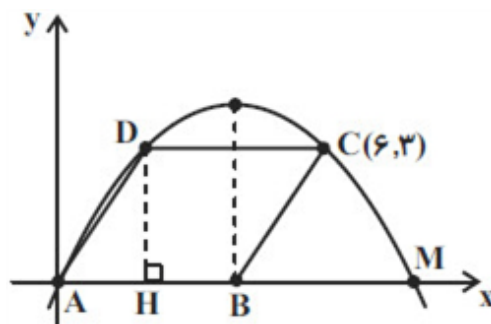
$$y = kx(x - 8) \xrightarrow{C(6,3)} 3 = -12k \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله نمودار سهمی به صورت $y = -\frac{1}{4}x(x - 8)$ می‌باشد.

$$D(x, 3) \xrightarrow{D(x, 3)} 3 = \frac{-1}{4}x(x - 8) \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 6)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 : C \text{ نقطه} \\ x = 2 : D \text{ نقطه} \end{cases} \Rightarrow D(2, 3) \Rightarrow CD = 4$$

$$S_{\text{متوازی الاضلاع}} = DH \times CD = 3 \times 4 = 12$$



۱۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1$$

خط $x + 3 = 0$ یا همان $x = -3$ یک خط قائم است و فاصله آن تا خط قائم $x = 1$ برابر ۴ واحد است. (فاصله دو خط موازی محور y ها)

۱۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y_c = \frac{\sqrt{3}}{2}AB \Rightarrow \left| \frac{\Delta}{4a} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

چون $a > 0$ و $\Delta > 0$ داریم:

$$\frac{\Delta}{4a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \Delta = 12$$

۱۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. خط $y = -x$ و $x < 0$ بر سهمی مماس است، پس معادله تقاطع جواب مضاعف منفی

$$3x^2 + (2m - 1)x + m + \frac{4}{3} = -x \Rightarrow 3x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0$$

دارد:

$$\Rightarrow \Delta = 4m^2 - 12m - 16 = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = (m - 4)(m + 1) = 0 \Rightarrow m = 4 \text{ یا } -1$$

جواب مضاعف باید منفی باشد، پس m باید مثبت باشد.

$$\Rightarrow m = 4 \Rightarrow \text{سهمی: } y = 3x^2 + 7x + \frac{16}{3}$$

طول رأس این سهمی $x_s = -\frac{7}{6}$ است.



$$f(x) = ax^r + bx + c \Rightarrow \begin{cases} x_s = -\frac{b}{ra} \\ y_s = f\left(-\frac{b}{ra}\right) \end{cases} \quad \text{یادآوری:}$$

$$y = -2x^r + ax + b$$

$$\xrightarrow{S(-2,6)} \begin{cases} -2 = \frac{-a}{r(-2)} \Rightarrow a = -8 \\ 6 = 2(-2)^r - 8(-2) + b \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^r + b^r = 6^r + 2^r = 68$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون دو نقطه‌ی (a, m) و (b, m) دارای عرض‌های یکسانی هستند، بنابراین محور تقارن

$$x = \frac{a+b}{2} \quad \text{سه‌می برابر است با:}$$

از طرفی محور تقارن سه‌می $y = 2x^r + 7x + 1$ برابر است با:

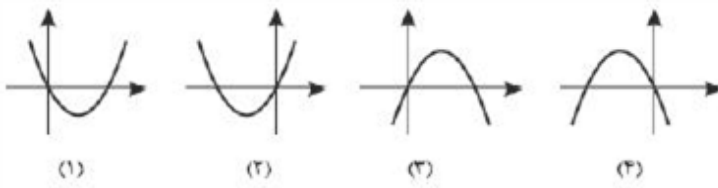
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{4}$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{-7}{4} \Rightarrow a+b = -\frac{7}{2} \Rightarrow (a+b)^r = \frac{49}{4} \quad \text{پس:}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$ax^r + (a-1)x = x(ax + (a-1)) = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{1-a}{a}$$

سه‌می در دو نقطه، محور x ها را قطع می‌کند، پس نمودار آن به یکی از صورت‌های زیر است:



فقط حالت (۱) قابل قبول است پس باید:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \frac{1-a}{a} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < a \leq 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(0) = c \Rightarrow f\left(-\frac{c}{r}\right) = c \Rightarrow a \times \frac{c^r}{r} - \frac{bc}{r} + c = c$$

$$ac^r - rbc = 0 \Rightarrow ac = rb$$

از طرفی نمودار بر محور x ها مماس است، پس $\Delta = 0$.

$$b^r = rac \Rightarrow b^r = 8b \Rightarrow b = 8$$



۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴