



بنگه نشریات «سیر»

Б. П. Демидович

**СБОРНИК ЗАДАЧ
И УПРАЖНЕНИЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
АНАЛИЗУ**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА**

ب.پ. و میدیوچ

مجموعہ

مسائل و تمرینات

آنالیز ریاضی

بنگاہ نشریات "میر"
مسکو

ترجمه از احسان الله قوامزاده قوام

На персидском языке

© حق چاپ محفوظ و مخصوص

بنگاه نشریات «سیر» است

۱۹۷۹

قسمت اول

توابع یک متغیره

فصل ۱

مقدمه آنالیز

بخش ۱ - اعداد حقیقی

بند ۱ - روش استقرای ریاضی. برای اثبات صحت یک قضیه بازای هر عدد طبیعی n کافی است ثابت کنیم: (۱) این قضیه بازای $n=1$ درست است و (۲) اگر این قضیه بازای عدد طبیعی دلخواه n درست باشد بازای تالی آن $n+1$ نیز درست است.

بند ۲ - برش. تقسیم اعداد گویا بدو طبقه A و B را برش نامند اگر شرطهای زیر بر قرار باشد: (۱) هر دو طبقه ناتهی باشند، (۲) هر عدد گویا تنها در یک طبقه واقع باشد، (۳) هر عدد دلخواه متعلق به طبقه A (طبقه پائین) کمتر از هر عدد دلخواه متعلق به طبقه B (طبقه بالا) باشد. برش A/B معرف: الف) عدد گویا است اگر طبقه پائین دارای بزرگترین عدد و یا طبقه بالا دارای کوچکترین عدد باشد و ب) عدد گنگ (اصم) است اگر طبقه A بزرگترین عدد و طبقه B کوچکترین عدد را نداشته باشد. اعداد گویا و گنگ به اعداد حقیقی موسومند*.

بند ۳ - قدر مطلق. اگر x عدد حقیقی باشد عدد نامنفی $|x|$ که بترتیب زیر تعریف می شود قدر مطلق یا مقدار مطلق x نامیده می شود:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{اگر } x < 0. \\ x, & \text{اگر } x \geq 0. \end{cases}$$

* از این پس منظور از کلمه "عدد همواره عدد حقیقی است مگر آنکه خلاف آن تصریح شود.

بازای اعداد حقیقی دلخواه x و y نامساوی زیر را داریم:

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

بند ۴- کران بالا و کران پائین. فرض کنیم $X = \{x\}$ مجموعه متناهی از اعداد حقیقی باشد. عدد

$$m = \inf \{x\}$$

را کران پائین مجموعه X نامند اگر:
(۱) هر $x \in X$ در نامساوی

$$x \geq m$$

صدق کند؛

(۲) بازای جمیع مقادیر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $x' \in X$ وجود داشته باشد بطوری که:

$$x' < m + \varepsilon$$

بطریق مشابهی عدد

$$M = \sup \{x\}$$

را کران بالای مجموعه X نامند اگر:
(۱) هر $x \in X$ در نامساوی

$$x \leq M$$

صدق کند؛

(۲) بازای جمیع مقادیر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $x'' \in X$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$x'' > M - \varepsilon$$

اگر مجموعه X کراندار از پائین نباشد عبارت

$$\inf \{x\} = -\infty$$

مورد قبول است و نیز اگر مجموعه X کراندار از بالا نباشد اینطور بیان می‌شود:

$$\sup \{x\} = +\infty$$

* نگارش $x \in X$ بدان معناست که x متعلق به مجموعه X است.

بند ه - خطای مطلق و خطای نسبی. اگر $a (a \neq 0)$ مقدار دقیق یک کمیت و x مقدار تقریبی این کمیت باشد در اینصورت

$$\Delta = |x - a|$$

را خطای مطلق و

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

را خطای نسبی کمیت مورد اندازه گیری نامند.

گویند عدد x دارای n رقم مطمئن است اگر خطای مطلق این عدد از نصف واحد ردیف مربوط به رقم معنی دار $n - 1$ م تجاوز نکند.

با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید که بازای عدد طبیعی دلخواه n هر یک از تساوی های زیر درست است:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 - 3$$

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 - 4$$

۵- بقرض آنکه

$$a^{[n]} = a(a-h) \dots [a - (n-1)h] \quad \text{و} \quad a^{[1]} = 1$$

ثابت کنید که

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}$$

که در آن C_n^m تعداد ترکیب های n عامل m به m است. از اینجا دستور دو جمله ای نیوتن را نتیجه بگیرید.

۶- ناساوی برنولی:

$$(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

را که در آن x_1, x_2, \dots, x_n اعداد متحد العلامه بزرگتر از -1 می باشند ثابت کنید.

۷- اگر $x > -1$ دستی نامساوی

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1)$$

را اثبات کنید. علامت تساوی بازای $x=0$ دارای مفهوم است.
۸- نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad n > 1$$

راهنمایی- از نامساوی زیر استفاده کنید:

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

۹- نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$2! \times 4! \times \dots \times (2n)! > [(n+1)!]^n \quad n > 1$$

۱۰- نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

۱۰،۱- نامساویهای زیر را ثابت کنید:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \geq 2) \quad \text{الف)}$$

$$n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geq 3) \quad \text{ب)}$$

$$\left| \sin \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k \quad \text{پ)}$$

$$(0 \leq x_k \leq \pi \quad \forall k = 1, 2, \dots, n)$$

$$(2n)! < 2^{2n} (n!)^2 \quad \text{ت)}$$

۱۱- فرض کنیم عدد مثبت c مجذور دقیق یک عدد درست نباشد و برش A/B مشخص کننده عدد حقیقی \sqrt{c} باشد که در آن در طبقه B جمیع اعداد مثبت گویائی مانند b قرار دارند بطوریکه $b^2 > c$ و طبقه A شامل بقیه اعداد گویا می باشد. ثابت کنید که در طبقه A بزرگترین عدد و در طبقه B کوچکترین عدد وجود ندارد.

۱۲- برش A/B مشخص کننده عدد $\sqrt[3]{2}$ بترتیب زیر ساخته می شود:

طبقه 'A شامل جميع اعداد گویای a است بطوریکه $a^3 < 2$ و طبقه 'B شامل بقیه اعداد گویا می باشد. ثابت کنید که در طبقه 'A بزرگترین عدد و در طبقه 'B کوچکترین عدد وجود ندارد.

۱۳- با تشکیل برش های مربوطه تساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{6} \quad (\text{ب} \quad ; \quad \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18} \quad \text{الف})$$

۱۴- برش مشخص کننده عدد $2\sqrt{2}$ را تشکیل دهید.

۱۵- ثابت کنید هر مجموعه عددی ناتهی متناهی از پائین، دارای کران پائین و هر مجموعه عددی ناتهی متناهی از بالا، دارای کران بالا است.

۱۶- نشان دهید که مجموعه تمام کسور متعارفی گویای

$$\frac{m}{n}$$

که در آن m ، n اعداد طبیعی می باشند و $0 < m < n$ ، دارای بزرگترین و کوچکترین عنصر نیست. کران بالائی و پائینی این مجموعه را پیدا کنید.

۱۷- کران بالا و پائین مجموعه اعداد گویای r صادق در ناساوی

$$r^2 < 2$$

را تعیین کنید.

۱۸- فرض کنیم $\{-x\}$ مجموعه اعداد متقابل عددهای $x \in \{x\}$ باشد. ثابت کنید:

$$\sup \{-x\} = -\inf \{x\} \quad (\text{ب} \quad ; \quad \inf \{-x\} = -\sup \{x\} \quad \text{الف})$$

۱۹- فرض کنیم $\{x+y\}$ مجموعه تمام مجموعههای $x+y$ باشد که در آن $x \in \{x\}$ و $y \in \{y\}$ تساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\inf \{x+y\} = \inf \{x\} + \inf \{y\} \quad (\text{الف})$$

$$\sup \{x+y\} = \sup \{x\} + \sup \{y\} \quad (\text{ب})$$

۲۰- فرض کنیم $\{xy\}$ مجموعه تمام حاصل ضربهای xy باشد که در آن $x \in \{x\}$ و $y \in \{y\}$ و در عین حال $x \geq 0$ ، $y \geq 0$. تساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\sup \{xy\} = \sup \{x\} \sup \{y\} \quad (\text{ب} \quad ; \quad \inf \{xy\} = \inf \{x\} \inf \{y\} \quad \text{الف})$$

۲۱- ناساویهای زیر را ثابت کنید:

$$|x-y| \geq ||x| - |y|| \quad (\text{الف})$$

$$|x+x_1 + \dots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \dots + |x_n|) \quad (\text{ب})$$

نامعادلات زیر را حل کنید:

$$|x+2|+|x-2|\leq 12-26$$

$$|x+1|<0,01-22$$

$$|x+2|-|x|>1-27$$

$$|x-2|\geq 10-23$$

$$||x+1|-|x-1||<1-28$$

$$|x|>|x+1|-24$$

$$|x(1-x)|<0,00-29$$

$$|2x-1|<|x-1|-25$$

۳۰- اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2$$

۳۱- در اندازه گیری طول ۱۰ cm خطای مطلق برابر ۰,۵ mm و در اندازه گیری طول ۵۰۰ km خطای مطلق برابر ۲۰۰ m است. کدام اندازه گیری دقیق تر است؟

۳۲- تعیین کنید عدد

$$x = 2,2702$$

در صورتیکه خطای نسبی آن ۱% باشد شامل چند رقم مطمئن است؟

۳۳- عدد

$$x = 12,125$$

شامل ۳ رقم مطمئن است. خطای نسبی این عدد را معلوم کنید.

۳۴- اضلاع یک مستطیل عبارتند از:

$$x = 2,50 \text{ cm} \pm 0,01 \text{ cm}$$

$$y = 4,00 \text{ cm} \pm 0,02 \text{ cm}$$

مساحت این مستطیل بین چه حدودی محصور است؟ اگر برای اضلاع مستطیل مقادیر میانگین اختیار شود خطای مطلق Δ و خطای نسبی δ -ی مساحت مستطیل چقدر است؟

۳۵- وزن جسمی $p = 12,09 \text{ gf} \pm 0,01 \text{ gf}$ و حجم آن $v = 3,2 \text{ cm}^3 \pm 0,2 \text{ cm}^3$ است. مطلوبست تعیین وزن مخصوص جسم و بر آورد خطای مطلق و خطای نسبی وزن مخصوص در صورتیکه مقادیر میانگین برای وزن و حجم اختیار شود.

۳۶- شعاع دایره‌ای عبارتست از:

$$r = 7,2 \text{ m} \pm 0,1 \text{ m}$$

با فرض $\pi = 3,14$ با چه خطای نسبی مینیمال میتوان مساحت دایره را تعیین کرد؟

۳۷ - ابعاد مکعب مستطیلی عبارتند از :

$$x = ۲۴,۷ \text{ m} \pm ۰,۲ \text{ m}$$

$$y = ۶,۵ \text{ m} \pm ۰,۱ \text{ m}$$

$$z = ۱,۲ \text{ m} \pm ۰,۱ \text{ m}$$

حجم V این مکعب مستطیل بین چه حدودی محصور است؟ اگر مقادیر میانگین برای ابعاد اختیار شود حجم این مکعب مستطیل را با چه خطای مطلق و نسبی میتوان تعیین کرد؟

۳۸ - با چه خطای مطلق باید ضلع x از یک مربع را که در آن $۲ \text{ m} < x < ۳ \text{ m}$ اندازه گرفت تا مساحت این مربع را بتوان با تقریب $۰,۰۰۱ \text{ m}^2$ تعیین نمود؟

۳۹ - با چه خطای مطلق Δ کافی است اضلاع x ، y یک مستطیل اندازه گیری شود تا مساحت آنرا بتوان با تقریب $۰,۰۱ \text{ m}^2$ بدست آورد در صورتیکه هر یک از اضلاع مستطیل تقریباً از ۱۰ m تجاوز نکند.

۴۰ - فرض کنیم $\delta(x)$ و $\delta(y)$ خطاهای نسبی اعداد x ، y و $\delta(xy)$ خطای نسبی عدد xy باشد ثابت کنید.

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)$$

بخش ۲ - نظریه دنباله‌ها (رشته‌ها)

بند ۱ - مفهوم حد دنباله . گویند دنباله x_1, x_2, \dots, x_n دارای حد a است (یا بعبارت دیگر، بسط a میل می‌کند) یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

اگر برای هر $\epsilon > 0$ عددی مانند $N = N(\epsilon)$ وجود داشته باشد بطوریکه :

$$|x_n - a| < \epsilon \quad n > N$$

در حالت خاص x_n را بی نهایت کوچک مینامند اگر :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

دنباله‌ای که دارای حد نباشد واگرا (متباعد) نامیده می‌شود.

(۱) اگر

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$$

در اینصورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$$

(۲) دنبالهٔ یکنوای کراندار دارای حد است.

(۳) معیار (آزمون) کوشی. برای آنکه دنباله x_n دارای حد باشد لازم و کافی است که برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $N = N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد بطوریکه:

$$|x_n - x_{np}| < \varepsilon$$

اگر فقط $n > N$ و $p > 0$ باشد.

بند ۳ - قضایای اساسی راجع به حد دنباله. بفرض آنکه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

وجود داشته باشد داریم:

$$(۱) \text{ اگر } x_n \leq y_n \text{ در اینصورت } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$(۲) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$(۳) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$(۴) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \text{ اگر } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

بند ۴ - عدد e . دنبالهٔ

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

دارای حد متناهی است:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818284 \dots$$

بند ۵ - حد نامتناهی. نگارش نمادی (سمبولیک)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

بدان معناست که برای تمام مقادیر $E > 0$ عددی مانند $N = N(E)$ وجود دارد بطوریکه

$$|x_n| > E, \quad n > N$$

بند ۶ - نقطه حد. عدد ξ (یا نماد ∞) را حد جز (نقطه حد) دنباله مفروض $x_n (n = 1, 2, \dots)$ نامند اگر دنباله

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}, \dots \quad (1 \leq p_1 < p_2 < \dots)$$

وجود داشته باشد بطوریکه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \xi$$

هر دنباله کراندار حد اقل دارای یک حد جز متناهی است (اصل بولزانو - ویراشتراس). اگر این حد جز یکتا باشد در آنصورت این حد جز متناهی دنباله مفروض است.

کوچکترین حد جز (متناهی یا نامتناهی) دنباله x_n

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

را حد پائین و بزرگترین حد جز آن:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

را حد بالای این دنباله مینامند.
تساوی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

شرط لازم و کافی وجود حد (متناهی یا نامتناهی) در دنباله x_n است.
۴۱ - فرض کنیم

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ثابت کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

با تعیین $N = N(\varepsilon)$ بازای هر $\varepsilon > 0$ بطوریکه

$$n > N \quad \text{اگر} \quad |x_n - 1| < \varepsilon$$

جدول زیر را تکمیل کنید:

ε	۰,۱	۰,۰۱	۰,۰۰۱	۰,۰۰۰۱	...
N					

۴۲- ثابت کنید که $x_n (n = 1, 2, \dots)$ یک بی نهایت کوچک است (یعنی دارای حد برابر صفر است) و عددی مانند $N = N(\varepsilon)$ تعیین کنید بقسمی که بازای $n > N$ ، $|x_n| < \varepsilon$ در صورتیکه:

$$x_n = \frac{1}{n!} \quad (\text{پ}) \quad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (\text{الف})$$

$$x_n = (-1)^n \times 0,999^n \quad (\text{ت}) \quad x_n = \frac{2^n}{n^2 + 1} \quad (\text{ب})$$

فوق جدول زیر را تکمیل کنید:

ε	۰,۱	۰,۰۰۱	۰,۰۰۰۱	...
N				

۴۳- ثابت کنید که دنباله های

$x_n = \lg(\lg n) (n \geq 2)$ (پ) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$ (ب) $x_n = (-1)^n n$ (الف)
بازای $n \rightarrow \infty$ دارای حدود نامتناهی می باشند (یعنی بی نهایت بزرگ می باشند)
و در ضمن برای هر $E > 0$ عددی مانند $N = N(E)$ تعیین نمائید بقسمیکه
بازای $n > N$ ، $|x_n| > E$.

در هر یک از حالات فوق جدول زیر را تکمیل کنید:

E	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...
N					

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

کراندار نیست. معینا برای $n \rightarrow \infty$ بی نهایت بزرگ نیست.

۴۵ - مدعی‌های زیر را بکمک نامساویها فرمول بندی کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad (\text{پ}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \quad (\text{ب}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad (\text{الف})$$

اگر n سری عددهای طبیعی را طی کند مقدار هر یک از عبارات زیر را

تعیین کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^n} \sin n!}{n+1} - 48$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot n}{n^2 + 1} - 46$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} - 49$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 47$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1) - 50$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) - 51$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} n}{n} \right] - 52$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right] - 53$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^2} \right] - 54$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right) - 55$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] - 56$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[2]{2} \sqrt[2]{2} \sqrt[2]{2} \dots \sqrt[2]{2} \right) - 57$$

تساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1) - 60 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0 - 58$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 - 61 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0 - 59$$

$$|q| < 1 \text{ اگر } \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0 \quad - ۶۲$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0) \quad - ۶۳$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1) \quad - ۶۴$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad - ۶۵$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0 \quad - ۶۶$$

۶۷- بازای مقادیر باندازه کافی بزرگ n کدام یک از عبارات زیر بزرگترند:

(الف) $100n + 200$ یا n^2 ، (ب) 2^n یا $(n!)^{1000}$ (پ) 1000^n یا $n!$ ؟

۶۸- ثابت کنید که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0$$

راهنمایی- (مثال ۱۰ را ببینید).

۶۹- ثابت کنید که دنباله*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (n, 2, \dots)$$

بطور یکنوا صعودی و کراندار از بالا است و دنباله*

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

بطور یکنوا (نزول و کراندار از پائین است و از اینجا نتیجه بگیرید که این دو دنباله دارای حد مشترکی می‌باشند:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = e$$

راهنمایی- نسبت‌های $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ ، $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ را تشکیل دهید و از نامساوی

مثال ۷ استفاده کنید.

۷۰- ثابت کنید که

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

بازای چه مقادیری از نمای n تفاضل عبارت $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ از e کمتر از $0,001$ است؟

۷۱- فرض کنیم $p_n (n = 1, 2, \dots)$ دنبالهٔ عددی اختیاری گرانیده بسمت $+\infty$ و $q_n (n = 1, 2, \dots)$ دنبالهٔ عددی اختیاری گرانیده بسمت $-\infty$ باشد. ثابت کنید که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e$$

۷۲- میدانیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

و از آنجا دستور

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$$

را که در آن $0 < \theta_n < 1$ نتیجه بگیرید و عدد e را با تقریب 10^{-5} حساب کنید.

۷۳- ثابت کنید عدد e گنگ است.

۷۴- نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

۷۵- نامساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (\text{الف})$$

که در آن n عددیست طبیعی.

$$1 + \alpha < e^\alpha \quad (\text{ب})$$

که در آن α یک عدد حقیقی مخالف صفر می‌باشد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \ln a \quad (a > 0)$$

که در آن $\ln a$ لگاریتم عدد a به سببای $e = ۲,۷۱۸ \dots$ می باشد .

با استفاده از قضیه وجود حد در دنباله‌های یکنوای کراندار ، همگرایی دنباله‌های زیر را ثابت کنید :

$$x_n = p_0 + \frac{p_1}{1 \cdot n} + \dots + \frac{p_n}{1 \cdot n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad -۷۷$$

که در آن $x_n = p_0 + \frac{p_1}{1 \cdot n} + \dots + \frac{p_n}{1 \cdot n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ اعداد درست نامنفی است که با ابتدا از p_0 تجاوز نمی کند .

$$x_n = \frac{10}{1} \times \frac{11}{3} \dots \frac{n+9}{2n-1} \quad -۷۸$$

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad -۷۹$$

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \quad -۸۰$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \dots, \quad x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad -۸۱$$

ریشه n

با استفاده از معیار کوشی همگرایی دنباله‌های زیر را اثبات کنید :

$$x_n = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n \quad -۸۲$$

$(k = 0, 1, 2, \dots)$

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} \quad -۸۳$$

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \times 2} + \frac{\cos 2!}{2 \times 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} \quad -۸۴$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad -۸۵$$

راهنمایی - از ناساوی زیر استفاده کنید :

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

۸۶- گویند دنباله^۱ x_n ($n = 1, 2, \dots$) دارای تغییرات محدود است هرگاه عدد C وجود داشته باشد چنانکه:

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_n - x_{n-1}| < C \quad (n = 2, 3, \dots)$$

ثابت کنید که دنباله^۱ دارای تغییرات محدود همگرا است.

مثالی از دنباله‌های همگرا بیاورید که دارای تغییرات محدود نباشد.

۸۷- وقتی میگوییم که معیار کوشی برای دنباله^۱ مفروضی صادق نیست یعنی چه، آنرا فرمول‌بندی کنید.

۸۸- با استفاده از معیار کوشی واگرایی دنباله^۱

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

را اثبات کنید.

۸۹- ثابت کنید که اگر دنباله^۱ x_n ($n = 1, 2, \dots$) همگرا باشد هر زیر دنباله^۱ x_{p_n} از آن نیز همگرا و دارای همان حد سبب باشد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

۹۰- ثابت کنید اگر یک زیر دنباله از یک دنباله^۱ یکنوا همگرا باشد آن دنباله همگراست.

۹۱- ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

در اینصورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$$

۹۲- اگر $x_n \rightarrow a$ در اینصورت در باره^۱ حد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 1}{x_n}$$

چه میتوان گفت؟

۹۳- ثابت کنید که دنباله^۱ عددی همگرا کراندار است.

۹۴- ثابت کنید که دنباله^۱ عددی همگرا یا به کران بالایی خود یا به کران پایینی خود و یا به هر دو میرسد.

برای هر سه نوع مثال ذکر کنید.

۹۵- ثابت کنید دنباله عددی $x_n (n = 1, 2, \dots)$ متقارب به $+\infty$ حتماً به کران پائینی خود میرسد.

مطلوبست بزرگترین جمله دنباله $x_n (n = 1, 2, \dots)$ اگر

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n} - 47$$

$$x_n = \frac{n^2}{2^n} - 46$$

$$x_n = \frac{1000^n}{n!} - 48$$

مطلوبست کوچکترین جمله دنباله $x_n (n = 1, 2, \dots)$ اگر:

$$x_n = n^2 - 9n - 100 - 49$$

$$x_n = n + \frac{100}{n} - 100$$

مطلوبست محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ، $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ، $\sup x_n$ ، $\inf x_n$ در دنباله

اگر $x_n (n = 1, 2, \dots)$

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} - 102$$

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} - 101$$

$$x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} - 103$$

$$x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{2}{n} \right) - 101, 1$$

$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} - 104$$

$$x_n = n^{(-1)^n} - 108$$

$$x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3} - 105$$

$$x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2} - 104$$

$$x_n = (-1)^n n - 106$$

$$x_n = \frac{1}{n-102} - 110$$

$$x_n = -n[2 + (-1)^n] - 107$$

مطلوبست محاسبه

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

اگر:

$$x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3} - 111$$

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \times (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4} - 112$$

$$x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{3} - 113$$

$$x_n = \sqrt[2]{1 + 2^n (-1)^n} - 114$$

$$x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3} - 115$$

مطلوبست محاسبه حد جز' هر یک از دنباله‌های زیر:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots - 116$$

$$1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, \dots - 117$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \dots,$$

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots - 118$$

$$x_n = 3 \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 2(-1)^n - 119$$

$$x_n = \frac{1}{2} [(a+b) + (-1)^n(a-b)] - 120$$

۱۲۱- دنباله عددی‌ای بسازید که حدود جز' آن اعداد مفروض

$$a_1, a_2, \dots, a_p$$

باشند.

۱۲۲- مثالی برای دنباله‌های عددی بیاورید که برای آن جمیع جملات دنباله عددی مفروض

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

حدود جز' آن باشند. دنباله مذکور چه حدهای جز' دیگری را نیز حتماً دارا می‌باشد؟

۱۲۳- دنباله‌ای مثال بزنید که:

(الف) حدهای جز' متناهی نداشته باشد،

(ب) دارای حد جز' متناهی یکتا بوده ولی همگرا نباشد.

(پ) دارای مجموعه^{*} ناستناهی حدود جز^{*} باشد.
 (ت) هر عدد حقیقی را بعنوان حد جز^{*} خود بپذیرد.

۱۲۴- ثابت کنید که دنباله‌های x_n و $y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) دارای حدود جز^{*} یکسان می‌باشند.

۱۲۵- ثابت کنید که از دنباله^{*} کراندار x_n ($n = 1, 2, \dots$) همواره میتوان یک زیر دنباله^{*} همگرای x_{p_n} ($n = 1, 2, \dots$) را اختیار نمود.

۱۲۶- ثابت کنید که اگر دنباله^{*} x_n ($n = 1, 2, \dots$) کراندار نباشد در این صورت زیر دنباله^{*} x_{p_n} وجود دارد بطوریکه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \infty$$

۱۲۷- هر گاه دنباله^{*} x_n ($n = 1, 2, \dots$) همگرا و دنباله^{*} y_n ($n = 1, 2, \dots$) واگرا باشد در باره^{*} همگرایی دنباله‌های زیر چه اظهار نظری میتوان نمود:

الف) $x_n + y_n$ ، ب) $x_n y_n$ ؟
 مثال‌های نظیر ذکر کنید.

۱۲۸- هر گاه دنباله‌های x_n ، y_n ($n = 1, 2, \dots$) واگرا باشند آیا میتوان گفت که دنباله‌های

الف) $x_n + y_n$ ب) $x_n y_n$ نیز واگرا می‌باشند؟
 در هر مورد مثال ذکر کنید.

۱۲۹- فرض کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

و y_n ($n = 1, 2, \dots$) دنباله^{*} نامشخصی باشد آیا میتوان گفت که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$$

مثال ذکر کنید.

۱۳۰- فرض کنیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$$

آیا از این جا میتوان نتیجه گرفت که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ یا $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ؟

به مثال: $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ ، $y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}$ ($n = 1, 2, \dots$) توجه کنید.

۱۳۱- ثابت کنید که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{الف}$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{ب}$$

برای مواردی که در این روابط ناساویهای اکید وجود داشته باشند مثال

ذکر کنید.

۱۳۲- فرض کنیم $y_n \geq 0$ و $x_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) ثابت کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{الف}$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \times \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \times \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{ب}$$

برای مواردی که در این روابط ناساویهای اکید وجود داشته باشند مثال

ذکر کنید.

۱۳۳- ثابت کنید که اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ وجود داشته باشد در آنصورت بازای

جميع دنباله‌های y_n ($n = 1, 2, \dots$) داریم:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{الف}$$

و

$$(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \times \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \quad \text{ب} \quad (x_n \geq 0)$$

۱۳۴- ثابت کنید که اگر حد اقل یکی از تساویهای زیر بازای هر دنباله*

y_n ($n = 1, 2, \dots$) و یک دنباله* x_n ($n = 1, 2, \dots$) بر قرار

باشد در اینصورت دنباله* x_n همگرا است:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{الف}$$

یا

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \times \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{ب} \quad (x_n \geq 0)$$

۱۳۵- ثابت کنید که اگر $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) و

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \times \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1$$

در اینصورت دنباله* x_n همگرا است.

۱۳۶- ثابت کنید که اگر دنباله* x_n ($n = 1, 2, \dots$) کراندار و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$$

در اینصورت حدود جز' این دنباله در همه جا بطور فشرده بین حدهای پائین و بالای آن

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{و} \quad l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

قرار دارد یعنی هر عدد دلخواهی از فاصله $[l, L]$ مساوی حد جز' دنباله مفروض است.

۱۳۷- فرض کنید دنباله' عددی $\dots, x_n, \dots, x_2, x_1$ در شرایط

$$\bullet \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

صدق کند. ثابت کنید که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ وجود دارد.

۱۳۸- ثابت کنید که اگر دنباله' $x_n (n = 1, 2, \dots)$ همگرا باشد در اینصورت دنباله' واسطه‌های حسابی

$$\xi_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

نیز همگرا و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

عکس این حکم درست نیست - مثال بزنید.

۱۳۹- ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

در آنصورت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = +\infty$$

۱۴۰- ثابت کنید اگر دنباله' $x_n (n = 1, 2, \dots)$ همگرا و $x_n > 0$ باشد

در اینصورت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

۱۴۱- ثابت کنید که اگر $x_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ در اینصورت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

بفرض آنکه حد در سمت راست این تساوی وجود داشته باشد.

۱۴۲- ثابت کنید :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

۱۴۳- قضیه شتولتس را ثابت کنید : اگر

$$y_{n+1} > y_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \quad (\text{پ}) \quad \text{وجود داشته باشد، آنگاه}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

۱۴۴- مطلوبست محاسبه :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} \quad (\text{الف}) \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{a^n} \quad (a > 1) \quad \text{ب} \right)$$

۱۴۵- ثابت کنید که اگر p یک عدد طبیعی باشد در اینصورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1} \quad (\text{پ})$$

۱۴۶- ثابت کنید دنباله

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

همگرا است .

بدین ترتیب فرمول

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$$

را داریم که در آن $C = 0.577216 \dots$ موسوم به ثابت اولر است و $\varepsilon_n \rightarrow 0$.
بازای $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

۱۴۸ - دنباله عددی $x_n (n = 1, 2, \dots)$ با دستورهایی زیر مشخص شده است:

$$x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4, \dots)$$

مطلوبیت محاسبه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

۱۴۹ - فرض کنیم دنباله عددی مشخص شده با دستورهایی

$$x_1 = a, x_2 = b, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

باشد. $x_1 > 0$.

ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

۱۵۰ - ثابت کنید که دنباله‌های x_n و $y_n (n = 1, 2, \dots)$ مشخص شده با دستورهایی

$$x_1 = a, y_1 = b, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

دارای حد مشترکی می‌باشند:

$$\mu(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(میانگین حسابی - هندسی دو عدد a و b)

بخش ۳ - مفهوم تابع

بند ۱ - مفهوم تابع. متغیر y را تابع تک مقداری f از متغیر x در حوزه تغییرات $X = \{x\}$ نامند اگر با هر مقدار $x \in X$ یک مقدار حقیقی معین $y = f(x)$ متعلق به مجموعه $Y = \{y\}$ متناظر باشد. مجموعه X حوزه تعریف یا حوزه وجود تابع $f(x)$ ، Y مجموعه مقادیر این تابع نامیده می‌شود. در حالت‌های ساده ممکن است مجموعه X فاصله باز

(بازده) $a < x < b : (a, b)$ یا نیمه باز $a < x \leq b : (a, b]$ و $a \leq x < b : [a, b)$ و یا فاصله بسته (قطعه) $a \leq x \leq b : [a, b]$ باشد که در آن a و b دو عدد حقیقی یا نمادهای $-\infty$ و $+\infty$ میباشند.

اگر هر مقدار x از X متناظر یک یا چند مقدار $y = f(x)$ باشد در اینصورت y را تابع چند مقداری از x مینامند.

بند ۲- تابع معکوس. هرگاه x مقدار دلخواهی انتخاب شود که در معادله*

$$f(x) = y$$

صدق کند که در آن y عددیست ثابت متعلق به مجموعه مقادیر Y تابع $y = f(x)$ در اینصورت این تناظر بطور کلی یک تابع چند مقداری

$$x = f^{-1}(y)$$

را روی مجموعه Y تعریف میکنند که به تابع معکوس تابع $f(x)$ موسوم است. اگر تابع $y = f(x)$ بمعنای اکید یکنوا باشد یعنی بازای $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$$f(x_2) < f(x_1) \text{ یا } f(x_2) > f(x_1)$$

در اینصورت تابع $x = f^{-1}(y)$ یک تابع تک مقداری یکنوا بهمان معنا میباشد. حوزه وجود توابع زیر را تعیین کنید:

$$y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})} - 100$$

$$y = \sqrt{\cos x^2} - 106$$

$$y = \lg\left(\sin \frac{\pi}{x}\right) - 107$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x} - 108$$

$$y = \lg[\cos(\lg x)] - 161$$

$$y = (x + |x|) \sqrt{x \sin^2 \pi x} - 162$$

$$y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos(2^x) - 163$$

$$y = \sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x} - 165, 2$$

$$y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 2x} - 165, 3$$

$$y = \frac{x^2}{1+x} - 101$$

$$y = \sqrt{3x - x^2} - 102$$

$$y = (x-2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 103$$

$$y = \log(x^2 - 4) \quad (\text{الف} - 104)$$

$$y = \log(x+2) + \log(x-2) \quad (\text{ب})$$

$$y = \arcsin \frac{2x}{1+x} - 109$$

$$y = \arccos(2 \sin x) - 160$$

$$y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x) - 164$$

$$y = (2x)! - 165$$

$$y = \log_2 \log_3 \log_4 x - 165, 1$$

$$(0 \leq x \leq 2\pi)$$

حوزه وجود و مجموعه مقادیر توابع زیر را تعیین کنید:

$$y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right) - 169$$

$$y = (-1)^x - 170$$

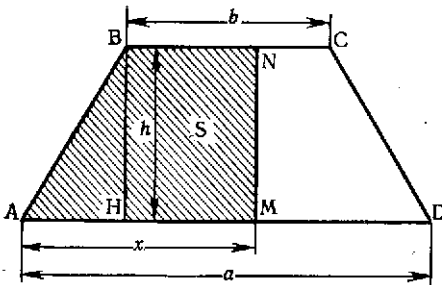
$$y = \sqrt{2 + x - x^2} - 166$$

$$y = \lg(1 - 2 \cos x) - 167$$

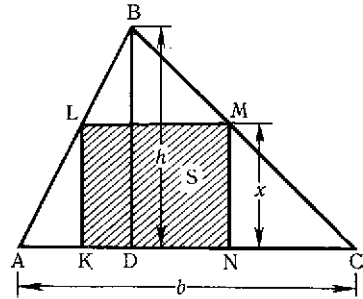
$$y = \arccos \frac{2x}{1+x^2} - 168$$

۱۷۱- در مثلث ABC (شکل ۱) به قاعده $AC = b$ و ارتفاع $BD = h$ محیط بر مستطیل $KLMN$ به ارتفاع $NM = x$ مطلوبست بیان P محیط مستطیل $KLMN$ و مساحت S آن بصورت تابعی از x نمودار توابع $S = S(x)$ ، $P = P(x)$ را رسم کنید.

۱۷۲- در مثلث ABC ضلع $AB = 6$ cm، $AC = 8$ cm و زاویه $BAC = x$ است. ضلع $BC = a$ و مساحت S مثلث ABC را بصورت تابعی از x بیان کنید. نمودار توابع $S = S(x)$ ، $a = a(x)$ را رسم کنید.



شکل ۲



شکل ۱

۱۷۳- در ذوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ (شکل ۲) به قاعده‌های $BC = b$ ، $AD = a$ ($a > b$) و ارتفاع $HB = h$ خط $MN \parallel HB$ فاصله $AM = x$ از رأس A رسم شده است. مساحت S شکل $ABNMA$ را بصورت تابعی از x بیان کنید. نمودار تابع $S = S(x)$ را رسم کنید.

۱۷۴- در قطعه $1 \leq x \leq 2$ از محور Ox جرم برابر ۲ گرم بطور یکنواخت توزیع و در هر یک از نقاط $x = 2$ و $x = 3$ از این محور جرم متمرکز یک گرمی قرار داده شده است. از طریق تحلیل تابع $m = m(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) را که از لحاظ عددی برابر جرم موجود در فاصله $(-\infty, x)$ است بیان نموده و نمودار این تابع را رسم کنید.

۱۷۵- تابع $y = \operatorname{sgn} x$ به ترتیب زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{اگر } x < 0 \\ 0, & \text{اگر } x = 0 \\ 1, & \text{اگر } x > 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم کنید. نشان دهید که:

$$|x| = x \operatorname{sgn} x$$

۱۷۶- تابع $y = |x|$ (قسمت درست عدد x) بدین ترتیب تعریف می‌شود:

اگر $x = n + r$ که در آن n عدد درست و $0 \leq r < 1$ باشد در

اینصورت $|x| = n$. نمودار این تابع را رسم کنید.

۱۷۷- فرض کنیم

$$y = \pi(x) \quad (x \geq 0)$$

معرف تعداد اعداد اولی باشد که از x تجاوز نکند. نمودار این تابع را بازای مقادیر آرگومان $0 \leq x \leq 20$ رسم کنید.

مجموعه E_x بوسیله تابع $y = f(x)$ بر کدام مجموعه E_y تصویر می‌شود اگر:

$$E_x = \{-1 \leq x \leq 2\}, \quad y = x^2 - 178$$

$$E_x = \{10 < x < 1000\}, \quad y = \lg x - 179$$

$$E_x = \{-\infty < x < +\infty\}, \quad y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x - 180$$

$$E_x = \{0 < |x| \leq 1\}, \quad y = \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} - 181$$

$$E_x = \{1 \leq |x| \leq 2\}, \quad y = |x| - 182$$

اگر متغیر x بازه $0 < x < 1$ را طی کند متغیر y در توابع زیر کدام مجموعه را خواهد پیمود:

$$y = \sqrt{x - x^2} - 186$$

$$y = a + (b - a)x - 183$$

$$y = \operatorname{ctg} \pi x - 187$$

$$y = \frac{1}{1-x} - 184$$

$$y = x + [2x] - 188$$

$$y = \frac{x}{2x-1} - 185$$

۱۸۹- مطلوبست محاسبه $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ اگر

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

۱۹۰- مطلوبست محاسبه $f(-۱)$ ، $f(-۰,۰۰۱)$ ، $f(۱۰۰)$ اگر

$$f(x) = \lg x^2$$

۱۹۱- مطلوبست محاسبه $f(۰,۹)$ ، $f(۰,۹۹)$ ، $f(۰,۹۹۹)$ ، $f(۱)$ اگر

$$f(x) = ۱ + [x]$$

۱۹۲- مطلوبست محاسبه $f(-۲)$ ، $f(-۱)$ ، $f(۰)$ ، $f(۱)$ ، $f(۲)$ اگر

$$f(x) = \begin{cases} ۱ + x, & \text{بازای } -\infty < x \leq ۰ \\ ۲^x, & \text{بازای } ۰ < x < +\infty \end{cases}$$

۱۹۳- مطلوبست محاسبه $f(۰)$ ، $f(-x)$ ، $f(x+۱)$ ، $f(x)+۱$ اگر

$$\frac{۱}{f(x)} , f\left(\frac{۱}{x}\right)$$

$$f(x) = \frac{۱-x}{۱+x}$$

۱۹۴- مطلوبست تعیین مقادیر x که بازای آنها: $f(x) = ۰$:

$$(۲) f(x) > ۰ \quad (۳) f(x) < ۰ \quad \text{اگر}$$

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x} \quad (\text{ب} : f(x) = x - x^3 \quad (\text{الف}$$

$$f(x) = (x + |x|)(1 - x) \quad (\text{پ}$$

۱۹۵- مطلوبست محاسبه

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اگر: الف) $f(x) = ax = b$ ؛ ب) $f(x) = x^2$ ؛ پ) $f(x) = a^x$ فرض میکنیم

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

نشان دهید که

$$f(x+۳) - ۳f(x+۲) + ۳f(x+۱) - f(x) \equiv ۰$$

۱۹۷- مطلوبست تعیین تابع خطی صحیح

$$f(x) = ax + b$$

اگر $f(۰) = -۲$ و $f(۳) = ۵$ باشد .

$f(1)$ و $f(2)$ مساوی چیست (انترپولاسیون یا درون‌یابی خطی)؟
 ۱۹۸- مطلوبست تعیین تابع گویای صحیح درجه دوم:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

در صورتیکه

$$f(-2) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 0$$

$f(-1)$ و $f(0,5)$ مساوی چیست (انترپولاسیون کوادراتیک یا درون‌یابی درجه دوم)؟

۱۹۹- مطلوبست تعیین تابع گویای صحیح درجه سوم:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

اگر

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = -3, \quad f(2) = 0$$

۲۰۰- مطلوبست تعیین تابع بصورت

$$f(x) = a + bc^x$$

اگر

$$f(0) = 10, \quad f(2) = 30, \quad f(4) = 90$$

۲۰۱- ثابت کنید اگر برای تابع خطی

$$f(x) = ax + b$$

مقادیر آرگومان $x = x_n (n = 1, 2, \dots)$ تشکیل تصاعد حسابی بدهند در اینصورت مقادیر نظیر تابع $y_n = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ نیز تشکیل تصاعد حسابی میدهند.

۲۰۲- ثابت کنید اگر برای تابع نمائی

$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

مقادیر آرگومان $x = x_n (n = 1, 2, \dots)$ تشکیل تصاعد حسابی بدهند در اینصورت مقادیر نظیر تابع $y_n = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ نیز تشکیل تصاعد هندسی میدهند.

۲۰۳- فرض کنیم تابع $f(u)$ بازای $0 < u < 1$ معین باشد. مطلوبست حوزه تعریف توابع زیر:

$$f\left(\frac{|x|}{x}\right) \quad (\text{الف}) \quad f(\sin x) \quad (\text{ب}) \quad f(\ln x) \quad (\text{پ})$$

۲۰۴- فرض کنیم

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) \quad (a > 0)$$

نشان دهید که

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

۲۰۵- فرض کنیم

$$f(x) + f(y) = f(z)$$

مطلوبست تعیین z اگر :

الف) $f(x) = ax$ ؛ ب) $f(x) = \frac{1}{x}$ ؛

پ) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ($|x| < 1$) ؛ ت) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$

مطلوبست محاسبه $\varphi[\varphi(x)]$ ، $\psi[\psi(x)]$ ، $\varphi[\psi(x)]$ و $\psi[\varphi(x)]$ اگر :

۲۰۶- $\psi(x) = 2^x - x^2$ و $\varphi(x) = x^2$

۲۰۷- $\psi(x) = \frac{1}{x}$ و $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$

۲۰۸- $\psi(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ -x^2 & , x > 0 \end{cases}$ و $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$

۲۰۹- $f[f(x)]$ و $f\{f[f(x)]\}$ محاسبه اگر

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

۲۱۰- فرض کنیم

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_n$$

مطلوبست محاسبه $f_n(x)$ اگر

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

۲۱۱- $f(x)$ محاسبه اگر

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$$

۲۱۲- مطلوبست محاسبه $f(x)$ اگر

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (|x| \geq 2)$$

۲۱۳- مطلوبست محاسبه $f(x)$ اگر

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0)$$

۲۱۳,۱- مطلوبست محاسبه $f(x)$ اگر

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$$

ثابت کنید که توابع زیر در فواصل ذکر شده صعودی یکنوا میباشند:

$$f(x) = x^2 \quad (0 \leq x < +\infty) - 214$$

$$f(x) = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) - 215$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) - 216$$

$$f(x) = 2x + \sin x \quad (-\infty < x < +\infty) - 217$$

ثابت کنید که توابع زیر در فواصل ذکر شده نزولی یکنوا میباشند:

$$f(x) = x^2 \quad (-\infty < x \leq 0) - 218$$

$$f(x) = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi) - 219$$

$$f(x) = \operatorname{ctg} x \quad (0 < x < \pi) - 220$$

۲۲۱- یکنوائی توابع زیر را بررسی کنید:

$$\text{الف) } f(x) = ax + b$$

$$\text{ب) } f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{پ) } f(x) = x^x$$

$$\text{ت) } f(x) = a^x \quad (0 > a) \quad \text{ث) } f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

۲۲۲- آیا از طرفین یک ناساوی میتوان لگاریتم گرفت؟

۲۲۳- فرض کنیم $\varphi(x)$ ، $\psi(x)$ و $f(x)$ سه تابع صعودی یکنوا باشند. اگر

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

باشد ثابت کنید:

$$\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)]$$

تابع $x = \varphi(y)$ که معکوس توابع زیر باشد و حوزه وجود آنرا تعیین کنید:

$$y = 2x + 2 \quad (-\infty < x < +\infty) - 224$$

$$y = x^2 - 225 \quad \text{الف} \quad ; \quad -\infty < x \leq 0 \quad \text{ب} \quad ; \quad x < +\infty$$

$$y = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \neq -1) - 226$$

$$y = \sqrt{1-x^2} - 227 \quad \text{الف} \quad ; \quad -1 \leq x \leq 0 \quad \text{ب} \quad ; \quad x \leq 1$$

$$y = \operatorname{sh} x - 228 \quad \text{که در آن } \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$y = \operatorname{th} x - 229 \quad \text{که در آن } \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$y = \begin{cases} x, & \text{اگر } -\infty < x < 1 \\ x^2, & \text{اگر } 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x, & \text{اگر } 4 < x < +\infty \end{cases} - 230$$

۲۳۱- تابع $f(x)$ معین در بازهٔ متقارن $(-l, l)$ را اگر

$$f(-x) = f(x)$$

باشد زوج و اگر

$$f(-x) = -f(x)$$

باشد فرد مینامند .

تعیین کنید کدامیک از توابع مفروض زیر زوج و کدامیک فردند:

$$\text{الف) } f(x) = 3x - x^3$$

$$\text{ب) } f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$$

$$\text{ت) } f(x) = a^x + a^{-x} \quad (a > 0)$$

$$\text{ث) } f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$\text{پ) } f(x) = \ln(x + \sqrt{2+x^2})$$

۲۳۲- ثابت کنید هر تابع $f(x)$ معین در بازهٔ متقارن $(-l, l)$ را میتوان بصورت مجموع توابع زوج و فرد بیان نمود .

۲۳۳- تابع $f(x)$ معین روی مجموعهٔ E را دوره‌ای نامند هرگاه عدد $T > 0$ (دورهٔ تابع در معنای کلی کلمه) وجود داشته باشد بطوریکه

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{بازای } x \in E$$

تعیین کنید کدامیک از توابع مفروض زیر دوره‌ای هستند و کوچکترین دوره آنها را پیدا کنید:

الف) $f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$ ؛

ب) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$ ؛

پ) $f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ ؛

ت) $f(x) = \sin^2 x$ ؛

ث) $f(x) = \sin x^2$ ؛

ح) $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$ ؛

۲۳۴- ثابت کنید که برای تابع دیریکله

$$\chi(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x \text{ گویا} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ} \end{cases}$$

هر عدد گویا دوره آن است.

۲۳۵- ثابت کنید که مجموع و حاصل ضرب دو تابع دوره‌ای که روی یک مجموعه مشترک معین هستند و دوره‌هایشان دارای مضرب صحیح مشترک است یک تابع دوره‌ای است.

۲۳۵،۱- تابع $f(x)$ را وقتی پادوره‌ای (آنتی پریودیك) نامند که

$$f(x+T) = -f(x) \quad (T > 0)$$

ثابت کنید که تابع $f(x)$ دوره‌ای و دوره آن $2T$ است.

۲۳۶- ثابت کنید که اگر بازای تابع $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ تساوی

$$f(x+T) = kf(x)$$

برقرار باشد که در آن k و T ثابتهای مثبتی

میباشند در اینصورت $f(x) = a^x \varphi(x)$ که در آن a مقدار ثابت و $\varphi(x)$ تابع دوره‌ای با دوره T است.

بخش ۴ - نمایش ترسیمی تابع

بند ۱- برای رسم نمودار تابع $y = f(x)$ بترتیب زیر عمل می‌شود:

۱) حوزه وجود تابع $X = \{x\}$ را تعیین میکنند؛ (۲) تعداد مکفی از مقادیر

آرگومان x_1, x_2, \dots, x_n را اختیار و جدول مقادیر نظیر تابع را

تشکیل میدهند ($y_i = f(x_i)$ ؛ ۳) دستگاه نقاط $M_i(x_i, y_i)$

$(i = 1, 2, \dots, n)$ را در صفحه مختصات Oxy مشخص ساخته و آنها را با خطی بهم می‌پیوندند بطوریکه وضع نقاط بیناسینی را معلوم سازد.

بند ۲- برای آنکه نمودار صحیحی از تابع بدست آید باید ویژگی‌های کلی تابع را بررسی نمود. ابتدا لازم است: (۱) حل معادله $f(x) = 0$ و تعیین نقاط تقاطع نمودار تابع با محور Ox (صفرهای تابع)؛ (۲) تعیین حدود تغییر آرگومان برای مقادیر مثبت و منفی تابع؛ (۳) در صورت امکان، تعیین فواصل یک نوائی (صعود یا نزول) تابع؛ (۴) بررسی رفتار تابع بازای نزدیکی بی‌نهایت زیاد آرگومان به نقاط مرزی حوزه وجود تابع.

در این بند فرض میشود که ویژگی‌های تابع‌های ساده ابتدایی: درجه‌ای، نمائی، مثلثاتی و غیره برای خوانندگان معلوم است.

با استفاده از این ویژگی‌ها بدون انجام محاسبات زیاد، میتوان طرح نمودار بسیاری از توابع را رسم نمود. سایر نمودارها گاهی به ترکیب (جمع و ضرب و غیره...) این نمودارهای ساده منجر می‌شود.

۲۳۸- مطلوبست رسم نمودار تابع خطی همگن

$$y = ax$$

بازای ۱، ۲، ۳، $\frac{1}{4}$ ، ۰، $a =$

۲۳۸- مطلوبست رسم نمودار تابع خطی

$$y = x + b$$

بازای ۱، ۲، ۳، ۰، $b =$

۲۳۹- مطلوبست رسم نمودار توابع خطی:

$$y = 2x + 3 \text{ (الف) ؛ } y = 2 - 0.1x \text{ (ب) ؛ } y = -\frac{x}{4} - 1 \text{ (پ)}$$

۲۴۰- ضریب انبساط طولی حرارتی آهن $a = 1.2 \times 10^{-6}$. در مقیاس مناسبی نمودار تابع

$$l = f(T) \quad (-40^\circ \leq T \leq 100^\circ)$$

را رسم کنید که در آن T درجه حرارت و l طول میله آهنی بازای T درجه حرارت است در صورتیکه بازای $T = 0^\circ$ ، داشته باشیم $l = 100 \text{ cm}$

۲۴۱- روی محور عددی دو نقطه مادی حرکت میکنند. متحرک اول در مبدأ زمان $t = 0$ در 20 متری سمت چپ مبدأ مختصات قرار دارد و دارای سرعت $v_1 = 10 \text{ m/sec}$ و دومی بازای $t = 0$ در 30 متری سمت راست نقطه O قرار دارد و دارای سرعت $v_2 = -20 \text{ m/sec}$

میشود. نمودار معادلات حرکت این دو متحرک را رسم نمایید و زمان و محل ملاقات آنها را پیدا کنید.

۲۴۲- نمودار توابع گویای درست درجه دوم (سهمی ها) زیر را رسم کنید:

الف) $y = ax^2$ بازای $a = 1, \frac{1}{2}, 2, -1$

ب) $y = (x - x_0)^2$ بازای $x_0 = 0, 1, 2, -1$

پ) $y = x^2 + c$ بازای $c = 0, 1, 2, -1$

۲۴۳- نمودار سه جمله ای درجه دوم

$$y = ax^2 + bc + c$$

را با در آوردن آن بصورت زیر رسم کنید.

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2$$

مسئله های زیر را در نظر بگیرید:

پ) $y = -x^2 + 2x - 1$

الف) $y = 8x - 2x^2$

ت) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

ب) $y = x^2 - 3x + 2$

۲۴۴- یک نقطه مادی تحت زاویه $\alpha = 45^\circ$ نسبت به صفحه افق با سرعت اولیه $v_0 = 600 \text{ m/sec}$ پرتاب شده است. نمودار مسیر حرکت آنرا رسم کنید و نقطه اوج و برد پرواز آنرا بدست آورید. (بطور تقریب $g \approx 10 \text{ m/sec}^2$ بگیرید و از مقاومت هوا صرف نظر کنید).

نمودار توابع گویای درست بالاتر از درجه دوم زیر را رسم کنید:

۲۴۵- $y = x^3 + 1$

۲۴۶- $y = (1 - x^2)(2 + x)$

۲۴۷- $y = x^2 - x^4$

۲۴۸- $y = x(a - x)^2(a + x)^3$ ($a > 0$)

نمودار توابع کسری - خطی (هندلوی ها) زیر را رسم کنید:

۲۵۰- $y = \frac{1-x}{1+x}$

۲۴۹- $y = \frac{1}{x}$

۲۵۱- نمودار تابع کسری - خطی

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ab - bc \neq 0, c \neq 0)$$

را با درآوردن آن بصورت

$$y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}$$

رسم کنید.

مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$y = \frac{3x + 2}{2x - 3}$$

۲۵۲ - گازی تحت فشار $p_0 = 1 \text{ atm}$ حجم $v = 12 \text{ m}^3$ را اشغال میکند
مطلوبست رسم نمودار تغییرات حجم v گاز بعنوان تابعی از فشار p
در صورتیکه درجه حرارت گاز ثابت باشد (قانون بویل - ماریوت).

مطلوبست رسم نمودار توابع گویای کسری زیر:

$$y = x + \frac{1}{x} - 253 \quad (\text{هذلولی})$$

$$y = x^2 + \frac{1}{x} - 254 \quad (\text{سه دندانه‌ای نیوتن})$$

$$y = \frac{x}{1 - x^2} - 259$$

$$y = x + \frac{1}{x^2} - 255$$

$$y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - 260 \quad (y = \frac{1}{1+x^2} - 256) \quad (\text{متحنی آبیزی})$$

$$y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1-x} - 261 \quad (y = \frac{2x}{1+x^2} - 257) \quad (\text{سرپانتین نیوتن})$$

$$y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} - 262$$

$$y = \frac{1}{1-x^2} - 258$$

۲۶۳ - طرح نمودار تابع

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x + b_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

را با درآوردن آن بصورت

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0}$$

رسم کنید.

مثال زیر را در نظر بگیرید

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$$

۲۶۴- مطلوبست رسم نمودار قدر مطلق نیروی جاذبه F یک نقطه مادی که در فاصله x از مرکز جذب قرار دارد در صورتیکه بازای $x = 1m$ ، $F = 10 \text{ kg}$ (قانون نیوتن).

۲۶۵- طبق قانون وان در والس بین حجم v یک گاز حقیقی و فشار p آن در دمای ثابت رابطه

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = c$$

برقرار است. مطلوبست رسم نمودار تابع $p = p(v)$ بازای $a = 2$ ، $b = 0.1$ ،

$$c = 10.$$

مطلوبست رسم نمودار توابع گنگ زیر:

$$y = \pm \sqrt{-x - 2} \quad \text{— ۲۶۶ (سهمی)}$$

$$y = \pm x \sqrt{x} \quad \text{— ۲۶۷ (سهمی نیل)}$$

$$y = \pm \frac{1}{4} \sqrt{100 - x^2} \quad \text{— ۲۶۸ (بیضی)}$$

$$y = \pm \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{— ۲۶۹ (هذلولی)}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{— ۲۷۰}$$

$$y = \pm x \sqrt{100 - x^2} \quad \text{— ۲۷۱}$$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{10-x}} \quad \text{— ۲۷۲ (سیسویید)}$$

$$y = \pm \sqrt{(x^2 - 1)(9 - x^2)} \quad \text{— ۲۷۳}$$

۲۷۴- مطلوبست رسم نمودار تابع درجه‌ای

$$y = x^n$$

بازای: الف) $n = 1, 3, 5$ ؛ ب) $n = 2, 4, 6$

۲۷۵- مطلوبست رسم نمودار تابع درجه‌ای

$$y = x^n$$

بازای: الف) $n = -1, -3$ ؛ ب) $n = -2, -4$

۲۷۶ - مطلوبست رسم نمودار رادیکال

$$y = \sqrt[m]{x}$$

بازای: الف) ۴، ۲، $m=۲$ ؛ ب) ۵، ۳، $m=۳$ ؛
۲۷۷ - مطلوبست رسم نمودار رادیکال

$$y = \sqrt[k]{x^m}$$

اگر:

- | | | | |
|----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| الف) $k=۱$ ، $m=۲$ ؛ | ب) $k=۳$ ، $m=۲$ ؛ | ج) $k=۲$ ، $m=۴$ ؛ | د) $k=۳$ ، $m=۴$ ؛ |
| ب) $k=۳$ ، $m=۲$ ؛ | پ) $k=۱$ ، $m=۳$ ؛ | ت) $k=۲$ ، $m=۳$ ؛ | |

۲۷۸ - مطلوبست رسم نمودار تابع نمایی

$$y = a^x$$

بازای ۱۰، e ، ۲، ۱، $\frac{1}{۲}$ ، $a =$

۲۷۹ - مطلوبست رسم نمودار تابع نمایی مرکب

$$y = e^{y_1}$$

اگر:

- | | | | |
|--------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| الف) $y_1 = x^2$ ؛ | ب) $y_1 = -x^2$ ؛ | پ) $y_1 = \frac{1}{x}$ ؛ | ت) $y_1 = \frac{1}{x^2}$ ؛ |
| ب) $y_1 = -x^2$ ؛ | پ) $y_1 = \frac{1}{x}$ ؛ | ت) $y_1 = \frac{1}{x^2}$ ؛ | |

۲۸۰ - مطلوبست رسم نمودار تابع لگاریتمی

$$y = \log_a x$$

بازای ۱۰، e ، ۲، $\frac{1}{۲}$ ، $a =$

۲۸۱ - مطلوبست رسم نمودار توابع:

الف) $y = \ln(-x)$ ؛ ب) $y = -\ln x$ ؛

۲۸۲ - مطلوبست رسم نمودار تابع لگاریتمی مرکب

$$y = \ln y_1$$

اگر:

الف) $y_1 = 1 + x^2$ ؛

ب) $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ ؛

پ) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$ ؛

ت) $y_1 = \frac{1}{x^2}$ ؛

ث) $y_1 = 1 + e^x$.

۲۸۳ - مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \log_x 2$$

۲۸۴ - مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = A \sin x$$

بازای $A = 1, 10, -2$

۲۸۵ - مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \sin(x - x_0)$$

اگر $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$

۲۸۶ - مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \sin nx$$

اگر $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

۲۸۷ - مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = a \cos x + b \sin x$$

با در آوردن آن بصورت:

$$y = A \sin(x - x_0)$$

مثال $y = 6 \cos x + 8 \sin x$ را در نظر بگیرید.

نمودار توابع مثلثاتی زیر را رسم کنید :

$$\begin{array}{ll}
 y = \sin^2 x - 293 & y = \cos x - 288 \\
 y = \sin^3 x - 294 & y = \operatorname{tg} x - 289 \\
 y = \operatorname{ctg}^2 x - 295 & y = \operatorname{ctg} x - 290 \\
 y = \sin x \times \sin 2x - 296 & y = \sec x - 291 \\
 y = \pm \sqrt{\cos x} - 297 & y = \csc x - 292
 \end{array}$$

نمودار توابع زیر را رسم کنید :

$$\begin{array}{ll}
 y = \pm \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\pi}{x} - 303 & y = \sin x^2 - 298 \\
 y = \frac{\sin x}{x} - 304 & y = \sin \frac{1}{x} - 299 \\
 y = e^x \cos x - 305 & y = \cos \frac{\pi}{x} - 300 \\
 y = \pm 2^{-x} \sqrt{\sin \pi x} - 306 & y = \sin x \times \sin \frac{1}{x} - 300,1 \\
 y = \frac{\cos x}{1+x^2} - 307 & y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{x} - 301 \\
 y = \ln(\cos x) - 308 & y = \sec \frac{1}{x} - 301,1 \\
 y = \cos(\ln x) - 309 & y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) - 302 \\
 y = e^{\frac{1}{\sin x}} - 310 &
 \end{array}$$

نمودار توابع مستدیر معکوس زیر را رسم کنید :

$$\begin{array}{ll}
 y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{x} - 317 & y = \operatorname{arc} \sin x - 311 \\
 y = \operatorname{arc} \sin(\sin x) - 318 & y = \operatorname{arc} \cos x - 312 \\
 y = \operatorname{arc} \sin(\cos x) - 319 & y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 313 \\
 y = \operatorname{arc} \cos(\cos x) - 320 & y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x - 314 \\
 y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - 321 & y = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{x} - 315 \\
 y = \operatorname{arc} \sin(2 \sin x) - 322 & y = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{x} - 316
 \end{array}$$

323 - مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \operatorname{arc} \sin y_1$$

در صورتیکه :

$$\text{پ) } y_1 = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\text{ت) } y_1 = e^x$$

$$\text{الف) } y_1 = 1 - \frac{x}{2}$$

$$\text{ب) } y_1 = \frac{2x}{1+x^2}$$

۳۲۴ - مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \arctg y_1$$

اگر :

$$\text{پ) } y_1 = \ln x$$

$$\text{ت) } y_1 = \frac{1}{\sin x}$$

$$\text{الف) } y_1 = x^2$$

$$\text{ب) } y_1 = \frac{1}{x^2}$$

۳۲۴,۱ - مطلوبست رسم نمودار توابع زیر :

$$\text{ج) } y = \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{1+x^2}$$

$$\text{چ) } y = \frac{1}{1-2\sqrt{1-x}}$$

$$\text{ح) } y = \lg(x^2 - 2x + 2)$$

$$\text{خ) } y = \arcsin\left(\frac{3}{2} - \sin x\right)$$

$$\text{د) } y = \arctg\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$$

$$\text{ذ) } y = \log_{\cos x} \sin x$$

$$\text{ر) } y = (\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$$

۳۲۵ - از روی نمودار تابع $y = f(x)$ مطلوبست رسم نمودار توابع زیر :

$$\text{پ) } y = -f(-x)$$

۳۲۶ - از روی نمودار تابع $y = f(x)$ مطلوبست رسم نمودار توابع زید

$$\text{پ) } y = f(2x)$$

$$\text{ت) } y = f(kx + b) \quad (k \neq 0)$$

$$\text{الف) } y = -f(x)$$

$$\text{ب) } y = f(-x)$$

$$\text{الف) } y = f(x-x_0)$$

$$\text{ب) } y = y_0 + f(x-x_0)$$

۳۲۶,۱ - فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ \cdot & |x| > 1 \end{cases}$$

مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \frac{1}{\sqrt{t}} [f(x-t) + f(x+t)]$$

بازای $t=0$ ، $t=1$ و $t=2$.

۳۲۷- مطلوبست رسم نمودار توابع زید:

الف) $y = 2 + \sqrt{1-x}$ ؛ $y = -\arcsin(1+x)$ (ت)
 ب) $y = 1 - e^{-x}$ ؛ $y = 2 + 2 \cos 2x$ (ث)

پ) $y = \ln(1+x)$

۳۲۸- از روی نمودار تابع $y = f(x)$ مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = [f(x)]$ ؛ ب) $y = \frac{1}{\sqrt{t}} (|f(x)| + f(x))$ ؛

پ) $y = \frac{1}{\sqrt{t}} (|f(x)| - f(x))$

۳۲۹- از روی نمودار تابع $y = f(x)$ مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = f^2(x)$ ؛ $y = f(f(x))$ (ت)
 ب) $y = \sqrt{f(x)}$ ؛ $y = \operatorname{sgn} f(x)$ (ث)
 پ) $y = \ln f(x)$ ؛ $y = [f(x)]$ (ج)

۳۲۹،۱- فرض کنیم

$$f(x) = (x-a)(b-x) \quad (a < b)$$

مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = f(x)$ ؛ $y = \sqrt{f(x)}$ (ت)
 ب) $y = f^2(x)$ ؛ $y = e^{f(x)}$ (ث)
 پ) $y = \frac{1}{f(x)}$ ؛ $y = \lg f(x)$ (ج)
 چ) $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} f(x)$

۳۲۹،۲- مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = \arcsin[\sin f(x)]$ ؛ $y = \arccos[\cos f(x)]$ (ت)
 ب) $y = \arcsin[\cos f(x)]$ ؛ $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}[\operatorname{tg} f(x)]$ (ث)
 پ) $y = \arccos[\sin f(x)]$ ؛

اگر: (۱) $f(x) = x^2$ ؛ (۲) $f(x) = x^3$

۳۳۰- از روی نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = f(x) + g(x)$ ؛ $y = f(g(x))$ (پ)
 ب) $y = f(x)g(x)$ ؛

با استفاده از روش ترکیب نمودارها مطلوبست رسم نمودار توابع زیر :

$$y = x + \sin x - ۳۳۳$$

$$y = ۱ + x + e^x - ۳۳۱$$

$$y = x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - ۳۳۴$$

$$y = (x+1)^{-۲} + (x-1)^{-۲} - ۳۳۲$$

$$y = \cos x + \frac{1}{۲} \cos ۲x + \frac{1}{۳} \cos ۳x - ۳۳۵$$

$$y = \sin x - \frac{1}{۳} \sin ۳x + \frac{1}{۵} \sin ۵x - ۳۳۶$$

$$y = |۱-x| + |۱+x| - ۳۳۸$$

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x - ۳۳۷$$

$$y = |۱-x| - |۱+x| - ۳۳۹$$

۳۴۰ - مطلوبست رسم نمودار توابع هذا لولی :

الف) $y = \operatorname{ch} x$ که در آن $\operatorname{ch} x = \frac{1}{۲} (e^x + e^{-x})$ ؛

ب) $y = \operatorname{sh} x$ که در آن $\operatorname{sh} x = \frac{1}{۲} (e^x - e^{-x})$ ؛

پ) $y = \operatorname{th} x$ که در آن $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ ؛

با استفاده از روش ضرب نمودارها مطلوبست رسم نمودار توابع زیر :

$$y = e^{-x^2} \cos x - ۳۴۵$$

$$y = x \sin x - ۳۴۱$$

$$y = x \operatorname{sgn}(\sin x) - ۳۴۶$$

$$y = x \cos x - ۳۴۲$$

$$y = [x] |\sin \pi x| - ۳۴۷$$

$$y = x^2 \sin^2 x - ۳۴۳$$

$$y = \cos x \times \operatorname{sgn}(\sin x) - ۳۴۸$$

$$y = \frac{\sin x}{1+x^2} - ۳۴۴$$

۳۴۹ - فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{اگر } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{اگر } |x| > 1 \end{cases}$$

مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = f(x) f(a-x)$$

اگر :

الف) $a = 0$ ؛ ب) $a = ۱$ ؛ پ) $a = ۲$.

۳۵۰ - مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = x + \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$$

مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

اگر:

$$f(x) = \ln x - 354$$

$$f(x) = x^2(1-x^2) - 351$$

$$f(x) = e^x \sin x - 355$$

$$f(x) = x(1-x)^2 - 352$$

$$f(x) = \sin^2 x - 353$$

356 - مطلوبست رسم نمودار تابع مرکب

$$y = f(u)$$

که در آن $u = 2 \sin x$ اگر:

$$f(u) = \begin{cases} -1, & \text{بازای } -\infty < u < -1 \\ u, & \text{بازای } -1 \leq u \leq 1 \\ 1, & \text{بازای } 1 < u < +\infty \end{cases}$$

357 - فرض کنیم

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \quad \text{و} \quad \psi(x) = \begin{cases} x, & \text{اگر } x < 0 \\ x^2, & \text{اگر } x \geq 0 \end{cases}$$

مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

$$\text{پ) } y = \psi[\varphi(x)]$$

$$\text{الف) } y = \varphi[\varphi(x)]$$

$$\text{ت) } y = \psi[\psi(x)]$$

$$\text{ب) } y = \varphi[\psi(x)]$$

358 - فرض کنیم

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{اگر } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{اگر } |x| > 1 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{اگر } |x| \leq 2 \\ 2, & \text{اگر } |x| > 2 \end{cases}$$

مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

$$\text{پ) } y = \psi[\varphi(x)]$$

$$\text{الف) } y = \varphi[\varphi(x)]$$

$$\text{ت) } y = \psi[\psi(x)]$$

$$\text{ب) } y = \varphi[\psi(x)]$$

359 - تابع $f(x)$ که در حوزه مثبت $x > 0$ معین است در ناحیه منفی $x < 0$ بقسمی ادامه دهید که تابع حاصل (1 زوج؛ 2 فرد) باشد اگر:

$$\text{ت) } f(x) = \sin x$$

$$\text{الف) } f(x) = 1 - x$$

$$\text{ث) } f(x) = e^x$$

$$\text{ب) } f(x) = 2x - x^2$$

$$\text{ج) } f(x) = \ln x$$

$$\text{پ) } f(x) = \sqrt{x}$$

نمودار نظیر توابع را رسم کنید .

۳۶۰- تعیین کنید که نمودار توابع زیر نسبت بکدام محور قائم متقارن میباشند :

الف) $y = ax^2 + bx + c$ ؛

ب) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$ ؛

پ) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x}$ ($0 < a < b$) ؛

ت) $y = a + b \cos x$ ؛

۳۶۱- تعیین کنید که نمودار توابع زیر نسبت بکدام مرکز متقارن میباشند :

الف) $y = ax + b$ ؛

ب) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ؛

پ) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ؛

ت) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$ ؛

ث) $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$.

۳۶۲- مطلوبست رسم نمودار توابع دوره‌ای زیر :

الف) $y = |\sin x|$ ؛ ب) $y = \operatorname{sgn} \cos x$ ؛ پ) $y = f(x)$ ،

که در آن $f(x) = A \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l} \right)$ اگر $0 \leq x \leq 2l$ و $f(x+2l) \equiv f(x)$ ؛

ت) $y = [x] - 2 \left[\frac{x}{2} \right]$ ؛

ث) $y = (x)$ که در آن (x) فاصله از عدد x تا نزدیکترین عدد درست

است .

۳۶۳- ثابت کنید که اگر نمودار تابع $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) نسبت بدو محور قائم $x = a$ و $x = b$ ($b > a$) متقارن باشد $f(x)$ تابع دوره‌ای است .

۳۶۴- ثابت کنید که اگر نمودار تابع $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) نسبت بدو نقطه $A(a, y_1)$ و $B(b, y_2)$ ($b > a$) متقارن باشد در اینصورت تابع $f(x)$ مجموع یک تابع خطی و یک تابع دوره‌ای می‌باشد .
 بخصوص اگر $y_1 = y_2$ باشد تابع $f(x)$ دوره‌ای است .

۳۶۵ - ثابت کنید که اگر نمودار تابع $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) نسبت به نقطه $A(a, y_0)$ و خط $x = b$ ($b \neq a$) متقارن باشد در این صورت تابع $f(x)$ دوره‌ای است.

۳۶۶ - مطلوبست رسم نمودار تابع $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) اگر $f(x+1) = 2f(x)$ و $f(x) = x(1-x)$ برای $0 \leq x \leq 1$.

۳۶۷ - مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

اگر:

$$0 \leq x \leq \pi \quad \text{بازای} \quad f(x) = 0 \quad \text{و} \quad f(x + \pi) = f(x) + \sin x$$

۳۶۸ - مطلوبست رسم نمودار تابع $y = y(x)$ اگر:

$$\text{الف) } x = y - y^3 \quad \text{پ) } x = y - \ln y$$

$$\text{ب) } x = \frac{1-y}{1+y^2} \quad \text{ت) } x^2 = \sin y$$

۳۶۹ - مطلوبست رسم نمودار توابع زیر که بصورت پارامتری داده شده‌اند:

$$\text{الف) } x = 1 - t, \quad y = 1 - t^2$$

$$\text{ب) } x = t + \frac{1}{t}, \quad y = t + \frac{1}{t^2}$$

$$\text{پ) } x = 10 \cos t, \quad y = \sin t \quad (\text{بیضی})$$

$$\text{ت) } x = \text{cht}, \quad y = \text{sh} t \quad (\text{هذلولی})$$

$$\text{ث) } x = 5 \cos^2 t, \quad y = 3 \sin^2 t$$

$$\text{ج) } x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t) \quad (\text{سیکلوئید})$$

$$\text{چ) } x = \sqrt[t+1]{t}, \quad y = \sqrt[t+1]{t+1} \quad (t > 0)$$

۳۷۰ - مطلوبست رسم نمودار توابع ضمنی زیر:

$$\text{الف) } x^2 - xy + y^2 = 1 \quad (\text{بیضی})$$

$$\text{ب) } x^3 + y^3 - 3xy = 0 \quad (\text{برگ دکارت})$$

$$\text{پ) } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad (\text{سه‌می})$$

$$\text{ت) } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4 \quad (\text{آستروئید})$$

$$\text{ث) } \sin x = \sin y \quad (\text{ج) } x^y = y^x \quad (y > 0, x > 0)$$

$$\text{ح) } \cos(\pi x^2) = \cos(\pi y) \quad \text{ح) } x - |x| = y - |y|$$

۳۷۰،۱ - مطلوبست رسم نمودار توابع ضمنی زیر:

الف) $\min(x, y) = 1$ ؛ ب) $\max(|x|, |y|) = 1$ ؛

ب) $\max(x, y) = 1$ ؛ ت) $\min(x^2, y) = 1$.

۳۷۱ - مطلوبست رسم نمودار تابع $r = r(\varphi)$ در دستگاه مختصات قطبی
اگر: (r, φ)

الف) $r = \varphi$ (حلزونی ارشمیدس) ؛

ب) $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (حلزونی هذلولی) ؛

پ) $r = \frac{\varphi}{\varphi + 1}$ ($0 \leq \varphi < +\infty$) ؛

ت) $r = 2\sqrt[3]{\pi}$ (حلزونی لگاریتمی) ؛

ث) $r = 2(1 + \cos \varphi)$ (کاردیوئید) ؛

ج) $r = 10 \sin 3\varphi$ (سه برگ) ؛

چ) $r^2 = 36 \cos 2\varphi$ (لمنيسكات برنولی) ؛

ح) $\varphi = \frac{r}{r-1}$ ($r > 1$) ؛

خ) $\varphi = 2\pi \sin r$

۳۷۱،۱ - در مختصات قطبی r, φ نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) $\varphi = 4r - r^2$ ؛ ب) $r^2 + \varphi^2 = 100$.

ب) $\varphi = \frac{12x}{1+r^2}$ ؛

۳۷۱،۲ - در مختصات قطبی r, φ نمودار توابع پارامتری (پاراستر $t \geq 0$)
زیر را رسم کنید:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 1 - 2^{-t} \sin \frac{\pi t}{2} \\ r &= 1 - 2^{-t} \cos \frac{\pi t}{2} \end{aligned} \right\} \text{ (ب)}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= t \cos^2 t \\ r &= t \sin^2 t \end{aligned} \right\} \text{ (الف)}$$

۳۷۲ - معادله

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

را با رسم نمودار تابع $y = x^3 - 3x + 1$ بطور تقریبی حل کنید .

معادلات زیر را با روش ترسیمی حل کنید:

$x = 2^{-x} - 375$

$x^3 - 4x - 1 = 0 - 373$

$\lg x = 0,1x - 376$

$x^4 - 4x + 1 = 0 - 374$

$$1.0^x = x^2 - 377$$

$$\operatorname{tg} x = x \quad (0 \leq x \leq \pi) - 378$$

دستگاه معادلات زیر را از راه ترسیمی حل کنید:

$$16x^2 + y = 4, \quad x + y^2 = 1 - 379$$

$$y = 1.0(x^2 - x - 2), \quad x^2 + y^2 = 1.00 - 380$$

بخش ۵ - حد تابع

بند ۱ - تابع کراندار. تابع $f(x)$ را در فاصله مفروض (a, b) وقتی کراندار نامند که اعدادی مانند m و M وجود داشته باشند بقسمی که بازای $x \in (a, b)$

$$m \leq f(x) \leq M$$

عدد $m. = \inf_{x \in (a, b)} \{f(x)\} = \max m$ را کران پایین تابع $f(x)$ و عدد

$M. = \sup_{x \in (a, b)} \{f(x)\} = \min M$ را کران بالای تابع $f(x)$ در فاصله مفروض

(a, b) مینامند. تفاضل $M. - m.$ به نوسان $f(x)$ در فاصله (a, b) موسوم است.

بند ۲ - حد تابع در یک نقطه. هرگاه تابع $f(x)$ روی مجموعه $X = \{x\}$ دارای

نقطه تجمع a معین باشد. نگارش

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

بدان معنا است که بازای هر عدد $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ وجود

دارد بقسمی که بازای جمیع x هایی که بازای آنها $f(x)$ دارای معنا و نامساوی

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

صادق است.

برای وجود حد تابع (۱) لازم و کافی است که بازای هر دنباله $x_n \rightarrow a,$

$x_n \neq a (x_n \in X; n = 1, 2, \dots)$ تساوی زیر برقرار باشد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

دو حد مهم زیر وجود دارد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (1)$$

معیار کوشی. حد تابع $f(x)$ در نقطه a فقط و فقط وقتی وجود دارد که بازای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ پیدا شود بقسمی که

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

بمجرد اینکه $\delta > 0$ و $|x' - a| < \delta$ و $|x'' - a| < \delta$ که در آن x' و x'' نقاط دلخواهی از حوزه تعریف $f(x)$ میباشند.

بند ۳ - حدود یک سو. عدد A' را حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه a نامند:

$$A' = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$$

اگر

$$|A' - f(x)| < \varepsilon \quad \text{بازای} \quad 0 < a - x < \delta(\varepsilon)$$

بطریق مشابه عدد A'' را حد راست تابع $f(x)$ در نقطه a نامند:

$$A'' = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$$

اگر

$$|A'' - f(x)| < \varepsilon \quad \text{بازای} \quad 0 < x - a < \delta(\varepsilon)$$

برای وجود حد تابع $f(x)$ در نقطه a لازم و کافی است که

$$f(a-0) = f(a+0)$$

بند ۴ - حد نامتناهی. نگارش قرار دادی

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

بدین معناست که بازای هر $E > 0$ نامساوی زیر برقرار است:

$$|f(x)| > E \quad \text{فقط اگر} \quad 0 < |x - a| < \delta(E)$$

بند ۵ - حد جز. اگر بازای دنباله نامشخص $x_n \rightarrow a$ ($x_n \neq a$) تساوی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$$

برقرار باشد در این صورت عدد B (یا نماد ∞) را حد جز (متناهی یا نامتناهی) تابع $f(x)$ در نقطه a نامند.

کوچکترین و بزرگترین این حدود جز را بترتیب (از چپ به راست) با

$$\lim_{x \rightarrow a} \underline{f(x)} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} \overline{f(x)}$$

نمایش میدهند و بترتیب حد پائین و حد بالای تابع $f(x)$ در نقطه a نامیده می‌شوند.

برای وجود حد (متناهی یا نامتناهی) تابع $f(x)$ در نقطه a لازم و کافی است که

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$$

۳۸۱- نشان دهید که تابع تعریف شده با شرایط

$$f(x) = n \quad \text{اگر} \quad x = \frac{m}{n}$$

که در آن n, m اعداد صحیح نسبت بهم اول میباشند و $n > 0$ و

$$f(x) = 0 \quad \text{اگر} \quad x \text{ گنگ باشد}$$

متناهی است ولی در هر نقطه x کراندار نیست (یعنی در همسایگی دلخواه این نقطه کراندار نیست).

۳۸۲- اگر تابع $f(x)$ معین و بطور موضعی در هر نقطه از: الف) بازه‌ای،

ب) قطعه‌ای کراندار باشد در اینصورت آیا این تابع بترتیب در بازه یا

قطعه مفروض کراندار است؟

مثالهای نظیر بیاورید.

۳۸۳- نشان دهید که تابع

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

در بازه $-\infty < x < +\infty$ کراندار است.

۳۸۴- نشان دهید که تابع

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

در همسایگی دلخواه نقطه $x = 0$ کراندار نیست ولی بازای $x \rightarrow 0$ بی‌نهایت بزرگ نمی‌باشد.

۳۸۵- کراندار بودن تابع

$$f(x) = \ln x \sin^2 \frac{\pi}{x}$$

را در بازه $0 < x < 8$ بررسی کنید.

۳۸۶ - نشان دهید که تابع

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

در حوزه $0 \leq x < +\infty$ دارای کران پائین $m = 0$ و کران بالای $M = 1$ است.

۳۸۷ - تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ معین و بطور یکنوا صعودی است. کران بالا و پائین آن روی این قطعه چقدر است؟

کران بالا و پائین توابع زیر را تعیین کنید:

۳۸۸ - $f(x) = x^2$ روی $(-2, 0)$

۳۸۹ - $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ روی $(-\infty, +\infty)$

۳۹۰ - $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ روی $(0, +\infty)$

۳۹۱ - $f(x) = x + \frac{1}{x}$ روی $(0, +\infty)$

۳۹۲ - $f(x) = \sin x$ روی $(0, +\infty)$

۳۹۳ - $f(x) = \sin x + \cos x$ روی $[0, 2\pi]$

۳۹۴ - $f(x) = 2^x$ روی $(-1, 2)$

۳۹۵ - $f(x) = [x]$ (الف) روی $(0, 2)$ و (ب) روی $[0, 2]$

۳۹۶ - $f(x) = x - [x]$ روی $[0, 1]$

۳۹۷ - نوسان تابع

$$f(x) = x^2$$

را روی بازه‌های:

(پ) $(1, 99; 2, 01)$ ؟

(ت) $(1, 999; 2, 001)$

(الف) $(1, 3)$ ؟

(ب) $(1, 9; 2, 1)$ ؟

بدست آورید.

۳۹۸ - نوسان تابع

$$f(x) = \arctg \frac{1}{x}$$

را روی بازه‌های:

(پ) $(-0, 01; 0, 01)$ ؟

(ت) $(-0, 001; 0, 001)$

(الف) $(-1, 1)$ ؟

(ب) $(-0, 1; 0, 1)$ ؟

تعیین کنید.

۳۹۹- فرض کنیم $m[f]$ و $M(f)$ بترتیب کران پایین و بالای تابع $f(x)$ روی فاصله (a, b) باشد.

ثابت کنید اگر $f_1(x)$ و $f_2(x)$ توابع معین روی (a, b) باشند در اینصورت

$$m[f_1 + f_2] \geq m[f_1] + m[f_2]$$

و

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2]$$

نمونه‌های توابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را بسازید که بازای آنها در رابطه‌های فوق حالت: الف) تساوی و ب) عدم تساوی برقرار باشد.

۴۰۰- فرض کنیم تابع $f(x)$ روی حوزه $(a, +\infty)$ معین و روی هر قطعه $[a, b]$ کراندار باشد و

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)$$

$$M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)$$

نمودار توابع $y = m(x)$ و $y = M(x)$ را اگر:
الف) $f(x) = \sin x$ و ب) $f(x) = \cos x$ رسم کنید.
۴۰۱- بیاری زبان « $\epsilon - \delta$ » ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

جدول زیر را تکمیل کنید:

ϵ	۰٫۱	۰٫۰۱	۰٫۰۰۱	۰٫۰۰۰۱	...
δ					

۴۰۲- بزبان « $E - \delta$ » ثابت کنید که:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$$

جدول زیر را تکمیل کنید:

E	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...
δ					

۴۰۳ - بیاری نامساویها احکام زیر را فرمول بندی کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ؛ پ) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$

ب) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ ؛

بترتیب مثال بیاورید.

بیاری نامساویها احکام زیر را فرمول بندی کنید و مثال بیاورید:

۴۰۴ - الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ ؛ پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ؛

۴۰۵ - الف) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ؛ ج) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$ ؛

ب) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ؛ ج) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ ؛

پ) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ؛ ح) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$ ؛

ت) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ ؛ خ) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$ ؛

ث) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ ؛

۴۰۶ - الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ؛ ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ؛

ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ؛ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ ؛

پ) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ ؛ ح) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ؛

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ؛ خ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ؛

ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ؛

۴۰۷ - فرض کنیم $y = f(x)$. بیاری نامساویها معنای احکام زیر را فرمول بندی کنید:

الف) $y \rightarrow b-0$ بازای $x \rightarrow a$ ؛

ب) $y \rightarrow b-0$ بازای $x \rightarrow a-0$ ؛

پ) $y \rightarrow b-0$ بازای $x \rightarrow a+0$ ؛

ت) $y \rightarrow b+0$ بازای $x \rightarrow a$ ؛

ث) $y \rightarrow b+0$ بازای $x \rightarrow a-0$ ؛

ج) $y \rightarrow b+0$ بازای $x \rightarrow a+0$ ؛

چ) $y \rightarrow b-0$ بازای $x \rightarrow \infty$ ؛

ح) $y \rightarrow b-0$ بازای $x \rightarrow -\infty$ ؛

- (خ) $x \rightarrow +\infty$ بازای $y \rightarrow b - 0$.
 (د) $x \rightarrow \infty$ بازای $y \rightarrow b + 0$.
 (ذ) $x \rightarrow -\infty$ بازای $y \rightarrow b + 0$.
 (ر) $x \rightarrow +\infty$ بازای $y \rightarrow b + 0$.
 به ترتیب مثال بیاورید.

۴۰۸ - فرض کنیم

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

که در آن $a_i (a_i \neq 0, n \geq 1, i = 0, 1, \dots, n)$ اعداد حقیقی میباشند.
 ثابت کنید که:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |P(x)| = +\infty$$

۴۰۹ - فرض کنیم

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

که در آن $a_i \neq 0$ و $b_i \neq 0$.
 ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{اگر } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{اگر } n = m \\ 0, & \text{اگر } n < m \end{cases}$$

۴۱۰ - فرض کنیم

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای‌هایی از x میباشند و

$$P(a) = Q(a) = 0$$

عبارت زیر دارای چه مقادیری میتواند باشد؟

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

مقدار عبارات زیر را تعیین کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \quad (\text{الف} - \text{ع} 11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} - \text{ع} 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^0 - (1+0x)}{x^2 + x^0} - \text{ع} 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} - \text{ع} 14 \quad (\text{م} و \text{n} اعداد طبیعی میباشند)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} - \text{ع} 15$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^2 (3x+2)^3}{(2x+1)^5} - \text{ع} 16$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1) \dots (x^n+1)}{[(nx)^n + 1]^2} - \text{ع} 17$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} - \text{ع} 18$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 2}{x^2 - 4x + 3} - \text{ع} 19$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^0 - 4x + 2} - \text{ع} 20$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^2 - 8x^2 + 16} - \text{ع} 21$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^0 - 2x - 1} - \text{ع} 22$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^2}{(x^3 - 12x + 16)^2} - \text{ع} 23$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} - \text{ع} 24$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} - \text{ع} 25$$

$$- ۴۲۵ \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m \text{ و } n \text{ اعداد طبیعی هستند}).$$

$$- ۴۲۶ \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} \quad (n \text{ عددیست طبیعی})$$

$$- ۴۲۷ \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} \quad (n \text{ عددیست طبیعی})$$

$$- ۴۲۸ \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \quad (n, m \text{ اعداد طبیعی هستند})$$

$$- ۴۲۹ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right]$$

$$- ۴۳۰ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right]$$

را همنامی - مثال ۲ را ببینید .

$$- ۴۳۱ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}$$

$$- ۴۳۲ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right)$$

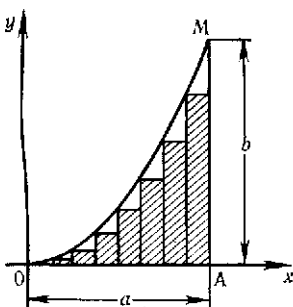
را همنامی - مثال ۳ را ببینید .

$$- ۴۳۳ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n-2)^3}{[1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2)]^2}$$

- ۴۳۴ - مطلوبست تعیین مساحت مثلث منحنی الخط OAM (شکل ۳) محدود به

سهی $y = b \left(\frac{x}{a} \right)^2$ و محور Ox و خط $x = a$ با در نظر گرفتن آن بصورت

حد مجموع مساحت مستطیل‌های محاطی به قاعده $\frac{a}{n}$ که در آن $n \rightarrow \infty$.



شکل ۳

مطلوبست محاسبهٔ حدود زیر:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} - 440$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x-6} + 2}{x^3 + 8} - 441$$

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} - 442$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt{x} - 2} - 443$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} - 444$$

(n عددیست درست)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} - 448$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+20}}{\sqrt{x+9} - 2} - 449$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} - 450$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{2x+1}} - 456$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} - 457$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt{x}} - 458$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 459$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x} - 460$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{8+2x-x^2} - 2}{x+x^2} - 466$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{27+x} - \sqrt{27-x}}{x+2\sqrt{x}} - 467$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\frac{x}{3}} - \sqrt{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}}} - 450$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{\sqrt{1+0x} - (1+x)} - 451$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} - 452$$

(m و n اعداد درستى میباشند)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} - 453$$

(m و n اعداد درستى میباشند)

۴۵۴۹ - هرگاه $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ و m عدد درستی باشد ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}$$

مطلوبست تعیین حدود:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} - 455$$

(m و n اعداد درستی میباشند).

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} \right) - 455,1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} - 456$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x] - 457$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) - 458$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}) - 459$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - \right) - 460$$

$$\sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right) - 461$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right) - 462$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} \left[(x+1)^{\frac{1}{3}} - (x-1)^{\frac{1}{3}} \right] - 463$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} + \sqrt{x}) - 464$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[n]{(x+a_1) \dots (x+a_n)} - x \right] - 465$$

$$(n \text{ عددیست طبیعی}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n} - 466$$

$$(n \text{ عددیست طبیعی}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x} - 467$$

۴۶۸ - رفتار x_1 و x_2 ریشه‌های معادله^{*} درجه^{*} دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را که ضریب $a -$ ی آن بسمت صفر میل میکند و ضرایب b و c مقادیر ثابتی هستند و ضمناً $b \neq 0$ بررسی کنید.

۴۶۹ - مقادیر ثابت a و b را از شرط زیر بدست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

۴۷۰ - مقادیر ثابت a_i و b_i ($i = 1, 2$) را از شرطهای زیر بدست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1 x - b_1) = 0.$$

و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_2 x - b_2) = 0.$$

مطلوبست محاسبه^{*} حدود:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} - 472$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ox}{x} - 471$$

$$(m \text{ و } n \text{ اعداد درستی میباشدند}) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} - 473$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} - 477$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} - 474$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin px - \cos px} - 478$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} - 474, 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - 479$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x - 474, 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} - 480$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} - 475$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ox - \sin 3x}{\sin x} - 476$$

۴۸۱ - مطلوبست اثبات تساویهای زیر :

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a \quad (\text{ب}) \qquad \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \quad \left((n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, a \neq \frac{2n-1}{2} \pi) \right) \quad (\text{پ})$$

مطلوبست محاسبهٔ حدود :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a} - ۴۸۵$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} - ۴۸۲$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a} - ۴۸۶$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} - ۴۸۳$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a} - ۴۸۷$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} - ۴۸۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + \gamma x) - \gamma \sin(a + x) + \sin a}{x^\gamma} - ۴۸۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a + \gamma x) - \gamma \cos(a + x) + \cos a}{x^\gamma} - ۴۸۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a + \gamma x) - \gamma \operatorname{tg}(a + x) + \operatorname{tg} a}{x^\gamma} - ۴۹۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(a + \gamma x) - \gamma \operatorname{ctg}(a + x) + \operatorname{ctg} a}{x^\gamma} - ۴۹۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + x) \sin(a + \gamma x) - \sin^2 a}{x} - ۴۹۲ \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^\gamma} - ۴۹۷$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\gamma}} \frac{\gamma \sin^\gamma x + \sin x - 1}{\gamma \sin^\gamma x + \gamma \sin x + 1} - ۴۹۳$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\xi}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^\gamma x}{\gamma - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^\gamma x} - ۴۹۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos \gamma x \cos \gamma^2 x}{1 - \cos x} - ۴۹۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^\gamma} - ۴۹۹ \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\gamma}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{\gamma}\right)}{1 - \gamma \cos x} - ۴۹۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x^\gamma} - ۵۰۰$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\gamma}} \frac{\operatorname{tg}^\gamma x - \gamma \operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{\gamma}\right)} - ۴۹۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos x}}{\sin^\gamma x} - ۵۰۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})} = 0.7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = 0.7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos \sqrt{x}} \sqrt{\cos \sqrt[3]{x}}}{x^2} = 0.8$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0.0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)^{\sqrt{x}} = 0.7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} \quad (\text{الف} - 0.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}} \right)^{\frac{x^2}{1-x}} = 0.8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin^n \frac{\sqrt{nn}}{\sqrt{n+1}} \right) = 0.4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2} - \sqrt{x} - 1} \right)^{\frac{1}{x}} = 0.7$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left[\text{tg} \left(\frac{\pi}{\lambda} + x \right) \right]^{\text{tg}^{\lambda} x} = 0.10$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = 0.18$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} = 0.11$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 0.10$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - \sqrt{x}} \right)^{\sqrt{x}} = 0.12$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x \quad (a_1 > 0, a_2 > 0) = 0.16$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos \sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{x^2}} = 0.21$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\text{ctg}^2 x} = 0.17$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\text{ctg}^2 \pi x} = 0.18$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\text{tg} x)^{\text{tg}^2 x} = 0.22$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \text{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = 0.19$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\text{tg} x} = 0.22$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \text{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = 0.19, 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]^{\text{ctg} x} = 0.28$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = 0.20$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0 \quad 0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x] = 0 \quad \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0) = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = 0 \quad \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n = 0 \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x] = 0 \quad \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\gamma + e^{\gamma x})}{\ln(\gamma + e^{\gamma x})} = 0 \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^\gamma - x + 1)}{\ln(x^{\gamma+1} + x + 1)} = 0 \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \right)}{\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \right)} = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lg \frac{1 + x^\gamma}{1 + 1 + x^\gamma} \right) = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - \gamma \log x}{h^\gamma} \quad (x > 0) = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \times \gamma^x}{1 + x \times \gamma^x} \right)^{\frac{1}{x^\gamma}} = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + ax \right)}{\sin bx} = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)^{\operatorname{ctg}^\gamma x} = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)} = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^\gamma x^\gamma}}{x + \sqrt{1 - x^\gamma}} \right) = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^\gamma(\pi \times \gamma^x)}{\ln[\cos(\pi \times \gamma^x)]} = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(nx + \sqrt{1 - n^\gamma x^\gamma})}{\ln(x + \sqrt{1 - x^\gamma})} = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0) = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - a^a}{x - a} \quad (a > 0) = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} \quad (a > 0) = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x - a} \quad (a > 0) = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0) = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} \quad (a > 0) - 000$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^x + a(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{x+a+b}} - 001$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) \quad (x > 0) - 002$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x} \right) \quad (x > 0) - 003$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-1 + \sqrt[n]{b}}{a} \right)^n \quad (a > 0, b > 0) - 004$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a > 0, b > 0) - 005$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (c > 0, b > 0, a > 0) - 006$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a+b+c} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (c > 0, b > 0, a > 0) - 007$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (b > 0, a > 0) - 008$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \quad (b > 0, a > 0) - 009$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} \quad (a > 0) - 010$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x)} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)} \quad (\text{الف} - 011)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) - 012$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2 - 013$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (n > 0, a > 1) \text{ ثابت کنید که} - 014$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^6} \quad (e > 0, a > 1) \text{ ثابت کنید که} - 015$$

مطلوبست محاسبه' حدود :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^\gamma + e^x)}{\ln(x^\xi + e^{\gamma x})} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^\gamma + e^x)}{\ln(x^\xi + e^{\gamma x})} \quad (\text{الف} - ۵۶۶)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^\gamma})} - ۵۶۷$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x + \gamma) \ln(x + \gamma) - \gamma(x + 1) \ln(x + 1) + x \ln x] - ۵۶۸$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(x \ln a) \times \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{a}{x}} \right) \right] \quad (a > 1) - ۵۶۹$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^\gamma + 1}}{x + \sqrt{x^\gamma - 1}} \times \ln^{-\gamma} \frac{x + 1}{x - 1} \right) - ۵۷۰$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\gamma e^{\frac{x}{\gamma+1}} - 1 \right) \frac{x^\gamma + 1}{x} - ۵۷۳$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^\gamma} - 1} - ۵۷۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\gamma - x)^{\sec \frac{\pi x}{\gamma}} - ۵۷۴$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^\gamma} - ۵۷۲$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\gamma}} \frac{1 - \sin^{\alpha + \beta} x}{\sqrt[{\gamma}]{(1 - \sin^\alpha x)(1 - \sin^\beta x)}} \quad (\beta > 0, \alpha > 0) - ۵۷۵$$

$$; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch } x - 1}{x^\gamma} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh } x}{x} \quad (\text{الف} - ۵۷۶)$$

$$. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{th } x}{x} \quad (\text{پ}) \quad (\text{مثال } ۳۴۰ \text{ را ببینید}).$$

$$. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh}^\gamma x}{\ln(\text{ch } \gamma x)} - ۵۷۶,۱ \quad (\text{مثال } ۳۴۰ \text{ را ببینید}).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh} \sqrt{x^\gamma + x} - \text{sh} \sqrt{x^\gamma - x}}{\text{ch } x} - ۵۷۷$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{ch } x - \text{ch } a}{x - a} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sh } x - \text{sh } a}{x - a} \quad (\text{الف} - ۵۷۷,۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sin^\gamma x} - e^{\sin x}}{\text{th } x} - ۵۷۹$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \text{ch } x}{\ln \cos x} - ۵۷۷,۲$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\text{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^\gamma} - ۵۸۰$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \text{ch } x) - ۵۷۸$$

$$\lim_{x \rightarrow \gamma} \operatorname{arc tg} \frac{x - \xi}{(x - \gamma)^{\gamma}} = 087$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arc sin} \frac{1 - x}{1 + x} = 081$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arc tg} \frac{x}{\sqrt{1 + x^{\gamma}}} = 084$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc cos} (\sqrt{x^{\gamma} + x} - x) = 087$$

$$\lim \frac{\operatorname{arc tg} (x + h) - \operatorname{arc tg} x}{h} = 080$$

$$\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{\ln \frac{1 + x}{1 - x}}{\operatorname{arc tg} (1 + x) - \operatorname{arc tg} (1 - x)} = 086$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \operatorname{arc tg} \frac{1}{n(x^{\gamma} + 1) + x} \times \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{\xi} + \frac{x}{\gamma n} \right) \right] = 087$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{\xi} - \operatorname{arc tg} \frac{x}{x + 1} \right) = 088$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{\xi} - \operatorname{arc sin} \frac{x}{\sqrt{x^{\gamma} + 1}} \right) = 089$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\operatorname{cosec} (\pi \sqrt{1 + n^{\gamma}})} = 090$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = 092$$

$$\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{1}{x^{\gamma}} e^{-\frac{1}{x^{\gamma}}} = 091$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^{\gamma} + x} - x) \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^{\gamma} + x} - x) \quad (\text{الف} - 093)$$

$$; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 + x + x^{\gamma}} - \sqrt{1 - x + x^{\gamma}}) \quad (\text{الف} - 094)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1 + x + x^{\gamma}} - \sqrt{1 - x + x^{\gamma}}) \quad (\text{ب})$$

094,1 - مطلوبست محاسبه

$$h = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

اگر

$$f(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^{\gamma} + a^{\gamma}}}{x + \sqrt{x^{\gamma} + b^{\gamma}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \operatorname{arc tg} \frac{1}{1 - x} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \operatorname{arc tg} \frac{1}{1 - x} \quad (\text{الف} - 090)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} \quad (\text{الف} - ۵۹۶)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \quad (\text{الف} - ۵۹۷)$$

۵۹۸ - ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1+x} \rightarrow 2 + 0 \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x} \rightarrow 2 - 0 \quad (\text{ب})$$

۵۹۹ - ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -0} 2^x \rightarrow 1 - 0 \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} 2^x \rightarrow 1 + 0 \quad (\text{ب})$$

۶۰۰ - مطلوبست محاسبه $f(1+0)$ ، $f(1-0)$ ، $f(1)$ اگر

$$f(x) = x + |x^2|$$

۶۰۱ - مطلوبست محاسبه $f(n+0)$ ، $f(n-0)$ ، $f(n)$ اگر

$$f(x) = \text{sgn}(\sin \pi x)$$

مطلوبست محاسبه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) - ۶۰۴$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}) - ۶۰۵$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \dots \sin x}_{n \text{ بار}} - ۶۰۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} - ۶۰۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] - ۶۰۳$$

۶۰۷ - اگر $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$ و $\lim_{x \rightarrow A} \psi(x) = B$ ، آیا از این جا نتیجه

می شود که

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(\varphi(x)) = B$$

مثال زیر را در نظر بگیرید: $\varphi(x) = \frac{1}{q}$ بازای $x = \frac{p}{q}$ که در آن p و q دو عدد درست نسبت بهم اول میباشند و $\varphi(x) = 0$ بازای x گنگ؛

$\psi(x) = 1$ بازای $x \neq 0$ و $\psi(x) = 0$ بازای $x = 0$ ؛ ضمناً $x \rightarrow 0$.

۶۰۸ - قضیه کوشی را اثبات کنید: اگر تابع $f(x)$ در بازه $(a, +\infty)$ معین

و در هر بازه متناهی (a, b) کراندار باشد در آن صورت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x+1) - f(x)| \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \geq C > 0) \quad (\text{ب})$$

بفرض آنکه حدهای سمت راست تساویها وجود دارند.

۶۰۹- ثابت کنید که اگر:

(الف) تابع $f(x)$ در حوزه $x > a$ معین باشد؛

(ب) در هر حوزه متناهی $a < x < b$ کراندار باشد؛

(پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x+1) - f(x)| = \infty$ در آنصورت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

۶۱۰- ثابت کنید که اگر: (۱) تابع $f(x)$ در حوزه $x > a$ معین باشد؛

(۲) در هر حوزه متناهی $a < x < b$ کراندار باشد؛ (۳) حد متناهی یا نامتناهی

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l$$

وجود داشته باشد در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}$$

۶۱۱- ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x \quad (\text{ب})$$

۶۱۲- ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(\frac{2\pi}{en}) = 2\pi$$

راهنمایی - از دستور (*) مثال ۷۲ استفاده کنید.

مطلوبست رسم نمودار توابع:

$$y = 1 - x^{100} \quad (\text{الف})$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2n}) \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (\text{ب})$$

$$y = \frac{x^{100}}{1+x^{100}} \quad (x \geq 0) \quad (\text{الف} - ۶۱۴)$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} \quad (x \geq 0) \quad (\text{ب})$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \quad (x \neq 0) - ۶۱۵$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + \frac{1}{n^n}} - ۶۱۶$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} \quad (x \geq 0) - ۶۱۷$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^n}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0) - ۶۱۸$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt[2]{2^{2n} + x^{2n}}} \quad (x \geq 0) - ۶۱۹$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x \quad (\text{ب}) \quad ; \quad y = \sin^{1000} x \quad (\text{الف} - ۶۲۰)$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} \quad (x \geq 0) - ۶۲۱$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^n - ۶۲۲$$

$$y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}} - ۶۲۳$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}} - ۶۲۴$$

$$y = \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{t-x} \ln \frac{t}{x} \quad (x > 0) - ۶۲۵$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \operatorname{tg}^{2n} \frac{\pi x}{2} + \sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n} \frac{\pi x}{2} + 1} \quad (x \geq 0) - ۶۲۵,۱$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} x \operatorname{sgn} |\sin^{2n}(n! \pi x)| - ۶۲۵,۲$$

مطلوبست رسم منحنی - ۶۲۵,۳

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1$$

۶۲۶ - خط $y = kx + b$ را بجانب (مایل) منحنی $y = f(x)$ نامند اگر :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

با استفاده از این معادله تمام شرطهای لازم و کافی وجود مجانب را معلوم کنید.

۶۲۷ - مجانب‌های متحنی‌های زیر را معلوم و متحنی‌ها را رسم کنید:

$$\text{الف) } y = \frac{x^3}{x^2 + x - 2} \quad \text{ت) } y = \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

$$\text{ب) } y = \sqrt{x^2 + x} \quad \text{ث) } y = \ln(1 + e^x)$$

$$\text{پ) } y = \sqrt[3]{x^2 - x^3} \quad \text{ج) } y = x + \arccos \frac{1}{x}$$

حدهای زیر را پیدا کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^n + 1}{(n+1)!} + \frac{x^n + 2}{(n+2)!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] - 628$$

$$|x| < 1 \quad \text{اگر} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})] - 629$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right) - 630$$

۶۳۱ - فرض کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$$

که در آن $\psi(x) > 0$ و $\alpha_{mn} \rightarrow 0$ بازای $n \leftarrow \infty$ یعنی $| \alpha_{mn} | < \varepsilon$ بازای $m = 1, 2, \dots$ و $n > N(\varepsilon)$ ثابت کنید که

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(\alpha_{1n}) + \varphi(\alpha_{2n}) + \dots + \varphi(\alpha_{nn})] = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} [\psi(\alpha_{1n}) + \psi(\alpha_{2n}) + \dots + \psi(\alpha_{nn})] \end{aligned} \quad (1)$$

با فرض آنکه حد سمت راست تساوی (۱) وجود داشته باشد.

با استفاده از قضیه قبل مطلوبست تعیین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{ka}{n^{\frac{1}{2}}} \right) - 633$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^{\frac{1}{2}}}} - 1 \right) - 632$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{a n^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) \quad (a > 0) - 634$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} - 636$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) - 635$$

۶۳۷ - دنباله x_n بصورت تساویهای زیر داده شده است :

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots \quad (a > 0)$$

مطلوبست محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

۶۳۷،۱ دنباله x_n به ترتیب زیر داده شده است :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1,$$

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

مطلوبست محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

۶۳۷،۲ - دنباله y_n بیاری دنباله x_n با روابط زیر تعریف شده است :

$$y_1 = x_1, \quad y_n = x_n - \alpha x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

که در آن $|\alpha| < 1$. مطلوبست محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

۶۳۷،۳ - دنباله x_n بترتیب زیر تعریف شده است :

$$x_1 = 1, \quad x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

مطلوبست محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

راهتمائی - تقاضل بین x_n و ریشه‌های معادله $x = \frac{1}{1+x}$ را در

نظر بگیرید.

۶۳۸ - دنباله توابع

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

بترتیب زیر تعریف میشود :

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

مطلوبست محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

۶۳۹ - دنباله توابع $(0 \leq x \leq 1)$ $y_n = y_n(x)$ بترتیب زیر تعریف میشود:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

مطلوبست $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

۶۳۹،۱ - فرض کنیم $x > 0$ و $(n = 1, 2, \dots)$ $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ ثابت کنید که اگر $y_i > 0$ ($i = 0, 1$) در این صورت دنباله y_n همگرا است و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{x}$$

راهنمایی - تفاضل $\frac{1}{x} - y_n$ را بررسی کنید.

۶۳۹،۲ - برای پیدا کردن $y = \sqrt{x}$ که در آن $x > 0$ روش زیر بکار برده میشود: با $y_0 > 0$ داخواه است و

$$y_n = \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{x}$$

راهنمایی - از دستور زیر استفاده کنید:

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}} \right)^2 \quad (n \geq 1)$$

۶۴۰ - برای حل تقریبی معادله کپلر

$$x - \varepsilon \sin x = m \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (1)$$

فرض میشود

$$x_0 = m, \quad x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \quad \dots, \quad x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}, \quad \dots$$

(روش تقریبات متوالی)

ثابت کنید که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ وجود دارد و عدد ξ تنها ریشه معادله

(۱) است.

۶۴۱ - اگر $\omega_h |f|$ نوسان تابع $f(x)$ روی قطعه $(h > 0)$ $|x - \xi| \leq h$ باشد، در این صورت عدد

$$\omega. [f] = \lim_{h \rightarrow 0} \omega_h [f]$$

نوسان تابع $f(x)$ در نقطه ξ نامیده میشود.

مطلوبست بحاسبه "نوسان تابع $f(x)$ در نقطه" $x = 0$ اگر:

الف) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ؛ ب) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ (ث)

ج) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ ؛ د) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x}$

ه) $f(x) = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$ ؛ و) $f(x) = (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}$ (ز)

ط) $f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ (ت)

۶۴۲ - فرض کنیم $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

ثابت کنید که بازای جميع اعداد α صادق در شرط $-1 \leq \alpha \leq 1$ میتوان دنباله ای مانند $(n = 1, 2, \dots)$ $x_n \rightarrow 0$ انتخاب کرد بقسمی که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$$

۶۴۳ - مطلوبست تعیین

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{و} \quad L = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x)$$

اگر:

الف) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ ؛ ب) $f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x}$

پ) $f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x} \right)^{\sec^2 \frac{1}{x}}$ ؛ د) $f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x}$

۶۴۴ - مطلوبست تعیین

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{و} \quad L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

اگر:

الف) $f(x) = \sin x$ ؛ ب) $f(x) = x^2 \cos^2 x$

ت) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x}$ ($x \geq 0$) ؛ د) $f(x) = 2 \sin^2 x$

بند ۱ - نگارش

$$x \in X \text{ بازای } \varphi(x) = O(\psi(x))$$

بدان معناست که ثابتی مانند A وجود دارد بقسمی که

$$(۱) \quad x \in X \text{ برای } |\varphi(x)| \leq A |\psi(x)|$$

بطریق مشابه اگر ناساوی (۱) در یک همسایگی U_a - ی نقطه a بر قرار

باشد می‌نویسیم:

$$(۲) \quad x \rightarrow a \text{ وقتی } \varphi(x) = O(\psi(x))$$

بالاخص اگر بازای $x \in U_a$ ، $\psi(x) \neq 0$ در آنصورت رابطه (۲) بالاتر دید

برقرار است اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ متناهی وجود داشته باشد. در چنین حالتی

مینویسند: $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$ اگر

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0)$$

در آنصورت $\varphi(x)$ را بی‌نهایت کوچک مرتبه p نسبت به بی‌نهایت کوچک x مینامند. بطرز مشابهی اگر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0)$$

در اینصورت $\varphi(x)$ را بی‌نهایت بزرگ مرتبه p نسبت به بی‌نهایت بزرگ x مینامند.

بند ۲ - نگارش

$$x \rightarrow a \text{ وقتی } \varphi(x) = o(\psi(x))$$

بدان معناست که

$$\varphi(x) = \alpha(x) \psi(x) \quad (x \in U_a)$$

که در آن $\alpha(x) \rightarrow 0$ وقتی $x \rightarrow a$. اگر بازای $x \in U_a$ ، $\psi(x) \neq 0$ در اینصورت تساوی (۲) هم ارز حکم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$$

میباشد.

بند ۳- توابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ را بازای $x \rightarrow a$ در صورتی هم ارز
نامند که $(\varphi(x) \sim \psi(x))$

(۴) $x \rightarrow a$ بازای $\varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x))$

اگر بازای $x \in U_a$ ، $\psi(x) \neq 0$ در آنصورت از (۴) داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$$

بازای $x \rightarrow 0$ روابط هم ارز زیر درست میباشند:

؛ $\ln(1+x) \sim x$; $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

؛ $a^x - 1 \sim x \ln a$ ($a > 0$)

$\text{tg } x \sim x$; $\sin x \sim x$

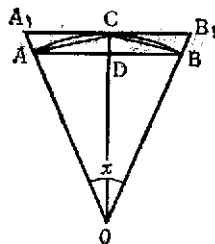
بطور کلی

$$\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x)$$

در تعیین حد نیست دو تابع بی نهایت کوچک (یا بی نهایت بزرگ)
بازای $x \rightarrow a$ میتوان بجای توابع مفروض هم ارز آنها را جایگزین ساخت .

۶۴۵- هر گاه زاویه مرکزی $\angle AOB = x$ (شکل ؛) بی نهایت کوچک مرتبه

یک محسوب شود مطلوبست تعیین مرتبه کوچک کمیتهای
زیر : الف) وتر AB ؛ ب) سهم CD ؛ پ) مساحت قطاع
 AOB ؛ ت) مساحت مثلث ABC ؛ ث) مساحت ذوذقعه
 ABB_1A_1 ؛ ج) مساحت قطعه ABC .



شکل ؛

۶۴۶- فرض کنیم $o(f(x))$ تابع دلخواهی باشد که بازای
 $x \rightarrow a$ دارای مرتبه رشد پایین تر از تابع $f(x)$ است و
 $O(f(x))$ تابع دلخواهی باشد که بازای $x \rightarrow a$ دارای
همان مرتبه رشد تابع $f(x)$ است . با فرض $f(x) > 0$.

نشان دهید که

الف) $o(o(f(x))) = o(f(x))$ ؛ ت) $O(O(f(x))) = O(f(x))$ ؛

ب) $O(o(f(x))) = o(f(x))$ ؛ ث) $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.

پ) $o(O(f(x))) = o(f(x))$ ؛

۶۴۷- فرض کنیم $x \rightarrow 0$ و $n > 0$. نشان دهید که

الف) $CO(x^n) = O(x^n)$ ($C \neq 0$ ثابت است) ؛

ب) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n < m$) ؛

پ) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

۶۴۸- فرض کنیم $x \rightarrow +\infty$ و $n > 0$. نشان دهید که

الف) $CO(x^n) = O(x^n)$ ؛

ب) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n > m$) ؛

پ) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

۶۴۹- نشان دهید که نماد \sim دارای ویژگی‌های زیر است: (۱) بازتابی:

۱) $\psi(x) \sim \varphi(x)$ ؛ هر گاه $\varphi(x) \sim \psi(x)$ آنگاه $\psi(x) \sim \varphi(x)$ ؛

۲) قابلیت انتقال: هر گاه $\varphi(x) \sim \psi(x)$ و $\psi(x) \sim \chi(x)$ آنگاه $\varphi(x) \sim \chi(x)$ ؛

۶۵۰- فرض کنیم $x \rightarrow 0$. تساویهای زیر را اثبات کنید:

الف) $2x - x^2 = O(x)$ ؛ $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[3]{x}$ (ث)

ب) $x \sin \sqrt{x} = O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$ ؛ $\arctg \frac{1}{x} = O(1)$ (ج)

پ) $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|)$ ؛ $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$ (چ)

ت) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)$ ($\varepsilon > 0$) ؛

۶۵۱- فرض کنیم $x \rightarrow +\infty$. تساویهای زیر را اثبات کنید:

الف) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^2)$ ؛ $\ln x = o(x^\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) (ث)

ب) $\frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ ؛ $x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (ج)

پ) $x + x^2 \sin x = O(x^2)$ ؛ $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$ (چ)

ت) $\frac{\arctg x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ؛ $x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2$ (ح)

۶۵۲- ثابت کنید که بازای مقادیر بقدر کافی بزرگ x ناساویهای زیر

برقرار است:

الف) $x^2 + 10x + 100 < 0.01 x^3$ ؛

ب) $\ln^{100} x < \sqrt{x}$ ؛ $x^{10} e^x < e^{2x}$ (پ)

۶۵۲،۱- دستور مجانبی زیر را اثبات کنید:

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + \frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

بازای $x \rightarrow +\infty$.

۶۵۳- فرض کنیم $x \rightarrow 0$. قسمت اصلی توابع زیر را بصورت Cx^n (C مقدارست ثابت) تعیین و مرتبه کوچکی آنها را نسبت به متغیر x معلوم کنید:

$$\begin{aligned} & \text{الف) } x^5 - 3x^3 + 2x \quad ; \quad \text{پ) } \sqrt{1-2x} - \sqrt{1-3x} \\ & \text{ب) } \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \quad ; \quad \text{ت) } \operatorname{tg} x - \sin x \end{aligned}$$

۶۵۴- فرض کنیم $x \rightarrow 0$. نشان دهید که بی نهایت کوچک های

$$\begin{aligned} & \text{الف) } f(x) = \frac{1}{\ln x} \quad ; \quad \text{ب) } f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

بازای جمیع مقادیر $n > 0$ با بی نهایت کوچک x^n قابل مقایسه نیستند، یعنی بازای هیچ مقدار n ، تساوی $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = k$ که در آن k مقدارست متناهی و مخالف صفر، امکان پذیر نیست.

۶۵۵- فرض کنیم $x \rightarrow 1$. جمله اصلی توابع زیر را بصورت $C(x-1)^n$ تعیین و مرتبه کوچکی آنها را نسبت به بی نهایت کوچک $x-1$ معلوم کنید:

$$\begin{aligned} & \text{الف) } x^3 - 3x + 2 \quad ; \quad \text{پ) } \ln x \\ & \text{ب) } \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} \quad ; \quad \text{ت) } e^x - e \\ & \text{ث) } x^x - 1 \end{aligned}$$

۶۵۶- فرض کنیم $x \rightarrow +\infty$. جمله اصلی توابع زیر را بصورت Cx^n تعیین و مرتبه بزرگی آنها را نسبت به بی نهایت بزرگ x معلوم کنید.

$$\begin{aligned} & \text{الف) } x^2 + 100x + 10000 \quad ; \quad \text{پ) } \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x} \\ & \text{ب) } \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1} \quad ; \quad \text{ت) } \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} \end{aligned}$$

۶۵۷- فرض کنیم $x \rightarrow +\infty$. جمله اصلی توابع زیر را بصورت $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ تعیین و مرتبه کوچکی آنها را نسبت به بی نهایت کوچک $\frac{1}{x}$ معلوم کنید:

$$\begin{aligned} & \text{الف) } \frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad \text{پ) } \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \\ & \text{ب) } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad ; \quad \text{ت) } \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \end{aligned}$$

۶۵۸- فرض کنیم $x \rightarrow 1$. جمله اصلی توابع زیر را بصورت $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ تعیین و مرتبه بزرگی آنها را نسبت به بی نهایت بزرگ $\frac{1}{x-1}$ معلوم کنید:

$$\begin{aligned} & \text{الف) } \frac{x^2}{x^2-1} \quad ; \\ & \text{ب) } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad ; \\ & \text{پ) } \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} \quad ; \\ & \text{ت) } \frac{1}{\sin \pi x} \quad ; \\ & \text{ث) } \frac{\ln x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

۶۵۹- فرض کنیم $x \rightarrow +\infty$ و $f_n(x) = x^n$ ($n = 1, 2, \dots$) ثابت کنید که

۱) هر یک از توابع $f_n(x)$ سریعتر از تابع $f_{n-1}(x)$ قبل خود رشد میکند؛ ۲) رشد تابع e^x از هر یک از توابع $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) سریعتر است.

۶۶۰- فرض کنیم $x \rightarrow +\infty$ و

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ثابت کنید که ۱) هر یک از توابع $f_n(x)$ کندتر از تابع قبلی خود $f_{n-1}(x)$ رشد میکند؛ ۲) رشد تابع $f(x) = \ln x$ از هر یک از $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) کندتر است.

۶۶۱- ثابت کنید بازای جميع دنباله‌ها از توابع زیر:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (x < x < +\infty)$$

تابعی مانند $f(x)$ را میتوان چنان تشکیل داد که بازای $x \rightarrow +\infty$ سریع‌تر از هر یک از توابع $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) رشد کند.

بخش ۷ - پیوستگی توابع

بند ۱ - پیوستگی توابع. تابع $f(x)$ را بازای $x = x_0$ (یا در نقطه x_0) وقتی پیوسته نامند که

$$(۱) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

یعنی وقتی که تابع $f(x)$ بازای $x = x_0$ معین و بازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ وجود داشته باشد بقسمی که بازای $|x - x_0| < \delta$ برای جميع مقادیر $f(x)$ داشته باشیم

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

تابع $f(x)$ را وقتی روی مجموعه $X = \{x\}$ (فاصله، قطعه) پیوسته نامند که این تابع در هر نقطه از مجموعه X پیوسته باشد.

اگر بازای یک مقدار $x = x_0$ متعلق به حوزه تعریف $X = \{x\}$ تابع $f(x)$ یا یکی از نقاط حدی این مجموعه تساوی (۱) برقرار نباشد (یعنی یا (الف) عدد $f(x_0)$ وجود نداشته باشد، عبارت دیگر تابع در $x = x_0$ نامعین باشد، یا (ب) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ وجود نداشته باشد و یا (پ) هر دو قسمت دستور

(۱) دارای معنا باشد ولی تساوی بین آنها وجود نداشته باشد) در این صورت نقطه x_0 را نقطه انفصال (ناپیوستگی) تابع $f(x)$ مینامند. انواع: (۱) نقطه x_0 نقطه انفصال نوع اول است بشرطی که حدود متناهی یکطرفی برای آن وجود داشته باشد:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \quad \text{و} \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

(۲) هر نقطه انفصال دیگر نقطه انفصال نوع دوم است. تفاضل

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

را جهش تابع در نقطه x_0 نامند.
اگر تساوی

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

برقرار باشد، در این صورت نقطه انفصال x_0 را قابل حذف نامند. اگر حد اقل یکی از حدود $f(x_0 - 0)$ یا $f(x_0 + 0)$ برابر نماد ∞ باشد در این صورت x_0 را نقطه انفصال بی نهایت نامند.
اگر تساوی

$$f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad \text{یا} \quad f(x_0 - 0) = f(x_0)$$

برقرار باشد تابع $f(x)$ را در نقطه x_0 پیوسته از چپ (یا از راست) نامند. برای پیوستگی تابع در نقطه x_0 تساوی سه عدد زیر لازم و کافی است:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

بند ۲ - پیوستگی توابع ابتدائی. اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ بازای مقدار $x = x_0$ پیوسته باشند در این صورت توابع

$$f(x) \pm g(x) \quad \text{؛} \quad (الف)$$

$$f(x)g(x) \quad (ب)$$

$$(پ) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0)$$

نیز بازای $x = x_0$ پیوسته اند.

بویژه: الف) تابع درست گویا (یا تابع چند جمله‌ای)

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

بازای جمیع مقادیر x پیوسته است؛ ب) تابع کسری گویای

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$$

بازای جمیع مقادیر x که مخرج را برابر صفر نکند پیوسته است.

بطور کلی توابع ابتدائی اصلی: x^n ، $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\operatorname{tg} x$ ، a^x ،
 باشند پیوسته‌اند. ... در هر نقطه‌ای که معین

نتیجه بسیار کلی‌تر چنین است: اگر تابع $f(x)$ بازای $x = x_0$ پیوسته
 و تابع $g(y)$ بازای $y = f(x_0)$ پیوسته باشد در آنصورت تابع $g(f(x))$ بازای
 $x = x_0$ پیوسته است.

بند ۳- قضایای اساسی مربوط به توابع پیوسته. اگر تابع $f(x)$ روی قطعه
 متناهی $[a, b]$ پیوسته باشد در این صورت: ۱) $f(x)$ در این قطعه کراندار
 است؛ ۲) در این قطعه به کران پائین m و کران بالای M خویش میرسد
 (قضیه ویرشتراس)؛ ۳) در هر فاصله $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ جمیع مقادیر واقع
 بین $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ را اختیار میکند (قضیه کوشی). بالاخص اگر $f(\alpha)f(\beta) < 0$ ،
 در این صورت مقداری مانند $\gamma (\alpha < \gamma < \beta)$ پیدا خواهد شد بقسمی که $f(\gamma) = 0$.

۶۶۲- نمودار تابع پیوسته $y = f(x)$ داده شده است. بازای نقطه مفروض
 a و عدد $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ از طریق نمایش هندسی مشخص

کنید بقسمی که بازای $|x - a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

۶۶۳- میخواهیم پلاک فلزی مربع‌شکلی تهیه کنیم که ضلع آن $x_0 = 10 \text{ cm}$
 باشد تا چه حدودی تغییر ضلع این پلاک مجاز است برای اینکه
 مساحت آن $y = x^2$ از مساحت مورد نظر $y_0 = 100 \text{ cm}^2$ بیشتر از:
 الف) $\pm 1 \text{ cm}^2$ ؛ ب) $\pm 0.1 \text{ cm}^2$ ؛ پ) $\pm 0.01 \text{ cm}^2$ ؛ ت) $\pm \varepsilon \text{ cm}^2$
 اختلاف نداشته باشد؟

۶۶۴- یال مکعبی محصور بین $2m$ و $3m$ است. با چه خطای مطلق Δ یال
 این مکعب را میتوان اندازه‌گیری کرد برای آنکه حجم آنرا بتوان با
 خطای مطلق محاسبه کرد که از εm^3 تجاوز نکند در صورتیکه:
 الف) $\varepsilon = 0.1 m^3$ ؛ ب) $\varepsilon = 0.01 m^3$ ؛ پ) $\varepsilon = 0.001 m^3$ ؟

۶۶۵- در چه همسایگی ماگزیمال نقطه $x = 100$ اختلاف عرض نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ از عرض $y_0 = 10$ کمتر از $y = 10^{-n}$ ($n \geq 0$) است؟ اندازه این همسایگی را برای $n = 0, 1, 2, 3$ تعیین کنید.

۶۶۶- بیاری بحث « $\varepsilon - \delta$ » ثابت کنید که تابع $f(x) = x^2$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است. جدول زیر را تکمیل کنید:

ε	۱	۰٫۱	۰٫۰۱	۰٫۰۰۱	...
δ					

۶۶۷- فرض کنیم $f(x) = \frac{1}{x}$ و $\varepsilon = 0,001$. مطلوبست تعیین بزرگترین اعداد مثبت ممکنه $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ برای $x_0 = 0,1, 0,01, 0,001, \dots$ بقسمی که از نامساوی $|x - x_0| < \delta$ نامساوی $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ نتیجه شود. آیا میتوان برای $\varepsilon = 0,001$ مفروض عددی مانند $\delta > 0$ چنان اختیار نمود که با جمیع مقادیر x_0 از فاصله $(0,1)$ سازگار باشد، یعنی برای جمیع مقادیر $x_0 \in (0,1)$ اگر $|x - x_0| < \delta$ در آنصورت $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ؟

۶۶۸- بزبان « $\varepsilon - \delta$ » در معنای مثبت عبارت زیر را فرمول بندی کنید: تابع $f(x)$ در نقطه x_0 معین است ولی در این نقطه پیوسته نیست.

۶۶۹- هرگاه برای اعداد نامشخص $\varepsilon > 0$ بتوان اعداد نظیر $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ را چنان پیدا کرد که $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ فقط اگر $|x - x_0| < \delta$. آیا میتوان گفت که تابع $f(x)$ در نقطه x_0 وقتی پیوسته است که: الف) اعداد ε مجموعه متناهی تشکیل دهند؛ ب) اعداد ε مجموعه نامتناهی کسرهایی ثنایی ($n = 1, 2, \dots$) $\varepsilon = \frac{1}{n}$ را تشکیل دهند.

۶۷۰- تابع

$$f(x) = x + 0,001[x]$$

مفروض است .

نشان دهید که برای هر $\varepsilon > 0,001$ میتوان چنان عدد $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ اختیار کرد که $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ فقط اگر $|x' - x| < \delta$ ، و برای $0,001 \leq \varepsilon < 0,002$ ، برای جمیع مقادیر x این عمل غیر ممکن است . در کدام نقاط پیوستگی این تابع نقض میشود؟

۶۷۱- فرض کنیم بازای هر عدد باندازه کافی کوچک $\delta > 0$ چنان عدد $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ وجود داشته باشد که هرگاه $|x - x_0| < \delta$ آنگاه نامساوی $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ بر قرار گزدد. آیا از این جا نتیجه میشود که تابع $f(x)$ بازای $x = x_0$ پیوسته است؟ نامساویهای مفروض حاکی از چه خاصیت تابع $f(x)$ میباشدند؟

۶۷۲- فرض کنیم بازای هر عدد $\varepsilon > 0$ چنان عدد $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ وجود داشته باشد که هرگاه $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ آنگاه $|x - x_0| < \delta$ ، آیا از این جا نتیجه میشود که تابع $f(x)$ بازای $x = x_0$ پیوسته است؟ نامساویهای مفروض حاکی از چه خاصیت تابع $f(x)$ میباشدند؟

۶۷۳- فرض کنیم بازای هر عدد $\delta > 0$ چنان عدد $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ وجود داشته باشد که هرگاه $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ آنگاه $|x - x_0| < \delta$. آیا از این جا نتیجه میشود که تابع $f(x)$ بازای $x = x_0$ پیوسته است؟ نامساویهای مفروض حاکی از چه خاصیت تابع $f(x)$ میباشد؟
مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} \text{arc tg } x, & \text{اگر } x \text{ گویا} \\ \pi - \text{arc tg } x, & \text{اگر } x \text{ گنگ} \end{cases}$$

۶۷۴- بیاری زبان « $\varepsilon - \delta$ » پیوستگی توابع زیر را ثابت کنید:

(الف) $ax + b$ ؛	(ب) x^2 ؛	(پ) x^3 ؛
(ت) \sqrt{x} ؛	(ث) $\sqrt[3]{x}$ ؛	(ج) $\sin x$ ؛
(چ) $\cos x$ ؛	(ح) $\text{arc tg } x$.	

پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید و آنها را از طریق ترسیمی نمایش دهید:

$$f(x) = |x| \quad - ۶۷۵$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{اگر } x \neq 2 \\ A, & \text{اگر } x = 2 \end{cases} \quad - ۶۷۶$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{اگر } x \neq -1 \text{ و } f(-1) \text{ اختیاری باشد.} \quad - ۶۷۷$$

$$f_1(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right| \quad \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } f_1(0) = 1 \quad \text{(الف) } - ۶۷۸$$

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{|x|} \quad \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } f_2(0) = 1 \quad \text{(ب)}$$

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} - 679 \quad \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } f(0) \text{ اختیاری میباشد.}$$

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} - 680 \quad \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } f(0) = 0.$$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} - 681 \quad \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } f(0) = 0.$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}} - 682 \quad \text{اگر } x \neq 1 \text{ و } f(1) \text{ اختیاری میباشد.}$$

$$f(x) = x \ln x^2 - 683 \quad \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } f(0) = a.$$

$$f(x) = \operatorname{sgn} x - 684$$

$$f(x) = [x] - 685$$

$$f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] - 686$$

نقاط انفصال توابع زیر را تعیین و نوع این نقاط را بررسی کنید:

$$y = \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right) - 694$$

$$y = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}} - 695$$

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} - 696$$

$$y = \sqrt{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} - 697$$

$$y = e^{x + \frac{1}{x}} - 698$$

$$y = \frac{1}{\ln x} - 699$$

$$y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} - 700$$

$$y = \frac{x}{(1+x)^2} - 678$$

$$y = \frac{1+x}{1+x^2} - 688$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 2} - 689$$

$$y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}} - 690$$

$$y = \frac{x}{\sin x} - 691$$

$$y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{1 - x^2}} - 692$$

$$y = \cos^2 \frac{1}{x} - 693$$

پیوستگی توابع زیر را بررسی و شکل تقریبی نمودار آنها را رسم کنید:

$$y = [x] \sin \pi x - 704$$

$$y = x^2 - [x^2] - 705$$

$$y = \left[\frac{1}{x} \right] - 706$$

$$y = \operatorname{sgn} (\sin x) - 701$$

$$y = x - [x] - 702$$

$$y = x[x] - 703$$

$$y = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{x} - ۷۱۰$$

$$y = x \left[\frac{1}{x} \right] - ۷۰۷$$

$$y = \sec^{\frac{1}{x}} - ۷۱۱$$

$$y = \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{1}{x} \right) - ۷۰۸$$

$$y = (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor} - ۷۱۲$$

$$y = \left[\frac{1}{x^2} \right] \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right) - ۷۰۹$$

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) - ۷۱۳$$

$$y = e^{-\frac{1}{x}} - ۷۱۷$$

$$y = \frac{1}{x^2 \sin^2 x} - ۷۱۴$$

$$y = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} - ۷۱۸$$

$$y = \frac{1}{\sin(x^2)} - ۷۱۵$$

$$y = \operatorname{th} \frac{2x}{1-x^2} - ۷۱۹$$

$$y = \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-2)} - ۷۱۶$$

پیوستگی توابع زیر را بررسی و نمودار آنها را رسم کنید:

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (\gamma \sin x)^{2n}} - ۷۲۴$$

$$(x \geq 0) \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x + x^n} - ۷۲۰$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} [x \operatorname{arc} \operatorname{tg} (n \operatorname{ctg} x)] - ۷۲۵$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}} - ۷۲۱$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} - ۷۲۶$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - ۷۲۲$$

$$y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{xt})}{\ln(1 + e^t)} - ۷۲۷$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x - ۷۲۳$$

$$y = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + x) \operatorname{th} tx - ۷۲۸$$

۷۲۹ - آیا تابع

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \text{ اگر}$$

پیوسته است؟

۷۳۰ - فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a + x, & x \geq 0 \end{cases} \text{ اگر}$$

عدد a را چگونه انتخاب کنیم تا تابع $f(x)$ پیوسته باشد؟

۷۳۱- پیوستگی توابع زیر را بررسی و نوع نقاط انفصال آنها را تعیین کنید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1 \\ |x-1|, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{(پ)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \text{ctg } \pi x, & x \text{ نادرست} \\ \cdot, & x \text{ درست} \end{cases} \quad \text{(ت)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \text{ گویا} \\ \cdot, & x \text{ گنگ} \end{cases} \quad \text{(ث)}$$

۷۳۲- تابع $d = d(x)$ کوتاهترین فاصله نقطه x محور عددی Ox از مجموعه نقاط حاصله از قطعه $0 \leq x \leq 1$ و $2 \leq x \leq 3$ محور را نمایش میدهد. مطلوبست عبارت تحلیلی تابع d و رسم نمودار و بررسی پیوستگی آن.

۷۳۳- شکل E از مثلث متساوی الساقین بقاعده ۱ و ارتفاع ۱ و دو

مستطیل به قاعده‌های ۱ و ارتفاع‌های ۲ و ۳

(شکل ۵) تشکیل شده است. تابع $S = S(y)$

($0 \leq y < +\infty$) عبارت از مساحت بخشی از شکل

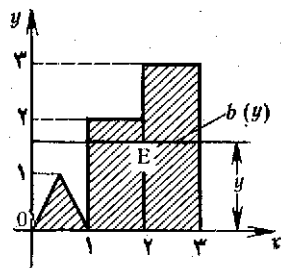
E محصور بین خطوط افقی $Y = y$ و $Y = 0$ ؛

و تابع $b = b(y)$ ($0 \leq y < +\infty$) عبارتست از

طول مقطع شکل E با خط افقی $Y = y$ ؛

تعیین عبارت تحلیلی توابع S و b و رسم نمودار

و بررسی پیوستگی آنها.



شکل ۵

۷۳۴- ثابت کنید که تابع دیریکله

$$\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) \right\}$$

بازای هر مقدار x منفصل است.

۷۳۵- پیوستگی تابع زیر را بررسی کنید:

$$f(x) = x\chi(x)$$

که در آن $\chi(x)$ تابع دیریکله (مسئله قبل را ببینید) است. طرح نمودار این تابع را رسم کنید.

۷۳۶- ثابت کنید که تابع ریمن

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{اگر } x = \frac{m}{n} \text{ و } n \text{ نسبت به } m \text{ اولند} \\ 0, & \text{اگر } x \text{ گنگ است} \end{cases}$$

بازای هر مقدار گویای x منفصل و بازای هر مقدار گنگ x پیوسته است. شکل تقریبی نمودار این تابع را رسم کنید.

۷۳۷- پیوستگی تابع $f(x)$ را که بترتیب زیر داده شده است بررسی کنید:

$$f(x) = \frac{nx}{n+1}$$

اگر x کسر گویای تحویل ناپذیر $\frac{m}{n}$ ($n \geq 1$) باشد، و

$$f(x) = [x]$$

اگر x عددیست گنگ. شکل تقریبی نمودار این تابع را رسم کنید.

۷۳۸- تابع $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ بازای جمیع مقادیر آرگومان x جز $x = 0$

معین است. چه مقداری در نقطه $x = 0$ باید به تابع $f(x)$ داد تا تابع بازای $x = 0$ پیوسته باشد.

۸۳۹- نشان دهید که بازای هر انتخاب دلخواه عدد $f(1)$ تابع $f(x) = \frac{1}{1-x}$

بازای $x = 1$ منفصل است.

۷۴۰- تابع $f(x)$ بازای $x = 0$ مفهوم خود را از دست میدهد. مطلوبست تعیین عدد $f(0)$ برای آنکه تابع بازای $x = 0$ پیوسته گردد، در صورتیکه

$$\text{الف) } f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$\text{ب) } f(x) = \frac{1}{(1+x)^x}$$

$$\text{ج) } f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\text{د) } f(x) = x^x \quad (x > 0)$$

$$\text{ه) } f(x) = x \ln^2 x$$

$$\text{ب) } f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$$

$$\text{پ) } f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$$

۷۴۱- آیا مجموع دو تابع $f(x) + g(x)$ حتما در نقطه x ناپیوسته خواهد بود

اگر: الف) بازای $x = x$ تابع $f(x)$ پیوسته و تابع $g(x)$ ناپیوسته باشد؛ ب) هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ بازای $x = x$ ناپیوسته باشند؟ مثالهای نظیر را بسازید.

۷۴۲- آیا حاصل ضرب دو تابع

$$f(x)g(x)$$

حتماً در نقطه x ناپیوسته خواهد بود اگر:

الف) در این نقطه تابع $f(x)$ پیوسته و تابع $g(x)$ ناپیوسته باشد؛

ب) هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ بازای $x = x_0$ ناپیوسته باشند؟ مثل های

نظیر را بسازید.

۷۴۳- آیا میتوان گفت که مجذور یک تابع ناپیوسته، یک تابع ناپیوسته است؟

تابعی مثال بیاورید که همه جا ناپیوسته و مجذور آن یک تابع پیوسته

باشد.

۷۴۴- پیوستگی توابع $f[g(x)]$ و $f[g(x)]$ را در حالات زیر بررسی کنید:

الف) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ و $g(x) = 1 + x^2$ ؛

ب) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ و $g(x) = x(1 - x^2)$ ؛

پ) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ و $g(x) = 1 + x - [x]$.

۷۴۵- پیوستگی تابع مرکب $y = f(u)$ را که در آن $u = \varphi(x)$ بررسی کنید،

در صورتیکه

$$f(u) = \begin{cases} u, & 0 < u \leq 1 \\ 2 - u, & 1 < u < 2 \end{cases}$$

و

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{بازای } x \text{ گویا} \\ 2 - x, & \text{بازای } x \text{ گنگ} \end{cases}$$

($0 < x < 1$).

۷۴۶- ثابت کنید که اگر $f(x)$ تابع پیوسته‌ای باشد، در آنصورت

$$F(x) = |f(x)|$$

نیز تابع پیوسته‌ای میباشد.

۷۴۷- ثابت کنید که اگر $f(x)$ تابع پیوسته‌ای باشد، در آنصورت تابع

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{اگر } f(x) < -c \\ f(x), & \text{اگر } |f(x)| \leq c \\ c, & \text{اگر } f(x) > c \end{cases}$$

که در آن c عدد مثبت دلخواهی است نیز پیوسته میباشد.

۷۴۸- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ پیوسته باشد در

آنصورت توابع

$$M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \quad \text{و} \quad m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

نیز روی قطعه $[a, b]$ پیوسته‌اند.

۷۴۹- ثابت کنید که اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ پیوسته باشند در آنصورت توابع

$$\varphi(x) = \min [f(x), g(x)] \quad \text{و} \quad \psi(x) = \max [f(x), g(x)]$$

نیز پیوسته‌اند.

۷۵۰- فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ معین و کراندار باشد. ثابت کنید که توابع

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\} \quad \text{و} \quad M(x) = \sup_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\}$$

روی قطعه $[a, b]$ پیوسته از چپ میباشند.

۷۵۱- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصله $a \leq x < +\infty$ پیوسته و حد متناهی

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

وجود داشته باشد در اینصورت این تابع در فاصله مذکور کراندار است.

۷۵۲- فرض کنیم تابع $f(x)$ در بازه $(x, +\infty)$ پیوسته و کراندار باشد. ثابت کنید که عدد T هر چه باشد چنان دنباله $x_n \rightarrow +\infty$ یافت میشود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0$$

۷۵۳- فرض کنیم $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ توابع پیوسته دوره‌ای باشند که بازای $-\infty < x < +\infty$ معین هستند و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$$

ثابت کنید که:

$$\varphi(x) \equiv \psi(x)$$

۷۵۴- ثابت کنید که جمیع نقاط انفصال تابع یکنوای کراندار نقاط انفصال نوع اول میباشند.

۷۵۵- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ دارای ویژگی‌های زیر باشد: (۱) معین و یکنوا روی قطعه $[a, b]$ ؛ (۲) بعنوان مقادیر خویش تمام اعداد واقع بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار کند، در این صورت این تابع روی $[a, b]$ پیوسته است.

۷۵۶- نشان دهید که تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x-a}$ ، اگر $x \neq a$ و $f(a) = 0$ ، روی هر قطعه دلخواه $[a, b]$ جميع مقادير واقع بين $f(a)$ و $f(b)$ را اختيار ميكند منتها روی $[a, b]$ پیوسته نیست.

۷۵۷- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ روی فاصله (a, b) پیوسته باشد و x_1, x_2, \dots, x_n مقادير دلخواه آن از این فاصله باشند در آنصورت چنان عدد ϵ را بين آنها ميتوان يافت که:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

۷۵۸- فرض کنیم $f(x)$ در فاصله (a, b) پیوسته و

$$l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{و} \quad L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

ثابت کنید بازای جميع اعداد λ که $l \leq \lambda \leq L$ چنان دنباله $x_n \rightarrow a$ ($n = 1, 2, \dots$) وجود دارد که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda$$

بخش ۸- تابع معکوس. توابع پارامتری

بند ۱- وجود و پیوستگی تابع معکوس. هر گاه تابع $y = f(x)$ دارای ویژگی‌های زیر باشد: (۱) روی فاصله (a, b) معین و پیوسته باشد؛ (۲) روی این فاصله بمعنای اکید یکنوا باشد، آنگاه تابع معکوس تک مقداری $x = f^{-1}(y)$ وجود دارد که معین، پیوسته و متناظراً به معنای اکید روی فاصله (A, B) یکنوا است که در آن $A = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ و $B = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$.

شاخه تک مقداری پیوسته تابع چند مقداری معکوس تابع پیوسته مفروض $y = f(x)$ بر حسب تعريف عبارتست از تابع پیوسته تک مقداری دلخواه $x = g(y)$ که در حوزه ماگزیمال وجودش معین باشد و در این حوزه در معادله $y = f[g(y)]$ صدق کند.

بند ۲- پیوستگی تابعی که بصورت پارامتری داده شده است. اگر توابع $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ در فاصله (α, β) معین و پیوسته و تابع $\varphi(t)$ در این فاصله بطور اکید یکنوا باشد، در آن صورت دستگاه معادلات

$$y = \psi(t), \quad x = \varphi(t)$$

y را بعنوان تابع تک مقداری پیوسته از x :

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

در فاصله (a, b) مشخص میسازد، که در آن $b = \lim_{t \rightarrow \beta - x} \varphi(t)$ و

$$a = \lim_{t \rightarrow a + 0} \varphi(t)$$

۷۵۹ - مطلوبست تابع معکوس تابع کسری حطی

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

در کدام حالت تابع معکوس بر تابع مفروض منطبق میشود؟

۷۶۰ - مطلوبست تابع معکوس $x = x(y)$ ، در صورتیکه

$$y = x + [x]$$

۷۶۱ - نشان دهید که تابع پیوسته یکتای $(-\infty < x < +\infty)$ $y = y(x)$ صادق در معادله کپلر

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leq \varepsilon < 1)$$

وجود دارد.

۷۶۲ - نشان دهید که معادله

$$\operatorname{ctg} x = kx$$

بازای هر مقدار حقیقی k $(-\infty < k < +\infty)$ در بازه $0 < x < \pi$ دارای ریشه یکتای پیوسته $x = x(k)$ است.

۷۶۳ - آیا تابع نایکنوای $(-\infty < x < +\infty)$ $y = f(x)$ میتواند دارای تابع معکوس تک مقداری باشد؟ مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$y = \begin{cases} x & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ -x & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

۷۶۴ - در چه حالتی تابع $y = f(x)$ و تابع معکوس $x = f^{-1}(y)$ هر دو یکی میشوند؟

۷۶۵ - نشان دهید که تابع معکوس تابع ناپیوسته

$$y = (1 + x^2) \operatorname{sgn} x$$

تابعی است پیوسته.

۷۶۶- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ معین و اکیداً یکنوا روی قطعه $[a, b]$ باشد و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \quad (a \leq x_n \leq b)$$

در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

شاخه‌های تک مقداری پیوسته^{*} توابع معکوس توابع زیر را تعیین کنید:

$$y = \sin x - 770 \qquad y = x^2 - 777$$

$$y = \cos x - 771 \qquad y = 2x - x^2 - 778$$

$$y = \operatorname{tg} x - 772 \qquad y = \frac{2x}{1+x^2} - 779$$

۷۷۳- نشان دهید که مجموعه^{*} مقادیر تابع پیوسته^{*}

$$y = 1 + \sin x$$

ستتازر فاصله^{*} $(0 < x < 2\pi)$ ، قطعه است.

۷۷۴- تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2}$$

۷۷۵- تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0)$$

۷۷۶- مطلوبست اثبات قضیه^{*} جمع آرکتانژانت‌ها:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon \pi$$

که در آن $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ تابعی است که یکی از سه مقدار $0, 1, -1$ را اختیار میکنند.

در ازای چه مقادیری از y بازای مقدار مفروض x تابع ε ممکن است منفصل باشد؟ روی صفحه^{*} Oxy نواحی نظیر پیوستگی تابع ε را بسازید و مقدار این تابع را در نواحی بدست‌آمده تعیین کنید.

۷۷۷- مطلوبست اثبات قضیه^{*} جمع آرگسینوس‌ها:

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin y = (-1)^{\varepsilon} \operatorname{arc} \sin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon \pi$$

($|y| \leq 1, |x| \leq 1$) که در آن

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{یا} \quad xy \leq 0. \quad \text{اگر} \quad \varepsilon = 0.$$

و

$$x^2 + y^2 > 1 \quad \text{و} \quad xy > 0. \quad \text{اگر} \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} x$$

۷۷۸- مطلوبست اثبات قضیه جمع آرککوسینوسها:

$$\arccos x + \arccos y = (-1)^\varepsilon \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) + 2\pi\varepsilon$$

($|y| \leq 1, |x| \leq 1$) که در آن

$$x + y \geq 0. \quad \text{اگر} \quad \varepsilon = 0.$$

و

$$x + y < 0. \quad \text{اگر} \quad \varepsilon = 1$$

۷۷۹- مطلوبست رسم نمودار توابع:

$$a) \quad y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2}$$

$$b) \quad y = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) - 2\arcsin x$$

۷۸۰- مطلوبست تعیین تابع $y = y(x)$ از معادلات:

$$x = \arctg t, \quad y = \operatorname{arccot} t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

در چه حوزه‌ای این تابع معین است؟

۷۸۱- فرض کنیم

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

در چه حوزه‌ای از تغییرات پارامتر t متغیر y را میتوان بعنوان تابع تک مقداری

از متغیر x در نظر گرفت؟ عبارت y را بازای حوزه‌های مختلف پیدا کنید.

۷۸۲- تحت چه شرایط لازم و کافی دستگاه معادلات

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

y را بعنوان تابع تک مقداری از x بیان میکنند؟

مثال $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t$ را در نظر بگیرید.

۷۸۳- تحت چه شرایطی دو دستگاه معادلات

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

و

$$x = \varphi(\chi(\tau)), \quad y = \psi(\chi(\tau)) \quad (\alpha < \tau < \beta)$$

یک تابع $y = y(x)$ را مشخص میسازند؟

۷۸۴ - فرض کنیم توابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ روی فاصله (a, b) معین و پوسته باشند و

$$A = \inf_{a < x < b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a < x < b} \varphi(x)$$

در چه حالتی چنان تابع $f(x)$ تکمقداری و معین در فاصله (A, B) وجود دارد که بازای $a < x < b$ داشته باشیم:

$$\psi(x) = f(\varphi(x))?$$

بخش ۹ - پیوستگی یکنواخت توابع

بند ۱ - تعریف پیوستگی یکنواخت. تابع $f(x)$ را روی یک مجموعه (فاصله، قطعه و غیره) $X = \{x\}$ وقتی پیوسته^۱ یکنواخت نامند که $f(x)$ روی X معین بوده و برای هر $\varepsilon > 0$ چنان عدد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد که بازای مقادیر دلخواه $x', x'' \in X$ از نامساوی

$$|x' - x''| < \delta$$

نامساوی زیر نتیجه شود:

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

بند ۲ - قضیه کانتور. تابع $f(x)$ که روی قطعه^۱ کراندار $[a, b]$ معین و پیوسته است روی این قطعه پیوسته^۱ یکنواخت میباشد.

۷۸۵ - در کارگاه کارخانه‌ای پلاک‌های مربعی شکل ساخته میشود که ضلع x آنها میتواند مقادیر در حدود از ۱ تا ۱۰ سانتیمتر را اختیار کند. با چه حد مجاز δ میتوان اضلاع این پلاک‌ها را عمل نمود تا مستقل از طولشان (در حدود مذکور) مساحت y آنها با مساحت منظور اختلاف کمتر از ε داشته باشد؟ مطلوبست محاسبه^۱ عددی اگر:

الف) $\varepsilon = \text{cm}^2$ ؛ ب) $\varepsilon = 0,01 \text{ cm}^2$ ؛ ج) $\varepsilon = 0,0001 \text{ cm}^2$.

۷۸۶ - بست (کوپلینگ) استوانه‌ای به پهنای ε و درازای δ روی منحنی

$$y = \sqrt[3]{x}$$
 کشیده شده و بر روی آن قسمی میلغزد که محور بست موازی

محور Ox میماند. δ حقدر باشد تا این بست قسمتی از منحنی را که با نامساوی $10 \leq x \leq 100$ تعیین میشود بطور آزادانه طی کند، در صورتیکه:

الف) $\varepsilon = 1$ ؛ ب) $\varepsilon = 0,1$ ؛ ج) $\varepsilon = 0,01$ ؛ ت) ε باندازه

دلخواه کوچک باشد؟

۷۸۷- در معنای مثبت بزبان « $\epsilon - \delta$ » حکم زیر را فرمول بندی کنید: تابع $f(x)$ روی یک مجموعه (بازه، قطعه و غیره) پیوسته است ولی پیوسته^{*} یکنواخت روی این مجموعه نیست.
۷۸۸- نشان دهید که تابع

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

در فاصله^{*} $(0, 1)$ پیوسته است ولی در این بازه پیوسته^{*} یکنواخت نیست.
۷۸۹- نشان دهید که تابع

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$$

در فاصله^{*} $(0, 1)$ پیوسته و کراندار است، ولی در این فاصله، پیوسته^{*} یکنواخت نیست.
۷۹۰- نشان دهید که تابع

$$f(x) = \sin x^2$$

در فاصله^{*} ناستهای $-\infty < x < +\infty$ پیوسته و کراندار است، ولی در این فاصله پیوسته^{*} یکنواخت نیست.
۷۹۱- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در حوزه $-\infty < x < +\infty$ معین و پیوسته باشد و حد متناهی

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

وجود داشته باشد در این صورت $f(x)$ در این حوزه پیوسته^{*} یکنواخت است.
۷۹۲- نشان دهید که تابع ناکراندار

$$f(x) = x + \sin x$$

در سراسر محور $-\infty < x < +\infty$ پیوسته^{*} یکنواخت است.
۷۹۳- آیا تابع $f(x) = x^2$ روی فاصله^{*} الف $(-l, l)$ که در آن عدد l مثبت و بقدر دلخواه بزرگ است، ب) در فاصله^{*} $(-\infty, +\infty)$ پیوسته^{*} یکنواخت است؟

پیوستگی یکنواخت توابع زیر را در حوزه های داده شده بررسی کنید:

$$f(x) = \frac{x}{\epsilon - x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1) - ۷۹۴$$

$$f(x) = \ln x \quad (0 < x < 1) - ۷۹۵$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi) - ۷۹۶$$

$$f(x) = e^x \cos \frac{1}{x} \quad (0 < x < 1) - ۷۹۷$$

$$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \quad (-\infty < x < +\infty) - ۷۹۸$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (1 \leq x < +\infty) - ۷۹۹$$

$$f(x) = x \sin x \quad (0 \leq x < +\infty) - ۸۰۰$$

۸۰۱ - نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ در هر یک از فواصل

$$J_1 = (-1 < x < 0) \quad \text{و} \quad J_2 = (0 < x < 1)$$

بطور جداگانه پیوسته یکنواخت است، ولی روی مجموع آنها

$$J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}$$

پیوسته یکنواخت نیست.

۸۰۱, ۱ - ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ روی هر یک از قطعه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ پیوسته یکنواخت باشد، در اینصورت این تابع در قطعهٔ جمعی $[a, b]$ پیوسته یکنواخت خواهد بود.

۸۰۲ - برای $\varepsilon > 0$ مطلوبست تعیین $\delta = \delta(\varepsilon)$ بنحویکه در شرایط پیوستگی یکنواخت توابع $f(x)$ زیر در فواصل داده شده صادق باشد:

$$f(x) = 5x - 3 \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad (-2 \leq x \leq 5) \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (0, 1 \leq x \leq 1) \quad (\text{پ})$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < +\infty) \quad (\text{ت})$$

$$f(x) = 2 \sin x - \cos x \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (\text{ث})$$

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad \text{و} \quad f(0) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (\text{ج})$$

۸۰۳ - قطعهٔ $[1, 1.0]$ را کافی است بچند قسمت مساوی تقسیم کنیم تا نوسان تابع $f(x) = x^2$ در هر یک از این قسمت‌ها کمتر از 0.001 باشد؟

۸۰۴ - ثابت کنید که مجموع و حاصل ضرب هر تعداد متناهی توابع پیوسته یکنواخت روی فاصلهٔ (a, b) ، روی این فاصله پیوسته یکنواخت است.

۸۰۵ - ثابت کنید که اگر تابع کراندار یکنواخت $f(x)$ در فاصلهٔ متناهی یا نامتناهی (a, b) پیوسته باشد، در این صورت این تابع در فاصلهٔ (a, b) پیوسته یکنواخت میباشد.

۸۰۶- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ روی بازه منتهای (a, b) پیوسته یکنواخت باشد، در آنصورت حدود

$$B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \quad \text{و} \quad A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

وجود دارد. آیا این قضیه برای بازه نامنتهای (a, b) درست است؟

۸۰۶،۱- ثابت کنید برای آنکه تابع $f(x)$ معین و پیوسته در فاصله منتهای

(a, b) بتواند بطور پیوسته در قطعه $[a, b]$ ادامه یابد لازم و کافی

است که تابع $f(x)$ در فاصله (a, b) پیوسته یکنواخت باشد.

۸۰۷- مدول پیوستگی تابع $f(x)$ روی فاصله (a, b) اصطلاحاً تابع

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$$

را نامند که در آن x_1 و x_2 نقاط دلخواهی از (a, b) میباشند که با رابطه $|x_1 - x_2| \leq \delta$ بهم مربوط میباشند.

ثابت کنید که برای پیوستگی یکنواخت تابع $f(x)$ روی فاصله (a, b) لازم و کافی است که

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$$

۸۰۸- مطلوبست محاسبه ارزش مدول پیوستگی $\omega_f(\delta)$ (مسئله پیشین را ببینید) که بصورت زیر تعریف میشود:

$$\omega_f(\delta) \leq C\delta^\alpha$$

که در آن C, α مقادیر ثابتی میباشند در صورتیکه:

$$f(x) = x^3 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad \text{الف)}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (a < x < +\infty) \quad \text{و} \quad (0 \leq x \leq a) \quad \text{ب)}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi) \quad \text{پ)}$$

بخش ۱۰- معادلات تابعی

۸۰۹- ثابت کنید که تنها تابع پیوسته $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) که بازای جمیع مقادیر حقیقی x و y در معادله

$$(1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

صدق کند، تابع خطی همگن زیر است

$$f(x) = ax$$

که در آن $a = f(1)$ ثابت دلخواهی میباشد.

۸۱۰- ثابت کنید که تابع یکنوای $f(x)$ صادق در معادله^{*} (۱)، خطی همگن است.

۸۱۱- ثابت کنید که تابع $f(x)$ صادق در معادله^{*} (۱) و کراندار در فاصله^{*} هر قدر کوچک $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ، همگن خطی است.

۸۱۲- ثابت کنید که تنها تابع پیوسته^{*} $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) که بطور اتحادی برابر صفر نباشد و بازای جمیع مقادیر x و y در معادله^{*}

$$(۲) \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

صدق کند، تابع نمایی است

$$f(x) = a^x$$

که در آن $a = f(1)$ ثابت مثبتی است.

۸۱۳- ثابت کنید تابع کراندار در فاصله^{*} $(0, \varepsilon)$ که بطور اتحادی برابر صفر نباشد و در معادله^{*} (۲) صدق کند، نمایی است.

۸۱۴- ثابت کنید که تنها تابع پیوسته^{*} $f(x)$ ($0 < x < +\infty$) که بطور اتحادی برابر صفر نباشد و بازای جمیع مقادیر مثبت x و y در معادله^{*}

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

صدق کند، تابع لگاریتمی است:

$$f(x) = \log_a x$$

که در آن a ثابت مثبتی است.

۸۱۵- ثابت کنید که تنها تابع پیوسته^{*} $f(x)$ ($0 < x < +\infty$) که بطور اتحادی برابر صفر نباشد و بازای جمیع مقادیر مثبت x و y در معادله^{*}

$$(۳) \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

صدق کند، تابع درجه‌ای است:

$$f(x) = x^a$$

که در آن a ثابت است.

۸۱۶- مطلوبست تعیین تمام توابع پیوسته^{*} $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) که بازای جمیع مقادیر حقیقی x و y در معادله^{*} (۳) صدق کنند.

۸۱۷- نشان دهید که تابع ناپیوسته^{*}

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

در معادله (۳) صادق است.

۸۱۸ - مطلوبست تعیین تمام توابع پیوسته $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) که بازای
 جميع مقادير حقيقي x و y در معادله

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

صدق کنند.

۸۱۹ - مطلوبست تعیین تمام توابع پیوسته $f(x)$ کراندار ($-\infty < x < +\infty$) و $g(x)$ که بازای جميع مقادير حقيقي x و y در دستگاه معادلات:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$$

و علاوه بر آن در شرایط زیر صدق کنند:

$$g(0) = 0 \quad \text{و} \quad f(0) = 1$$

راهنمایی. تابع

$$F(x) = f^2(x) + g^2(x)$$

را در نظر بگیرید.

۸۲۰ - فرض کنیم

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

و

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$$

بترتیب تفاضل‌های متناهی مرتبه اول و دوم تابع $f(x)$ باشند.

ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) پیوسته باشد و

$$\Delta^2 f(x) = 0$$

در آنصورت این تابع خطی است، یعنی

$$f(x) = ax + b$$

که در آن a و b ثابت میباشند.

فصل ۲

حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره

بخش ۱ - مشتق توابع صریح

بند ۱ - تعریف مشتق . اگر x و $x_1 = x + \Delta x$ مقادیر متغیر مستقل باشند در آنصورت تفاضل

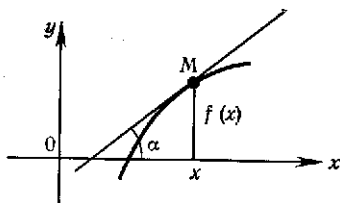
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

را نمو $y = f(x)$ روی قطعه $[x, x_1]$ نامند .
عبارت

$$(۱) \quad y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

اگر دارای معنا باشد مشتق، و خود تابع $f(x)$ را در این صورت تابع دیفرانسیل پذیر نامند .

از لحاظ هندسی عدد $f'(x)$ عبارتست از ضریب زاویه مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه آن $(\operatorname{tg} \alpha = f'(x))$ (شکل ۶) .



شکل ۶

بند ۲ - قاعده‌های اساسی تعیین مشتق .
اگر c مقدار ثابت و توابع $u = u(x)$ ، $v = v(x)$ و $w = w(x)$ دارای مشتق باشند در آنصورت

$$c' = 0 \quad (۱)$$

$$(cu)' = cu' \quad (۲)$$

$$(u + v - w)' = u' + v' - w' \quad (۳)$$

$$(uv)' = u'v + v'u \quad (۴)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0) \quad (۵)$$

۶) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (عددیست ثابت n)
 ۷) اگر توابع $y = f(u)$ و $u = \varphi(x)$ دارای مشتق باشند در آنصورت

$$y'_x = y'_u u'_x$$

بند ۳- دستورهای اساسی. اگر x متغیر مستقلی باشد، در آنصورت

$$(x^n)' = nx^{n-1} - I$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0) - X \quad (\sin x)' = \cos x - II$$

$$(e^x)' = e^x \quad (\cos x)' = \sin x - III$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0) - XI \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - IV$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} - V$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x - XII \quad (\operatorname{arc} \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - VI$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x - XIII \quad (\operatorname{arc} \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - VII$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - XIV \quad (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} - VIII$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - XV \quad (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} - IX$$

$$(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} - IX$$

بند ۴- مشتقات یکسویی. عبارات

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{و} \quad f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

به ترتیب به مشتق راست و چپ تابع $f(x)$ در نقطه x موسومند.
 برای وجود مشتق $f'(x)$ لازم و کافی است که

$$f'_-(x) = f'_+(x)$$

بند ۵- مشتق نامتناهی. اگر تابع $f(x)$ در نقطه x پیوسته باشد و

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty$$

در آنصورت گویند که تابع $f(x)$ در نقطه x دارای مشتق نامتناهی (بی‌نهایت) است. در این حالت مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه x بر محور Ox عمود است.

۸۲۱- مطلوبست نمو Δx آرگومان x و نمو نظیر Δy تابع $y = \lg x$ اگر x از ۱ تا ۱۰۰۰ تغییر کند.

۸۲۲- مطلوبست نمو Δx آرگومان x و نمو نظیر Δy تابع $y = \frac{1}{x^2}$ اگر x از ۰,۰۱ تا ۰,۰۰۱ تغییر کند.

۸۲۳- به متغیر x نمو Δx را میدهیم. مطلوبست تعیین نمو Δy در صورتیکه:
الف) $y = ax + b$ ؛ ب) $y = ax^2 + bx + c$ ؛ پ) $y = a^x$.
۸۲۴- ثابت کنید که:

$$\Delta [f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x) \quad \text{الف}$$

$$\Delta [f(x)g(x)] = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x) \quad \text{ب}$$

۸۲۵- از نقاط $A(2, 4)$ و $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ منحنی $y = x^2$ قاطع ، قاطع AA' گذشته است. مطلوبست تعیین ضریب زاویه این قاطع در صورتیکه:

الف) $\Delta x = 1$ ؛ ب) $\Delta x = 0,1$ ؛ پ) $\Delta x = 0,01$ ؛
ت) Δx باندازه دلخواه کوچک باشد .

ضریب زاویه مماس بر منحنی مفروض در نقطه A برابر چیست؟

۸۲۶- قطعه $1 \leq x \leq 1 + h$ از محور Ox بیاری تابع $y = x^3$ روی محور Oy تصویر شده است. مطلوبست تعیین ضریب کشش متوسط و انجام محاسبه عددی در صورتیکه:

الف) $h = 0,1$ ؛ ب) $h = 0,01$ ؛ پ) $h = 0,001$

ضریب کشش بازای این تصویر در نقطه $x = 1$ برابر چیست؟

۸۲۷- قانون حرکت یک نقطه روی محور Ox با دستور

$$x = 10t + 5t^2$$

داده شده است که در آن t زمان بر حسب ثانیه و x مسافت بر حسب متر است. مطلوبست تعیین سرعت متوسط حرکت در فاصله زمانی $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ و انجام محاسبه عددی در صورتیکه:

الف) $\Delta t = 1$ ؛ ب) $\Delta t = 0,1$ ؛ پ) $\Delta t = 0,01$ ؛

سرعت حرکت در لحظه $t = 20$ چقدر است؟

۸۲۸- از روی تعریف مشتق، مشتقات توابع زیر را مستقیماً بدست آورید:

الف) x^2 ؛ ت) \sqrt{x} ؛ ج) $\operatorname{ctg} x$ ؛

ب) x^3 ؛ ث) $\sqrt[3]{x}$ ؛ ح) $\operatorname{arc} \sin x$ ؛

پ) $\frac{1}{x}$ ؛ ج) $\operatorname{tg} x$ ؛ خ) $\operatorname{arc} \cos x$ ؛

د) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ ؛

۸۲۹ - مطلوبست محاسبه $f'(1)$ ، $f'(2)$ و $f'(3)$ اگر

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$$

۸۳۰ - مطلوبست محاسبه $f'(2)$ اگر

$$f(x) = x^x \sin(x-2)$$

۸۳۱ - مطلوبست محاسبه $f'(1)$ اگر

$$f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

۸۳۲ - مطلوبست محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

در صورتیکه تابع $f(x)$ در نقطه a دیفرانسیلپذیر باشد.
 ۸۳۳ - ثابت کنید که اگر n عدد طبیعی و تابع $f(x)$ دیفرانسیلپذیر باشد در آن صورت

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x)$$

بر عکس اگر برای تابع $f(x)$ حد (۱) وجود داشته باشد آیا میتوان گفت که این تابع دارای مشتق است؟ مثال تابع دیریکله را در نظر بگیرید (فصل ۱ مساله ۷۳۴ را ببینید).

با استفاده از جدول مشتقات مشتقات توابع زیر را پیدا کنید:

$$y = 2 + x - x^2 \quad 834$$

$$y'(-1.0), y'(1), y'\left(\frac{1}{2}\right), y'(0) \text{ چقدر است؟}$$

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \quad 835$$

بازای چه مقادیری از x :

$$y'(x) = 0 \quad (\text{الف}) \quad ; \quad y'(x) = -2 \quad (\text{ب}) \quad ; \quad y'(x) = 10 \quad (\text{پ})$$

$$y = (x-a)(x-b) \quad 838$$

$$y = a^x + o a^x x^y - x^a \quad 836$$

$$y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3 \quad 839$$

$$y = \frac{ax+b}{a+b} \quad 837$$

$$y = (x \sin \alpha + \cos \alpha)(x \cos \alpha - \sin \alpha) \quad 840$$

$$y = (1 + nx^m)(1 + mx^n) - ۸۴۱$$

$$y = (1 - x)(1 - x^2)^2(1 - x^4)^3 - ۸۴۲$$

$$y = (5 + 2x)^{10}(2 - 4x)^{20} - ۸۴۲,۱$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - ۸۴۳$$

۸۴۴ - مطلوب است اثبات دستور

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

مطلوب است بحاسبه مشتقات توابع زیر :

$$y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x} - ۸۵۰$$

$$y = \frac{2x}{1-x^2} - ۸۴۵$$

$$y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - ۸۵۱$$

$$y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2} - ۸۴۶$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - ۸۵۲$$

$$y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^2} - ۸۴۷$$

$$y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} - ۸۵۳$$

$$y = \frac{(2-x^2)(2-x^4)}{(1-x)^2} - ۸۴۸$$

$$y = x\sqrt{1+x^2} - ۸۵۴$$

$$y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q} - ۸۴۹$$

$$y = (1+x)\sqrt[3]{2+x^2}\sqrt[3]{2+x^4} - ۸۵۵$$

$$y = \cos 2x - 2\sin x - ۸۶۲$$

$$y = \frac{m+n}{\sqrt{(1-x)^m(1+x)^n}} - ۸۵۶$$

$$y = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x - ۸۶۳$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - ۸۵۷$$

$$y = \sin(\cos^2 x) \times \cos(\sin^2 x) - ۸۶۴$$

$$y = \sin^n x \cos nx - ۸۶۵$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}} - ۸۵۸$$

$$y = \sin[\sin(\sin x)] - ۸۶۶$$

$$y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2} - ۸۶۷$$

$$y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - ۸۶۸$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})} - ۸۵۹$$

$$y = \frac{1}{\cos^n x} - ۸۶۹$$

$$y = \sqrt[3]{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - ۸۶۰$$

$$y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x} - ۸۷۰$$

$$y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}} - ۸۶۱$$



$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{r} - \operatorname{ctg} \frac{x}{r} - 1171$$

$$y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{r} \operatorname{tg}^r x + \frac{1}{r} \operatorname{tg}^2 x - 1172$$

$$y = \sqrt[r]{\operatorname{ctg}^r x} + \sqrt[r]{\operatorname{ctg}^{\lambda} x} - 1173$$

$$y = \sec^r \frac{x}{a} + \operatorname{cosec}^r \frac{x}{a} - 1174$$

$$y = \sin [\cos^r (\operatorname{tg}^r x)] - 1175$$

$$y = e^{-x^r} - 1176$$

$$y = r \operatorname{tg} \frac{1}{x} - 1177$$

$$y = e^x (x^r - rx + r) - 1178$$

$$y = \left[\frac{1-x^r}{r} \sin x - \frac{(1+x)^r}{r} \cos x \right] e^{-x} - 1179$$

$$y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^r + b^r}} - 1182$$

$$y = e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{r} \right) - 1180$$

$$y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}} - 1183$$

$$y = \frac{\ln r \times \sin x + \cos x}{r^x} - 1181$$

$$y = \left(\frac{a}{b} \right)^x \left(\frac{b}{x} \right)^a \left(\frac{x}{a} \right)^b \quad (b > 0, a > 0) - 1184$$

$$y = \ln (\ln (\ln x)) - 1185 \quad y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0) - 1186$$

$$y = \ln (\ln^r (\ln^r x)) - 1188$$

$$y = \lg^r x^r - 1187$$

$$y = \frac{1}{r} \ln (1+x) - \frac{1}{r} \ln (1+x^r) - \frac{1}{r(1+x)} - 1189$$

$$y = \frac{1}{r} \ln \frac{x^r - 1}{x^r + 1} - 1190$$

$$y = \frac{1}{r(1+x^2)} + \frac{1}{r} \ln \frac{x^2}{1+x^2} - 1191$$

$$y = \frac{1}{r\sqrt{r}} \ln \frac{x\sqrt{r} - \sqrt{r}}{x\sqrt{r} + \sqrt{r}} - 1192$$

$$y = \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \quad (0 < k < 1) - 1193$$

$$y = \sqrt{x+1} - \ln (1+\sqrt{x+1}) - 1194$$

$$y = \ln (x + \sqrt{x^r + 1}) - 1195$$

$$y = x \ln (x + \sqrt{1+x^r}) - \sqrt{1+x^r} - 1196$$

$$y = x \ln^{\gamma} (x + \sqrt{1+x^{\gamma}}) - \gamma \sqrt{1+x^{\gamma}} \ln (x + \sqrt{1+x^{\gamma}}) + \gamma x - 199$$

$$y = \frac{x}{\gamma} \sqrt{x^{\gamma} + a^{\gamma}} + \frac{a^{\gamma}}{\gamma} \ln (x + \sqrt{x^{\gamma} + a^{\gamma}}) - 199A$$

$$y = \frac{1}{\gamma \sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} - 199B$$

$$y = \frac{\gamma + \gamma x^{\gamma}}{x^{\xi}} \sqrt{1-x^{\gamma}} + \gamma \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^{\gamma}}}{x} - 199C$$

$$y = \frac{1}{\gamma} \operatorname{ctg}^{\gamma} x + \ln \sin x - 199D \qquad y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} - 199E$$

$$y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} - 199F \qquad y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{\gamma} + \frac{\pi}{\xi} \right) - 199G$$

$$y = -\frac{\cos x}{\gamma \sin^{\gamma} x} + \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}} - 199H$$

$$y = \ln \frac{b+a \cos x + \sqrt{b^{\gamma} - a^{\gamma} \sin x}}{a+b \cos x} \quad (\cdot \leq |a| < |b|) - 199I$$

$$y = \frac{1}{x} (\ln^{\gamma} x + \gamma \ln^{\gamma} x + \gamma \ln x + \gamma) - 199J$$

$$y = \frac{1}{\xi x^{\xi}} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{\gamma x^{\xi}} - 199K$$

$$y = \frac{\gamma}{\gamma} \left(1 - \sqrt{1+x^{\gamma}} \right)^{\gamma} + \gamma \ln \left(1 + \sqrt{1+x^{\gamma}} \right) - 199L$$

$$y = \ln \left[\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right] - 199M$$

$$y = x [\sin (\ln x) - \cos (\ln x)] - 199N$$

$$y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} - \cos x \times \ln \operatorname{tg} x - 199O$$

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^{\gamma}}{a} - 199P \qquad y = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{\gamma} - 199Q$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{\gamma}}{x} - 199R \qquad y = \operatorname{arc} \cos \frac{1-x}{\sqrt{\gamma}} - 199S$$

$$y = \sqrt{x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} - 199T$$

$$y = x + \sqrt{1-x^{\gamma}} \times \operatorname{arc} \cos \lambda - 199U$$

$$y = x \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} \quad - 919$$

$$y = \operatorname{arccos} \sqrt{1-x^r} \quad - 924$$

$$y = \operatorname{arccos} \frac{1}{x} \quad - 920$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} \quad - 920$$

$$y = \operatorname{arcsin}(\sin x) \quad - 921$$

$$y = \operatorname{arccos}(\cos^r x) \quad - 922$$

$$y = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right) \quad - 926$$

$$y = \operatorname{arcsin}(\sin x - \cos x) \quad - 923$$

$$y = \frac{r}{\sqrt{a^r - b^r}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{r} \right) \quad (a > b \geq 0) \quad - 927$$

$$y = \frac{1}{\operatorname{arccos}^r(x^r)} \quad - 929$$

$$y = \operatorname{arcsin} \frac{1-x^r}{1+x^r} \quad - 928$$

$$y = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{r} \operatorname{arctg}(x^r) \quad - 920$$

$$y = \ln(1 + \sin^r x) - r \sin x \times \operatorname{arctg}(\sin x) \quad - 921$$

$$y = \ln \left(\operatorname{arccos} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \quad - 922$$

$$y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^r+b^r}} + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \quad - 923$$

$$y = \frac{x}{r} \sqrt{a^r - x^r} + \frac{a^r}{r} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} \quad (a > 0) \quad - 924$$

$$y = \frac{1}{r} \ln \frac{(x+1)^r}{x^r - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{1-r}} \operatorname{arctg} \frac{rx-1}{\sqrt{r}} \quad - 920$$

$$y = \frac{1}{r \sqrt{r}} \ln \frac{x^r + x \sqrt{r+1}}{x^r - x \sqrt{r+1}} - \frac{1}{r \sqrt{r}} \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{r}}{x^r - 1} \quad - 927$$

$$y = x(\operatorname{arcsin} x)^r + r \sqrt{1-x^r} \operatorname{arcsin} x - rx \quad - 927$$

$$y = \frac{\operatorname{arccos} x}{x} + \frac{1}{r} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^r}}{1 + \sqrt{1-x^r}} \quad - 928$$

$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^r - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^r - 1}} \quad - 929$$

$$y = \frac{\operatorname{arcsin} x}{\sqrt{1-x^r}} + \frac{1}{r} \ln \frac{1-x}{1+x} \quad - 920$$

$$y = \frac{1}{1-r} \ln \frac{x^r - x^r + 1}{(x^r + 1)^r} - \frac{1}{r \sqrt{r}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{r}}{rx^r - 1} \quad - 921$$

$$y = \frac{x^{\gamma}}{1+x^{\gamma}} - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x^{\gamma} - 947$$

$$y = \ln \frac{1 - \sqrt[\gamma]{x}}{\sqrt[\gamma]{1 + \sqrt[\gamma]{x} + \sqrt[\gamma]{x^{\gamma}}}} + \sqrt[\gamma]{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 + \sqrt[\gamma]{x}}{\sqrt[\gamma]{x}} - 947$$

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^{\gamma}}} - 948$$

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{a - \gamma x}{\gamma \sqrt{ax - x^{\gamma}}} \quad (a > \cdot) - 949$$

$$y = \frac{\gamma - x}{\gamma} \sqrt{1 - \gamma x - x^{\gamma}} + \gamma \operatorname{arc} \sin \frac{1+x}{\sqrt{\gamma}} - 947$$

$$y = \frac{1}{\xi} \ln \frac{\sqrt[{\xi}]{1+x^{\xi}+x}}{\sqrt[{\xi}]{1+x^{\xi}-x}} - \frac{1}{\gamma} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt[{\xi}]{1+x^{\xi}}}{x} - 949$$

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{tg}^{\gamma} x) - 948$$

$$y = \sqrt{1-x^{\gamma}} \times \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^{\gamma}}}{1 + \sqrt{1-x^{\gamma}}} + \sqrt{1-x^{\gamma}} + \operatorname{arc} \sin x - 949$$

$$y = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{\gamma} \ln(1+x^{\gamma}) - \frac{1}{\gamma} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^{\gamma} - 950$$

$$y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{\gamma x}}) - 951$$

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + \sqrt{1+x^{\gamma}}) - 952$$

$$y = \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x} \right) - 952$$

$$y = \frac{1}{\xi \sqrt{\gamma}} \ln \frac{\sqrt{x^{\gamma} + \gamma - x \sqrt{\gamma}}}{\sqrt{x^{\gamma} + \gamma + x \sqrt{\gamma}}} + \frac{1}{\gamma} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^{\gamma} + \gamma}}{x} - 953$$

$$y = \frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x \sqrt{\gamma}}{\sqrt{1+x^{\xi}}} - \frac{1}{\xi \sqrt{\gamma}} \ln \frac{\sqrt{1+x^{\xi}} - x \sqrt{\gamma}}{\sqrt{1+x^{\xi}} + x \sqrt{\gamma}} - 950$$

$$y = \frac{x \sqrt{1-x^{\gamma}}}{1+x^{\gamma}} - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x \sqrt{\gamma}}{\sqrt{1-x^{\gamma}}} - 957$$

$$y = \operatorname{arc} \cos(\sin x^{\gamma} - \cos x^{\gamma}) - 957$$

$$y = \arcsin(\sin x^r) + \arccos(\cos x^r) - 958$$

$$y = e^{m \arcsin x} [\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x)] - 959$$

$$y = \arctg e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{rx}}{e^{rx} + 1}} - 960$$

$$y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + x^6}}} - 960,1$$

$$y = \operatorname{arccotg} \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} \frac{1}{x^r}}} - 960,2$$

$$y = \ln^r \left(\sec^r \sqrt{x} \right) - 960,3$$

$$y = x + x^x + x^{x^x} \quad (x > 0) - 961$$

$$y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} \quad (x > 0, a > 0) - 962$$

$$y = \sqrt[x]{x} \quad (x > 0) - 963$$

$$y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x} - 964$$

$$y = (\ln x)^x : x^{\ln x} - 965$$

$$y = \left[\frac{\arcsin(\sin^r x)}{\arccos(\cos^r x)} \right]^{\operatorname{arctg}^r x} - 965,1$$

$$y = \log_x e - 966$$

$$y = \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{r \operatorname{ch}^r x} - 967$$

$$y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^r x} - \ln \left(\operatorname{cth} \frac{x}{r} \right) - 968$$

$$y = \arctg(\operatorname{th} x) - 969$$

$$y = \arccos \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right) - 970$$

$$y = \frac{b}{a} x + \frac{r \sqrt{a^r - b^r}}{a} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{th} \frac{x}{r} \right) \quad (0 \leq |b| < a) - 971$$

مشتق تابع - 972

$$y = \ln(\cos^r x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$$

را با وارد کردن متغیر واسطه $u = \cos^r x$ پیدا کنید.

با روش ذکر شده در مثال ۹۷۲ مطلوبست محاسبه مشتق توابع زیر :

$$y = (\arccos x)^2 \left[\ln^2 (\arccos x) - \ln (\arccos x) + \frac{1}{2} \right] - 973$$

$$y = \frac{1}{2} \arctg \left(\sqrt{1+x^2} \right) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1} - 974$$

$$y = \frac{e^{-x^2} \arcsin (e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2} \ln (1 - e^{-2x^2}) - 975$$

$$y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \arctg a^{-x} - 976$$

۹۷۷- مطلوبست محاسبه مشتق و رسم نمودار توابع و نمودار مشتق آنها در صورتیکه :

الف) $y = |x|$ ؛ ب) $y = x|x|$ ؛ پ) $y = \ln|x|$ ؛
 ۹۷۸- مشتق توابع زیر را پیدا کنید :

الف) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$ ؛ ب) $y = |\sin^3 x|$ ؛
 پ) $y = \arccos \frac{1}{|x|}$ ؛

ت) $y = [x] \sin^2 \pi x$

مطلوبست محاسبه مشتق و رسم نمودار توابع و نمودار مشتق آنها در صورتیکه :

$$y = \begin{cases} 1-x & \text{بازای } -\infty < x < 1 \\ (1-x)(2-x) & \text{بازای } 1 \leq x \leq 2 \\ -(2-x) & \text{بازای } 2 < x < +\infty \end{cases} - 979$$

$$y = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{بازای } a \leq x \leq b \\ \cdot & \text{خارج از قطعه } [a, b] \end{cases} - 980$$

$$y = \begin{cases} x & \text{بازای } x < 0 \\ \ln(1+x) & \text{بازای } x \geq 0 \end{cases} - 981$$

$$y = \begin{cases} \arctg x & \text{بازای } |x| \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{بازای } |x| > 1 \end{cases} - 982$$

$$y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{بازای } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{e} & \text{بازای } |x| > 1 \end{cases} - 983$$

۹۸۴ - مشتق لگاریتم یک تابع مفروض را مشتق لگاریتمی این تابع می‌نامند :

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مطلوبست محاسبهٔ مشتق لگاریتمی تابع y در صورتیکه :

$$y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt{\frac{3-x}{(3+x)^2}} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (\text{الف})$$

$$; \quad y = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_n)^{\alpha_n} \quad (\text{پ})$$

$$. \quad y = (x + \sqrt{1+x^2})^n \quad (\text{ت})$$

۹۸۵ - فرض کنیم $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ توابع دیفرانسیل پذیری از x باشند . مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع y در صورتیکه :

$$; \quad y = \arctg \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)} \quad (\text{الف})$$

$$y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)} \quad (\psi(x) > 0 ; \varphi(x) \neq 0) \quad (\text{پ})$$

$$y = \log_{\varphi(x)} \psi(x) \quad (\psi(x) > 0 ; \varphi(x) > 0) \quad (\text{ت})$$

۹۸۶ - مطلوبست محاسبهٔ y' اگر :

$$; \quad y = f(e^x) \times e^{f(x)} \quad (\text{پ}) \quad ; \quad y = f(x^2) \quad (\text{الف})$$

$$y = f\{f[f(x)]\} \quad (\text{ت}) \quad ; \quad y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x) \quad (\text{ب})$$

که در آن $f(u)$ تابعی است دیفرانسیل پذیر .

۹۸۶,۱ - مطلوبست محاسبهٔ $f'(0)$ اگر :

$$f(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-1000)$$

۹۸۷ - قاعدهٔ مشتق گیری درمیان مرتبهٔ $n-1$ زیر را اثبات کنید :

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

۹۸۸ - مطلوبست محاسبهٔ $F'(x)$ اگر

$$F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$$

۹۸۹- مطلوبست محاسبه $F'(x)$ اگر

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$$

۹۹۰- نمودار تابعی داده شده است . نمودار تقریبی مشتق آنرا رسم کنید .
۹۹۱- نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{بازای } x \neq 0 \\ 0 & \text{بازای } x = 0 \end{cases}$$

دارای مشتق ناپیوسته است .
۹۹۲- با چه شرطی تابع

$$f(x) = x^n \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

(الف) بازای $x = 0$ پیوسته است ؟

(ب) بازای $x = 0$ دیفرانسیل پذیر است ؟

(پ) بازای $x = 0$ دارای مشتق پیوسته است ؟

۹۹۳- با چه شرطی تابع

$$f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} \quad (x \neq 0) \quad \text{و} \quad f(0) = 0 \quad (m > 0)$$

دارای : (الف) مشتق کراندار در همسایگی مبدأ مختصات است ؛ (ب) مشتق
ناکراندار در این همسایگی است ؟

۹۹۴- مطلوبست محاسبه $f'(a)$ اگر

$$f(x) = (x-a)\varphi(x)$$

که در آن تابع $\varphi(x)$ بازای $x = a$ پیوسته است .

۹۹۵- نشان دهید که تابع

$$f(x) = |x-a|\varphi(x)$$

که در آن $\varphi(x)$ تابع پیوسته‌ای است و $\varphi(a) \neq 0$ ، در نقطه a دارای مشتق
نیست .

مشتق‌های یکسویی $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ چقدر است ؟

۹۹۶- تابع پیوسته‌ای ذکر کنید که در نقاط مفروض a_1, a_2, \dots, a_n دارای مشتق نباشد.

۹۹۷- نشان دهید که تابع

$$f(x) = x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0) \quad \text{و} \quad f(0) = 0.$$

در همسایگی دلخواه نقطه $x = 0$ دارای نقاط دیفرانسیل ناپذیری میباشد ولی در خود این نقطه دیفرانسیل پذیر است.

شکل تقریبی نمودار این تابع را رسم کنید.

۹۹۸- نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 0, & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

فقط بازای $x = 0$ دارای مشتق است.

۹۹۹- دیفرانسیل پذیری توابع زیر را بررسی کنید:

الف) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$ ؛

ب) $y = |\cos x|$ ؛

پ) $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$ ؛

ت) $y = \arcsin(\cos x)$ ؛

$$y = \begin{cases} \frac{x-1}{4} (x+1)^2 & \text{بازای } |x| \leq 1 \\ |x| - 1 & \text{بازای } |x| > 1 \end{cases} \quad \text{ث)}$$

برای تابع $f(x)$ مطلوبست تعیین مشتق چپ $f'_-(x)$ و مشتق راست $f'_+(x)$

در صورتیکه:

$$f(x) = [x] \sin \pi x - 1001$$

$$f(x) = |x| - 1000$$

$$f(x) = x \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0) \quad \text{و} \quad f(0) = 0 - 1002$$

$$f(x) = \sqrt{\sin x^2} - 1003$$

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0 - 1004$$

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}} - 1005$$

$$f(x) = |\ln |x|| \quad (x \neq 0) - 1006$$

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} - 1007$$

$$f(x) = (x-2) \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} \quad (x \neq 2), \quad f(2) = 0 - 1008$$

۱۰۰۹ - نشان دهید که تابع $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ برای $x \neq 0$ و $f(0) = 0$ ،
 برای $x = 0$ پیوسته است ولی در این نقطه دارای مشتق چپ و
 راست نیست .

۱۰۰۹,۱ - فرض کنیم x_0 نقطهٔ انفصال نوع اول تابع $f(x)$ باشد . عبارات

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-0)}{h}$$

و

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0+0)}{h}$$

را مشتقات یکسویی (به ترتیب چپ و راست) تعمیم یافتهٔ تابع $f(x)$ در
 نقطهٔ x_0 اصطلاح میکنند .

مطلوبست تعیین $f'_-(x_0)$ و $f'_+(x_0)$ در نقطهٔ انفصال x_0 تابع $f(x)$
 در صورتیکه :

$$\text{الف) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x^2}}{x} \quad \text{ب) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{پ) } f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

۱۰۱۰ - فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{اگر } x \leq x_0 \\ ax + b, & \text{اگر } x > x_0 \end{cases}$$

ضرایب a و b را چگونه باید اختیار نمود تا در نقطهٔ $x = x_0$ ، تابع $f(x)$
 پیوسته و دیفرانسیبل پذیر باشد ؟

۱۰۱۱ - فرض کنیم

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{اگر } x \leq x_0 \\ ax + b, & \text{اگر } x > x_0 \end{cases}$$

که در آن تابع $f(x)$ بازای $x = x_0$ دیفرانسیل پذیر از چپ است .
 ضرایب a و b را چگونه باید اختیار نمود تا تابع $F(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته و دیفرانسیل پذیر باشد ؟

۱۰۱۲- بر روی قطعه $a \leq x \leq b$ التصاق دو نیم خط

$$y = k_1(x-a) \quad (-\infty < x < a) \quad \text{و} \quad y = k_2(x-b) \quad (b < x < +\infty)$$

را بکمک سهمی درجه سوم

$$y = A(x-a)(x-b)(x-c)$$

(که در آن پارامترهای A و c باید تعیین شوند) بسازید .

۱۰۱۳- قسمت منحنی $(|x| > c)$ را با سهمی $y = \frac{m^2}{|x|}$

$$y = a + bx^2 \quad (|x| \leq c)$$

(که در آن a و b پارامترهای نامعلومی میباشند) تکمیل کنید بطوریکه منحنی حاصل صاف باشد .

۱۰۱۴- آیا میتوان گفت که مجموع

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

در نقطه $x = x_0$ دارای مشتق نیست در صورتیکه : الف) تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای مشتق بوده و تابع $g(x)$ در این نقطه دارای مشتق نباشد ؛
 ب) هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه x_0 دارای مشتق نباشند ؟
 ۱۰۱۵- آیا میتوان گفت که حاصل ضرب

$$F(x) = f(x)g(x)$$

در نقطه $x = x_0$ دارای مشتق نیست در صورتیکه : الف) تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای مشتق باشد و تابع $g(x)$ در این نقطه دارای مشتق نباشد ؛
 ب) هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه x_0 دارای مشتق نباشد ؟
 مثالهای زیر را در نظر بگیرید : الف) $f(x) = x$ ؛ $g(x) = |x|$ ؛
 ب) $f(x) = |x|$ ؛ $g(x) = |x|$ که در آن $x_0 = 0$.

۱۰۱۶- راجع به دیفرانسیل پذیری تابع

$$F(x) = f(g(x))$$

در نقطه مفروض $x = x_0$ چه میتوان گفت در صورتیکه : الف) تابع $f(x)$ در نقطه $x = g(x_0)$ دارای مشتق باشد و تابع $g(x)$ در نقطه $x = x_0$ دارای

مشتق نباشد ؛ ب) تابع $f(x)$ در نقطه $x = g(x_0)$ دارای مشتق نباشد و تابع $g(x)$ در نقطه $x = x_0$ دارای مشتق باشد ؛ پ) تابع $f(x)$ در نقطه $x = g(x_0)$ و تابع $g(x)$ در نقطه $x = x_0$ دارای مشتق نباشند ؟
 مثال‌های زیر را در نظر بگیرید :

الف) $f(x) = x^2$ ، $g(x) = |x|$ ؛ ب) $f(x) = |x|$ ، $g(x) = x^2$ ؛
 پ) $f(x) = 2x + |x|$ ، $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$ ، که در آن $x_0 = 0$.
 ۱۰۱۷- در کدام نقاط نمودار تابع

$$y = x + \sqrt[3]{\sin x}$$

دارای مماس قائم است ؟

این نمودار را رسم کنید .

۱۰۱۸- آیا تابع $f(x)$ در نقطه انفصال خود میتواند دارای : الف) مشتق
 منتهای ؛ ب) مشتق نامنتهائی باشد ؟
 مثال $f(x) = \operatorname{sgn} x$ را در نظر بگیرید .

۱۰۱۹- اگر تابع $f(x)$ در بازه محدود (a, b) دیفرانسیل پذیر باشد و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

آیا حتماً

$$\lim_{x \rightarrow a} |f'(x)| = \infty \quad (2) \quad \text{؛} \quad \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty \quad (1)$$

مثال $f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$ بازای $x \rightarrow 0$ را در نظر بگیرید .

۱۰۲۰- اگر تابع $f(x)$ در فاصله محدود (a, b) دیفرانسیل پذیر باشد و

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty$$

آیا حتماً

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

مثال $f(x) = \sqrt[3]{x}$ بازای $x \rightarrow 0$ را در نظر بگیرید .

۱۰۲۱- فرض کنیم تابع $f(x)$ در فاصله $(x_0, +\infty)$ دیفرانسیل پذیر باشد و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وجود داشته باشد ، در این صورت آیا از این جا نتیجه

میشود که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ وجود دارد ؟

مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$$

۱۰۲۲- فرص کنیم تابع کراندار $f(x)$ در بازه $(x_0, +\infty)$ دیفرانسیل پذیر بوده و $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ وجود داشته باشد، آیا از این جا نتیجه میشود که

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ متناهی یا نامتناهی وجود دارد ؟

مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$f(x) = \cos(\ln x)$$

۱۰۲۳- آیا از طرفین نامساویهای تابعی میتوان مشتق گرفت ؟

۱۰۲۴- دستورهای محاسبهٔ مجموعهای زیر را بدست آورید :

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

و

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$$

راهنمایی - $(x + x^2 + \dots + x^n)'$ را در نظر بگیرید .

۱۰۲۵- دستورهای محاسبهٔ مجموعهای زیر را بدست آورید :

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$$

و

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \dots + n\cos nx$$

۱۰۲۵,۱- دستور محاسبهٔ مجموع زیر را بدست آورید :

$$S_n = \operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} 2x + \dots + n\operatorname{ch} nx$$

راهنمایی - $(\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \dots + \operatorname{sh} nx)'$

۱۰۲۶- با استفاده از اتحاد

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

دستور محاسبهٔ مجموع زیر را بدست آورید :

$$S_n = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

۱۰۲۷- ثابت کنید که مشتق یک تابع دیفرانسیل پذیر زوج ، یک تابع فرد و مشتق یک تابع دیفرانسیل پذیر فرد یک تابع زوج است .
این حقیقت را تعبیر هندسی کنید .

۱۰۲۸- ثابت کنید که مشتق یک تابع دیفرانسیل پذیر دوره‌ای یک تابع دوره‌ای با همان دوره است .

۱۰۲۹- اگر شعاع دایره‌ای بطور یکنواخت با سرعت 2 cm/sec افزایش یابد ، در آن صورت سرعت افزایش مساحت دایره در لحظه‌ایکه $R = 10 \text{ cm}$ گردد چقدر خواهد بود ؟

۱۰۳۰- اگر یک ضلع مربع مستطیل با سرعت 1 m/sec تقلیل و ضلع دیگر آن با سرعت 2 m/sec افزایش یابد ، در آن صورت سرعت تغییر مساحت و قطر مربع مستطیل در لحظه‌ایکه ضلع اولی $x = 20 \text{ m}$ و ضلع دومی $y = 10 \text{ m}$ گردد چقدر خواهد بود ؟

۱۰۳۱- از یک بندر و در یک زمان کشتی A در سمت شمال و کشتی B در سمت مشرق حرکت میکنند . فاصله بین آنها با چه سرعتی ترقی میکند در صورتیکه سرعت کشتی A برابر با 30 km/h و سرعت کشتی B برابر 40 km/h میباشد ؟

۱۰۳۲- فرص کنیم

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{اگر } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 2, & \text{اگر } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

و $S(x)$ مساحت سطح محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور Ox و خط عمود بر محور Ox و مار بر نقطه $(x, f(x))$ باشد .
عبارت تحلیلی تابع $S(x)$ را تشکیل دهید و مشتق $S'(x)$ را محاسبه و نمودار تابع $y = S'(x)$ را رسم کنید .

۱۰۳۳- تابع $S(x)$ عبارتست از مساحت سطح محدود به کمان دایره $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ و محور Ox و دو عمود بر محور Ox مار بر نقاط $(-a, 0)$ و $(a, 0)$.

عبارت تحلیلی تابع $S(x)$ را تشکیل داده و مشتق $S'(x)$ آنرا محاسبه و نمودار این مشتق را رسم کنید .

بخش ۲- مشتق توابع معکوس . مشتق توابع پارامتری .

مشتق توابع ضمنی

بند ۱- مشتق تابع معکوس . تابع دیفرانسیل پذیر $y = f(x)$ ($a < x < b$)
یا مشتق $f'(x) \neq 0$ دارای تابع معکوس پیوسته تک مقداری $x = f^{-1}(y)$ است ،
خمناً تابع معکوس نیز دیفرانسیل پذیر و دستور زیر درست است :

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

بند ۲ - مشتق تابع پارامتری . دستگاه معادلات

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array} \right\} (\alpha < t < \beta)$$

که در آن $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ توابع دیفرانسیل پذیر و $\varphi'(t) \neq 0$ است و y را در حوزه‌ای بعنوان تابع تک مقداری دیفرانسیل پذیر از x :

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

شخص میسازد . بعلاوه مشتق این تابع از دستور زیر بدست میآید :

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

بند ۳ - مشتق تابع ضمنی . اگر تابع دیفرانسیل پذیر $y = y(x)$ در معادله^{*}

$$F(x, y) = 0$$

صادق باشد در این صورت مشتق $y' = y'(x)$ این تابع ضمنی را میتوان از معادله^{*}

$$\frac{d}{dx} [F(x, y)] = 0$$

که در آن $F(x, y)$ بعنوان تابع مرکبی از متغیر x در نظر گرفته میشود بدست آورد .

(برای توضیح بیشتر در باره مشتق گیری توابع ضمنی قسمت دوم فصل ۶ بخش ۳ را ببینید) .

۱۰۳۴ - نشان دهید که تابع تک مقداری $y = y(x)$ تعریف شده با معادله^{*}

$$y^3 + 3y = x$$

وجود دارد . مشتق y'_x آنرا بدست آورید .

۱۰۳۵ - نشان دهید که تابع تک مقداری $y = y(x)$ تعریف شده با معادله^{*}

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leq \varepsilon < 1)$$

وجود دارد . مشتق y'_x آنرا بدست آورید .

۱۰۳۶ - مطلوبست تعیین حوزه وجود تابع معکوس $x = x(y)$ و محاسبه مشتق آن در صورتیکه :

الف) $y = x + \ln x$ ($x > 0$) ؛ $y = \operatorname{sh} x$ (پ)
 ب) $y = x + e^x$ ؛ $y = \operatorname{th} x$ (ت)

۱۰۳۷ - شاخه‌های پیوسته تک‌مقداری تابع معکوس $x = x(y)$ را جدا نموده و مشتق آنها را محاسبه و نمودار آنها را رسم کنید در صورتیکه :

الف) $y = 2x^2 - x^4$ ؛ $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ (ب)
 پ) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$

۱۰۳۸ - طرح نمودار تابع $y = y(x)$ را رسم و مشتق y'_x آنرا پیدا کنید در صورتیکه $x = -1 + 2t - t^2$ ؛ $y = 2 - 3t + t^3$. مقدار $y'_x(x)$ بازای $x = 0$ و $x = -1$ چقدر است ؟ در کدام نقطه $M(x, y)$ مشتق $y'_x(x) = 0$ ؟

مشتق y'_x توابع زیر را پیدا کنید (پارامترها مثبتند) :

$x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}$, $y = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}$ - ۱۰۳۹

$x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$ - ۱۰۴۰

$x = a \cos t$, $y = b \sin t$ - ۱۰۴۱

$x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$ - ۱۰۴۲

$x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ - ۱۰۴۳

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ - ۱۰۴۴

$x = e^{2t} \cos^2 t$, $y = e^{2t} \sin^2 t$ - ۱۰۴۵

$x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ - ۱۰۴۶

۱۰۴۷ - نشان دهید که تابع $y = y(x)$ که با دستگاه معادلات زیر مشخص میگردد

$x = 2t + |t|$, $y = et^2 + \varepsilon t|t|$

بازای $t = 0$ دیفرانسیل پذیر است منتها مشتق آن را در این نقطه با دستورهای معمولی نمیتوان بدست آورد .

مشتقات y'_x توابع زیر را که بصورت ضمنی داده شده‌اند پیدا کنید :

$x^2 + 2xy - y^2 = 2x$ - ۱۰۴۸

مقدار مشتق y' بازای $x = 2$ و $y = 4$ و بازای $x = 2$ و $y = 0$ چقدر است ؟

$$y^2 = 2px - 1049 \text{ (سهی)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - 1050 \text{ (بیضی)}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} - 1051 \text{ (سهی)}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - 1052 \text{ (آستروئید)}$$

$$\text{arc tg } \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - 1053 \text{ (حلزونی لگاریتمی)}$$

۱۰۵۴ - مطلوبست محاسبه y'_x در صورتیکه :

الف) $r = a\varphi$ (حلزونی ارشمیدس) ؛

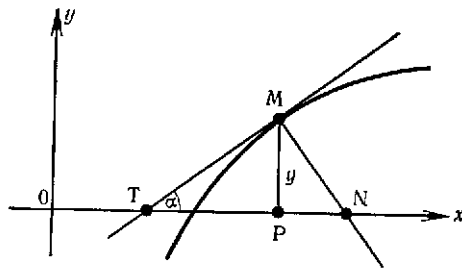
ب) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (کاردیوئید) ؛

پ) $r = ae^{m\varphi}$ (حلزونی لگاریتمی)

که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\varphi = \text{arc tg } \frac{y}{x}$ مختصات قطبی میباشند .

بخش ۳ - معنای هندسی مشتق .

بند ۱ - معادلات مماس و قائم . معادلات مماس MT و قائم MN بر نمودار تابع دیفرانسیل پذیر $y = f(x)$ در نقطه $M(x, y)$ (شکل ۷) به ترتیب عبارتند از :



شکل ۷

$$Y - y = y'(X - x)$$

و

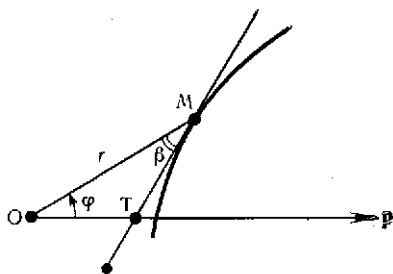
$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

که در آن X, Y مختصات جاری مماس یا قائم و $y' = f'(x)$ مقدار مشتق در نقطه تماس است .

بند ۲ - قطعات مماس و قائم . منظور از قطعات مماس و قائم : تحت مماس PT ؛ تحت قائم PN ، مماس MT ، قائم MN میباشد (شکل ۷) . با توجه به $tg \alpha = y'$ برای آنها مقادیر زیر بدست میآید :

$$PN = |yy'| \quad , \quad PT = \left| \frac{y}{y'} \right|$$

$$MN = |y| \sqrt{1 + y'^2} \quad , \quad MT = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2}$$



شکل ۸

بند ۳ - زاویه بین مماس و شعاع حامل نقطه تماس . اگر $r = f(\varphi)$ معادله منحنی در دستگاه مختصات قطبی و β زاویه حاصله از مماس MT و شعاع حامل OM نقطه تماس M باشد (شکل ۸) در اینصورت

$$tg \beta = \frac{r}{r'}$$

۱۰۵۵ - معادلات مماس و قائم بر منحنی

$$y = (x + 1) \sqrt[3]{3 - x}$$

را در نقاط : الف) $A(-1, 0)$ ؛ ب) $B(2, 3)$ ؛ پ) $C(3, 0)$ بنویسید .

۱۰۵۶ - در کدام نقاط منحنی

$$y = 2 + y - x^2$$

مماس بر آن الف) موازی محور Ox است ؛ ب) موازی نیمساز ربع اول است ؟
۱۰۵۷ - ثابت کنید که سهمی

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (x_1 < x_2, a \neq 0)$$

محور Ox را تحت زوایای متساوی α و β ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ و $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) قطع میکند.

۱۰۵۸ - قسمتهائی را از منحنی

$$y = r \sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

تعیین کنید که در آن «شیب منحنی» (یعنی $|y'|$) از ۱ تجاوز کند.

۱۰۵۹ - تفاضل توابع

$$y = x \quad \text{و} \quad y_1 = x + 0,01 \sin 1000 \pi x$$

از ۰,۰۱ بیشتر نیست. راجع به تفاضل ماگریمال مشتق‌های این توابع چه میتوان گفت؟

نمودار نظیر آنها را رسم کنید.

۱۰۶۰ - منحنی

$$y = \ln x$$

محور Ox را تحت چه زاویه‌ای قطع میکنید؟

۱۰۶۱ - تحت چه زاویه‌هائی منحنی‌های

$$y = x^2 \quad \text{و} \quad x = y^2$$

یکدیگر را قطع میکنند؟

۱۰۶۲ - تحت چه زوایائی منحنی‌های

$$y = \cos x \quad \text{و} \quad y = \sin x$$

یکدیگر را قطع میکنند؟

۱۰۶۳ - بازای چه انتخابی از پارامتر n منحنی

$$y = \operatorname{arctg} nx \quad (n > 0)$$

محور Ox را تحت زاویهٔ بزرگتر از ۸۹° قطع میکند؟

۱۰۶۳,۱ - نشان دهید که منحنی

$$y = |x|^a$$

(الف) بازای $0 < \alpha < 1$ بر محور Oy مماس است؟

(ب) بازای $1 < \alpha < +\infty$ بر محور Ox مماس است.

۲، ۱۰۶۳ - نشان دهید که منحنی

$$y = \begin{cases} |x|^a, & x \neq 0 \text{ اگر} \\ 1, & x = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

بر محور Oy در نقطه $A(0, 1)$ مماس است .

۱۰۶۴ - زاویه بین مماس‌های چپ و راست بر منحنی‌های :

(الف) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}$ در نقطه $x = 0$ ؛

(ب) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ در نقطه $x = 1$ ، را تعیین کنید .

۱۰۶۵ - نشان دهید که مماس بر حلزونی لگاریتمی

$$r = ae^{m\phi}$$

(m و a ثابتند) با شعاع حامل نقطه تماس زاویه ثابتی میسازد .

۱۰۶۶ - با تعیین طول تحت مماس بر منحنی

$$y = ax^n$$

روشی برای رسم مماس بر این منحنی بیان کنید .

۱۰۶۷ - در سهمی

$$y^2 = 2px$$

ثابت کنید که :

(الف) تحت مماس مساوی دو برابر طول نقطه تماس است ؛ (ب) تحت قائم

مقدار ثابتی دارد . روشی برای رسم مماس بر سهمی بیان کنید .

۱۰۶۸ - ثابت کنید که منحنی نمایی

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

دارای تحت مماس ثابتی است . روشی برای رسم مماس بر منحنی نمایی بیان کنید .

۱۰۶۹ - طول قائم بر منحنی زنجیری

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

را در نقطه دلخواه آن $M(x, y)$ تعیین کنید .

۱۰۷۰ - ثابت کنید که در آستروئید

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$$

طول قطعه مماس محدود به محورهای مختصات مقدار ثابتی است .

۱۰۷۱- بازای چه رابطه‌ای بین ضرایب a ، b و c سهمی

$$y = ax^2 + bx + c$$

بر محور Ox مماس میشود ؟

۱۰۷۲- بازای چه شرطی سهمی درجه سوم

$$y = x^3 + px + q$$

بر محور Ox مماس است ؟

۱۰۷۳- بازای چه مقدار پارامتر a سهمی

$$y = ax^2$$

بر منحنی $y = \ln x$ مماس است ؟

۱۰۷۴- ثابت کنید که منحنی‌های

$$y = f(x) \quad (f(x) > 0)$$

و

$$y = f(x) \sin ax$$

که در آن $f(x)$ تابعی است دایفرانسیبل پذیر ، در نقاط مشترک بر هم مماس هستند .

۱۰۷۵- نشان دهید که دسته هذلولی‌های

$$x^2 - y^2 = a$$

و

$$xy = b$$

شبکه متعامد تشکیل میدهند یعنی منحنی‌های این دسته‌ها تحت زاویه قائم متقاطعند .

۱۰۷۶- ثابت کنید که دسته سهمیهای

$$y^2 = \pm a(a - x) \quad (a > 0)$$

و

$$y^2 = \pm b(b + x) \quad (b > 0)$$

شبکه متعامدی تشکیل میدهند .

۱۰۷۷- معادلات مماس و قائم بر منحنی

$$x = 2t - t^2, \quad y = 2t - t^3$$

را در نقاط : الف) $t = 0$ ؛ ب) $t = 1$ بنویسید .

۱۰۷۸ - معادلات مماس و قائم بر منحنی

$$x = \frac{2t+t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t-t^2}{1+t^2}$$

را در نقاط: الف) $t=0$ ؛ ب) $t=1$ ؛ پ) $t=\infty$ بنویسید.
۱۰۷۹ - معادله مماس بر سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

را در نقطه اختیاری $t=t_0$ بنویسید. روش رسم مماس بر سیکلوئید را بیان کنید.

۱۰۸۰ - ثابت کنید که تراکتریس

$$x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t \quad (0 < t < \pi, a > 0)$$

دارای قطعه مماس بطول ثابتی است.

معادلات مماس و قائم بر منحنی‌های زیر را در نقطه داده شده بنویسید.

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, \quad M(6; 6, 4) - 1081$$

$$xy + \ln y = 1, \quad M(1; 1) - 1082$$

بخش ۴ - دیفرانسیل تابع

بند ۱ - دیفرانسیل تابع. اگر نمو تابع $y = f(x)$ از متغیر مستقل x را بتوان بشکل

$$\Delta y = A(x) dx + o(dx)$$

نمایش داد که در آن $dx = \Delta x$ ، در آنصورت بخش اصلی خطی این نمو را دیفرانسیل تابع y اصطلاح میکنند:

$$dy = A(x) dx$$

برای وجود دیفرانسیل تابع $y = f(x)$ لازم و کافی است که مشتق منتهای $y' = f'(x)$ وجود داشته باشد، ضمناً داریم:

$$(1) \quad dy = y' dx$$

دستور (۱) در حالتیکه متغیر x تابعی از متغیر مستقل جدیدی باشد نیز معتبر است (خاصیت تغییرناپذیری دیفرانسیل اول).

بند ۲- برآورد نموهای کوچک تابع . برای محاسبه نموهای کوچک تابع دیفرانسیل پذیر $f(x)$ میتوان دستور

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$$

را مورد استفاده قرار داد که خطای نسبی آن با شرط $f'(x) \neq 0$ بازای $|\Delta x|$ بانداژه کافی کوچک هر قدر که بخواهید کوچک است .
 بخصوص اگر متغیر مستقل x با خطای مطلق حد $|\Delta x|$ معین شود در آنصورت Δy و δy بترتیب خطاهای مطلق و نسبی حد تابع $y = f(x)$ بطور تقریبی با دستورهایی زیر بیان میشوند :

$$\Delta y = y' \Delta x$$

و

$$\delta y = |\ln|y||' \Delta x = \left| \frac{y'}{y} \right| \Delta x$$

۱۰۸۳- برای تابع

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

مطلوبست محاسبه : (۱) $\Delta f(1)$ ؛ (۲) $df(1)$ و مقایسه آنها در صورتیکه :
 الف) $\Delta x = 1$ ؛ ب) $\Delta x = 0,1$ ؛ پ) $\Delta x = 0,01$.
 ۱۰۸۴- معادله حرکتی با دستور

$$x = 0,5t^2$$

داده شده است که در آن t بر حسب ثانیه و x بر حسب متر میباشد .
 برای لحظه زمان $t = 2 \text{ sec}$ مطلوبست تعیین Δx نمو مسافت و dx دیفرانسیل مسافت و مقایسه آنها در صورتیکه :

الف) $\Delta t = 1 \text{ sec}$ ؛ ب) $\Delta t = 0,1 \text{ sec}$ ؛ پ) $\Delta t = 0,01 \text{ sec}$

دیفرانسیل توابع y زیر را پیدا کنید :

$$y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| - 1088$$

$$y = \frac{1}{x} - 1085$$

$$y = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a \neq 0) - 1089$$

$$y = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} \quad (a \neq 0) - 1086$$

$$y = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} - 1087$$

۱۰۹۰- مطلوبست تعیین

الف) $d(xe^x)$ (ب) $d(\sin x - x \cos x)$

$$\begin{array}{ll}
 d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \text{ (ج)} & d\left(\frac{1}{x^3}\right) \text{ (پ)} \\
 d \ln(1-x^2) \text{ (چ)} & d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) \text{ (ت)} \\
 d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right) \text{ (ح)} & d(\sqrt{a^2+x^2}) \text{ (ث)} \\
 d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|\right] \text{ (خ)} &
 \end{array}$$

بفرض آنکه u ، v ، w توابع دیفرانسیل پذیری از x باشند مطلوبست تعیین دیفرانسیل تابع y در صورتیکه :

$$\begin{array}{ll}
 y = \arctg \frac{u}{v} - 1094 & y = uvw - 1091 \\
 y = \ln \sqrt{u^2 + v^2} - 1095 & y = \frac{u}{v^2} - 1092 \\
 y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} - 1093 & \\
 & 1096 - \text{مطلوبست محاسبه:}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)} \text{ (ت)} & \frac{d}{dx^3} (x^3 - 2x^6 - x^9) \text{ (الف)} \\
 \frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)} \text{ (ث)} & \frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \text{ (ب)} \\
 & \frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} \text{ (پ)}
 \end{array}$$

1097 - در قطاع دایره‌ای بشعاع $R = 100 \text{ cm}$ زاویه مرکزی $\alpha = 60^\circ$ است. در صورتیکه : (الف) شعاع دایره 1 cm بزرگتر شود ؛ (ب) زاویه α کوچکتر گردد ، تغییرات مساحت قطاع چقدر است ؟
جواب دقیق و تقریبی را بدهید .

1098 - دوره تناوب آونگ (بر حسب ثانیه) با دستور

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

تعیین میشود که در آن l طول آونگ به سانتیمتر و $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ شتاب ثقل است .

طول $l = 20 \text{ cm}$ آونگ را چقدر باید تغییر داد تا دوره تناوب T آونگ بانداژه 0.05 sec بیشتر شود ؟

با تعویض نمو تابع با ديفرانسیل ، مقادیر زیر را بطور تقریبی پیدا کنید :

$$\begin{array}{ll} \cos 101^\circ - 1101 & \sqrt[3]{1,02 - 1099} \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1,05 - 1102 & \sin 29^\circ - 1100 \\ \operatorname{lg} 11 - 1103 & \end{array}$$

۱۱۰۴ - دستور تقریبی زیر را ثابت کنید :

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a > 0)$$

که در آن $a \ll |x|$ (رابطه $A \ll B$ بین A و B مثبت بدان معناست که A در مقایسه با B خیلی کوچک است) .
بکمک این دستور بطور تقریبی عبارات :

الف) $\sqrt{5}$ ؛ ب) $\sqrt{34}$ ؛ پ) $\sqrt{120}$ را محاسبه نموده و با مقادیر داده شده در جدول مقایسه کنید .
۱، ۱۱۰۴ - ثابت کنید

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - r \quad (a > 0, x > 0)$$

که در آن

$$0 < r < \frac{x^2}{8a^3}$$

۱۱۰۵ - دستور تقریبی زیر را ثابت کنید

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0)$$

که در آن $|x| \gg a$.

بکمک این دستور عبارتهای زیر را بطور تقریبی حساب کنید :

$$\sqrt[10]{10000} \quad \text{الف) } \sqrt[3]{9} \quad \text{ب) } \sqrt[4]{80} \quad \text{پ) } \sqrt[5]{100} \quad \text{ت) } \sqrt[10]{10000}$$

۱۱۰۶ - سربعی بضلع $m \pm 0,05 m$ ، $x = 2,4 m$ مفروض است . یا چه خطای

مطلق و نسبی حد میتوان مساحت این مربع را محاسبه نمود ؟

۱۱۰۷ - یا چه خطای نسبی مجاز شعاع R کره را اندازه بگیریم تا حجم آن با

دقت تا ۱٪ تعیین گردد ؟

۱۱۰۸ - برای تعیین شتاب ثقل بکمک نوسان آونگ از دستور

$$g = \frac{2\pi^2 l}{T^2}$$

استفاده میشود که در آن l طول آونگ و T دوره تناوب کامل نوسان آونگ است. خطای نسبی δ در اندازه گیری (الف) طول l ؛ (ب) دوره تناوب T ، چه تاثیری در مقدار g دارد؟

۱۱۰۹- مطلوبست تعیین خطای مطلق لگاریتم دهمی عدد $x (x > 0)$ در صورتیکه خطای نسبی این عدد δ باشد.

۱۱۱۰- ثابت کنید که دقت تعیین زوایا از روی جدول لگاریتم تانژانت بیشتر از جدول لگاریتم سینوس با همان تعداد ارقام دهمی میباشد.

بخش ۵- مشتق و دیفرانسیل مراتب بالاتر

بند ۱- تعاریف پایه. مشتق های مراتب بالاتر تابع $y = f(x)$ بطور پیاپی با روابط زیر (با فرض آنکه اعمال نظیر دارای معنا باشند!) تعریف میشوند:

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n = 2, 3, \dots)$$

اگر تابع $f(x)$ دارای مشتق پیوسته $f^{(n)}(x)$ روی بازه (a, b) باشد بطور خلاصه می نویسند: $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$. بویژه اگر $f(x)$ دارای مشتقات پیوسته از هر مرتبه روی (a, b) باشد در آنصورت نگارش $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ را بکار میبرند.

دیفرانسیل های مراتب بالاتر تابع $y = f(x)$ بطور پیاپی از دستورهای زیر تعیین میشوند

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

که در آن $d'y = dy = y' dx$ اختیار شده است. اگر x متغیر مستقلی باشد در آنصورت فرض میشود:

$$d^2 x = d^3 x = \dots = 0$$

در این حالت دستورهای زیر درست میباشند:

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{و} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

بند ۲- دستورهای پایه

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0); \quad (e^x)^{(n)} = e^x - I$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - II$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) - \text{III}$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1) \dots (m-n+1)x^{m-n} - \text{IV}$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} - \text{V}$$

بند ۳- دستور لایب نیتز . اگر توابع $u = \varphi(x)$ و $v = \psi(x)$ دارای مشتقات مرتبه n -ام (n بار دیفرانسیل پذیر) باشد در آنصورت

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$$

که در آن $u^{(0)} = u$ و $v^{(0)} = v$ و تعداد ترکیب‌های n عنصر i به i می‌باشد .

بطریق مشابهی برای دیفرانسیل $d^n(uv)$ داریم :

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^n C_n^i d^{n-i}u d^i v$$

که در آن $d \cdot u = u$ و $d \cdot v = v$ فرض شده است .

مطلوبست تعیین y'' در صورتیکه :

$$y = (1+x^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 1115$$

$$y = x\sqrt{1+x^2} - 1116$$

$$y = \frac{\operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}} - 1117$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1118$$

$$y = x \ln x - 1119$$

$$y = e^{-x^2} - 1120$$

$$y = \ln f(x) - 1121$$

$$y = \operatorname{tg} x - 1122$$

$$y = x [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] - 1123$$

۱۱۲۰- مطلوبست محاسبه $y(0)$ و $y'(0)$ و $y''(0)$ در صورتیکه

$$y = e^{\sin x} \cos(\sin x)$$

فرض کنیم $u = \varphi(x)$ و $v = \psi(x)$ توابع دو بار دیفرانسیل پذیر باشند :

مطلوبست تعیین y'' در صورتیکه :

$$y = \sqrt{u^2 + v^2} - 1124$$

$$y = u^2 - 1125$$

$$y = u^v \quad (u > 0) - 1126$$

$$y = \ln \frac{u}{v} - 1127$$

فرض کنیم $f(x)$ تابع سه بار دیفرانسیل پذیری باشد. مطلوبست تعیین y' و y''' در صورتیکه :

$$y = f(e^x) - 1127 \qquad y = f(x^2) - 1125$$

$$y = f(\ln x) - 1128 \qquad y = f\left(\frac{1}{x}\right) - 1126$$

۱۱۲۹- $y = f(\varphi(x))$ که در آن $\varphi(x)$ تابعی است به تعداد کافی بار دیفرانسیل پذیر.

۱۱۳۰- مطلوبست d^2y برای تابع

$$y = e^x$$

در دو حالت : الف) x متغیر مستقلی است ؛ ب) x آرگومان واسطه است.

با در نظر گرفتن x بعنوان متغیر مستقل مطلوبست تعیین d^2y در صورتیکه :

$$y = \sqrt{1+x^2} - 1131 \qquad y = \frac{\ln x}{x} - 1132$$

$$y = x^x - 1133$$

فرض کنیم u و v توابع دو بار دیفرانسیل پذیری از متغیر x باشند ، مطلوبست تعیین d^2y در صورتیکه :

$$y = uv - 1134 \qquad y = \frac{u}{v} - 1135$$

۱۱۳۶- $y = u^m v^n$ (m و n ثابتند).

$$y = a^u \quad (a > 0) - 1137 \qquad y = \arctg \frac{u}{v} - 1139$$

$$y = \ln \sqrt{u^2 + v^2} - 1138$$

مطلوبست تعیین مشتق‌های y'_x ، y''_x ، y'''_x از تابع $y = y(x)$ که

بصورت پارامتری داده شده است اگر :

$$x = \tau t - t^2, \quad y = \tau t - t^3 - 1140$$

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t - 1141$$

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) - 1142$$

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t - 1143$$

$$x = f(t), \quad y = tf'(t) - f(t) - 1144$$

۱۱۴۵- فرض کنیم تابع $y = f(x)$ به تعداد کافی بار دیفرانسیل پذیر

باشد. مطلوبست تعیین مشتقات x' ، x'' ، x''' ، $x^{(4)}$ از تابع

معکوس $x = f^{-1}(y)$ بفرض آنکه این مشتقات وجود دارند.

مطلوبست تعیین y'_x ، y''_{x^2} ، y'''_{x^3} از تابع $y = y(x)$ که بصورت ضمنی داده شده است :

۱۱۴۶ - $x^2 + y^2 = 25$. مقادیر y' و y'' و y''' در نقطه $M(3, 4)$ چقدرند ؟

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \quad 1148 \quad y^2 = 2px - 1147$$

مطلوبست تعیین y'_x و y''_{x^2} در صورتیکه :

$$y^2 + 2 \ln y = x^2 - 1149$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\arctg \frac{y}{x}} \quad (a > 0) - 1150$$

۱۱۵۱ - فرض کنیم تابع $f(x)$ معین و بازای $x \leq x_0$ دو بار دیفرانسیل پذیر باشد . ضرایب a ، b و c را چگونه باید اختیار نمود تا تابع

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{اگر } x \leq x_0 \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & \text{اگر } x > x_0 \end{cases}$$

دو بار دیفرانسیل پذیر باشد .

۱۱۵۲ - قانون حرکت مستقیم‌الخط نقطه‌ای عبارت است از

$$s = 10 + 20t - 5t^2$$

مطلوبست تعیین سرعت و شتاب حرکت . مقدار سرعت و شتاب در لحظه $t = 2$ چقدر است ؟

۱۱۵۳ - نقطه $M(x, y)$ با حرکت یکنواخت دایره $x^2 + y^2 = a^2$ را در T ثانیه یک دور میزند . مطلوبست سرعت v و شتاب z تصویر نقطه M روی محور Ox در صورتیکه در لحظه $t = 0$ نقطه وضع $M(a, 0)$ را دارا باشد .

۱۱۵۴ - نقطه مادی وزین $M(x, y)$ در صفحه Oxy قائم تحت زاویه α با افق و با سرعت اولیه v_0 پرتاب شده است . معادله حرکت را (با صرف نظر کردن از مقاومت هوا) تشکیل داده و مقدار سرعت v و شتاب z و همچنین مسیر حرکت را تعیین کنید .

۱۱۵۵ - معادله حرکت نقطه‌ای چنین است :

$$x = \xi \sin \omega t - \zeta \cos \omega t, \quad y = \zeta \sin \omega t + \xi \cos \omega t$$

(ω مقادیر ثابت)

مسیر حرکت و مقدار سرعت و شتاب را تعیین کنید .

مشقات مراتب ذکر شده را از توابع زیر تعیین کنید :

$$y^{(7)} \text{ و } y^{(6)} : \text{ تعیین کنید ، } y = x(2x-1)^2(x+3)^3 - 1156$$

$$y''' : \text{ تعیین کنید ، } y = \frac{a}{x^n} - 1157$$

$$y^{(10)} : \text{ تعیین کنید ، } y = \sqrt{x} - 1158$$

$$y^{(8)} : \text{ تعیین کنید ، } y = \frac{x^2}{1-x} - 1159$$

$$y^{(100)} : \text{ تعیین کنید ، } y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} - 1160$$

$$y^{(20)} : \text{ تعیین کنید ، } y = x^2 e^{2x} - 1161$$

$$y^{(10)} : \text{ تعیین کنید ، } y = \frac{e^x}{x} - 1162$$

$$y^{(5)} : \text{ تعیین کنید ، } y = x \ln x - 1163$$

$$y^{(5)} : \text{ تعیین کنید ، } y = \frac{\ln x}{x} - 1164$$

$$y^{(50)} : \text{ تعیین کنید ، } y = x^2 \sin 2x - 1165$$

$$y''' : \text{ تعیین کنید ، } y = \frac{\cos 3x}{\sqrt{1-3x}} - 1166$$

$$y^{(10)} : \text{ تعیین کنید ، } y = \sin x \sin 2x \sin 3x - 1167$$

$$y^{(100)} : \text{ تعیین کنید ، } y = x \operatorname{sh} x - 1168$$

$$y^{(4)} : \text{ تعیین کنید ، } y = e^x \cos x - 1169$$

$$y^{(6)} : \text{ تعیین کنید ، } y = \sin^2 x \ln x - 1170$$

در مثال‌های زیر x را بعنوان متغیر مستقل در نظر گرفته ،
دیفرانسیل‌های مرتبه ذکر شده را پیدا کنید :

$$d^5 y : \text{ تعیین کنید ، } y = x^5 - 1171$$

$$d^3 y : \text{ تعیین کنید ، } y = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1172$$

$$d^1 y : \text{ تعیین کنید ، } y = x \cos 2x - 1173$$

$$d^4 y : \text{ تعیین کنید ، } y = e^x \ln x - 1174$$

$$d^2 y : \text{ تعیین کنید ، } y = \cos x \times \operatorname{ch} x - 1175$$

در مثال‌های زیر اگر u تابعی باندازه کافی بار دیفرانسیل پذیر از x باشد ، دیفرانسیل‌های مراتب ذکر شده را پیدا کنید :

$$d^1 y : \text{تعیین کنید} , y = u^2 - 1176$$

$$d^2 y : \text{تعیین کنید} , y = e^u - 1177$$

$$d^3 y : \text{تعیین کنید} , y = \ln u - 1178$$

۱۱۷۹ - مطلوبست تعیین $d^2 y$ ، $d^3 y$ ، $d^4 y$ از تابع $y = f(x)$ در صورتیکه

x تابعی از یک متغیر مستقلی در نظر گرفته شود .

۱۱۸۰ - اگر x متغیر مستقلی فرض نشود ، مشتقات y'' و y''' تابع $y = f(x)$

را بر حسب دیفرانسیل‌های متوالی متغیرهای x و y بیان کنید .

۱۱۸۱ - نشان دهید که تابع

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

که در آن C_1 و C_2 مقادیر ثابت دلخواهی هستند در معادله^۱ زیر صادق است :

$$y'' + y = 0$$

۱۱۸۲ - نشان دهید که تابع

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$$

که در آن C_1 و C_2 مقادیر ثابت دلخواهی هستند در معادله^۱ زیر صادق است :

$$y'' - y = 0$$

۱۱۸۳ - نشان دهید که تابع

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

که در آن C_1 ، C_2 ثابت‌های دلخواهی و λ_1 ، λ_2 ثابت میباشند در معادله^۱ زیر صادق است :

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0$$

۱۱۸۴ - نشان دهید که تابع

$$y = x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)]$$

که در آن C_1 و C_2 ثابت‌های دلخواهی و n ثابت میباشد در معادله^۱ زیر صادق است :

$$x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0$$

۱۱۸۵ - نشان دهید که تابع

$$y = e^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\sqrt{\frac{x}{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

که در آن C_1 ، C_2 ، C_3 و C_4 ثابت‌های دلخواهی میباشند در معادله زیر صادق است:

$$y^{IV} + y = 0$$

۱۱۸۶ - ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ دارای مشتق مرتبه n - ام باشد در آن صورت

$$[f(ax + b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b)$$

۱۱۸۷ - مطلوبست تعیین $P^{(n)}(x)$ اگر

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

مطلوبست تعیین $y^{(n)}$ اگر

$$y = \frac{1}{x(x-1)} \quad - 1189$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad - 1188$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \quad - 1190$$

راهنمایی - تابع را به کسرهای ساده تجزیه کنید.

$$y = \sin ax \cos bx \quad - 1199$$

$$y = \sin^2 ax \cos bx \quad - 1200$$

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x \quad - 1201$$

$$y = x \cos ax \quad - 1202$$

$$y = x^2 \sin ax \quad - 1203$$

$$y = (x^2 + 2x + 2) e^{-x} \quad - 1204$$

$$y = \frac{e^x}{x} \quad - 1205$$

$$y = e^x \cos x \quad - 1206$$

$$y = e^x \sin x \quad - 1207$$

$$y = \ln \frac{a+bx}{a-bx} \quad - 1208$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \quad - 1191$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad - 1192$$

$$y = \sin^2 x \quad - 1193$$

$$y = \cos^2 x \quad - 1194$$

$$y = \sin^3 x \quad - 1195$$

$$y = \cos^3 x \quad - 1196$$

$$y = \sin ax \sin bx \quad - 1197$$

$$y = \cos ax \cos bx \quad - 1198$$

۱۲۰۹ - $y = e^{ax} P(x)$ که در آن $P(x)$ چندجمله‌ای است .

$$y = x \operatorname{sh} x - 1210$$

مطلوبست تعیین $d^n y$ اگر :

$$y = x^n e^x - 1211$$

$$y = \frac{\ln x}{x} - 1212$$

۱۲۱۳ - مساوی‌های زیر را ثابت کنید :

$$[e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx + c + n\varphi) \quad (1)$$

و

$$[e^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx + c + n\varphi) \quad (2)$$

که در آن $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ و $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

۱۲۱۴ - مطلوبست تعیین $y^{(n)}$ اگر

$$y = \operatorname{ch} ax \cos bx \quad (\text{الف})$$

$$y = \operatorname{ch} ax \sin bx \quad (\text{ب})$$

۱۲۱۵ - با تبدیل تابع $f(x) = \sin^2 p x$ که در آن p عددیست طبیعی به

چند جمله‌ای مثلثاتی $f(x) = \sum_{k=0}^p A_k \cos^2 kx$ مطلوبست تعیین $f^{(n)}(x)$.

راهنمایی - فرض کنید $\sin x = \frac{1}{2i} (t - \bar{t})$ که در آن $t = \cos x + i \sin x$

و $\bar{t} = \cos x - i \sin x$ از دستور موآور استفاده کنید .

۱۲۱۶ - مطلوبست تعیین $f^{(n)}(x)$ اگر :

$$f(x) = \sin^{2p+1} x \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \cos^{2p} x \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \cos^{2p+1} x \quad (\text{ث})$$

که در آن p عدد درست مثبتی است (مسئله قبل را ببینید) .
اگر

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$ و $f_1(x)$ و $f_2(x)$ توابع حقیقی از متغیر حقیقی x میباشند ، در آنصورت بنا به تعریف داریم :

$$f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x)$$

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$$

ثابت کنید که

$$\left(\frac{1}{x^2+1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin [(n+1) \operatorname{arctg} x]$$

راهنمایی - دستور موآور را بکار بندید .

۱۲۱۸ - مشتق مرتبهⁿ -ام از تابع زیر را پیدا کنید :

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

مطلوبست محاسبهⁿ $f^{(n)}(0)$ اگر :

۱۲۱۹ - الف) $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$ ؛ ب) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$

۱۲۲۰ - الف) $f(x) = x^2 e^{ax}$ ؛ ب) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ؛ پ) $f(x) = \operatorname{arcsin} x$

۱۲۲۱ - الف) $f(x) = \cos(m \operatorname{arcsin} x)$ ؛ ب) $f(x) = \sin(m \operatorname{arcsin} x)$

۱۲۲۲ - الف) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$ ؛ ب) $f(x) = (\operatorname{arcsin} x)^2$

۱۲۲۳ - مطلوبست محاسبهⁿ $f^{(n)}(a)$ اگر

$$f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$$

که در آن تابع $\varphi(x)$ در همسایگی نقطه^a دارای مشتق پیوستهⁿ مرتبهⁿ⁻¹ -ام است .

۱۲۲۴ - ثابت کنید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0, & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

(n عددیست طبیعی) در نقطه⁰ $x=0$ دارای مشتق‌های تا مرتبهⁿ -ام وارده مییاشد و دارای مشتق مرتبهⁿ⁺¹ -ام نیست .
۱۲۲۵ - ثابت کنید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0, & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

بازای $x=0$ بطور ناستحای دیفرانسیل پذیر است .
نمودار این تابع را رسم کنید .

۱۲۲۶ - ثابت کنید که چندجمله‌ای چیشف

$$T_m(x) = \frac{1}{\sqrt{m-1}} \cos(m \arccos x) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

در معادله^۱ زیر صادق است :

$$(1-x^2)T_m'' - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0$$

۱۲۲۷ - ثابت کنید که چندجمله‌ای لژاندر

$$P_m(x) = \frac{1}{\sqrt{m!}} [(x^2-1)^m]^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

در معادله^۱ دیفرانسیل زیر صادق است :

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$$

راهنمایی - از تساوی $(x^2-1)u' = 2mxu$ که در آن $u = (x^2-1)^m$ $m+1$ بار مشتق بگیرید .

۱۲۲۸ - چندجمله‌ای چیشف - لاگر با دستور

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

تعریف میشود . عبارت صریحی برای چندجمله‌ای $L_m(x)$ پیدا کنید .

ثابت کنید که $L_m(x)$ در معادله^۱ زیر صدق میکند :

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0$$

راهنمایی - از تساوی $xu' + (x-m)u = 0$ استفاده کنید که در آن $u = x^m e^{-x}$.

۱۲۲۹ - فرض کنیم $y = f(u)$ و $u = \varphi(x)$ توابع n بار دیفرانسیل پذیر

میباشند .

ثابت کنید که

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u)$$

که در آن ضرایب $A_k(x)$ مستقل از تابع $f(u)$ میباشند .

۱۲۳۰ - ثابت کنید که برای مشتق n -ام تابع مرکب $y = f(x^2)$ دستور زیر درست است :

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \dots \end{aligned}$$

۱۲۳۱ - چندجمله‌ای جیبش - هریت با دستور

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

تعریف میشود. عبارت صریحی برای چندجمله‌ای $H_m(x)$ پیدا کنید.
ثابت کنید $H_m(x)$ در معادله^{*} زیر صادق است:

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0$$

راهنمایی - تساوی $u' + 2xu = 0$ را بکار برید که در آن $u = e^{-x^2}$.
۱۲۳۲ - ثابت کنید

$$\left(x^n - 1 e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$$

راهنمایی - روش استقرای ریاضی را بکار برید.

۱۲۳۲،۱ - دستور زیر را ثابت کنید:

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^n \ln x) = n! \left(\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \quad (x > 0)$$

۱۲۳۲،۲ - دستور زیر را ثابت کنید:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} [C_n(x) \sin x - S_n(x) \cos x]$$

که در آن

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

و

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

۱۲۳۳ - فرض کنیم $\frac{d}{dx} = D$ بمعنای عمل مشتق‌گیری و

$$f(D) = \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k$$

چندجمله‌ای نمادی ديفرانسیلی باشد که در آن $(k = 0, 1, \dots, n)$ توابع پیوسته‌ای از x است.

ثابت کنید که

$$f(D) \{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} f(D + \lambda) u(x)$$

که در آن λ ثابت است .
۱۲۳۴- ثابت کنید که اگر در معادله

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k y'_x = 0$$

فرض کنیم

$$x = e^t$$

که در آن t متغیر مستقلی است در اینصورت این معادله بصورت

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1) \dots (D-k+1) y = 0$$

در میآید که در آن $D = \frac{d}{dt}$

بخش ۶- قضایای رول ، لاگرانژ و کوشی

بند ۱- قضیه رول . اگر (۱ : تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ معین و پیوسته ؛
(۲ : $f(x)$ دارای مشتق منتهای $f'(x)$ در داخل این قطعه ؛ ۳) $f(a) = f(b)$ باشد در اینصورت دست کم یک عدد c از بازه (a, b) وجود دارد چنان که
 $f'(c) = 0$

بند ۲- قضیه لاگرانژ . اگر (۱ : تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ معین و پیوسته ؛
(۲ : $f(x)$ دارای مشتق منتهای $f'(x)$ روی بازه (a, b) باشد در اینصورت
 $a < c < b$ در آن $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

(دستور نمونه‌های منتهای)

بند ۳- قضیه کوشی . اگر (۱ : توابع $f(x)$ و $g(x)$ روی قطعه $[a, b]$ معین و پیوسته ؛
(۲ : $f(x)$ و $g(x)$ دارای مشتقات منتهای $f'(x)$ و $g'(x)$ روی بازه (a, b) ؛
(۳ : بازای $a < x < b$ ، $f'(x) + g'(x) \neq 0$ ؛
(۴ : $g(a) \neq g(b)$ باشد در اینصورت

$$a < c < b \quad \text{که در آن} \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

۱۲۳۵ - درستی قضیهٔ رول را برای تابع زیر تحقیق کنید :

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

۱۲۳۶ - تابع

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

بازای $x_1 = -1$ و $x_2 = 1$ برابر صفر میشود ولی با وجود این بازای $-1 \leq x \leq 1$ ، $f'(x) \neq 0$. تضاد ظاهری با قضیهٔ رول را توضیح دهید .

۱۲۳۷ - فرض کنیم تابع $f(x)$ دارای مشتق متناهی $f'(x)$ در هر نقطهٔ بازهٔ متناهی یا نامتناهی (a, b) باشد و

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$$

ثابت کنید که

$$f'(c) = 0$$

که در آن c نقطه‌ایست از بازهٔ (a, b) .

۱۲۳۸ - فرض کنیم : (۱) تابع $f(x)$ معین و دارای مشتق پیوستهٔ مرتبهٔ $(n-1)$ - ام $f^{(n-1)}(x)$ روی قطعهٔ $[x_0, x_n]$ باشد ؛ (۲) $f(x)$ دارای مشتق مرتبهٔ n - ام $f^{(n)}(x)$ در بازهٔ (x_0, x_n) باشد ، و (۳) تساوی‌های زیر مجرا باشد :

$$f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \dots < x_n)$$

ثابت کنید که در بازهٔ (x_0, x_n) دست کم یک نقطهٔ ξ وجود دارد چنان که

$$f^{(n)}(\xi) = 0$$

۱۲۳۹ - فرض کنیم : (۱) تابع $f(x)$ معین و دارای مشتق پیوستهٔ مرتبهٔ $(p+q)$ - ام $f^{(p+q)}(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ باشد ؛ (۲) $f(x)$ دارای مشتق مرتبهٔ $(p+q+1)$ - ام $f^{(p+q+1)}(x)$ در بازهٔ (a, b) باشد ؛ (۳) تساویهای زیر مجرا باشند :

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p)}(a) = 0$$

$$f(b) = f'(b) = \dots = f^{(q)}(b) = 0$$

ثابت کنید که در چنین حالتی

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0$$

که در آن c نقطه‌ایست از بازه (a, b) .

۱۲۴۰- ثابت کنید که اگر جمیع ریشه‌های چندجمله‌ای

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

با ضرایب حقیقی a_k ($k = 0, 1, \dots, n$) حقیقی باشند در آنصورت مشتق‌های متوالی آن $P_n^{(n-1)}(x), \dots, P_n''(x), \dots, P_n'(x)$ نیز فقط دارای ریشه‌های حقیقی میباشند.

۱۲۴۱- ثابت کنید که در چندجمله‌ای لژاندر

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

تمام ریشه‌ها حقیقی و محصور در بازه $(-1, 1)$ میباشند.

۱۲۴۲- ثابت کنید که در چندجمله‌ای چیشف-لاگر

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

تمام ریشه‌ها مثبتند.

۱۲۴۳- ثابت کنید که چندجمله‌ای چیشف-هرمیت

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

تمام ریشه‌ها حقیقی‌اند.

۱۲۴۴- بر منحنی $y = x^3$ نقطه‌ای پیدا کنید که در آن مماس با وتر وصل

نقاط $A(-1, -1)$ و $B(2, 8)$ موازی باشد.

۱۲۴۵- آیا دستور نمودار متناهی برای تابع

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

روی قطعه $[a, b]$ اگر $ab < 0$ ، درست است؟

۱۲۴۶- مطلوبست تعیین تابع $\theta = \theta(x, \Delta x)$ بقسمی که

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1)$$

اگر :

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{پ}) \quad f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = x^3 \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = e^x \quad (\text{ت})$$

۱۲۴۶،۱ فرض کنیم $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ و برای هر x و h اتحاد

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'(x)$$

درست باشد. ثابت کنید که

$$f(x) = ax + b$$

که در آن a و b مقادیر ثابتی هستند.

۱۲۴۶،۲ - فرض کنیم $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$ و برای هر x و h اتحاد

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf' \left(x + \frac{h}{2} \right)$$

درست باشد.

ثابت کنید که

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

که در آن a ، b و c ثابتند.

۱۲۴۷ - ثابت کنید که اگر $x \geq 0$ ، در اینصورت

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{2}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

که در آن

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$$

ضمناً

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$$

۱۲۴۸ - فرض کنیم :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-x^2}{2}, & \text{بازای } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{بازای } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

مطلوبست تعیین مقدار میانی c - y دستور نمونه‌های متناهی برای تابع $f(x)$ روی قطعه* $[0, 2]$.

۱۲۴۹- فرض کنیم $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$ که در آن $0 < \xi(x) < x$. ثابت کنید که اگر

$$f(x) = x \sin(\ln x) \quad \text{و} \quad f(0) = 0 \quad \text{و} \quad x > 0$$

در آنصورت تابع $\xi = \xi(x)$ در هر فاصله* باندازه دلخواه کوچک $(0, \varepsilon)$ که در آن $\varepsilon < 0$ منفصل است.

۱۲۵۰- فرض کنیم تابع $f(x)$ دارای مشتق پیوسته* $f'(x)$ در فاصله* (a, b) باشد. آیا بازای هر نقطه* ξ از (a, b) میتوان دو نقطه* دیگر x_1 و x_2 از این فاصله را چنان تعیین نمود که

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)$$

مثال $(-1 \leq x \leq 1)$ را در نظر بگیرید که در آن $\xi = 0$.

۱۲۵۱- ناساویهای زیر را ثابت کنید:

الف) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

ب) $px^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y)$

اگر $0 < y < x$ و $p > 1$

پ) $|\arctg a - \arctg b| \leq |a - b|$

ت) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ اگر $0 < b < a$

۱۲۵۲- توضیح دهید که چرا قضیه* کوشی برای توابع

$$f(x) = x^2 \quad \text{و} \quad g(x) = x^3$$

روی قطعه* $[-1, 1]$ درست نیست.

۱۲۵۳- فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعه* $[x_1, x_2]$ دیفرانسیل پذیر باشد، ضمناً $x_1 x_2 > 0$. ثابت کنید که

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = f'(\xi) - f'(\xi)$$

که در آن $x_1 < \xi < x_2$

۱۲۵۴- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصله* متناهی (a, b)

دیفرانسیل پذیر باشد ولی کراندار نباشد در آنصورت مشتق آن $f'(x)$ نیز در فاصله* (a, b) کراندار نیست. قضیه* عکس درست نیست (مثال بیاورید).

۱۲۵۵- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصله متناهی یا نامتناهی (a, b) دارای مشتق کراندار $f'(x)$ باشد در آنصورت $f(x)$ روی (a, b) پیوسته یکنواخت است .

۱۲۵۶- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصله نامتناهی $(x_0, +\infty)$ دیفرانسیل پذیر باشد و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

در آنصورت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

یعنی $f(x) = o(x)$ بازای $x \rightarrow +\infty$.

۱۲۵۷- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصله نامتناهی $(x_0, +\infty)$ دیفرانسیل پذیر باشد و بازای $x \rightarrow +\infty$ داشته باشیم $f(x) = o(x)$ در آنصورت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0.$$

بالاخص اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = k$ وجود داشته باشد در آنصورت $k = 0$.

۱۲۵۸- الف) ثابت کنید که اگر (۱) تابع $f(x)$ روی قطعه $[x_0, X]$ معین و پیوسته باشد ؛ (۲) $f(x)$ دارای مشتق متناهی $f'(x)$ در فاصله (x_0, X) باشد ؛ (۳) حد متناهی یا نامتناهی

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x) = f'(x_0 + 0)$$

وجود داشته باشد در آنصورت مشتق یکسویی متناهی یا نامتناهی $f'_+(x_0)$ وجود دارد و

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$$

ب) نشان دهید که برای تابع

$$f(x) = \arctg \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \quad \text{و} \quad f(1) = 0.$$

حد متناهی

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$$

وجود دارد منتها تابع $f(x)$ دارای مشتقات یکسویی متناهی $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمیباشد .

تعبیر هندسی این حقیقت را بیان کنید .

۱۲۵۹- ثابت کنید که اگر بازای $a < x < b$ داشته باشیم $f'(x) = 0$ در اینصورت

$$f(x) = \text{const} \quad , \quad a < x < b \quad \text{بازای}$$

۱۲۶۰- ثابت کنید که تنها تابع $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) که دارای مشتق ثابت

$$f'(x) = k$$

میباشد عبارتست از تابع خطی

$$f(x) = kx + b$$

۱۲۶۱- در باره تابع $f(x)$ اگر $f^{(n)}(x) = 0$ چه میتوان گفت ؟
 ۱، ۱۲۶۱- فرض کنیم $f(x) \in C^{(\infty)}(-\infty, +\infty)$ و برای هر x عدد طبیعی n_x ($n_x \leq n$) وجود داشته باشد بطوریکه

$$f^{(n_x)}(x) = 0$$

ثابت کنید که تابع $f(x)$ چند جمله ای است .

۱۲۶۲- ثابت کنید که تنها تابع $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) صادق در معادله

$$y' = \lambda y \quad (\lambda = \text{const})$$

عبارتست از تابع نمایی

$$y = Ce^{\lambda x}$$

که در آن C ثابت دلخواهی است .
راهنمایی - $(ye^{-\lambda x})'$ را در نظر بگیرید .
 ۱۲۶۳- تحقیق کنید که توابع

$$f(x) = \text{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

و

$$g(x) = \text{arc tg } x$$

در حوزه های

$$x > 1 \quad (1 \quad x < 1 \quad \text{و} \quad 2)$$

دارای مشتق یکسان میباشند .

بستگی بین دو تابع را نتیجه بگیرید .

۱۲۶۴ - اتحادهای زیر را ثابت کنید :

$$|x| \geq 1 \quad \text{بازای} \quad \arctg x + \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \pi \operatorname{sgn} x \quad (\text{الف})$$

$$\arccos x - \arcsin(x - \epsilon x^3) = \pi \quad (\text{ب})$$

۱۲۶۵ - ثابت کنید که اگر (۱) تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ پیوسته باشد ؛
(۲) دارای مشتق متناهی $f'(x)$ داخل آن باشد ؛ (۳) خطی نباشد ،
در آنصورت در فاصله (a, b) دست کم یک نقطه c وجود دارد چنان که

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$$

تعبیر هندسی این حقیقت را بیان کنید .

۱۲۶۶ - ثابت کنید که اگر (۱) تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ دارای مشتق دوم $f''(x)$ باشد و (۲) $f'(a) = f'(b) = 0$ ، در آنصورت در فاصله (a, b) حد اقل یک نقطه c وجود دارد چنان که

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

۱۲۶۷ - اتومبیلی حرکتش را از نقطه s مبداء شروع کرده و مسیر خود را در t ثانیه باخر می‌رساند و مسافت s m را طی میکند . ثابت کنید که در یک لحظه t نامشخص زمان مقدار مطلق شتاب حرکت اتومبیل از

$$\frac{4s}{t^2} \text{ m/sec}^2$$

کمتر نبوده است .

بخش ۷ - صعود و نزول توابع . نامساویها

بند ۱ - صعود و نزول توابع . تابع $f(x)$ را روی قطعه $[a, b]$ وقتی صعودی (نزولی) نامند که

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b \quad \text{بازای} \quad f(x_2) > f(x_1)$$

(یا متناظراً $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ بازای $f(x_2) < f(x_1)$.)

اگر تابع ديفرانسیبل پذیر $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ صعود (نزول) کند در آنصورت

$$a \leq x \leq b \quad \text{بازای} \quad f'(x) \geq 0 .$$

$$(\text{یا}) \quad a \leq x \leq b \quad \text{بازای} \quad f'(x) \leq 0 .$$

بند ۲ - نشانه کافی صعود (نزول) توابع. اگر تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ پیوسته و در داخل آن دارای مشتق مثبت (منفی) باشد در آن صورت تابع $f(x)$ صعودی (نزولی) روی $[a, b]$ است.

حوزه‌های یکنوایی به معنای اکید (صعود یا نزول) توابع زیر را تعیین کنید:

$$y = x + \sin x - 1272$$

$$y = 2 + x - x^2 - 1276$$

$$y = x + |\sin 2x| - 1273$$

$$y = 2x - x^3 - 1279$$

$$y = \cos \frac{\pi}{x} - 1274$$

$$y = \frac{2x}{1+x^2} - 1270$$

$$y = \frac{x^2}{2^x} - 1275$$

$$y = x^n e^{-x} (x \geq 0, n > 0) - 1276$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x+100} (x \geq 0) - 1271$$

$$y = x^2 - \ln x^2 - 1277$$

$$f(0) = 0 \text{ و } x > 0 \text{ اگر } f(x) = x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right) - 1278$$

۱۲۷۹ - ثابت کنید که با ازدیاد تعداد n اضلاع، محیط P_n در n - ضلعی منتظم محیط در دایره صعود و محیط P_n در n - ضلعی منتظم محیط بر همان دایره نزول میکند. با استفاده از این امر ثابت کنید که P_n و p_n بازای $n \rightarrow \infty$ دارای حد مشترک می‌باشند.

۱۲۸۰ - ثابت کنید که تابع

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

روی فاصله‌های $(0, +\infty)$ و $(-\infty, -1)$ صعودی است.

۱۲۸۱ - ثابت کنید که تابع گویای درست

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

در فاصله‌های $(-\infty, -x_0)$ و $(x_0, +\infty)$ که در آن x_0 عدد مثبت بقدر کافی بزرگی است یکنوا (به معنای اکید) است.

۱۲۸۲ - ثابت کنید که تابع گویای

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} \quad (a_n b_m \neq 0)$$

که مخالف ثابت همسان است در فاصله‌های $(-\infty, -x_0)$ و $(x_0, +\infty)$ که در آن x_0 عدد مثبت بقدر کافی بزرگی است یکنوا (به معنای اکید) است.

۱۲۸۳ - آیا مشتق تابع یکنوا حتماً یکنواست؟ مثال $f(x) = x + \sin x$ را در نظر بگیرید.

۱۲۸۴- ثابت کنید که اگر $\varphi(x)$ تابع صعودی یکنوای دیفرانسیل پذیر باشد و

$$x \geq x_0 \text{ بازای } |f'(x)| \leq \varphi'(x)$$

در آنصورت

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

بازای $x \geq x_0$.

تعبیر هندسی این حقیقت را بیان کنید.

۱۲۸۵- فرض کنیم تابع $f(x)$ در فاصله $a \leq x < +\infty$ پیوسته و علاوه بر آن بازای $x > a$ داشته باشیم $f'(x) > k > 0$ که در آن مقدار ثابتی است.

ثابت کنید که اگر $f(a) < 0$ در آنصورت معادله $f(x) = 0$ دارای فقط

و فقط یک ریشه حقیقی در فاصله $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ میباشد.

۱۲۸۶- تابع $f(x)$ را در نقطه x_0 وقتی صعودی نامند که در همسایگی $|x - x_0| < \delta$ علامت نمو تابع $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ با علامت نمو آرگومان $\Delta x_0 = x - x_0$ یکی باشد.

ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ ($a < x < b$) در هر نقطه از یک فاصله متناهی یا نامتناهی (a, b) صعودی باشد در آنصورت تابع در این فاصله صعودی است.

۱۲۸۷- نشان دهید که تابع

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{2}{x} \quad \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } f(0) = 0$$

در نقطه $x = 0$ صعودی است ولی در هر فاصله $(-\varepsilon, \varepsilon)$ در برگیرنده این نقطه که در آن $\varepsilon > 0$ کوچک دلخواهی است، صعودی نیست. طرح نمودار این تابع را رسم کنید.

۱۲۸۸- مطلوبست اثبات قضیه: اگر (۱) توابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ ، n بار دیفرانسیل پذیر باشند؛ (۲) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$)؛ (۳) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ بازای $x > x_0$ ، در اینصورت نامساوی زیر را داریم:

$$x > x_0 \text{ بازای } \varphi(x) > \psi(x)$$

۱۲۸۹- نامساویهای زیر را اثبات کنید:

الف) $e^x > 1 + x$ بازای $x \neq 0$

ب) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ بازای $x > 0$

پ) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ بازای $x > 0$

ت) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ بازای $0 < x < \frac{\pi}{2}$

ث) $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$

بازای $x > 0$ ، $y > 0$ و $0 < \alpha < \beta$

ناساویهای از الف تا ت) را تعبیر هندسی کنید.

۱۲۹۰- ناساوی زیر را ثابت کنید:

بازای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x$

۱۲۹۱- ثابت کنید که بازای $x > 0$ ناساوی زیر برقرار است:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

۱۲۹۲- در دو تصاعد حسابی و هندسی تعداد جملات و جملات طرفین نظیر

به نظیر یکسان و جمیع جملات مشتمند. ثابت کنید که مجموع جملات

تصاعد حسابی بیشتر از مجموع جملات تصاعد هندسی است.

۱۲۹۳- از روی ناساوی

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0$$

که در آن x, a_k, b_k ($k = 1, \dots, n$) حقیقی هستند ناساوی کوشی را

ثابت کنید:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

۱۲۹۴- ثابت کنید که میانگین حسابی اعداد مثبت از میانگین کوادراتیک

این اعداد بزرگتر نیست یعنی

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}$$

۱۲۹۵- ثابت کنید که میانگین هندسی اعداد مثبت از میانگین حسابی این اعداد بزرگتر نیست یعنی

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

راهنمایی- روش استقرای ریاضی را بکار برید .

۱۲۹۶- میانگین مرتبه s دو عدد مثبت a و b عبارتست از تابعی که با تساویهای

$$s \neq 0. \quad \text{اگر} \quad \Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}}$$

و

$$\Delta_*(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b)$$

تعریف میشود .

بخصوص : بازای $s = -1$ میانگین هارمونیک ، بازای $s = 0$ میانگین هندسی (اثبات کنید !) ، بازای $s = 1$ میانگین حسابی و بازای $s = 2$ میانگین کوادراتیک را خواهیم داشت .
ثابت کنید که

$$\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b) \quad (1)$$

(۲) تابع $\Delta_s(a, b)$ بازای $a \neq b$ تابع صعودی از متغیر s است ؛

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b) \quad (۳)$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b)$$

راهنمایی- عبارت زیر را در نظر بگیرید :

$$\frac{d}{ds} [\ln \Delta_s(a, b)]$$

۱۲۹۷- ناساویهای زیر را ثابت کنید :

$$\text{الف) } x > 1, \alpha \geq 2 \quad \text{بازای} \quad x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$$

$$\text{ب) } x > a > 0, n > 1 \quad \text{اگر} \quad \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$$

$$\text{پ) } x > 0 \quad \text{بازای} \quad 1 + 2 \ln x \leq x^2$$

بخش ۸ - جهت تقعر (گودی) . نقطه‌های عطف

بند ۱ - شرط کافی تقعر . نمودار تابع دیفرانسیل پذیر $y = f(x)$ را روی قطعه $[a, b]$ وقتی مقعر بسمت بالا (مقعر بسمت پایین) نامند که قطعه منحنی

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

در بالای (متناظراً در پائین) مماس رسم شده در یک نقطه دلخواه این قطعه منحنی قرار داشته باشد . شرط کافی تقعر نمودار بطرف بالا (پایین) با فرض وجود مشتق دوم $f''(x)$ عبارتست از بر آورده شدن نامساوی

$$a < x < b \quad (f''(x) < 0) \quad f''(x) > 0.$$

بند ۲ - شرط کافی نقطه عطف . نقطه‌ای که در آن جهت تقعر نمودار تابع عوض میشود نقطه عطف نامیده میشود . نقطه x که بازای آن یا $f''(x) = 0$ یا $f''(x)$ وجود ندارد در صورتی نقطه عطف است که $f''(x)$ بازای گذر از نقطه x علامت خود را عوض کند .
۱۲۹۸ - جهت تقعر منحنی

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

را در نقاط $A(-1, 0)$ و $B(1, 2)$ و $C(0, 0)$ بررسی کنید .

فواصل تقعر با علامت معین و نقاط عطف نمودار توابع زیر را پیدا کنید :

$$y = x + \sin x - 1303$$

$$y = 3x^2 - x^3 - 1299$$

$$y = e^{-x^2} - 1304$$

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2} \quad (a > 0) - 1300$$

$$y = \ln(1 + x^2) - 1305$$

$$y = x \sin(\ln x) \quad (x > 0) - 1306$$

$$y = x + x^{\frac{5}{3}} - 1301$$

$$y = x^x \quad (x > 0) - 1307$$

$$y = \sqrt{1 + x^2} - 1302$$

۱۳۰۸ - نشان دهید که منحنی

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

دارای سه نقطه عطف واقع بر یک استقامت است .
نمودار این تابع را رسم کنید .

۱۳۰۹ - بازای چه مقدار پارامتر h «منحنی احتمال»

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (h > 0)$$

دارای نقاط عطف $x = \pm \sigma$ است ؟

۱۳۱۰ - جهت تقعر سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0)$$

را بررسی کنید .

۱۳۱۱ - فرض کنیم تابع $f(x)$ در فاصله $a \leq x < +\infty$ دو بار دیفرانسیل پذیر

باشد ، ضمناً : (۱) $f(a) > 0$ ، (۲) $f'(a) < 0$ ، (۳) $f''(x) \leq 0$

بازای $x > a$.

ثابت کنید که معادله $f(x) = 0$ در فاصله $(a, +\infty)$ دارای فقط و فقط

یک ریشه حقیقی میباشد .

۱۳۱۲ - تابع $f(x)$ را وقتی محدب بطرف پایین (بالا) روی فاصله (a, b) نامند

که برای نقاط دلخواه x_1 و x_2 از این فاصله و اعداد دلخواه λ_1 و

$$\lambda_2 \quad (\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0)$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(یا بترتیب ، نامساوی متقابل

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

برقرار باشد .

ثابت کنید که : (۱) تابع $f(x)$ تحدیش روی (a, b) بطرف پائین است

اگر $f''(x) > 0$ بازای $a < x < b$ ، (۲) تابع $f(x)$ تحدیش روی (a, b) بطرف

بالا است اگر $f''(x) < 0$ بازای $a < x < b$.

۱۳۱۳ - نشان دهید که توابع

$$x \ln x, \quad e^x, \quad x^n \quad (n > 0)$$

روی فاصله $(0, +\infty)$ محدب بطرف پایین ، و توابع

$$\ln x, \quad x^n \quad (0 < n < 1)$$

روی فاصله $(0, +\infty)$ محدب بطرف بالا میباشدند .

۱۳۱۴ - نامساویهای زیر را ثابت و توجیه هندسی کنید :

$$\frac{1}{y} (x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2} \right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1) \quad (\text{انف})$$

$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y) \quad (\text{ب})$$

(پ) $y > 0$ و $x > 0$ در صورتیکه $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$

۱۳۱۴،۱ - فرض کنیم بازای $a \leq x \leq b$ داشته باشیم $f''(x) \geq 0$. ثابت کنید که بازای هر x_1 و $x_2 \in [a, b]$ داریم:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [f(x_1) + f(x_2)]$$

۱۳۱۵ - ثابت کنید که تابع محدب کراندار، در همه جا پیوسته و دارای مشتقات یکسویی چپ و راست میباشد.

۱۳۱۶ - فرض کنیم تابع $f(x)$ در فاصله (a, b) دو بار دیفرانسیل پذیر باشد و $f''(\xi) \neq 0$ که در آن $a < \xi < b$.

ثابت کنید که در فاصله (a, b) دو مقدار x_1 و x_2 میتوان یافت چنان که

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

۱۳۱۷ - ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصله نامتناهی $(x_0, +\infty)$ دو بار دیفرانسیل پذیر باشد و

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

در آن صورت در فاصله $(x_0, +\infty)$ حداقل یک نقطه ξ وجود دارد چنان که $f''(\xi) = 0$.

بخش ۹ - رفع ابهام

قاعده اول لویپیتال (رفع ابهام صورت مبهم $\frac{0}{0}$). اگر: (۱) توابع

$f(x)$ و $g(x)$ در یک همسایگی U_0^* نقطه a که در آن a یک عدد یا نماد ∞ است معین و پیوسته باشند و بازای $x \rightarrow a$ هر دو تابع بسمت صفر میل کنند:

* منظور از همسایگی U_0^* نقطه a مجموعه اعداد x است که در

نامساوی: (۱) $|x - a| < \varepsilon$ اگر a عدد باشد و (۲) $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ اگر $a = \infty$ باشد، صدق کنند.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

(۲) در همسایگی U_ϵ نقطه a و احتمالاً جز در خود نقطه a مشتقات $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند و ضمناً بازای $x \neq a$ توانماً صفر نشوند؛
(۳) حد منتهای یا نامتناهی

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وجود داشته باشد، در آنصورت داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قاعده دوم لوییتال (رفع ابهام صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$). اگر (۱) توابع $f(x)$ و $g(x)$ بازای $x \rightarrow a$ هر دو بسمت بی‌نهایت میل کنند:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

که در آن a عدد یا نماد ∞ است.

(۲) مشتقات $f'(x)$ و $g'(x)$ بازای جمیع x های متعلق به همسایگی U_ϵ نقطه a و مخالف a وجود داشته باشند، ضمناً

$$f'(x) + g'(x) \neq 0 \text{ بازای } x \in U_\epsilon \text{ و } x \neq a$$

(۳) حد منتهای یا نامتناهی

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وجود داشته باشد، در آنصورت

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قواعد مشابه برای حدود یکسویی درست است.

رفع ابهام صورت مبهم $\infty \times 0$ ، $\infty - \infty$ ، 1^∞ ، 0^0 و غیره از راه تبدیلات جبری و لگاریتمی به رفع ابهام دو نوع پایه زیر منجر میگردد:

$$\frac{0}{0} \text{ و } \frac{\infty}{\infty}$$

مطابقت محاسبه مقدار عبارتهای زیر :

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2} - 1322$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\sin ax}{\sin bx} - 1318$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{\sqrt[3]{\sin^3 x} - 1} - 1324$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} - 1319$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{x(e^x + 1) - \gamma(e^x - 1)}{x^2} - 1325$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} - 1320$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} - 1326$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\gamma \operatorname{tg} \xi x - \gamma \operatorname{tg} x}{\gamma \sin \xi x - \gamma \sin x} - 1321$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\operatorname{arc} \sin \gamma x - \gamma \operatorname{arc} \sin x}{x^2} - 1327$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\gamma}} \frac{\operatorname{tg} \gamma x}{\operatorname{tg} x} - 1322$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{1}{x \sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{b}} \right) - 1328$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} - 1322$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^2} \quad (a > \cdot) - 1329$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2} - 1323$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right) - 1330$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) - 1324$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} - 1331$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\operatorname{Arsh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{Arsh}(\operatorname{hin} x)}{\operatorname{sh} x - \sin x} - 1335$$

که در آن $\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} \quad (\varepsilon > \cdot) - 1336$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a > \cdot, n > \cdot) - 1337$$

$$\lim_{x \rightarrow +\cdot} x^\varepsilon \ln x \quad (\varepsilon > \cdot) - 1341$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{1+\cdot}} - 1338$$

$$\lim_{x \rightarrow +\cdot} x^x - 1342$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\cdot \cdot \cdot x} - 1339$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} x^{x^x} - 1343$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \times \ln(1 - x) - 1340$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} (x^{x^x} - 1) - 1344$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-\cdot} \ln x \times \ln(1 - x) - 1340$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{\gamma x + 1} \right)^{\frac{1}{x}} - 1351$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)} - 1352$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x}} - 1353$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) - 1354$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) - 1355$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) - 1356$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] - 1357$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} - 1362,1$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} - 1362,2$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} - 1362,3$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\frac{\operatorname{Arsh} x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} - 1362,4$$

Arsh $x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ آن در آن

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x}} - 1366$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}} - 1367$$

$$\lim_{x \rightarrow +\cdot} x^{\frac{k}{\sqrt{1+\ln x}}} - 1358$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} - 1359$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\gamma - x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{\gamma}} - 1359$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} \gamma x} - 1368$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} - 1369$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x - 1370$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > \cdot) - 1378$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} - 1379$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \quad (a > \cdot) - 1370$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\gamma}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)^x - 1371$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x - 1372$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} - 1373$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} - 1374$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\frac{\gamma}{\pi} \operatorname{arc} \cos x \right)^{\frac{1}{x}} - 1375$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} - ۱۳۶۸,۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\text{cth } x} - ۱۳۶۸$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \times \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right] - ۱۳۶۹$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} \right] - ۱۳۷۰$$

۱۳۷۱ - مطلوبست محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}$$

در صورتیکه منحنی $y = f(x)$ برای $x \rightarrow 0$ تحت زاویه α به مبدا مختصات $(0, 0)$ وارد شود

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0 \right)$$

۱۳۷۲ - ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1$$

در صورتیکه منحنی پیوسته $y = f(x)$ برای $x \rightarrow +0$ به مبدا مختصات $\left(\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0 \right)$ وارد شده و برای $0 < x < \varepsilon$ تمامی در داخل زاویه

حاده حاصله از خطوط $y = -kx$ و $y = kx$ ($k \neq \infty$) قرار گیرد.
۱۳۷۳ - ثابت کنید که اگر برای تابع $f(x)$ مشتق مرتبه دوم $f''(x)$ وجود داشته باشد در آنصورت

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

۱۳۷۳,۱ - دیفرانسیل پذیری تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{اگر } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

۱۳۷۳,۲ - مجانب منحنی زیر را پیدا کنید:

$$x = \frac{x^1 + x}{(1+x)^x} \quad (x > 0)$$

۱۳۷۴ - امکان کاربرد قاعده لوبیتال را در مثال‌های زیر بررسی کنید :

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x) + e^{-x} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x) e^{\sin x}}$$

۱۳۷۵ - حد نسبت مساحت قطعه دایره‌ای به وتر b و سهم h را به مساحت مثلث متساوی‌الساقین محاط در این قطعه وقتی کمان قطعه با ثابت بودن شعاع R بسمت صفر میل کند پیدا کنید و با استفاده از نتیجه حاصله دستور تقریبی مساحت قطعه را بدست آورید :

$$S \approx \frac{2}{3} bh$$

بخش ۱۰ - دستور تیلر

بند ۱ - دستور موضعی تیلر . اگر (۱) تابع $f(x)$ در یک همسایگی $|x - x_0| < \epsilon$ نقطه x_0 معین باشد ؛ (۲) $f(x)$ در این همسایگی دارای مشتقات $f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ لغایت مرتبه $(n-1)$ - ام باشد ؛ (۳) در نقطه x_0 مشتق مرتبه n - ام $f^{(n)}(x_0)$ وجود داشته باشد ، در آنصورت

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

که در آن

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

بیوجه بازای $x_0 = 0$ داریم :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

بازای شرایط مذکور نمایش (۱) یکتاست .

اگر در نقطه مشتق $f^{(n+1)}(x_0)$ وجود داشته باشد در آن صورت جمله باقیمانده در دستور (۱) را میتوان به شکل $O^*((x-x_0)^{n+1})$ اختیار کرد. از دستور موضعی تیلر (۲) پنج بسط مهم زیر بدست میآید:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) - I$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) - II$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) - III$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots - IV$$

$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) - V$$

بند ۲- دستور تیلر. اگر (۱) تابع $f(x)$ روی قطعه $[n, b]$ معین باشد؛ (۲) $f(x)$ روی این قطعه دارای مشتقات پیوسته $f^{(n-1)}(x), \dots, f'(x)$ باشد؛ (۳) بازای $n < x < b$ مشتق متناهی $f^{(n)}(x)$ وجود داشته باشد، در آنصورت

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (n \leq x \leq b)$$

که در آن

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

(جمله باقیمانده در شکل لاگرانژ) یا

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!} (1-\theta_1)^{n-1} (x-a)^n \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

(جمله باقیمانده در شکل کوشی).

۱۳۷۶ - چندجمله‌ای

$$P(x) = 1 + 2x + 5x^2 - 2x^3$$

را بر حسب قوای مثبت و درست دوجمله‌ای $x+1$ بسط دهید.

بسط توابع زیر را تا جمله^۴ مرتبه^۴ ذکر شده با خود آن جمله بر حسب قوای درست و مثبت متغیر x بنویسید :

۱۳۷۷- $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ تا جمله^۴ دارای x^4 ، مقدار $f^{(4)}(0)$ چقدر است ؟

۱۳۷۸- $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ تا جمله^۴ دارای x^2 .

۱۳۷۹- $\sqrt[n^m]{n^m+x}$ تا جمله^۴ دارای x^2 ($n > 0$) .

۱۳۸۰- $\sqrt{1-2x+x^2} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ تا جمله^۴ دارای x^3 .

۱۳۸۱- e^{2x-x^2} تا جمله^۴ دارای x^0 .

۱۳۸۲- $\frac{x}{e^x-1}$ تا جمله^۴ دارای x^4 .

۱۳۸۳- $\sqrt[3]{\sin x^3}$ تا جمله^۴ دارای x^{13} .

۱۳۸۴- $\ln \cos x$ تا جمله^۴ دارای x^6 .

۱۳۸۵- $\sin(\sin x)$ تا جمله^۴ دارای x^3 .

۱۳۸۶- $\operatorname{tg} x$ تا جمله^۴ دارای x^0 .

۱۳۸۷- $\ln \frac{\sin x}{x}$ تا جمله^۴ دارای x^6 .

۱۳۸۸- مطلوبست سه جمله از بسط تابع $f(x) = \sqrt{x}$ بر حسب قوای درست و مثبت تقاض $x-1$.

۱۳۸۹- تابع $f(x) = x^x - 1$ را بر حسب قوای مثبت و درست دوجمله‌ای $x-1$ تا جمله^۴ $(x-1)^3$ بسط دهید .

۱۳۹۰- تابع $y = \operatorname{ach} \frac{x}{a}$ ($a > 0$) را در همسایگی نقطه^۴ $x=0$ بطور تقریبی با سهمی درجه دوم عوض کنید .

۱۳۹۱- تابع $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ ($x > 0$) را بر حسب قوای درست و

مثبت کسر $\frac{1}{x}$ تا جمله^۴ $\frac{1}{x^3}$ بسط دهید .

۱۳۹۲- مطلوبست بسط تابع $f(h) = \ln(x+h)$ ($x > 0$) بر حسب قوای درست و مثبت نمو h تا جمله^۴ دارای h^n (n عددیست طبیعی) .

۱۳۹۳- فرض کنیم

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h)$$

ثابت کنید که $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ ، ضمناً $(0 < \theta < 1)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$$

۱۳۹۳،۱ - فرض کنیم بازای $x \rightarrow 0$ داشته باشیم :

$$f(x) = 1 + kx + o(x)$$

ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = e^k$$

۱۳۹۳،۲ - فرض کنید $f(x) \in C^{(2)}[0,1]$ و $f(0) = f(1) = 0$ ، ضمناً

$|f''(x)| \leq A$ بازای $x \in (0,1)$. ثابت کنید که بازای $(0 \leq x \leq 1)$

$$|f'(x)| \geq \frac{A}{2}$$

۱۳۹۳،۳ - فرض کنیم $f(x)$ تابع دو بار دیفرانسیل پذیر $(-\infty < x < +\infty)$ باشد و

$$M_k = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k = 0, 1, 2)$$

ناساوی زیر را ثابت کنید :

$$M_1^2 \leq 2M_0 M_2$$

۱۳۹۴ - مطلوبست برآورد خطای مطلق دستورهای تقریبی زیر :

الف) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ بازای $0 \leq x \leq 1$ ؛

ب) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ بازای $|x| \leq \frac{1}{2}$ ؛

پ) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ بازای $|x| \leq 0,1$ ؛

ت) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ بازای $0 \leq x \leq 1$.

۱۳۹۵ - بازای چه مقدار x دستور تقریبی زیر با تقریب $0,0001$ درست است :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

۱۳۹۵,۱ - ثابت کنید

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r$$

($n \geq 2, a > 0, x > 0$) که در آن $\frac{x^2}{2n^2} \times \frac{1}{a^{2n-1}} < r < \frac{x^2}{2n^2}$

۱۳۹۶ - بیاری دستور تیلر عبارات زیر را بطور تقریبی حساب و خطا را بر آورد کنید :

- | | |
|----------------------------|------------------------|
| ت) $\sin 18^\circ$ ؛ | الف) $\sqrt[3]{30}$ ؛ |
| ج) $\ln 1,2$ ؛ | ب) $\sqrt[5]{200}$ ؛ |
| چ) $\text{arctg } 0,8$ ؛ | پ) $\sqrt[12]{4000}$ ؛ |
| ح) $\text{arcsin } 0,45$ ؛ | ت) \sqrt{e} ؛ |
| خ) $(1,1)^{1,2}$ ؛ | |

۱۳۹۷ - مطلوبست محاسبه

- | | |
|------------------------------------|--|
| ت) $\sqrt{5}$ با تقریب 10^{-4} ؛ | الف) e با تقریب 10^{-9} ؛ |
| ث) $\lg 11$ با تقریب 10^{-5} ؛ | ب) $\sin 1^\circ$ با تقریب 10^{-8} ؛ |
| | پ) $\cos 9^\circ$ با تقریب 10^{-5} ؛ |

با استفاده از بسطهای $V-I$ حدود زیر را پیدا کنید :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} - 1398$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} - 1399$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) - 1400$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^6} - \sqrt[3]{x^3 - x^6}) - 1401$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^3 + 1} \right] - 1402$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \quad (a > 0) - 1403$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] - 1404$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) - 1405$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right) - 1406$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt{1-x^2}}{x^3} - 1406,1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} - 1406,2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3} - 1406,3$$

جمله اصلی مقدار y را که برای $x \rightarrow 0$ بی نهایت کوچک میباشد بصورت

Cx^n (مقدار ثابت) تعیین کنید، در صورتیکه:

$$y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x) - 1407$$

$$y = 1 - \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} - 1404$$

$$y = (1+x)^x - 1 - 1408$$

۱۴۱۰- در ازای چه مقادیری از ضرایب a و b مقدار عبارت

$$x - (a + b \cos x) \sin x$$

بی نهایت کوچک مرتبه ۵-ام نسبت به x خواهد بود؟

۱۴۱۰,۱- ضرایب A و B را چنان انتخاب کنید که برای $x \rightarrow 0$ تساوی

مجانبی زیر برقرار باشد:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + O(x^5)$$

۱۴۱۰,۲- در ازای چه مقادیری از ضرایب A ، B ، C و D دستور مجانبی

زیر برای $x \rightarrow 0$ درست است:

$$e^x = \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} + O(x^5)$$

۱۴۱۱- فرض آنکه $|x|$ مقدار کوچکی باشد، دستورهای تقریبی ساده‌ای برای محاسبه عبارتهای زیر معلوم کنید:

الف) $\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2}\right)$ ($R > 0$) ؛ پ) $\frac{1}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{-n} \right]$ ؛

ب) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ ؛ ت) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{x}{100}\right)}$

۱۴۱۲- بفرض آنکه از لحاظ قدر مطلق کوچک باشد، دستور تقریبی بشکل

$$x = \alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x$$

را با تقریب تا جمله دارای x^5 معلوم کنید. این دستور را برای تقویم تقریبی کمانهای دارای کمیت کوچک زاویه‌ای بکار برید.

۱۴۱۳- خطای نسبی این قایده چپشرف را بر آورد کنید: کمان دایره‌ای تقریباً برابر است با مجموع ساقهای مثلث متساوی الساقین که بر وتر این کمان ساخته شده و ارتفاع آن $\sqrt{\frac{2}{3}}$ سهم وتر را تشکیل میدهد.

بخش ۱۱- اکسترمم توابع. بیشترین و کمترین مقدار توابع.

بند ۱- شرط لازم اکسترمم. گویند که تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) است اگر تابع در همسایگی دوطرفه نقطه x_0 معین و بازای جمیع نقاط x از یک حوزه $\delta < |x - x_0| < \delta$ بترتیب (از چپ به راست) نامساویهای

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{یا} \quad f(x) > f(x_0)$$

بر قرار باشد. در نقطه اکسترمم مشتق $f'(x_0) = 0$ هرگاه این مشتق وجود داشته باشد.

بند ۲- شرایط کافی اکسترمم. قاعده اول. اگر (۱) تابع $f(x)$ در یک همسایگی $\delta < |x - x_0| < \delta$ نقطه x_0 معین و پیوسته باشد بقسمی که $f'(x_0) = 0$ یا مشتق نداشته باشد (نقطه بحرانی)؛ (۲) $f(x)$ در حوزه $\delta < |x - x_0| < \delta$ دارای مشتق متناهی ($f'(x)$ باشد)؛ (۳) مشتق $f'(x)$ علامت معینی را در سمت چپ x_0 و سمت راست x_0 حفظ کند، در آنصورت رفتار تابع $f(x)$ بصورت جدول زیر مشخص میشود:

	علامت مشتق		نتیجه
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	+	+	اکسترمم ندارد
II	+	-	ماکزیمم
III	-	+	مینیمم
IV	-	-	اکسترمم ندارد

قاعد دوم . اگر تابع $f(x)$ دارای مشتق مرتبه دوم $f''(x)$ بوده و در یک نقطه x_0 شرایط زیر برقرار باشد :

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{و} \quad f''(x_0) \neq 0.$$

در آنصورت در این نقطه $f(x)$ دارای اکسترمم میباشد که بازای $f''(x_0) < 0$ ماکزیمم و بازای $f''(x_0) > 0$ مینیمم است .

قاعده سوم . هرگاه $f(x)$ در یک فاصله $|x - x_0| < \delta$ دارای مشتقات $f(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ و در نقطه x_0 دارای مشتق $f^{(n)}(x_0)$ باشد ، ضمناً

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1) \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

در چنین حالتی : (۱) اگر n عدد زوجی باشد در آنصورت $f(x)$ در نقطه x_0 دارای اکسترمم میباشد که بازای $f^{(n)}(x_0) < 0$ ماکزیمم و بازای $f^{(n)}(x_0) > 0$ مینیمم است . (۲) اگر n عدد فردی باشد در آنصورت تابع در نقطه x_0 اکسترمم ندارد .

بند ۳ - اکسترمم مطلق . بیشترین (کمترین) مقدار تابع پیوسته $f(x)$ در قطعه $[a, b]$ یا در نقطه بحرانی این تابع (یعنی آنجا که مشتق $f'(x)$ یا برابر صفر است یا وجود ندارد) یا در نقاط مرزی a و b قطعه مفروض میباشد .

توابع زیر را از لحاظ اکسترمم بررسی کنید :

$$y = 2 + x - x^2 - 1414$$

$$y = (x-1)^3 - 1415$$

$$y = (x-1)^4 - 1416$$

$$(n \text{ و } m \text{ اعداد درست مثبت میباشند}) \quad y = x^m(1-x)^n - 1417$$

$$y = \cos x + \operatorname{ch} x - 1418$$

$$y = (x+1)^{10} e^{-x} - 1419$$

$$y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) e^{-x} - 1420$$

$$y = |x| - 1421$$

$$y = x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{2}{3}} - 1422$$

$$\text{تابع} - 1423$$

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$$

را در نقطه $x = x_0$ (n عددیست طبیعی) که در آن $\varphi(x)$ برای $x = x_0$ پیوسته و $\varphi(x_0) \neq 0$ ، از لحاظ اکسترم بررسی کنید.

$$- 1424 \text{ هرگاه } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ و } f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \text{ و } x_0 \text{ نقطه سکون تابع}$$

$f(x)$ باشد یعنی $P_1(x_0) = 0$ و $Q_1(x_0) \neq 0$ ثابت کنید که

$$\text{sgn } f''(x_0) = \text{sgn } P_1'(x_0)$$

- 1425 اگر تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای ماگزیمم باشد آیا میتوان گفت که در یک همسایگی بقدر کافی کوچک این نقطه در سمت چپ

x_0 ، تابع $f(x)$ صعودی و در سمت راست آن نزولی است؟
مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$f(0) = 2 \text{ و } x \neq 0 \text{ اگر } f(x) = 2 - x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$$

- 1426 ثابت کنید که تابع

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ اگر } x \neq 0 \text{ و } f(0) = 0$$

در نقطه $x = 0$ دارای مینیمم است و تابع

$$g(x) = x e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ اگر } x \neq 0 \text{ و } g(0) = 0$$

در نقطه $x = 0$ دارای اکسترم نیست، با آنکه

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad g^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

نمودار این توابع را رسم کنید.

- 1427 توابع زیر را از لحاظ اکسترم بررسی کنید:

$f(0) = 0$ و $x \neq 0$ بازای $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sin \frac{1}{x} \right)$ (الف)

$f(0) = 0$ و $x \neq 0$ بازای $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \cos \frac{1}{x} \right)$ (ب)

نمودار این توابع را رسم کنید .

۱۴۲۸ - تابع

$f(0) = 0$ و $x \neq 0$ اگر $f(x) = |x| \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right)$

را از لحاظ اکسترم بررسی کنید .

نمودار این تابع را رسم کنید .

اکسترم توابع زیر را پیدا کنید :

$y = \sqrt{x-1} - 1436$

$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 - 1439$

$y = xe^{-x} - 1437$

$y = 2x^2 - x^4 - 1430$

$y = \sqrt{x} \ln x - 1438$

$y = x(x-1)^2(x-2)^3 - 1431$

$y = \frac{\ln^2 x}{x} - 1439$

$y = x + \frac{1}{x} - 1432$

$y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x - 1440$

$y = \frac{2x}{1+x^2} - 1433$

$y = \frac{10}{1+\sin^2 x} - 1441$

$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 1} - 1434$

$y = \sqrt{2x - x^2} - 1435$

$y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - 1442$

$y = |x|e^{-|x-1|} - 1443$

$y = e^x \sin x - 1443$

کمترین و بیشترین مقدار توابع زیر را پیدا کنید :

$f(x) = 2^x - 1445$ روی قطعه $[-1; 0]$

$f(x) = x^2 - 4x + 6 - 1446$ روی قطعه $[-3; 10]$

$f(x) = |x^2 - 3x + 2| - 1447$ روی قطعه $[-10; 10]$

$f(x) = x + \frac{1}{x} - 1448$ روی قطعه $[0, 0, 1; 100]$

$f(x) = \sqrt{5 - 4x} - 1449$ روی قطعه $[-1; 1]$

کران پایین (inf) و کران بالای (sup) توابع زیر را پیدا کنید :

$$f(x) = xe^{-0.01x} - 1450 \quad (0, +\infty) \text{ فاصله}$$

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x} - 1451 \quad (0, +\infty) \text{ فاصله}$$

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} - 1452 \quad (0, +\infty) \text{ فاصله}$$

$$f(x) = e^{-x^2} \cos x^2 - 1453 \quad (-\infty, +\infty) \text{ فاصله}$$

$$f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2} \quad \text{کران بالا و کران پائین تابع روی}$$

$$x < \xi < +\infty \text{ فاصله}$$

نمودار توابع زیر را رسم کنید :

$$m(x) = \inf_{x < \xi < +\infty} f(\xi) \quad \text{و} \quad M(x) = \sup_{x < \xi < +\infty} f(\xi)$$

۱۴۵۴، فرض کنیم

$$M_k = \sup \|f^{(k)}(x)\|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

مطلوبست تعیین M_0 ، M_1 و M_2 اگر $f(x) = e^{-x^2}$.

۱۴۵۵ - مطلوبست تعیین بزرگترین جمله هر یک از دنباله‌های زیر :

$$\text{الف) } \left\{ \frac{n!}{2^n} \quad (n = 1, 2, \dots) \right\}$$

$$\text{ب) } \left\{ \frac{\sqrt[n]{n}}{n+10000} \quad (n = 1, 2, \dots) \right\}$$

$$\text{پ) } \left\{ \sqrt[n]{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \right\}$$

۱۴۵۶ - مطلوبست اثبات ناساویهای زیر :

$$\text{الف) } |3x - x^3| \leq 2 \quad \text{بازای } |x| \leq 2$$

$$\text{ب) } \frac{1}{p-1} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1 \quad \text{اگر } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{و} \quad p > 1$$

$$\text{پ) } x^m (a-x)^n \leq \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n} \quad \text{بازای } n > 0, m > 0$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$\text{ت) } \frac{x+a}{\frac{n-1}{2}^n} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a \quad (x < 0, a > 0, n > 1)$$

$$\text{ث) } |a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

۱۴۵۶،۱ - ناساوی زیر را برای $-\infty < x < +\infty$ ثابت کنید :

$$\frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2$$

۱۴۵۷ - مطلوبست تعیین « انحراف از صفر » چند جمله‌ای

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2)$$

روی قطعه^{*} $[-2, 1]$ یعنی تعیین

$$E_p = \sup_{-2 \leq x \leq 1} |P(x)|$$

۱۴۵۸ - در ارزی چه مقدار ضریب q ، چند جمله‌ای

$$P(x) = x^2 + q$$

روی قطعه^{*} $[-1, 1]$ دارای کمترین انحراف از صفر است ، یعنی

$$E_p = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| = \min$$

۱۴۵۹ - انحراف مطلق دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ روی قطعه^{*} $[a, b]$ عبارتست از عدد

$$\Delta = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

مطلوبست تعیین انحراف مطلق توابع

$$f(x) = x^2 \quad \text{و} \quad g(x) = x^3$$

روی قطعه^{*} $[0, 1]$.

۱۴۶۰ - تابع

$$f(x) = x^2$$

را روی قطعه^{*} $[x_1, x_2]$ بطور تقریبی چنان با تابع خطی

$$g(x) = (x_1 + x_2)x + b$$

جایگزین کنید که انحراف مطلق توابع $f(x)$ و $g(x)$ (مساله قبل را ببینید) کمترین باشد و این کمترین انحراف مطلق را تعیین کنید .

۱۴۶۱ - مینیمم تابع زیر را تعیین کنید :

$$f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}$$

تعداد ریشه‌های حقیقی معادلات زیر را تعیین کرده و آنها را جدا کنید :

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0 - 1462$$

$$x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0 - 1463$$

$$3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0 - 1464$$

$$x^5 - 5x = a - 1465$$

$$\ln x = kx - 1466$$

$$e^x = ax^2 - 1467$$

$$\cdot \leq x \leq \pi \text{ بازای } \sin^2 x \times \cos x = a - 1468$$

$$\operatorname{ch} x = kx - 1469$$

۱۴۷۰- در چه شرایطی معادله*

$$x^3 + px + q = 0$$

دارای : الف) یک ریشه حقیقی است ؛ ب) دارای سه ریشه حقیقی است ؟
حوزه‌های متناظر را در صفحه* (p, q) مشخص کنید .

بخش ۱۲- رسم نمودار توابع از روی نقاط مشخص

برای رسم نمودار توابع $y = f(x)$ بایستی : ۱) حوزه وجود این تابع را تعیین و رفتار تابع را در نقاط مرزی حوزه وجود بررسی نمود ؛ ۲) تقارن و دوره نمودار را معلوم نمود ؛ ۳) نقاط انفصال و فواصل پیوستگی را تعیین نمود ؛ ۴) صفرها و حوزه‌های ثابت علامت ثابت را تعیین نمود ؛ ۵) نقاط اکسترمم را پیدا نمود و فواصل صعود و نزول تابع را تشخیص داد ؛ ۶) نقاط عطف و فواصل تقعر با علامت معین نمودار تابع را تعیین نمود ؛ ۷) در صورت وجود مجانب‌های تابع را پیدا نمود ؛ ۸) سایر ویژگی‌های نمودار تابع را نشان داد .
در مسائل ستاره‌دار نقاط عطف بطور تقریبی تعیین شوند .

نمودار توابع زیر را رسم کنید :

$$y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2} - 1476^*$$

$$y = \frac{x^4}{(1+x)^3} - 1477$$

$$y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4 - 1478$$

$$y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - 1479$$

$$y = 3x - x^3 - 1471$$

$$y = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - 1472$$

$$y = (x+1)(x-2)^2 - 1473$$

$$y = \frac{2-x^2}{1+x^2} - 1474^*$$

$$y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} - 1475^*$$

$$y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1-x} - 1 \text{ 187}$$

$$y = (x - \sqrt{x}) \sqrt{x} - 1 \text{ 188}$$

$$y = \pm \sqrt{\lambda x^{\sqrt{x}} - x^{\lambda}} - 1 \text{ 189}$$

$$y = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x^{\sqrt{x}} + 1}} - 1 \text{ 190, 1}$$

$$y = \pm \sqrt{(x-1)(x-\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} - 1 \text{ 187}$$

$$y = \cos x - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} - 1 \text{ 000}$$

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x - 1 \text{ 001}$$

$$y = \sin x \times \sin \sqrt{x} - 1 \text{ 002}$$

$$y = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{x}\right)} - 1 \text{ 003}$$

$$y = \frac{\cos x}{\cos \sqrt{x}} - 1 \text{ 004}$$

$$y = \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x} - 1 \text{ 005, 1}$$

$$y = \sqrt{x} - \operatorname{tg} x - 1 \text{ 006}$$

$$y = e^{\sqrt{x}} - x^{\sqrt{x}} - 1 \text{ 007}$$

$$y = (1 + x^{\sqrt{x}}) e^{-x^{\sqrt{x}}} - 1 \text{ 008}$$

$$y = x + e^{-x} - 1 \text{ 008}$$

$$y = x^{\frac{\sqrt{x}}{x}} e^{-x} - 1 \text{ 009}$$

$$y = e^{-\sqrt{x}} \sin^{\sqrt{x}} x - 1 \text{ 009, 1}$$

$$y = \frac{e^x}{1+x} - 1 \text{ 010}$$

$$y = \sqrt{1 - e^{-x^{\sqrt{x}}}} - 1 \text{ 011}$$

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 1 \text{ 012}$$

$$y = \ln(x + \sqrt{x^{\sqrt{x}} + 1}) - 1 \text{ 013}$$

$$y = \frac{x}{(1-x^{\sqrt{x}})^{\sqrt{x}}} - 1 \text{ 180}$$

$$y = \frac{(x+1)^{\sqrt{x}}}{(x-1)^{\sqrt{x}}} - 1 \text{ 181}$$

$$y = \frac{x^{\sqrt{x}} + \lambda}{x^{\sqrt{x}} + 1} - 1 \text{ 182*}$$

$$y = \sqrt{x^{\sqrt{x}} - x^{\sqrt{x}} - x + 1} - 1 \text{ 183*}$$

$$y = \sqrt{x^{\sqrt{x}}} - \sqrt{x^{\sqrt{x}} + 1} - 1 \text{ 184}$$

$$y = (x + \sqrt{x})^{\frac{\sqrt{x}}{x}} - (x - \sqrt{x})^{\frac{\sqrt{x}}{x}} - 1 \text{ 185}$$

$$y = (x + 1)^{\frac{\sqrt{x}}{x}} + (x - 1)^{\frac{\sqrt{x}}{x}} - 1 \text{ 186}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^{\sqrt{x}} - 1}} - 1 \text{ 187}$$

$$y = \frac{x^{\sqrt{x}} \sqrt{x^{\sqrt{x}} - 1}}{\sqrt{x^{\sqrt{x}} - 1}} - 1 \text{ 188}$$

$$y = \frac{|1+x|^{\frac{\sqrt{x}}{x}}}{\sqrt{x}} - 1 \text{ 189}$$

$$y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} + x}} - 1 \text{ 189}$$

$$y = \sqrt{\frac{x^{\sqrt{x}}}{x+1}} - 1 \text{ 190}$$

$$y = \sqrt{\frac{x^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}}{x^{\sqrt{x}} + 1}} - 1 \text{ 190*}$$

$$y = \sin x + \cos^{\sqrt{x}} x - 1 \text{ 191}$$

$$y = (\sqrt{x} + \sqrt{x} \cos x) \sin x - 1 \text{ 192}$$

$$y = \sin x + \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} - 1 \text{ 193}$$

$$y = \sqrt{x^{\sqrt{x}} + 1} \times \ln(x + \sqrt{x^{\sqrt{x}} + 1}) - 1 \text{ 014}$$

$$y = \arcsin \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} - 1519$$

$$y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - 1520$$

$$y = (x+\sqrt{x}) e^{\frac{1}{x}} - 1521$$

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - 1515$$

$$y = x + \arctg x - 1516$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x}} + \arctg x - 1517$$

$$y = x \arctg x - 1518$$

$$y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} - 1522$$

$$y = \ln \frac{x^2 - \sqrt{x^2+1}}{x^2+1} - 1523^*$$

$$y = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} \quad (a > 0) - 1524$$

$$y = x^{\frac{1}{x}} - 1527^*$$

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} - 1528$$

$$y = \arccos \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} - 1525$$

$$y = x^x - 1526$$

$$y = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (x > 0) - 1529^*$$

$$y = \frac{1}{e^{1-x^2} - 1 + x^2} - 1530^* \quad \text{. (بدون بررسی تعذر)}$$

مطلوبست رسم منحنی هائیکه بصورت پارامتری داده شده‌اند :

$$x = \frac{(t+1)^2}{t}, \quad y = \frac{(t-1)^2}{t} - 1531$$

$$x = \sqrt{t} - t^2, \quad y = \sqrt{t} - t^2 - 1532$$

$$x = \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1} - 1533^*$$

$$y = \frac{t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{1}{1+t^2} - 1534$$

$$x = t + e^{-t}, \quad y = \sqrt{t} + e^{-\sqrt{t}} - 1535$$

$$x = a \cos \sqrt{t}, \quad y = a \cos \sqrt{t} \quad (a > 0) - 1536$$

$$x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t - 1537$$

$$y = t \ln t, \quad y = \frac{\ln t}{t} - 1538$$

$$x = \frac{a}{\cos^2 t}, \quad y = a \operatorname{tg}^2 t \quad (a > 0) - 1029$$

$$x = a(\operatorname{sh} t - t), \quad y = a(\operatorname{ch} t - 1) \quad (a > 0) - 1030$$

معادلات منحنی‌های زیر را بصورت پارامتری در آورده و این منحنی‌ها را

رسم کنید :

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0) - 1031$$

راه‌نمایی - فرض کنید $y = tx$.

$$x^2 y^2 = x^3 - y^3 - 1033$$

$$x^2 + y^2 = x^4 + y^4 - 1032$$

$$x^y = y^x \quad (x > 0, y > 0) - 1034$$

۱۰۳۵ - مطلوبست رسم نمودار منحنی

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1$$

نمودار توابع را که در دستگاه مختصات قطبی (φ, r) داده

شده‌اند رسم کنید :

$$r = a + b \cos \varphi \quad (0 < a \leq b) - 1036$$

$$r = a \sin 2\varphi \quad (a > 0) - 1037$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \quad (a > 0) - 1038$$

$$(a > 0) \quad \varphi > 1 \quad \text{که در آن } r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} - 1039^*$$

$$\varphi = \arccos \frac{r-1}{r^2} - 1000^*$$

مطلوبست رسم نمودار دسته^۱ منحنی‌های زیر (a) پارامتر متغیری است):

$$y = \frac{x}{2} + e^{-ax} - 1004$$

$$y = x^2 - 2x + a - 1001$$

$$y = x + \frac{a^2}{x} - 1002$$

$$y = x e^{-\frac{x}{a}} - 1000$$

$$y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)} - 1003$$

بخش ۱۳ - مسائلی در بارهٔ ماگزیمم و می‌نیمم توابع

۱۰۰۶ - ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ نامنفی باشد در آنصورت تابع

$$F(x) = C f^2(x) \quad (C > 0)$$

دقیقاً دارای همان نقاط اکسترمم تابع $f(x)$ است.

۱۵۵۷- ثابت کنید که اگر تابع $\varphi(x)$ برای $-\infty < x < +\infty$ بمعنای
 اکید صعودی یکنوا باشد در آنصورت نقاط اکسترمم توابع

$$f(x) \text{ و } \varphi(f(x))$$

یکی است .

۱۵۵۸- بیشترین مقدار حاصل ضرب درجه m و n ($n > 0, m > 0$) دو
 عدد مثبت را که مجموع آنها مقداری ثابت و برابر a است پیدا
 کنید .

۱۵۵۹- کمترین مقدار مجموع درجه m و n ($n > 0, m > 0$) دو عدد
 مثبت را که حاصلضرب آنها برابر مقدار ثابت a است پیدا کنید .
 ۱۵۶۰- در کدام دستگاه لگاریتمی عددی وجود دارد که برابر لگاریتم خودش
 باشد ؟

۱۵۶۱- از جمیع مستطیل‌های با مساحت مفروض S ، آن یکی را که دارای
 کمترین محیط است تعیین کنید .

۱۵۶۲- مثلث قائم‌الزاویه با بیشترین مساحت را در صورتیکه مجموع یک
 ضلع و وتر آن مقدار ثابتی باشد پیدا کنید .

۱۵۶۳- برای کدام اندازه‌های خطی، ظرف سربسته استوانه‌ای شکل با گنجایش
 مفروض V دارای کمترین مساحت کل میگردد ؟

۱۵۶۴- در قطعه دایره‌ای که از نیم‌دایره تجاوز نکند مستطیل با بیشترین
 مساحت را محاط کنید .

۱۵۶۵- در بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

مستطیلی محاط کنید که اضلاع آن موازی محورهای بیضی و دارای بیشترین
 مساحت باشد .

۱۵۶۶- در مثلث به قاعده b و ارتفاع h مستطیل با بیشترین محیط را محاط
 کنید .

اسکان حل این مسئله را بررسی کنید .

۱۵۶۷- از تیر چوبی گرد بقطر d باهوئی* با مقطع عرضی مستطیلی بقاعده
 b و ارتفاع h در می‌آوریم . برای چه اندازه‌هایی باهو دارای بیشترین

* - الوارهای بریده شده برای ساختن در و پنجره و غیره و همچنین چوب
 دستی ساربانان را باهو گویند (مترجم) .

استحکام خواهد بود ، در صورتیکه استحکام آن متناسب با bh^2 مییاشد ؟

۱۵۶۸- در نیمکره بشعاع R مکعب مستطیل بقاعده مربع با بیشترین حجم را محاط کنید .

۱۵۶۹- در کره بشعاع R استوانه با بیشترین حجم را محاط کنید .

۱۵۷۰- در کره بشعاع R استوانه با بیشترین مساحت کل را محاط کنید .

۱۵۷۱- بر کره مفروض مخروط با کمترین حجم را محیط کنید .

۱۵۷۲- بیشترین حجم مخروط با مولد مفروض l را پیدا کنید .

۱۵۷۳- در مخروط قائم دوار با زاویه 2α در مقطع محوری و یا شعاع

قاعده R ، استوانه با بیشترین سطح کل را محاط کنید .

۱۵۷۴- کوتاهترین فاصله نقطه $M(p, p)$ را از سهمی $y^2 = 2px$ پیدا کنید .

۱۵۷۵- کوتاهترین و درازترین فاصله نقطه $A(2, 0)$ را از دایره $x^2 + y^2 = 1$ پیدا کنید .

۱۵۷۶- بلندترین وتر بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$) گذرنده بر راس

$B(0, -b)$ را پیدا کنید .

۱۵۷۷- از نقطه $M(x, y)$ متعلق به بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ مماسی رسم کنید

که با محورهای مختصات ، مثلثی با کمترین سطح را تشکیل دهد .

۱۵۷۸- جسمی که بشکل استوانه قائم دوار است از بالا به نیمکره‌ای منتهی

است . بازای چه اندازه‌های خطی این جسم با حجم مفروض V دارای

کمترین سطح کل است ؟

۱۵۷۹- مقطع عرضی کانال روبازی بشکل ذوزنقه متساوی‌الساقین است . بازای

چه شیب φ پهلوها ، « محیط خیس » مقطع کمترین خواهد بود در

صورتیکه مساحت (مقطع زنده) آب در کانال برابر S و سطح آب

در ارتفاع h باشد ؟

۱۵۸۰- « پیچش » دورگرد بسته محصورکننده سطح S عبارتست از نسبت

محیط این دورگرد به طول دایره محصورکننده سطح S .

ذوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ ($AD \parallel BC$) با کمترین پیچش چه شکلی

دارد در صورتیکه قاعده $AD = 2a$ و زاویه حاده $BAD = \alpha$ باشد ؟

۱۵۸۱- از دایره بشعاع R چه قطعی باید برید تا از قسمت باقی مانده بتوان

قیفی با بیشترین گنجایش را ساخت ؟

۱۵۸۲- کارخانه A از راه آهنی که از جنوب به شمال می‌رود و از شهر

B میگذرد کمترین فاصله اش a km است . تحت چه زاویه φ نسبت

براه آهن باید راه فرعی کارخانه را ساخت تا حمل و نقل (ترابری) بار از A تا B بیشتر مقرون به صرفه باشد، در صورتیکه هزینه حمل و نقل بازای یک کیلومتر مسافت با راه آهن تنی q ریال و از راه فرعی تنی p ریال ($p > q$) بوده و شهر B در b کیلومتری شمال کارخانه A قرار داشته باشد؟

۱۵۸۲- دو کشتی بر امتداد دو خط مستقیم که با هم زاویه θ میسازند با سرعت‌های ثابت u و v حرکت میکنند. مطلوبست تعیین حداقل فاصله بین دو کشتی در صورتیکه در یک لحظه نامشخص فاصله آنها از نقطه تقاطع مسیرهایشان به ترتیب a و b باشد.

۱۵۸۴- در نقاط A و B دو منبع نورانی قرار دارند که بترتیب دارای شدت S_1 و S_2 شمع میباشند. بر قطعه $AB = a$ نقطه‌ای مانند M پیدا کنید که کمترین روشنائی را داشته باشد.

۱۵۸۵- نقطه نورانی بر خط‌المركزین دو کره غیر متقاطع شعاع‌های R و r ($R > r$) و در خارج دو کره قرار دارد. بازای چه وضعی از نقطه مجموع سطح‌های روشن‌شده دو کره بیشترین مقدار را دارد؟

۱۵۸۶- در چه ارتفاعی بر بالای میز گرد بشعاع a باید لاسپ الکتریکی را آویخت تا روشنائی اطراف میز بیشترین باشد؟

راهنامه‌ای - شدت روشنائی با دستور

$$I = k \frac{\sin \phi}{r^2}$$

بیان میشود، که در آن ϕ زاویه شیب اشعه و r فاصله منبع نور تا سطح روشن‌شده و k شدت منبع نورانی است.

۱۵۸۷- از رودخانه بعرض a متر کانالی عمود بر آن بعرض b متر ساخته شده است. بیشترین طول یک کشتی که بتواند وارد این کانال شود چقدر است؟

۱۵۸۸- هزینه شبانه روزی حرکت کشتی از دو قسمت تشکیل میشود: هزینه ثابت برابر a ریال و هزینه متغیر که متناسب با مکعب سرعت افزایش مییابد. بازای چه سرعت v حرکت کشتی بیشتر مقرون بصرفه خواهد بود؟

۱۵۸۹- باری بوزن P بر صفحه افقی ناهمواری قرار دارد، میخواهیم با صرف نیرو آنرا جا بجا کنیم. اگر ضریب اصطکاک جسم برابر k باشد

بازای چه شیب این نیرو نسبت به افق مقدار این نیرو کمترین است ؟

۱۵۹۰- در کاسه نیمکره‌ای بشعاع a میله‌ای بطول $l > 2a$ قرار داده شده است. وضع تعادل میله را تعیین کنید.

بخش ۱۴ - تماس منحنی‌ها . دایره انحنا . گسترده .

بند ۱ - تماس مرتبه n - ام . منحنی‌های

$$y = \psi(x), \quad y = \varphi(x)$$

را وقتی در نقطه x_0 مماس مرتبه n - ام (بمعنای اکید) نامند که
 $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) و $\varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0)$.
 در این حالت بازای $x \rightarrow x_0$ داریم :

$$\varphi(x) - \psi(x) = O^*[x - x_0]^{n+1}$$

بند ۲ - دایره انحنا . دایره

$$(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2 = R^2$$

که با منحنی مفروض $y = f(x)$ تماسی داشته باشد که از مرتبه دوم کمتر نباشد به دایره انحنا در نقطه نظیر موسوم است . شعاع این دایره

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

به شعاع انحنا و مقدار $k = \frac{1}{R}$ به انحنا موسوم است .

بند ۳ - گسترده . مکان هندسی مرکز (ξ, η) دایره‌های انحنا (مرکزهای انحنا)

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

را گسترده منحنی مفروض $y = f(x)$ نامند .
 ۱۵۹۱- پارامترهای k و b خط

$$y = kx + b$$

را چنان انتخاب کنید که خط با منحنی

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

دارای تماس مرتبه^۱ بیش از یک باشد .

۱۵۹۲- بازای چه مقدار ضریب‌های a ، b و c سهمی

$$y = ax^2 + bx + c$$

با منحنی $y = e^x$ در نقطه^۱ $x = x_0$ دارای تماس مرتبه^۲ دوم است ؟

۱۵۹۳- محور Ox در نقطه^۱ $x = 0$ با هر یک از منحنی‌های زیر دارای تماسی

از چه مرتبه^۱ است ؟

الف) $y = 1 - \cos x$ ؛ ب) $y = \operatorname{tg} x - \sin x$ ؛

پ) $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$

۱۵۹۴- ثابت کنید که منحنی $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ بازای $x \neq 0$ و $y = 0$ بازای

$x = 0$ در نقطه^۱ $x = 0$ با محور Ox دارای تماس مرتبه^۱ بی‌نهایت

بزرگ است .

۱۵۹۵- مطلوبست تعیین شعاع و مرکز انحنای هذلولی

$$xy = 1$$

در نقاط : الف) $M(1, 1)$ ؛ ب) $N(100, 0, 0, 1)$.

مطلوبست محاسبه^۱ شعاع انحنای منحنی‌های زیر :

۱۵۹۶- سهمی $y^2 = 2px$

۱۵۹۷- بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

۱۵۹۸- هذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

۱۵۹۹- آستروئید $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

۱۶۰۰- بیضی $x = a \cos t, y = b \sin t$

۱۶۰۱- سیکلوئید $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$

۱۶۰۲- گسترنده^۱ دایره^۱ $x = a(\cos t + t \sin t)$

۱۶۰۳- ثابت کنید که شعاع انحنای منحنی درجه^۲ دوم

$$y^2 = 2px - qx^2$$

با مکعب طول قائم متناسب است .
 ۱۶۰۴ - دستور شعاع انحنای منحنی‌ای را که در مختصات قطبی داده شده است بنویسید .

شعاعهای انحنای منحنی‌هایی را که در مختصات قطبی داده شده‌اند تعیین کنید (پارامترها مثبتند) :

۱۶۰۵ - حازونی ارشمیدس $r = a\varphi$.

۱۶۰۶ - حلزونی لگاریتمی $r = ae^{m\varphi}$.

۱۶۰۷ - کاردیوئید $r = a(1 + \cos \varphi)$.

۱۶۰۸ - لمنیسکات $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

۱۶۰۹ - روی منحنی $y = \ln x$ نقطه‌ای پیدا کنید که انحنای آن بیشترین باشد .

۱۶۱۰ - مقدار ماگزیمال انحنای سهمی درجه سوم $y = \frac{kx^3}{6}$

($0 \leq x < +\infty, k > 0$) مساوی $\frac{1}{1000}$ است . مطلوبست نقطه x که در

آن این انحنای ماگزیمال حاصل میشود

مطلوبست تشکیل معادله‌های :

۱۶۱۱ - گسترده سهمی $y^2 = 2px$.

۱۶۱۲ - گسترده بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

۱۶۱۳ - گسترده آستروئید $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

۱۶۱۴ - گسترده تراکتریس

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

۱۶۱۵ - گسترده حلزونی لگاریتمی $r = a^{m\varphi}$

۱۶۱۶ - ثابت کنید گسترده سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

نیز سیکلوئید است که با سیکلوئید مفروض فقط وضع متفاوت دارد .

بند ۱ - قاعدهٔ بخش‌های متناسب (روش وترها). اگر تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ پیوسته بوده و

$$f(a)f(b) < 0$$

و ضمناً $f'(x) \neq 0$ بازای $a < x < b$ در آنصورت معادلهٔ

$$(1) \quad f(x) = 0$$

دارای فقط و فقط یک ریشهٔ حقیقی ξ در فاصلهٔ (a, b) است. برای تقریب اولیهٔ این ریشه میتوان مقدار

$$x_1 = a + \delta_1$$

را اختیار کرد که در آن

$$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

با کار برد مجدد این روش در آن فاصله‌های (a, x_1) یا (x_1, b) که در دو انتهای آن تابع $f(x)$ مختلف‌العلامه است تقریب دوم x_2 از ریشهٔ ξ را میتوان بدست آورد و همین طور تا آخر. برای برآورد تقریب n -ام x_n دستور

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$$

درست است که در آن $m = \inf_{a < x < b} |f'(x)|$ ، ضمناً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

بند ۲ - قاعدهٔ نیوتن (روش مماسها). اگر روی قطعهٔ $[a, b]$ داشته باشیم $f'(x) \neq 0$ و $f''(a)f'(a) > 0$ در آنصورت برای تقریب اولیهٔ ξ_1 ریشهٔ ξ معادلهٔ (۱) میتوان مقدار زیر را اختیار کرد

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

با تکرار این طریقه دنبالهٔ مقادیر تقریبی $\xi_n (n = 1, 2, \dots)$ بدست می‌آید که سرعت بسمت ریشهٔ ξ می‌گیریند و دقت آنها را میتوان از دستور (۲) برآورد نمود.
برای جهت‌گیری تقریبی، رسم نمودار تابع $y = f(x)$ مفید است.

با استفاده از روش بخشهای متناسب ، ریشه‌های معادلات زیر را با تقریب

تا ۰,۰۰۱ تعیین کنید :

$$x - 0,1 \sin x = 2 - 1619$$

$$x^3 - 6x + 2 = 0 - 1617$$

$$\cos x = x^2 - 1620$$

$$x^4 - x - 1 = 0 - 1618$$

با استفاده از روش نیوتن با تقریب ذکر شده ریشه‌های معادلات زیر را

بدست آورید :

$$(10^{-3} \text{ تا } 10^{-4}) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x - 1621$$

$$(10^{-4} \text{ تا } 10^{-5}) \quad x \lg x = 1 - 1622$$

$$(10^{-3} \text{ تا } 10^{-4}) \quad \cos x \times \operatorname{ch} x = 1 - 1623$$

(دو ریشه مثبت)

$$(10^{-5} \text{ تا } 10^{-6}) \quad x + e^x = 0 - 1624$$

$$(10^{-6} \text{ تا } 10^{-7}) \quad x \operatorname{th} x = 1 - 1625$$

۱۶۲۶ - با تقریب تا ۰,۰۰۱ سه ریشه مثبت اول معادله زیر را پیدا کنید :

$$\operatorname{tg} x = x$$

۱۶۲۷ - با تقریب تا 10^{-3} دو ریشه مثبت معادله زیر را پیدا کنید :

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$$

فصل ۳

انتگرالهای نامعین

بخش ۱ - انتگرالهای نامعین ساده

بند ۱ - مفهوم انتگرال نامعین . اگر تابع $f(x)$ روی فاصله (a, b) معین و پیوسته باشد و $F'(x) = f(x)$ بازای $a < x < b$ در آن صورت

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad a < x < b$$

که در آن C مقدار ثابت دلخواهی است .

بند ۲ - خواص اساسی انتگرالهای نامعین :

الف) $d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx$ ؛ ب) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$

پ) $\int Af(x) dx = A \int f(x) dx$ ($A = \text{const}; A \neq 0$)

ت) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

بند ۳ - جدول انتگرالهای ساده :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad \text{I}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0) \quad \text{II}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctg x + C \\ -\arctg x + C \end{cases} \quad \text{III}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad \text{IV}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad \text{V}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C - VI$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1); \quad \int e^x dx = e^x + C - VII$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C - XII \quad \int \sin x dx = -\cos x + C - VIII$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C - XIII \quad \int \cos x dx = \sin x + C - IX$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C - XIV \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C - X$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C - XV \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C - XI$$

بند ۴ - روش‌های اساسی انتگرال‌گیری .

الف) روش وارد کردن آرگومان (آوند) جدید . اگر

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

در آنصورت

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

که در آن $u = \varphi(x)$

ب) روش تجزیه . اگر

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

در آنصورت

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$$

پ) روش جایگزینی . اگر $f(x)$ پیوسته باشد در آنصورت با فرض

$$x = \varphi(t)$$

که در آن $\varphi(t)$ با مشتق خود $\varphi'(t)$ پیوسته است نتیجه میشود :

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

ت) روش انتگرال‌گیری جز' به جز' . اگر u و v توابع دیفرانسیل پذیری

از x باشند در آن صورت

$$\int u dv = uv - \int v du$$

با کاربرد جدول انتگرالهای ساده انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

$$\int \frac{x^r dx}{1-x^r} - 1640$$

$$\int \frac{x^r + r}{x^r - 1} dx - 1641$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^r} + \sqrt{1-x^r}}{\sqrt{1-x^r}} dx - 1642$$

$$\int \frac{\sqrt{x^r + 1} - \sqrt{x^r - 1}}{\sqrt{x^r - 1}} dx - 1643$$

$$\int (r^x + r^{rx})^r dx - 1644$$

$$\int \frac{r^x + 1 - 0^{x-1}}{1 \cdot x} dx - 1645$$

$$\int \frac{e^{rx} + 1}{e^x + 1} dx - 1646$$

$$\int (1 + \sin x + \cos x) dx - 1647$$

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx - 1648$$

$$\int \operatorname{ctg}^r x dx - 1649$$

$$\int \operatorname{tg}^r x dx - 1650$$

$$\int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) dx - 1651$$

$$\int \operatorname{th}^r x dx - 1652$$

$$\int \operatorname{cth}^r x dx - 1653$$

$$\int (r - x^r)^r dx - 1628$$

$$\int x^r (0 - x)^r dx - 1629$$

$$\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x) dx - 1630$$

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^r dx - 1631$$

$$\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^r}{x^r} + \frac{a^{rr}}{x^{rr}}\right) dx - 1632$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx - 1633$$

$$\int \frac{\sqrt{x-r} \sqrt{x^r+1}}{\sqrt{x}} dx - 1634$$

$$\int \frac{(1-x)^r}{x \sqrt{x}} dx - 1635$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^r}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx - 1636$$

$$\int \frac{\left(\sqrt{rx} - \sqrt{rx}\right)^r}{x} dx - 1637$$

$$\int \frac{\sqrt{x^r + x^{-r} + r}}{x^r} dx - 1638$$

$$\int \frac{x^r dx}{1+x^r} - 1639$$

۱۶۵۴ - ثابت کنید اگر

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

در آنصورت

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$$

مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} - 1663$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} - 1664$$

$$\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx - 1665$$

$$\int (\sin \alpha x - \sin \beta x) dx - 1666$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} - 1667$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} - 1668$$

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} - 1669$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} - 1670$$

$$\int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)] dx - 1671$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} - 1673$$

$$\int \frac{dx}{x+a} - 1655$$

$$\int (2x-3)^{10} dx - 1656$$

$$\int \sqrt[3]{1-2x} dx - 1657$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-\alpha x}} - 1658$$

$$\int \frac{dx}{(\alpha x-2)^{\frac{5}{2}}} - 1659$$

$$\int \frac{\sqrt{1-2x+x^2}}{1-x} dx - 1660$$

$$\int \frac{dx}{2+3x^2} - 1661$$

$$\int \frac{dx}{2-3x^2} - 1662$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} - 1672$$

با تبدیل مناسب در عبارت تحت انتگرال ، انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2-2} - 1679$$

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} - 1680$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} - 1674$$

$$\int x^2 \sqrt{1+x^2} dx - 1675$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x}) \text{ - راهنمایی}$$

$$\int \frac{x dx}{2-2x^2} - 1676$$

$$\int \sin \frac{1}{x} \times \frac{dx}{x^2} - 1681$$

$$\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} - 1677$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} - 1682$$

$$\int \frac{x dx}{4+x^2} - 1678$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx - 1798$$

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} \, dx - 1799$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^\gamma \sin^\gamma x + b^\gamma \cos^\gamma x}} \, dx - 1800$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos \gamma x}} \, dx - 1800, 1$$

$$\int \frac{\cos x}{\cos \gamma x} \, dx - 1800, 2$$

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma x}} \, dx - 1800, 3$$

$$\int \frac{dx}{\sin^\gamma x \sqrt{\operatorname{ctg} x}} - 1801$$

$$\int \frac{dx}{\sin^\gamma x + \gamma \cos^\gamma x} - 1802$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} - 1803$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} - 1804$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} - 1805$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} - 1806$$

$$\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}} \, dx - 1807$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^\gamma x \sqrt{\operatorname{th}^\gamma x}} - 1808$$

$$\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1+x^\gamma} \, dx - 1809$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^\gamma - 1}} - 1783$$

$$\int \frac{dx}{(x^\gamma + 1)^{\frac{\gamma}{2}}} - 1784$$

$$\int \frac{x \, dx}{(x^\gamma - 1)^{\frac{\gamma}{2}}} - 1785$$

$$\int \frac{x^\gamma \, dx}{(\lambda x^\gamma + \gamma)^\gamma} - 1786$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} - 1787$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} - 1788$$

$$\int x e^{-x^\gamma} \, dx - 1789$$

$$\int \frac{e^x \, dx}{\gamma + e^x} - 1790$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} - 1791$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{\gamma x}}} - 1792$$

$$\int \frac{\ln^\gamma x}{x} \, dx - 1793$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} - 1794$$

$$\int \sin^\circ x \cos x \, dx - 1795$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^\gamma x}} \, dx - 1796$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx - 1797$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2} - 1714$$

$$\int \frac{x^{\frac{n}{r}} dx}{\sqrt{1+x^r}} - 1715$$

$$\int \frac{1}{1-x^r} \ln \frac{1+x}{1-x} dx - 1716$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{r + \cos rx}} - 1717$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} - 1718$$

$$\int \frac{r^x \times r^x}{4^x - 2^x} dx - 1719$$

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} - 1710$$

$$\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx - 1711$$

$$\int \frac{x^r + 1}{x^2 + 1} dx - 1712$$

- راهنمایی

$$\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = d\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\int \frac{x^r - 1}{x^2 + 1} dx - 1713$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^r}} - 1720$$

با کاربرد روش تجزیه ، انتگرالهای زیر را حساب کنید :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} - 1729$$

$$\int x \sqrt{r - ox} dx - 1730$$

- راهنمایی

$$x \equiv -\frac{1}{o}(r - ox) + \frac{r}{o}$$

$$\int \frac{x dx}{r \sqrt{1-rx}} - 1731$$

$$\int x^r \sqrt{1+x^r} dx - 1732$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+r)} - 1733$$

- راهنمایی

$$1 \equiv \frac{1}{r} [(x+r) - (x-1)]$$

$$\int x^r (r - rx^2)^2 dx - 1721$$

$$\int x(1-x)^{10} dx - 1721,1$$

$$\int \frac{1+x}{1-x} dx - 1722$$

$$\int \frac{x^r}{1+x} dx - 1723$$

$$\int \frac{x^r}{r+x} dx - 1724$$

$$\int \frac{(1+x)^r}{1+x^r} dx - 1725$$

$$\int \frac{(r-x)^r}{r-x^r} dx - 1726$$

$$\int \frac{x^r}{(1-x)^{10}} dx - 1727$$

$$\int \frac{x^o}{x+1} dx - 1728$$

$$\int \frac{x dx}{(x+r)(x+r)} - 1737$$

$$\int \frac{x dx}{x^2 + rx + r} - 1738$$

$$\int \frac{dx}{x^r + x - r} - 1739$$

$$\int \frac{dx}{(x^r + 1)(x^r + r)} - 1740$$

$$\int \frac{dx}{(x^r - r)(x^r + r)} - 1741$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^r (x+b)^r} \quad (a \neq b) - 1742$$

$$\int \frac{dx}{(x^r + a^r)(x^r + b^r)} \quad (a^r \neq b^r) - 1743$$

$$\int \sin rx \times \sin \circ x dx - 1744$$

$$\int \sin^r x dx - 1745$$

$$\int \cos \frac{x}{r} \times \cos \frac{x}{r} dx - 1746$$

$$\int \cos^r x dx - 1747$$

$$\int \sin x \sin(x + \alpha) dx - 1748$$

$$\int \sin\left(rx - \frac{\pi}{r}\right) \cos\left(rx + \frac{\pi}{r}\right) dx - 1749$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^r x} - 1750$$

$$\int \sin^r x dx - 1751$$

$$\int \frac{\cos^r x}{\sin x} dx - 1752$$

$$\int \cos^r x dx - 1753$$

$$\int \frac{dx}{\cos^r x} - 1754$$

$$\int \sin^2 x dx - 1755$$

$$\int \frac{dx}{1 + e^x} - 1756$$

$$\int \cos^2 x dx - 1756$$

$$\int \frac{(1 + e^x)^r}{1 + e^{rx}} dx - 1757$$

$$\int \operatorname{ctg}^r x dx - 1757$$

$$\int \operatorname{sh}^r x dx - 1758$$

$$\int \sin^r rx \sin^r rx dx - 1758$$

$$\int \operatorname{ch}^r x dx - 1759$$

$$\int \frac{dx}{\sin^r x \cos^r x} - 1759$$

$$\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} rx dx - 1760$$

راهنمایی

$$\int \operatorname{ch} x \times \operatorname{ch} rx dx - 1761$$

$$1 \equiv \sin^r x + \cos^r x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^r x \operatorname{ch}^r x} - 1762$$

$$\int \frac{dx}{\sin^r x \times \cos x} - 1760$$

با کاربرد جایگزینی مناسبی انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

$$\int \frac{\sin^{\sqrt{2}} x}{\cos^{\sqrt{2}} x} dx - 1773$$

$$\int x^{\sqrt{2}} \sqrt[3]{1-x} dx - 1776$$

$$\int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1+\ln x}} - 1774$$

$$\int x^{\sqrt{2}} (1-5x^{\sqrt{2}})^{10} dx - 1777$$

$$\int \frac{dx}{e^{\sqrt{2}} + e^x} - 1775$$

$$\int \frac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2-x}} dx - 1778$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} - 1776$$

$$\int \frac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-x^{\sqrt{2}}}} dx - 1779$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} - 1776$$

$$\int x^{\sqrt{2}} (2-5x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} dx - 1770$$

$$\int \cos^{\sqrt{2}} x \times \sqrt{\sin x} dx - 1771$$

$$\int \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \times \frac{dx}{1+x} - 1777$$

$$\int \frac{\sin x \cos^{\sqrt{2}} x}{1+\cos^{\sqrt{2}} x} dx - 1772$$

با کاربرد جایگزینیهای مثلثاتی $x = a \sin^{\sqrt{2}} t$ ، $x = a \operatorname{tg} t$ ، $x = a \sin t$ و غیره ، انتگرالهای زیر را پیدا کنید (پارامترها مثبت هستند) :

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx - 1782$$

$$\int \frac{dx}{(1-x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}} - 1778$$

$$\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx - 1783$$

$$\int \frac{x^{\sqrt{2}} dx}{\sqrt{x^{\sqrt{2}}-2}} - 1779$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} - 1784$$

$$\int \sqrt{a^{\sqrt{2}}-x^{\sqrt{2}}} dx - 1780$$

$$\int \frac{dx}{(x^{\sqrt{2}}+a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}} - 1781$$

راهنمایی - جایگزینی $x-a = (b-a) \sin^{\sqrt{2}} t$ را بکار برید .

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx - 1785$$

با کاربرد جایگزینیهای هذلولی $x = a \operatorname{ch} t$ ، $x = a \operatorname{sh} t$ و غیره ، انتگرالهای زیر را پیدا کنید (پارامترها مثبت هستند) :

$$\int \frac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt{a^{\sqrt{2}}+x^{\sqrt{2}}}} dx - 1787$$

$$\int \sqrt{a^{\sqrt{2}}+x^{\sqrt{2}}} dx - 1786$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} - 1789$$

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx - 1788$$

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx - 1790$$

راهنمایی - فرض کنید $x+a = (b-a) \operatorname{sh}^2 t$

با کاربرد روش انتگرال گیری جزء به جزء* انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

$$\int x^r \operatorname{ch} r x dx - 1801$$

$$\int \ln x dx - 1791$$

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx - 1802$$

$$\int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1) - 1792$$

$$\int \operatorname{arc} \sin x dx - 1803$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx - 1793$$

$$\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx - 1804$$

$$\int \sqrt{x} \ln^2 x dx - 1794$$

$$\int x^r \operatorname{arc} \cos x dx - 1805$$

$$\int x e^{-x} dx - 1795$$

$$\int \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x^2} dx - 1806$$

$$\int x^r e^{-2x} dx - 1796$$

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx - 1807$$

$$\int x^r e^{-x^2} dx - 1797$$

$$\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx - 1808$$

$$\int x \cos x dx - 1798$$

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} dx - 1809$$

$$\int x^r \sin r x dx - 1799$$

$$\int \sin x \times \ln(\operatorname{tg} x) dx - 1810$$

$$\int x \operatorname{sh} x dx - 1800$$

مطابقت تعیین انتگرالهای زیر :

$$\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx - 1815$$

$$\int x^0 e^{x^2} dx - 1811$$

$$\int \frac{x^r}{(1+x^2)^2} dx - 1816$$

$$\int (\operatorname{arc} \sin x)^2 dx - 1812$$

$$\int x (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2 dx - 1813$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} - 1817$$

$$\int x^r \ln \frac{1-x}{1+x} dx - 1814$$

$\int \cos(\ln x) dx - 1827$	$\int \sqrt{a^x - x^x} dx - 1818$
$\int e^{ax} \cos bx dx - 1828$	$\int \sqrt{x^x + a} dx - 1819$
$\int e^{ax} \sin bx dx - 1829$	$\int x^x \sqrt{a^x + x^x} dx - 1820$
$\int e^{yx} \sin^y x dx - 1830$	$\int x \sin^y x dx - 1821$
$\int (e^x - \cos x)^y dx - 1831$	$\int e^{\sqrt{x}} dx - 1822$
$\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{ctg} e^x}{e^x} dx - 1832$	$\int x \sin \sqrt{x} dx - 1823$
$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^y x} dx - 1833$	$\int \frac{x e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}}{(1+x^2)^{\frac{y}{2}}} dx - 1824$
$\int \frac{x dx}{\cos^y x} - 1834$	$\int \frac{e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}}{(1+x^2)^{\frac{y}{2}}} - 1825$
$\int \frac{x e^x}{(x+1)^y} dx - 1835$	$\int \sin(\ln x) dx - 1826$

تعیین انتگرال‌های زیر بر اساس در آوردن سه‌جمله‌ای درجه دوم بصورت کانونیک و کاربرد دستورهای زیر پایه‌گذاری شده است :

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0) - I$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0) - II$$

$$\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C - III$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sin} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0) - IV$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0) - V$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C - VI$$

$$\int \sqrt{a^{\gamma} - x^{\gamma}} dx = \frac{x}{\gamma} \sqrt{a^{\gamma} - x^{\gamma}} + \frac{a^{\gamma}}{\gamma} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0) - \text{VII}$$

$$\int \sqrt{x^{\gamma} \pm a^{\gamma}} dx = \frac{x}{\gamma} \sqrt{x^{\gamma} \pm a^{\gamma}} \pm \frac{a^{\gamma}}{\gamma} \ln |x + \sqrt{x^{\gamma} \pm a^{\gamma}}| + C - \text{VIII}$$

مطلوبست تعیین انتگرالهای زیر :

$$\int \frac{(x+1)}{x^{\gamma} + x + 1} dx - 1840 \quad \int \frac{dx}{a + bx^{\gamma}} \quad (ab \neq 0) - 1836$$

$$\int \frac{x dx}{x^{\gamma} - \gamma x \cos \alpha + 1} - 1841 \quad \int \frac{dx}{x^{\gamma} - x + \gamma} - 2837$$

$$\int \frac{x^{\gamma} dx}{x^{\gamma} - x^{\gamma} + \gamma} - 1842 \quad \int \frac{dx}{\gamma x^{\gamma} - \gamma x - 1} - 1838$$

$$\int \frac{x^{\alpha} dx}{x^{\gamma} - x^{\gamma} - \gamma} - 1843 \quad \int \frac{x dx}{x^{\gamma} - \gamma x^{\gamma} - 1} - 1839$$

$$\int \frac{dx}{\gamma \sin^{\gamma} x - \lambda \sin x \cos x + \sigma \cos^{\gamma} x} - 1844$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x + x^{\gamma}}} - 1848 \quad \int \frac{dx}{\sin x + \gamma \cos x + \gamma} - 1845$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\gamma x^{\gamma} - x + \gamma}} - 1849 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^{\gamma}}} \quad (b \neq 0) - 1846$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \gamma x - x^{\gamma}}} - 1847$$

- 1850 ثابت کنید که اگر

$$y = ax^{\gamma} + bx + c \quad (a \neq 0)$$

در آنصورت

$$a > 0 \quad \text{بازای} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{y'}{\gamma} + \sqrt{ay} \right) + C$$

$$a < 0 \quad \text{بازای} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^{\gamma} - \gamma ac}} + C$$

9

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} - 1858$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} - 1859$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x-5}} - 1860$$

$$\int \sqrt{2+x-x^2} dx - 1861$$

$$\int \sqrt{2+x+x^2} dx - 1862$$

$$\int \sqrt{x^2+2x^2-1} x dx - 1863$$

$$\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx - 1864$$

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}} dx - 1865$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{0+x-x^2}} - 1851$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx - 1852$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2-2x^2}} - 1853$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}} - 1853,1$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2x^2-1}} - 1854$$

$$\int \frac{x+x^2}{\sqrt{1+x^2-x^2}} dx - 1855$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} - 1856$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}} - 1857$$

بخش ۲ - انتگرال گیری توابع گویا

با کاربرد روش ضرایب نامعین انتگرال‌های زیر را پیدا کنید :

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx - 1872$$

$$\int \left(\frac{x}{x^2-2x+2}\right)^2 dx - 1873$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2} - 1874$$

$$\int \frac{dx}{x^3+x^2-2x^2-2x^2+x+1} - 1875$$

$$\int \frac{x^2+0x+4}{x^2+0x^2+4} dx - 1876$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} - 1877$$

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx - 1876$$

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)} - 1877$$

$$\int \frac{x^{10} dx}{x^2+x-2} - 1878$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-5x^2+6x} dx - 1879$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+0x^2+4} dx - 1870$$

$$\int \frac{xdx}{x^3-2x+2} - 1871$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + 1} - 1884$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + x^{\frac{1}{2}} + 1} - 1885$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + 1} - 1886$$

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} - 1887$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x - 1} - 1888$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{4} x^{\frac{1}{2}} + 3x + 1} - 1889$$

$$\int \frac{dx}{(x^{\frac{1}{2}} - \xi x + \xi)(x^{\frac{1}{2}} - \xi x + \xi)} - 1878$$

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 2)} - 1879$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)} - 1880$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + 1} - 1881$$

$$\int \frac{x dx}{x^2 - 1} - 1882$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - 1} - 1883$$

بچه شرطی انتگرال - 1890

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 (x-1)^2} dx$$

تابع گویا میشود ؟

با کاربرد روش اوستروگرادسکی ، مطلوبست تعیین انتگرالهای زیر :

$$\int \frac{dx}{(x^{\frac{1}{2}} + 1)^2} - 1895$$

$$\int \frac{x^2 + 2x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)^2} dx - 1896$$

$$\int \frac{dx}{(x^{\frac{1}{2}} - 1)^3} - 1897$$

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2 (x+1)^2} - 1891$$

$$\int \frac{dx}{(x^{\frac{1}{2}} + 1)^2} - 1892$$

$$\int \frac{dx}{(x^{\frac{1}{2}} + 1)^3} - 1893$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} - 1894$$

قسمت جبری انتگرالهای زیر را جدا کنید :

$$\int \frac{\xi x^0 - 1}{(x^0 + x + 1)^2} dx - 1900$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + 1)^2} dx - 1898$$

$$\int \frac{dx}{(x^3 + x + 1)^2} - 1899$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$$

۱۹۰۲ - بچه شرطی انتگرال

$$\int \frac{ax^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + 2bx + c)^2} dx$$

تابع گویا میشود ؟

با طریق مختلف انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^2+1} dx - 1911$$

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx - 1903$$

$$\int \frac{x^{2n-1}}{(x^{2n}+1)^2} dx - 1912$$

$$\int \frac{x dx}{x^8-1} - 1904$$

$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)} - 1913$$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^8+3} - 1905$$

$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2} - 1914$$

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1} dx - 1906$$

$$\int \frac{1+x^4}{x(1+x^4)} dx - 1915$$

$$\int \frac{x^2-3}{x(x^8+3x^2+2)} dx - 1907$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2-5x+1)} dx - 1916$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^{10}-10)^2} - 1908$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x^2+1} dx - 1917$$

$$\int \frac{x^{11} dx}{x^8+3x^2+2} - 1909$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x^3+x^2+x+1} dx - 1918$$

$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1} dx - 1919$$

$$\int \frac{x^9 dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2} - 1910$$

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx - 1920$$

۱۹۲۱ - برای محاسبه انتگرال

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (a \neq 0)$$

یک دستور بازگشت استخراج کنید . با استفاده از این دستور مطلوبست محاسبه

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$$

راهنمایی - از اتحاد زیر استفاده کنید :

$$a(ax^2 + bx + c) = (rax + b)^2 + (\epsilon ac - b^2)$$

۱۹۲۲ - جایگزینی $t = \frac{x+a}{x+b}$ را برای محاسبه انتگرال

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n}$$

بکار برید (m و n اعداد طبیعی هستند).
با استفاده از این جایگزینی مطلوبست محاسبه

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2 (x+3)^3}$$

۱۹۲۳ - مطلوبست محاسبه

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx$$

در صورتیکه $P_n(x)$ چندجمله‌ای درجه n نسبت به x باشد.

راهنمایی - دستور تیلر را بکار برید.

۱۹۲۴ - فرض کنیم $R(x) = R^*(x^2)$ که در آن R^* تابعی است گویا. بسط

تابع $R(x)$ بصورت کسرهای گویا دارای چه ویژگی‌هایی است؟

۱۹۲۵ - مطلوبست محاسبه

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}}$$

که در آن n عدد مثبت درستی است.

بخش ۳ - انتگرال‌گیری توابع گنگ

بکمک تبدیل توابع تحت انتگرال به توابع گویا انتگرال‌های زیر را پیدا

کنید :

$$\int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt{2+x}} dx - 1928$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} - 1926$$

$$\int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt{x})} - 1927$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}} - 1932$$

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x+1}}} dx - 1939$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2(a-x)}} (a > 0) - 1933$$

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)^2 \sqrt{x}} - 1930$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} - 1934$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx - 1931$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} - 1935$$

راهمائی - فرض کنید

$$x = \left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2$$

۱۹۳۶ - ثابت کنید که انتگرال

$$\int R\left[x, (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right] dx$$

که در آن R تابع گویا و p, q, n اعداد درستی میباشند به شرط

$$p+q=kn$$

که در آن k عدد درستی است یک تابع ابتدائی است .

انتگرالهای توابع گنگ ساده درجه دوم زیر را پیدا کنید :

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx - 1940$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx - 1937$$

$$\int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} - 1941$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} - 1938$$

$$\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx - 1942$$

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}} - 1939$$

با کاربرد دستور

$$\int \frac{P_n(x)}{y} dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

که در آن $P_n(x)$ چندجمله‌ای درجه n و $Q_{n-1}(x)$ چندجمله‌ای درجه $n-1$ و λ یک عدد میباشند انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}} - 1947$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} - 1948$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2+2x+1}} - 1949$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x}} - 1950$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx - 1943$$

$$\int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{1+x^2}} - 1944$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx - 1945$$

$$\int \frac{x^3-2x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx - 1946$$

۱۹۵۱ - با چه شرطی انتگرال

$$\int \frac{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

تابع جبری میشود ؟

مطلوبست محاسبه $\int \frac{P(x)}{Q(x)y} dx$ که در آن $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ با

تجزیه تابع گویای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ به کسرهای ساده :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt{1-x^2}} - 1957$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1) \sqrt{x^2-1}} - 1958$$

$$\int \frac{dx}{(1-x^2) \sqrt{1+x^2}} - 1959$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx - 1960$$

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}} - 1952$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2-1) \sqrt{x^2-x-1}} - 1953$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx - 1954$$

$$\int \frac{x^3}{(1+x) \sqrt{1+2x-x^2}} dx - 1955$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2-2x+2) \sqrt{x^2-4x+3}} - 1956$$

با درآوردن سه جمله‌ای درجه دوم بصورت کانونیک انتگرالهای زیر را حساب کنید :

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1) \sqrt{x^2+x-1}} - 1961$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 - 2x + 1) \sqrt{2 + 2x - x^2}} - 1962$$

$$\int \frac{(x+1) dx}{(x^2 + x + 1) \sqrt{x^2 + x + 1}} - 1963$$

۱۹۶۴ - بکمک جایگزینی کسری خطی $x = \frac{\alpha + \beta t}{1+t}$ مطلوبست محاسبه انتگرال

$$\int \frac{dx}{(x^2 - x + 1) \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

۱۹۶۵ - مطلوبست محاسبه

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2) \sqrt{2x^2 - 2x + 5}}$$

با کاربرد جایگزینی‌های اولری :

۱) اگر $a > 0$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a}x + z$

۲) اگر $c > 0$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xz \pm \sqrt{c}$

۳) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} + z(x-x_1)$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx - 1969$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} - 1966$$

$$\int \frac{dx}{[1 + \sqrt{x(1+x)}]^2} - 1970$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} - 1967$$

$$\int x \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx - 1968$$

با کاربرد روشهای مختلف انتگرال‌های زیر را پیدا کنید :

$$\int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x + \sqrt{1+x+x^2}} dx - 1074$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} - 1971$$

$$\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx - 1970$$

$$\int \frac{x dx}{(1-x^2) \sqrt{1-x^2}} - 1972$$

$$\int \frac{(x^2 - 1) dx}{(x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1}} - 1976$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 + \sqrt{1-x}} + \sqrt{1+x}} - 1973$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 2x^2 - 1}} - 1978$$

$$\int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^2 - 1) \sqrt{x^2 + 1}} - 1977$$

$$\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x \sqrt{x^2 + x^2 + 1}} - 1979$$

۱۹۸۰ - ثابت کنید که پیدا کردن انتگرال

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$$

که در آن R تابع گویایی است به انتگرال گیری تابع گویا منجر میشود .

انتگرال دوجمله‌ای دیفرانسیل

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

را که در آن m ، n و p اعداد گویا هستند تنها در سه حالت زیر میتوان به انتگرال گیری توابع گویا بدل نمود (قضیهٔ جیبشف) :

حالت ۱ - هرگاه p عدد درستی باشد فرض میکنیم $x = z^N$ که در آن N مخرج مشترک کسره‌های m و n است .

حالت ۲ - هرگاه $\frac{m+1}{n}$ عدد درستی باشد فرض میکنیم $a + bx^n + z^N$ که در آن N مخرج کسر p است .

حالت ۳ - هرگاه $\frac{m+1}{n}$ عدد درستی باشد جایگزینی $ax^{-n} + b = z^N$ را بکار میبریم که در آن N مخرج کسر p است .

اگر $n = 1$ ، در اینصورت این حالت‌ها هم‌ارز حالت‌های زیر است :

(۱) p عددیست درست ؛ (۲) m عددیست درست ؛ (۳) $m + p$ عددیست

درست .

انتگرال‌های زیر را پیدا کنید :

$$\int \frac{x^0 dx}{\sqrt{1-x^2}} - 1984$$

$$\int \sqrt{x^2 + x^2} dx - 1981$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - 1980$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} dx - 1982$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt{x^2}}} - 1983$$

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} - 1988$$

$$\int \sqrt[3]{2x - x^2} dx - 1989$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} - 1986$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt[6]{1+x^6}} - 1987$$

۱۹۹۰- در چه حالاتی انتگرال

$$\int \sqrt{1+x^m} dx$$

که در آن m عدد گویا است تابع ابتدائی میشود ؟

بخش ۴- انتگرال گیری توابع مثلثاتی

انتگرالهای بصورت

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

که در آن m و n اعداد درستی هستند بکمک تبدیلات فنی یا کاربرد دستورهای کاهشی محاسبه میشوند .

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} - 1999$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} - 2000$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2001$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} - 2002$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} - 2003$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx - 2004$$

$$\int \operatorname{ctg}^3 x dx - 2005$$

$$\int \cos^3 x dx - 1991$$

$$\int \sin^3 x dx - 1992$$

$$\int \cos^3 x dx - 1993$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx - 1994$$

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx - 1995$$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x dx - 1996$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx - 1997$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx - 1998$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} - 2009$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} - 2010$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx - 2006$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^2 x}} - 2007$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin^3 x}} - 2008$$

۲۰۱۰ - دستورهای کاهش برای انتگرالهای زیر :

$$(n > 2) \quad K_n = \int \cos^n x dx \quad (\text{ب} ; I_n = \int \sin^n x dx \quad \text{الف})$$

یافته و بیاری آنها انتگرالهای زیر را محاسبه کنید :

$$\int \cos^4 x dx \quad \text{و} \quad \int \sin^3 x$$

۲۰۱۲ - دستورهای کاهش برای انتگرالهای

$$(n > 2) \quad K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \quad (\text{ب} ; I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} \quad \text{الف})$$

یافته و بیاری آنها انتگرالهای زیر را محاسبه کنید :

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} \quad \text{و} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

انتگرالهای زیر بکمک دستورهای

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] - I$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] - II$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] - III$$

محاسبه میشوند .

انتگرالهای زیر پیدا کنید :

$$\int \sin x \sin(x+a) \sin(x+b) dx - 2016$$

$$\int \cos^3 ax \cos^3 bx dx - 2017$$

$$\int \sin^3 2x \times \cos^3 2x dx - 2018$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx - 2013$$

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx - 2014$$

$$\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx - 2015$$

انتگرالهای زیر با کاربرد اتحادها محاسبه میشوند:

$$\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin[(x + \alpha) - (x + \beta)]$$

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos[(x + \alpha) - (x + \beta)]$$

مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر:

$$\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} - ۲۰۲۲$$

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} - ۲۰۱۹$$

$$\int \frac{dx}{\cos x + \cos a} - ۲۰۲۳$$

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)} - ۲۰۲۰$$

$$\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) dx - ۲۰۲۴$$

$$\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} - ۲۰۲۱$$

انتگرالهای بشکل

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

که در آن R تابعی گویا است در حالت کلی بیاری جایگزینی $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ به انتگرال گیری توابع گویا منجر میشود. (الف) اگر تساوی

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

یا

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

بر قرار باشد در آنصورت بهتر است بترتیب جایگزینی $\cos x = t$ یا $\sin x = t$ را بکار برد. (ب) اگر تساوی

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

بر قرار باشد بهتر است جایگزینی $\operatorname{tg} x = t$ را بکار برد.

انتگرالهای زیر را پیدا کنید:

$$\int \frac{dx}{(\gamma + \cos x) \sin x} - ۲۰۲۶$$

$$\int \frac{dx}{\gamma \sin x - \cos x + \delta} - ۲۰۲۵$$

$$\int \frac{\sin^{\nu} x}{\sin x + \nu \cos x} dx - 2027$$

$$\int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} - 2028$$

الف) $0 < \varepsilon < 1$ ؛ ب) $\varepsilon > 1$

$$\int \frac{dx}{\sin^k x + \cos^k x} - 2030$$

$$\int \frac{\sin^{\nu} x}{1 + \sin^{\nu} x} dx - 2029$$

$$\int \frac{\sin^{\nu} x \cos^{\nu} x}{\sin^{\lambda} x + \cos^{\lambda} x} dx - 2036$$

$$\int \frac{dx}{a^{\nu} \sin^{\nu} x + b^{\nu} \cos^{\nu} x} - 2030$$

$$\int \frac{\sin^{\nu} x - \cos^{\nu} x}{\sin^k x + \cos^k x} dx - 2037$$

$$\int \frac{\cos^{\nu} x dx}{(a^{\nu} \sin^{\nu} x + b^{\nu} \cos^{\nu} x)^{\nu}} - 2031$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^k x} dx - 2038$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx - 2032$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{\nu} x + \cos^{\nu} x} - 2039$$

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{\nu}} - 2033$$

$$\int \frac{dx}{(\sin^{\nu} x + \nu \cos^{\nu} x)^{\nu}} - 2040$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\sin^{\nu} x + \cos^{\nu} x} - 2034$$

۲۰۴۱ - انتگرال

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

را با تبدیل متخرج بصورت لگاریتمی پیدا کنید .
۲۰۴۲ - ثابت کنید که

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C$$

که در آن A, B, C ثابتند .
راهنمایی - فرض کنید

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x)$$

که در آن A, B ثابتند .

مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر :

$$\int \frac{dx}{\nu + \theta \operatorname{tg} x} - 2044$$

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \nu \cos x} dx - 2035$$

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{\nu}} dx - 2040$$

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \nu \cos x} dx - 2043, 1$$

۲۰۴۶ - ثابت کنید که

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$$

که در آن A ، B ، C ضرایب ثابتی هستند.

انتگرالهای زیر را پیدا کنید:

$$\int \frac{3 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x - 2} dx - 2049$$

$$\int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3} dx - 2047$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin x + \cos x}} dx - 2048$$

۲۰۵۰ - ثابت کنید که

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx =$$

$$= A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

که در آن A ، B ، C ضرایب ثابتی هستند.

مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر:

$$\int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx - 2051$$

$$\int \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + 2 \cos^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx - 2052$$

۲۰۵۳ - ثابت کنید که اگر $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$ در آن صورت

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx =$$

$$= A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2}$$

که در آن A ، B ضرایب ثابت نامعین و λ_1 ، λ_2 ریشه‌های معادله زیر میباشند:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x, \quad k = \frac{1}{a - \lambda} \quad (i = 1, 2)$$

مطلوبست محاسبه^۴ انتگرالهای زیر :

$$\int \frac{\gamma \sin x - \cos x}{\gamma \sin^{\gamma} x + \xi \cos^{\gamma} x} dx - ۲۰۵۴$$

$$\int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{\gamma \sin^{\gamma} x - \xi \sin x \cos x + \circ \cos^{\gamma} x} - ۲۰۵۵$$

$$\int \frac{\sin x - \gamma \cos x}{1 + \xi \sin x \cos x} dx - ۲۰۵۶$$

۲۰۵۷ - ثابت کنید که

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-2}}$$

که در آن A ، B ، C ضرایب ثابت نامعین میباشند .
۲۰۵۸ - مطلوبست محاسبه^۴

$$\int \frac{dx}{(\sin x + \gamma \cos x)^{\gamma}}$$

۲۰۵۹ - ثابت کنید که

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}} +$$

$$+ B \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-1}} \quad (|a| \neq |b|)$$

و تعیین کنید ضرایب A ، B ، C را در صورتیکه n عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد .

مطلوبست محاسبه^۴ انتگرالهای زیر :

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\gamma + \sin \gamma x}} - ۲۰۶۲$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^{\gamma} x}} - ۲۰۶۰$$

$$\int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^{\gamma}} \quad (0 < \varepsilon < 1) - ۲۰۶۳$$

$$\int \frac{\sin^{\gamma} x}{\cos^{\gamma} x \sqrt{\operatorname{tg} x}} dx - ۲۰۶۱$$

$$\int \frac{\cos^{\alpha} - 1}{\sin^{\alpha} + 1} \frac{x+a}{x-a} dx - ۲۰۶۴$$

$$t = \frac{\cos \frac{x+a}{\gamma}}{\sin \frac{x-a}{\gamma}} \quad \text{راهنمایی - فرض کنید}$$

$$n = \int \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^n dx$$

بیابید (n عددیست طبیعی).

بخش ۵ - انتگرال گیری توابع متعالی مختلف

۲۰۶۶ - ثابت کنید که اگر $P(x)$ چندجمله‌ای درجه n باشد در آنصورت

$$\int P(x) e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \dots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right] + C$$

۲۰۶۷ - ثابت کنید که اگر $P(x)$ چندجمله‌ای درجه n باشد در آنصورت

$$\int P(x) \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right] + \frac{\cos ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right] + C$$

$$\int P(x) \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right] + \frac{\sin ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right] + C$$

مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر :

$$\int x^y e^{\sqrt{x}} dx - ۲۰۷۳$$

$$\int x^y e^{x^2} dx - ۲۰۶۸$$

$$\int e^{ax} \cos^y bx dx - ۲۰۷۴$$

$$\int (x^y - 2x + 2) e^{-x} dx - ۲۰۶۹$$

$$\int e^{ax} \sin^y bx dx - ۲۰۷۵$$

$$\int x^y \sin^y x dx - ۲۰۷۰$$

$$\int x e^x \sin x dx - ۲۰۷۶$$

$$\int (1+x^2)^2 \cos x dx - ۲۰۷۱$$

$$\int x^y e^x \cos x dx - ۲۰۷۷$$

$$\int x^y e^{-x^2} dx - ۲۰۷۲$$

$$\int \cos^2 \sqrt{x} dx - 2080$$

$$\int x e^x \sin^2 x dx - 2078$$

$$\int (x - \sin x)^2 dx - 2079$$

۲۰۸۱- ثابت کنید که اگر R تابع گویا و اعداد a_1, a_2, \dots, a_n دارای مضرب مشترک باشند در آن صورت انتگرال

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx$$

تابع ابتدائی است.

انتگرالهای زیر را پیدا کنید:

$$\int \frac{1 + e^{\frac{x}{2}}}{\left(1 + x^{\frac{x}{2}}\right)^2} dx - 2086$$

$$\int \frac{dx}{(1 + e^x)^2} - 2082$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} - 2087$$

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx - 2083$$

$$\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx - 2088$$

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} - 2084$$

$$\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} dx - 2089$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x} + \sqrt{1 - e^x}} - 2090$$

$$\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} - 2085$$

۲۰۹۱- ثابت کنید که انتگرال

$$\int R(x) e^{ax} dx$$

که در آن R تابع گویایی است که مخرج آن تنها دارای ریشه‌های حقیقی است بر حسب توابع ابتدائی و تابع متعالی

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = \text{li}(e^{ax}) + C$$

بیان میشود که در آن

$$\text{li } x = \int \frac{dx}{\ln x}$$

۲۰۹۲- در چه حالتی انتگرال

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx$$

که در آن $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$ و a_0, a_1, \dots, a_n مقادیر ثابت هستند، تابع ابتدائی میشود؟

انتگرالهای زیر را پیدا کنید:

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx - 2096$$

$$\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx - 2093$$

$$\int \frac{x^2 e^{2x}}{(x-2)^2} dx - 2097$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx - 2094$$

$$\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx - 2095$$

مطلوبست تعیین انتگرالهای شامل توابع $\ln f(x)$ ، $\text{arc tg } f(x)$ ، $\text{arc sin } f(x)$ ، $\text{arc cos } f(x)$ که در آن $f(x)$ تابعی است جبری:

$$\int \ln^n x dx - 2098 \quad (n \text{ عددیست طبیعی})$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx - 2100$$

$$\int x^x \ln^2 x dx - 2099$$

$$\int \ln |(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}| \times \frac{dx}{(x+a)(x+b)} - 2101$$

$$\int \ln^2 (x + \sqrt{1+x^2}) dx - 2102$$

$$\int \ln (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx - 2103$$

$$\int x \text{arc cos } \frac{1}{x} dx - 2109$$

$$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx - 2104$$

$$\int \text{arc sin } \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx - 2110$$

$$\int x \text{arc tg } (x+1) dx - 2105$$

$$\int \frac{\text{arc cos } x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx - 2111$$

$$\int \sqrt{x} \text{arc tg } \sqrt{x} dx - 2106$$

$$\int \frac{x \text{arc cos } x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx - 2112$$

$$\int x \text{arc sin } (1-x) dx - 2107$$

$$\int \text{arc sin } \sqrt{x} dx - 2108$$

$$\int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} - 2115$$

$$\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \ln(1+x^2) dx - 2113$$

$$\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx - 2114$$

مطلوبست تعیین انتگرالهای شامل توابع هذلولوی:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} - 2123$$

$$\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx - 2116$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - \xi \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \eta \operatorname{ch}^2 x} - 2123, 1$$

$$\int \operatorname{ch}^2 x dx - 2117$$

$$\int \operatorname{sh}^2 x dx - 2118$$

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{ch} x} - 2123, 2$$

$$\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx - 2119$$

$$\int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{sh} x - \xi \operatorname{ch} x} - 2123, 3$$

$$\int \operatorname{th} x dx - 2120$$

$$\int \operatorname{sh} ax \sin bx dx - 2124$$

$$\int \operatorname{cth}^2 x dx - 2121$$

$$\int \operatorname{sh} ax \cos bx dx - 2125$$

$$\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx - 2122$$

بخش ۶ - مثالهای مختلف انتگرال گیری توابع

انتگرالهای زیر را تعیین کنید:

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} \sqrt{x} dx - 2132$$

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} - 2126$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} - 2133$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2} - 2127$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2(1-x)}} - 2134$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2+x^4} - 2128$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2+x^4}} - 2135$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} - 2129$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 2x^2 - 1}} - 2136$$

$$\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx - 2130$$

$$\int \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} dx - 2137$$

$$\int \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx - 2131$$

$$\int \frac{x^{\xi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1+x^{\gamma}} dx - 2100$$

$$\int \frac{x \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{(1+x^{\gamma})^{\gamma}} dx - 2107$$

$$\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^{\gamma}})}{(1-x^{\gamma})^{\gamma}} dx - 2108$$

$$\int \sqrt{1-x^{\gamma}} \operatorname{arc} \sin x dx - 2108$$

$$\int x(1+x^{\gamma}) \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x dx - 2109$$

$$\int x^{\gamma}(1+\ln x) dx - 2110$$

$$\int \frac{\operatorname{arc} \sin e^x}{e^x} dx - 2111$$

$$\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\frac{x}{\gamma}}}{e^{\frac{x}{\gamma}}(1+e^x)} dx - 2112$$

$$\int \frac{dx}{(e^x+1+1)^{\gamma} - (e^x-1+1)^{\gamma}} - 2113$$

$$\int \sqrt{\operatorname{th}^{\gamma} x + 1} dx - 2114$$

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \times e^x dx - 2115$$

$$\int |x| dx - 2116$$

$$\int x|x| dx - 2117$$

$$\int (x+|x|)^{\gamma} dx - 2118$$

$$\int \{ |1+x| - |1-x| \} dx - 2119$$

$$\int e^{-|x|} dx - 2120$$

$$\int \max(1, x^{\gamma}) dx - 2121$$

$$\int \frac{(1+x) dx}{x + \sqrt{x+x^{\gamma}}} - 2122$$

$$\int \frac{\ln(1+x+x^{\gamma})}{(1+x)^{\gamma}} dx - 2123$$

$$\int (\gamma x + \gamma) \operatorname{arc} \cos(\gamma x - \gamma) dx - 2124$$

$$\int x \ln(\xi + x^{\xi}) dx - 2125$$

$$\int \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x^{\gamma}} \times \frac{1+x^{\gamma}}{\sqrt{1-x^{\gamma}}} dx - 2126$$

$$\int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1+x^{\gamma}})}{\sqrt{1+x^{\gamma}}} dx - 2127$$

$$\int x \sqrt{x^{\gamma} + 1} \ln \sqrt{x^{\gamma} - 1} dx - 2128$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^{\gamma}}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx - 2129$$

$$\int \frac{dx}{(\gamma + \sin x)^{\gamma}} - 2130$$

$$\int \frac{\sin \xi x}{\sin^{\lambda} x + \cos^{\lambda} x} dx - 2131$$

$$\int \frac{dx}{\sin \sqrt{1+\cos x}} - 2132$$

$$\int \frac{ax^{\gamma} + b}{x^{\gamma} + 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx - 2133$$

$$\int \frac{ax^{\gamma} + b}{x^{\gamma} - 1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx - 2134$$

$$\int \frac{x \ln x}{(1+x^{\gamma})^{\gamma}} dx - 2135$$

$$\int \frac{x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\sqrt{1+x^{\gamma}}} dx - 2136$$

$$\int \frac{\sin \gamma x}{\sqrt{1+\cos^{\xi} x}} dx - 2137$$

$$\int \frac{x^{\gamma} \operatorname{arc} \cos x}{\sqrt{1-x^{\gamma}}} dx - 2138$$

۲۱۷۲ - $\int \varphi(x) dx$ که در آن $\varphi(x)$ فاصله عدد x تا نزدیکترین عدد درست است.

۲۱۷۳ - $\int [x] |\sin \pi x| dx \quad (x \geq 0)$

۲۱۷۴ - $\int f(x) dx$ که در آن

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{بازای } |x| \leq 1 \\ 1 - |x| & \text{بازای } |x| > 1 \end{cases}$$

۲۱۷۵ - $\int f(x) dx$ که در آن

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{اگر } -\infty < x < 0 \\ x + 1, & \text{اگر } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x, & \text{اگر } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

۲۱۷۶ - مطلوبست محاسبه $\int x f''(x) dx$

۲۱۷۷ - مطلوبست محاسبه $\int f'(2x) dx$

۲۱۷۸ - مطلوبست محاسبه $f(x)$ اگر $f'(x^2) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

۲۱۷۹ - مطلوبست محاسبه $f(x)$ اگر $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$

۲۱۸۰ - مطلوبست محاسبه $f(x)$ اگر

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & \text{بازای } 0 < x \leq 1 \\ x, & \text{بازای } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

و $f(0) = 0$

۲۱۸۰، ۱ - هرگاه $f(x)$ تابع پیوسته یکنوا و $f^{-1}(x)$ تابع معکوس آن باشد ثابت کنید که اگر

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

در آن صورت

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$$

مثالهای: الف) $f(x) = x^n \quad (n > 0)$ ؛ ب) $f(x) = e^x$ ؛ پ) $f(x) = \arcsin x$ ؛ ت) $f(x) = \operatorname{Arth} x$ را در نظر بگیرید.

فصل ۴

انتگرالهای معین

بخش ۱ - انتگرال معین بعنوان حد مجموع

بدا - انتگرال بمعنای ریمن. اگر تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ معین و
 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ باشد در آنصورت انتگرال تابع $f(x)$ روی
 قطعه $[a, b]$ عبارتست از عدد

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

که در آن $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ و $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ برای وجود حد (۱) لازم و کافی است که مجموع انتگرال پائین

$$\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

و مجموع انتگرال بالای

$$\bar{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

که در آن

$$M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) \quad \text{و} \quad m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x)$$

بازای $\max |\Delta x_i| \rightarrow 0$ دارای حد مشترک باشند.

تابع $f(x)$ که بازای آن حد طرف راست تساوی (۱) وجود دارد انتگرال پذیر
 (ویژه) روی فاصله نظیر نامند. بالاحض: الف) تابع پیوسته؛ ب) تابع
 کراندار که دارای تعداد متناهی نقاط انفصال است؛ پ) تابع کراندار
 یکنوا، روی هر فاصله متناهی دلخواه انتگرال پذیر می باشد. اگر تابع $f(x)$

روی قطعه $[a, b]$ کراندار نباشد، در آنصورت روی $[a, b]$ انتگرال پذیر ویژه نیست.

بند ۲ - شرط انتگرال پذیری. شرط لازم و کافی انتگرال پذیری تابع $f(x)$ روی قطعه مفروض $[a, b]$ عبارتست از برآورده شدن تساوی

$$\lim_{\max | \Delta x_i | \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$$

که در آن ω_i نوسان تابع $f(x)$ روی قطعه $[x_i, x_{i+1}]$ است.

۲۱۸۱ - مجموع انتگرال S_n را برای تابع

$$f(x) = 1 + x$$

روی قطعه $[-1, 4]$ با تقسیم آن به n فاصله متساوی و انتخاب مقدار آرگومان ξ_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) در وسط این فواصل پیدا کنید.

۲۱۸۲ - بازای تابع مفروض $f(x)$ مطلوبست تعیین مجموع انتگرالهای پائین S_n و بازای \bar{S}_n روی قطعات نظیر با تقسیم آنها به n قسمت متساوی در صورتیکه:

$$\text{الف) } f(x) = x^2 \quad [-2 \leq x \leq 2]$$

$$\text{ب) } f(x) = \sqrt{x} \quad [0 \leq x \leq 1]$$

$$\text{پ) } f(x) = 2^x \quad [0 \leq x \leq 1.0]$$

۲۱۸۳ - مجموع انتگرال پائین را برای تابع $f(x) = x^4$ روی قطعه $[1, 2]$ با تقسیم این قطعه به n بخش بطوریکه طول آنها یک تصاعد هندسی تشکیل دهند، پیدا کنید. حد این مجموع بازای $n \rightarrow \infty$ چقدر است؟

۲۱۸۴ - از روی تعریف انتگرال مطلوبست محاسبه

$$\int_0^T (v_0 + gt) dt$$

که در آن v_0 و g مقادیر ثابتی می باشند.

با در نظر گرفتن انتگرالهای معین زیر بعنوان مجموع انتگرالهای نظیر، آنها را از طریق تقسیم مناسب فاصله انتگرال گیری حساب کنید:

$$\int_1^2 x^a dx \quad (a > 0) \quad - 2186$$

$$\int_{-1}^2 x^2 dx \quad - 2185$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b) - 2189$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx - 2187$$

$$\int_0^x \cos t \, dt - 2188$$

راهنمایی - فرض کنید $(i = 0, 1, \dots, n)$ $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$

$$\int_a^b x^m \, dx \quad (m \neq -1; 0 < a < b) - 2190$$

راهنمایی - نقاط تقسیم را قسمی انتخاب کنید که طولهای x_i آنها تصاعد هندسی تشکیل دهند.

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b) - 2191$$

۲۱۹۲ - انتگرال پواسون

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) \, dx$$

را بازای : الف) $|\alpha| < 1$ ؛ ب) $|\alpha| > 1$ حساب کنید .
 راهنمایی - از تجزیه چندجمله‌ای $1 - \alpha^{2n}$ به عامل‌های درجه دوم استفاده کنید .

۲۱۹۳ - هرگاه توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته باشند ثابت کنید که

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\theta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \varphi(x) \, dx$$

که در آن $x_i \leq \theta_i \leq x_{i+1}$ ، $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (x_n = b, x_0 = a) \text{ و}$$

۲۱۹۳،۱ - هرگاه $f(x)$ روی $[0, 1]$ کراندار و یکتوا باشد ثابت کنید که

$$\int_0^1 f(x) \, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

۲۱۹۳،۲ - هرگاه تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ کراندار و محدب بطرف بالا

(۱۳۱۲ را ببینید) باشد ثابت کنید که

$$(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

۲۱۹۳،۳ - فرض کنیم $f(x) \in C^{(2)}[1, +\infty]$ و $f(x) \geq 0, f'(x) \geq 0, f''(x) \leq 0$ و $x \in [1, +\infty)$ بازای ثابت کنید که

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{2} f(n) + \int_1^n f(x) dx + O(1)$$

بازای $n \rightarrow \infty$.

۲۱۹۳،۴ - هرگاه $f(x) \in C^{(1)}[a, b]$

$$\Delta_n = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

مطلوبست بحاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta_n$

۲۱۹۴ - نشان دهید که تابع ناپیوسته*

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$$

روی فاصله $[0, 1]$ انتگرال پذیر است.

۲۱۹۵ - نشان دهید که تابع ریمن

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x \text{ گنگ است} \\ \frac{1}{n}, & \text{اگر } x = \frac{m}{n} \end{cases}$$

که در آن m, n ($n \geq 1$) اعداد درست نسبت بهم اول می باشند روی هر فاصله* دلخواه متناهی انتگرال پذیر است.

۲۱۹۶ - نشان دهید که تابع

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \quad \text{اگر } x \neq 0$$

و $f(0) = 0$ روی قطعه $[0, 1]$ انتگرال پذیر است.

۲۱۹۷ - ثابت کنید که تابع دیریکله

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x \text{ گنگ است} \\ 1, & \text{اگر } x \text{ گویا است} \end{cases}$$

روی هر فاصله* اختیاری انتگرال پذیر نیست.

۲۱۹۸- فرض کنیم تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد و

$$f_n(x) = \sup f(x) \text{ بازای } x_i \leq x < x_{i+1}$$

که در آن

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \quad (i = 0, 1, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots)$$

ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

۲۱۹۹- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد در آنصورت دنباله^{*} توابع پیوسته^{*} $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) وجود دارد بطوری که

$$a \leq c \leq b \text{ بازای } \int_a^c f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \varphi_n(x) dx$$

۲۲۰۰- ثابت کنید که اگر تابع کراندار $f(x)$ روی قطعه^{*} $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد در آنصورت قدر مطلق آن $|f(x)|$ نیز روی $[a, a]$ انتگرال پذیر است، ضمناً

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

۲۲۰۱- فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعه^{*} $[a, b]$ مطلقاً انتگرال پذیر یعنی انتگرال $\int_a^b |f(x)| dx$ وجود داشته باشد. آیا این تابع روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است؟

مثال

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{اگر } x \text{ گویا است} \\ -1, & \text{اگر } x \text{ گنگ است} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

۲۲۰۲- هرگاه تابع $f(x)$ بازای $[a, b]$ انتگرال پذیر و $A \leq f(x) \leq B$ روی $a \leq x \leq b$ و تابع $\varphi(x)$ روی قطعه^{*} $[A, B]$ معین و پیوسته باشد ثابت کنید که تابع $\varphi(f(x))$ روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است.

۲۲۰۳- اگر توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ انتگرال پذیر باشند در آنصورت آیا حتماً تابع $f(\varphi(x))$ نیز انتگرال پذیر است؟

مثال

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases} \text{ اگر}$$

و تابع $\varphi(x)$ (مساله ۲۱۹۵ را ببینید) را در نظر بگیرید .
 ۲۲۰۴- فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعه $[A, B]$ انتگرال پذیر باشد ثابت کنید که تابع $f(x)$ دارای خاصیت پیوستگی انتگرال می باشد ، یعنی

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{b+h} |f(x+h) - f(x)| dx = 0$$

که در آن $[a, b] \subset [A, B]$.

۲۲۰۵- فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد . ثابت کنید که تساوی

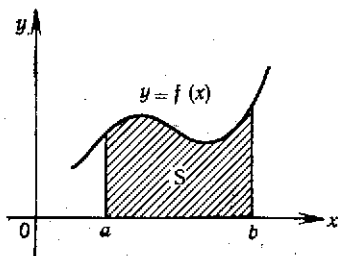
$$\int_a^b f^2(x) dx = 0$$

وقتی و فقط وقتی برقرار است که در جميع نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ متعلق به قطعه $[a, b]$ ، $f(x) = 0$ باشد .

بخش ۲- محاسبه انتگرالهای معین بکمک انتگرالهای نامعین

بندا- دستور نیوتن- لایبنیتز . اگر تابع $f(x)$ در قطعه $[a, b]$ معین و پیوسته و $F(x)$ تابع اولیه آن باشد ، یعنی $F'(x) = f(x)$ در آنصورت

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$



شکل ۹

انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ بازای $f(x) \geq 0$ از لحاظ هندسی عبارتست از مساحت S محدود به منحنی $y = f(x)$ ، محور Ox و دو عمود بر محور Ox : $x = a$ و $x = b$ (شکل ۹).

بند ۲- دستور انتگرال گیری جز به جز. اگر $f(x), g(x) \in C^{(1)}[a, b]$ در اینصورت

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx$$

بند ۳- تعویض متغیر. اگر (۱) تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ پیوسته باشد؛ (۲) تابع $\varphi(t)$ و مشتق آن $\varphi'(t)$ هر دو روی قطعه $[\alpha, \beta]$ که در آن $a = \varphi(\alpha)$ و $b = \varphi(\beta)$ پیوسته باشند؛ (۳) تابع مرکب $f(\varphi(t))$ روی $[\alpha, \beta]$ معین و پیوسته باشد در آنصورت

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

با کاربرد دستور نیوتن- لاینیتز انتگرالهای معین زیر را پیدا کنید و مساحت‌های منحنی‌الخط نظیر آنها را رسم کنید:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - 2209$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x} dx - 2206$$

$$\int_{sh_1}^{\frac{1}{sh_1}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - 2210$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx - 2207$$

$$\int_0^1 |1-x| dx - 2211$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{1+x^2} - 2208$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi) - 2212$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - \varepsilon \cos x} \quad (0 \leq \varepsilon < 1) - 2213$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \quad (ab > 0, |b| < 1, |a| < 1) - 2214$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0) - 2215$$

۲۲۱۶- توضیح دهید چرا کاربرد اسمی دستور نیوتن - لایبنتز در مسائل زیر موجب نتایج نادرستی می‌شود:

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\arctg \frac{1}{x} \right) dx \quad (\text{پ}) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2 + \tan^2 x} \quad (\text{ب}) \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} \quad (\text{الف})$$

۲۲۱۷- مطلوبست محاسبه*

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) dx$$

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx \quad \text{مطلوبست محاسبه}^* - 2218$$

یکمک انتگرالهای معین حد مجموعهای زیر را پیدا کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) - 2219$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) - 2220$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) - 2221$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right) - 2222$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0) - 2223$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right) - 2224$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right] - 2226$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} - 2225$$

با حذف یکنواخت بی نهایت کوچک های مراتب بالا حد مجموع های زیر را پیدا کنید :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sin \frac{2\pi}{n^2} + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \times \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} \quad - 2228$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} \quad (x > 0) \quad - 2229$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{\frac{2}{2}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\frac{n}{2}}{n+\frac{1}{n}} \right) \quad - 2230$$

- 2231 - مطلوبست محاسبه :

$$\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^y dx, \quad \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^y dx, \quad \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^y dx$$

- 2232 - مطلوبست محاسبه :

$$\frac{d}{dx} \int_{x^y}^{x^y} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \quad (\text{ب}) \quad \frac{d}{dx} \int_0^{x^y} \sqrt{1+t^2} dt \quad (\text{الف})$$

$$\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt \quad (\text{پ})$$

- 2233 - مطلوبست محاسبه :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\text{arc tg } x)^y dx}{\sqrt{x^y+1}} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \cos x^y dx}{x} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^y} dx \right)^y}{\int_0^x e^{2x^y} dx} \quad (\text{پ})$$

۱-۲۲۲۳- هرگاه $f(x) \in C[0, +\infty]$ و $f(x) \rightarrow A$ بازای $x \rightarrow +\infty$ مطلوبست

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx \text{ محاسبه}$$

۴-۲۲۲۳- ثابت کنید که

$$\int_0^x e^{x^2} dx \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}$$

بازای $x \rightarrow \infty$.

۵-۲۲۲۳- مطلوبست محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x} dx}$$

۶-۲۲۲۳- هرگاه $f(x)$ تابع پیوسته مثبتی باشد ثابت کنید که تابع

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

بازای $x \geq 0$ صعودی است.

۷-۲۲۲۳- مطلوبست محاسبه:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{بازای } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & \text{بازای } 1 < x \leq 2 \end{cases} \text{ اگر } \int_0^2 f(x) dx$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{بازای } 0 \leq x \leq t \\ t \times \frac{1-x}{1-t}, & \text{بازای } t \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ اگر } \int_0^1 f(x) dx$$

۸-۲۲۳۸- مطلوبست محاسبه و رسم نمودار انتگرالهای $I = I(\alpha)$ یا در نظر

گرفتن آنها بعنوان تابعی از پارامتر α در صورتیکه:

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx \text{ (ب) ؛ } I = \int_0^1 x|x-\alpha| dx \text{ (الف)}$$

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}} \text{ (پ)}$$

با کاربرد دستور انتگرال گیری جز به جز، انتگرالهای معین زیر را پیدا کنید:

$$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx - ۲۲۴۲ \qquad \int_{\cdot}^{\ln 2} x e^{-x} dx - ۲۲۳۹$$

$$\int_{\cdot}^1 \arccos x dx - ۲۲۴۳ \qquad \int_{\cdot}^{\pi} x \sin x dx - ۲۲۴۰$$

$$\int_{\cdot}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx - ۲۲۴۴ \qquad \int_{\cdot}^{2\pi} x^2 \cos x dx - ۲۲۴۱$$

با کاربرد تعویض متغیر مناسبی انتگرالهای معین زیر را پیدا کنید:

$$\int_{\cdot}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx - ۲۲۴۸ \qquad \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}} - ۲۲۴۵$$

$$\int_{\cdot}^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx - ۲۲۴۹ \qquad \int_{\cdot}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx - ۲۲۴۶$$

$$\int_{\cdot}^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} - ۲۲۴۷$$

۲۲۵۰ - مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$ با فرض $x - \frac{1}{x} = t$

۲۲۵۱ - توضیح دهید چرا تعویض اسمی x توسط $\varphi(t)$ در مسائل زیر موجب نتایج نادرستی می شود:

الف) $\int_{-1}^1 dx$ که در آن $t = x^{\frac{1}{2}}$ ؛ ب) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ که در آن $x = \frac{1}{t}$ ؛

پ) $\int_{\cdot}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ که در آن $\operatorname{tg} x = t$

۲۲۵۲ - آیا در انتگرال

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} x \sqrt{1-x^2} dx$$

می توان فرض نمود $x = \sin t$ ؟

۲۲۵۳- آیا در انتگرال $\int \sqrt{1-x^2} dx$ بازای تعویض متغیر $x = \sin t$ میتوان

بعنوان حدود جدید اعداد π و $\frac{\pi}{4}$ را اختیار نمود ؟

۲۲۵۴- ثابت کنید که اگر $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته باشد در آنصورت

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f(a+(b-a)x) dx$$

۲۲۵۵- تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\int_a^a x^a f(x^a) dx = \frac{1}{a} \int_a^a x f(x) dx \quad (a > 0)$$

۲۲۵۶- هرگاه $f(x)$ روی قطعه $[a, b] \subset [A, B]$ تابع پیوسته‌ای باشد مطلوبست محاسبه

$$A-a < x < B-b \quad \text{بازای} \quad \frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y) dy$$

۲۲۵۷- ثابت کنید که اگر $f(x)$ روی $[0, 1]$ تابع پیوسته‌ای باشد در اینصورت :

$$\text{الف) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$\text{ب) } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

۲۲۵۸- ثابت کنید که برای تابع $f(x)$ پیوسته روی $[-l, l]$ داریم :

$$(1) \quad \int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx$$

اگر تابع $f(x)$ زوج باشد و

$$(2) \quad \int_{-l}^l f(x) dx = 0$$

اگر تابع $f(x)$ فرد باشد . تعبیر هندسی این واقعیت را بیان کنید .

۲۲۵۹- ثابت کنید که یکی از توابع اولیه تابع زوج تابع فرد و هر تابع اولیه تابع فرد تابع زوج است .

۲۲۶۰ - مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx$$

با وارد کردن متغیر جدید

$$t = x + \frac{1}{x}$$

۲۲۶۱ - در انتگرال

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$$

تعویض متغیر $t = \sin x$ را انجام دهید .

۲۲۶۲ - مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left| \left[\cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right] \right| dx$$

که در آن n عددیست طبیعی .

۲۲۶۳ - مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

۲۲۶۴ - مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_{-1}^2 \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx$$

که در آن

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^2(x-2)}$$

۲۲۶۵ - ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ بازای $-\infty < x < +\infty$ پیوسته

و معین دوره‌ای به دورهٔ T باشد در آن صورت

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx$$

که در آن a عدد دلخواهی است .

۲۲۶۶ - ثابت کنید که بازای n فرد توابع

$$G(x) = \int_0^x \cos^n x \, dx \quad \text{و} \quad F(x) = \int_0^x \sin^n x \, dx$$

دوره‌ای به دوره 2π و بازای n زوج هر یک از این توابع، مجموعی از تابع خطی و تابع دوره‌ای است.

۲۲۶۷ - ثابت کنید که تابع

$$F(x) = \int_x^x f(x) \, dx$$

که در آن $f(x)$ تابع پیوسته دوره‌ای به دوره T است در حالت کلی مجموع تابع خطی و تابع دوره‌ای به دوره T می‌باشد.

مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)} - 2275$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} - 2276$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx - 2277$$

$$\int_0^{\pi} (x \sin x)^2 \, dx - 2278$$

$$\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x \, dx - 2279$$

$$\int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^2 x \, dx - 2280$$

$$\int_0^1 x(2 - x^2)^{1/2} \, dx - 2268$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{x^2 + x + 1} - 2269$$

$$\int_1^e (x \ln x)^2 \, dx - 2270$$

$$\int_0^1 x \sqrt[3]{1-x} \, dx - 2271$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} - 2272$$

$$\int_0^1 x^{1/5} \sqrt{1 + 3x^4} \, dx - 2273$$

$$\int_0^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \, dx - 2274$$

بکمک دستورهای کاهش انتگرالهای وابسته به پارامتر n را که مقادیر درست مثبت را اختیار می‌کند حساب کنید :

$$I_n = \int \frac{x^{\sqrt{n}} dx}{\sqrt{1-x^{\sqrt{n}}}} - ۲۲۸۵$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x dx - ۲۲۸۱$$

$$I_n = \int x^n (\ln x)^n dx - ۲۲۸۶$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x dx - ۲۲۸۲$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx - ۲۲۸۷$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x dx - ۲۲۸۳$$

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx - ۲۲۸۴$$

اگر $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ تابعی مختلطی از متغیر حقیقی x باشد که در آن $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$ و $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$ و $i = \sqrt{-1}$ در آن صورت بنا به تعریف فرض میشود :

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx$$

واضح است که

$$\operatorname{Re} \int f(x) dx = \int \operatorname{Re} f(x) dx$$

و

$$\operatorname{Im} \int f(x) dx = \int \operatorname{Im} f(x) dx$$

۲۲۸۸- با استفاده از دستور اولر

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

نشان دهید که

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{اگر } m \neq n \\ 2\pi, & \text{اگر } m = n \end{cases}$$

(m و n اعداد درستند).

۲۲۸۹- نشان دهید که

$$\int_a^b e^{(\alpha + i\beta)x} dx = \frac{e^{b(\alpha + i\beta)} - e^{a(\alpha + i\beta)}}{\alpha + i\beta}$$

(α و β مقادیر ثابت می‌باشند).

با استفاده از دستوره‌های اوار

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad , \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

مطلوبست محاسبه^{*} انتگرالهای زیر (m و n اعداد درست مثبتی می‌باشند):

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx - 2292 \qquad \int_0^{\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx - 2290$$

$$\int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx - 2293 \qquad \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx - 2291$$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx - 2294$$

مطلوبست محاسبه^{*} انتگرالهای زیر (n عددیست طبیعی):

$$\int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x dx - 2297 \qquad \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx - 2295$$

$$\int_0^{\pi} \ln \cos x \times \cos 2nx dx - 2298 \qquad \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx - 2296$$

۲۲۹۹- با کاربرد مکرر انتگرال گیری جز به جز مطلوبست محاسبه^{*}

انتگرال اولر $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ که در آن m

و n اعداد درست مثبت می‌باشد.

۲۳۰۰- چندجمله‌ای لژاندر $P_n(x)$ با دستور زیر تعریف می‌شود:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ثابت کنید که

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{اگر } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{اگر } m = n \end{cases}$$

۲۳۰۱- هرگاه تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ انتگرال ویژه پذیر و $F(x)$ تابعی باشد

که $F'(x) = f(x)$ در همه جای $[a, b]$ سواى احتمالا تعداد متناهی

نقاط داخلی آن، $c_i (i = 1, 2, \dots, p)$ و سواى نقاط انفصال نوع

اول a, b از $F(x)$ (تعمیم یافته تابع اولیه^{*}) ثابت کنید که

$$\int_a^b f(x) dx = F(b - 0) - F(a + 0) - \sum_{i=1}^p [F(c_i + 0) - F(c_i - 0)]$$

۲۳۰۲ - هرگاه تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ انتگرال ویژه پذیر و

$$F(x) = C + \int_a^x f(\xi) d\xi$$

انتگرال نامعین آن باشد .

ثابت کنید که تابع $F(x)$ پیوسته است و در جميع نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ تساوی زیر برقرار است :

$$F'(x) = f(x)$$

در باره مشتق تابع $F(x)$ در نقاط انفصال تابع $f(x)$ چه میتوان گفت ؟
مثالهای زیر را در نظر بگیرید :

الف) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) و $f(x) = 0$ بازای $x \neq \frac{1}{n}$ ؛

ب) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

انتگرالهای نامعین توابع کراندار ناپیوسته زیر را پیدا کنید :

$$\int x[x] dx \quad (x \geq 0) - 2306$$

$$\int \operatorname{sgn} x dx - 2303$$

$$\int (-1)^{[x]} dx - 2307$$

$$\int \operatorname{sgn}(\sin x) dx - 2304$$

$$\int [x] dx \quad (x \geq 0) - 2305$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{اگر } |x| < l \\ 0, & \text{اگر } |x| > l \end{cases} \quad \text{که در آن } \int_0^x f(x) dx - 2308$$

مطلوبست محاسبه انتگرالهای معین توابع کراندار ناپیوسته زیر :

$$\int_0^1 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx - 2311$$

$$\int_0^2 \operatorname{sgn}(x - x^2) dx - 2309$$

$$\int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) dx - 2312$$

$$\int_0^2 [e^x] dx - 2310$$

$$\int_1^{n+1} \ln [x] dx - 2313 \quad \text{که در آن } n \text{ عددیست طبیعی .}$$

$$\int_0^1 \operatorname{sgn} |\sin(\ln x)| dx - 2314$$

۲۳۱۵ - مطلوبست محاسبه $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$ که در آن E مجموعه ایست از آن مقادیر قطعه $[0, \pi]$ که بازای آنها عبارت زیر علامت انتگرال دارای معناست .

بخش ۳ - فضای میانگین

بند ۱ - مقدار میانگین تابع . عدد

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

مقدار میانگین تابع $f(x)$ روی فاصله $[a, b]$ نامیده میشود .
اگر تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته باشد در آنصورت نقطه $c \in (a, b)$ یافت میشود چنان که

$$M[f] = f(c)$$

بند ۲ - قضیه اول میانگین . اگر (۱) تابع های $f(x)$ و $\varphi(x)$ روی قطعه $[a, b]$ کراندار و متناظراً انتگرال پذیر باشند ؛ (۲) تابع $\varphi(x)$ بازای $a < x < b$ تغییر علامت ندهد در آنصورت

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx$$

که در آن $M = \sup_{a < x < b} f(x)$ ، $m = \inf_{a < x < b} f(x)$ و $m \leq \mu \leq M$ ؛
(۳) بعلاوه اگر تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ پیوسته باشد در آنصورت $\mu = f(c)$ که در آن $a \leq c \leq b$.

بند ۳ - قضیه دوم میانگین . اگر (۱) توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ روی قطعه $[a, b]$ کراندار و انتگرال ویژه پذیر باشند ؛ (۲) تابع $\varphi(x)$ بازای $a < x < b$ یکنوا باشد در آنصورت

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a + \xi) \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi(b - \xi) \int_{\xi}^b f(x) dx$$

که در آن $a \leq \xi \leq b$ ؛ (۳) بعلاوه اگر تابع $\varphi(x)$ بطور یکنوا نزولی (بمعنای وسیع) و نامنفی باشد در آنصورت

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a + \cdot) \int_a^{\xi} f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b)$$

۳،۱) اگر تابع $\varphi(x)$ بطور یکنوا صعودی (بمعنای وسیع) و نامنفی باشد در آنصورت

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(b - \cdot) \int_{\xi}^b f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b)$$

۲۳۱۶ - علامت‌های انتگرال‌های معین زیر را تعیین کنید :

الف) $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$ ؛ ب) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ ،

پ) $\int_{-1}^1 x^3 2^x dx$ ؛ ث) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx$

۲۳۱۷ - کدام انتگرال بزرگ‌تر است :

الف) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ یا $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ ؟

ب) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ یا $\int_0^1 e^{-x} dx$ ؟

پ) $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ یا $\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ ؟

۲۳۱۸ - مقدار میانگین توابع مفروض را در فواصل داده شده تعیین کنید .

الف) $f(x) = x^2$ روی $[0, 1]$ ؛

ب) $f(x) = \sqrt{x}$ روی $[0, 100]$ ؛

پ) $f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x$ روی $[0, 2\pi]$ ؛

ت) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ روی $[0, 2\pi]$

۲۳۱۹ - مقدار میانگین طول شعاع حامل کانونی بیضی زیر را پیدا کنید :

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

۲۳۲۰ - مطلوبست محاسبه مقدار میانگین سرعت سقوط آزاد جسمی که سرعت اولیه‌اش v_0 است .

$$i = i_0 \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right)$$

تغییر میکند که در آن i_0 دامنه، t زمان و φ فاز اولیه می‌باشد. مطلوبست محاسبه مقدار میانگین مجذور شدت جریان.

۲۳۲۱,۱ - هرگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ و $f(x) \in C(0, +\infty)$ مطلوبست محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx$$

مثال $f(x) = \text{arc tg } x$ را در نظر بگیرید.

۲۳۲۲ - هرگاه

$$\int_0^x f(t) dt = x f(\theta x)$$

مطلوبست محاسبه θ در صورتیکه:

الف) $f(t) = t^n$ ($n > -1$)

ب) $f(t) = \ln t$ ؛ ب) $f(t) = e^t$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \theta$ چقدر است؟

با استفاده از قضیه اول میانگین مطلوبست برآورد انتگرال‌های زیر:

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx - ۲۳۲۴$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0.5 \cos x} - ۲۳۲۳$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+100} dx - ۲۳۲۵$$

۲۳۲۶ - تساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0 \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0 \quad \text{الف)}$$

۲۳۲۶,۱ - مطلوبست محاسبه:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon x^2+1}^1 \frac{dx}{x} \quad (\text{الف})$$

که در آن $a > 0$ ، $b < 0$ ، و $f(x) \in C[0, 1]$.
 ۲۳۲۷- فرض کنیم $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته و $\varphi(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) دیفرانسیل پذیر باشد ، ضمناً

$$a < x < b \quad \varphi'(x) \geq 0 .$$

با کاربرد انتگرال گیری جز به جز و استفاده از قضیه اول میانگین ، قضیه دوم میانگین را اثبات کنید .

با استفاده از قضیه دوم میانگین مطلوبست برآورد انتگرال های زیر :

$$\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx - 2328$$

$$\int_a^b \frac{e^{-ax}}{x} \sin x dx \quad (\alpha \geq 0, 0 < a < b) - 2329$$

$$\int_a^b \sin x^2 dx \quad (0 < a < b) - 2330$$

۲۳۳۱- هرگاه توابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ و مجذورهای آنها روی فاصله $[a, b]$ انتگرال پذیر باشند نامساوی کوشی - بونیاکوسکی را اثبات کنید :

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx$$

۲۳۳۲- فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ پیوسته دیفرانسیال پذیر باشد و $f(a) = 0$. نامساوی

$$M^2 \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx$$

را ثابت کنید که در آن

$$M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

۲۳۳۳- تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0 \quad (p > 0)$$

بند ۱ - انتگرال ناویژه پذیری توابع. اگر تابع $f(x)$ روی هر قطعه متناهی $[a, b]$ انتگرال ویژه پذیر باشد در آنصورت بنا به تعریف فرض می‌شود

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

اگر تابع $f(x)$ در همسایگی نقطه b ناکراندار و روی هر قطعه $[a, b - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) انتگرال ویژه پذیر باشد در آنصورت

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (2)$$

اختیار می‌شود. اگر حدود (۱) یا (۲) وجود داشته باشند در آنصورت انتگرال‌های نظیر را همگرا و در حالت عکس واگرا نامند.

بند ۲ - آزمون (معیار) کوشی. برای همگرایی انتگرال (۱) لازم و کافی است که برای $\varepsilon > 0$ دلخواه عدد $b = b(\varepsilon)$ وجود داشته باشد چنان که برای $b' > b$ و $b'' > b$ دلخواه ناساوی زیر برقرار باشد:

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

بطرز مشابهی آزمون کوشی برای انتگرال نوع (۲) بیان میگردد.

بند ۳ - نشانه همگرایی مطلق اگر $|f(x)|$ انتگرال ناویژه پذیر باشد در آنصورت انتگرال‌های نظیر (۱) یا (۲) از تابع $f(x)$ را مطلقاً همگرا نامند و همگرایی انتگرالها پدیده‌ی است.

نشانه مقایسه I. فرض کنیم $|f(x)| \leq F(x)$ برای $x \geq a$. اگر $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ همگرا باشد در آنصورت انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ مطلقاً همگرا

است.

نشانه مقایسه II. اگر برای $x \rightarrow +\infty$ داشته باشیم $\psi(x) > 0$ و

$\varphi(x) = O^*(\psi(x))$ در آنصورت انتگرال‌های $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ و $\int_a^{+\infty} \psi(x) dx$

توأم همگرا یا واگرا می‌باشند. بالاخص این وقتی روی میدهد که برای $x \rightarrow +\infty$ داشته باشیم $\varphi(x) \sim \psi(x)$.

$$x \rightarrow +\infty \text{ بازای } f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$$

در چنین حالتی انتگرال (۲) بازای $p < 1$ همگرا و بازای $p \leq 1$ واگرا است.
(ب) هرگه

$$x \rightarrow b-0 \text{ بازای } f(x) = O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right)$$

در چنین حالتی انتگرال (۲) بازای $p < 1$ همگرا و بازای $p \geq 1$ واگرا است.

بند ۴ - نشانه خاص همگرایی . اگر (۱) تابع $\varphi(x)$ بطور یکنوا بازای $x \rightarrow +\infty$ بسمت صفر بگراید ؛ (۲) تابع $f(x)$ دارای تابع اولیه کراندار

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$$

باشد در آنصورت انتگرال

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

بطور کلی بطرز غیر مطلق همگرا است . بخصوص انتگرالهای

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ و } \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (a > 0)$$

همگرا هستند اگر $p > 0$.

بند ۵ - مقدار اصلی بمعنای کوشی . اگر تابع $f(x)$ بقسمی باشد که بازای $\varepsilon > 0$ دلخواه انتگرالهای ویژه

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx \text{ و } \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (a < c < b)$$

وجود داشته باشند در آنصورت منظور از مقدار اصلی بمعنای کوشی (v.p.)* عبارت از عدد

* علامت اختصاری v.p. حروف اول کلمات valeur principal می باشد .

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right]$$

بطریق مشابه

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^2+1} dx \quad - ۲۳۴۱$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0) \quad - ۲۳۴۲$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} \quad - ۲۳۴۳$$

$$\int_1^{+\infty} \ln x dx \quad - ۲۳۴۵$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2+x^4}} \quad - ۲۳۴۴$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad - ۲۳۴۶$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \quad - ۲۳۴۴$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad - ۲۳۴۷$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^2} dx \quad - ۲۳۴۵$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} \quad - ۲۳۴۸$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0) \quad - ۲۳۴۶$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \quad - ۲۳۴۹$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0) \quad - ۲۳۴۷$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \quad - ۲۳۴۰$$

بیاری دستورهای کاهشی مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای ناویژهٔ زیر
(n عددیست طبیعی) :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \quad - ۲۳۴۸$$

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2 + 2bx + c)^n} \quad (ac - b^2 > 0) \quad - ۲۳۴۹$$

$$4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin x \, dx \quad (\text{الف} - ۲۳۵۳)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \cos x \, dx \quad (\text{ب})$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)} - ۲۳۵۰$$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} - ۲۳۵۱$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\text{ch}^n + 1} x - ۲۳۵۲$$

۲۳۵۴ - مطلوبست محاسبه*

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$$

که در آن E مجموعه آن مقادیر x از فاصله $(0, +\infty)$ است که بازای آنها عبارت زیر انتگرال دارای معناست .
۲۳۵۵ - تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + ab}) dx$$

که در آن $a > 0$ و $b > 0$ بفرض آنکه انتگرال سمت چپ تساوی دارای معنا باشد .

۲۳۵۶ - مقدار میانگین تابع $f(x)$ روی فاصله $(0, +\infty)$ عبارتست از عدد

$$M|f| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi$$

مقدار میانگین توابع زیر را پیدا کنید :

الف) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2})$ ؛

پ) $f(x) = \sqrt{x} \sin x$

ب) $f(x) = \text{arc tg } x$

۲۳۵۷ - مطلوبست محاسبه* :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}} \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \int_0^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \int_0^1 \frac{f(t)}{t^\alpha + 1} dt \quad (\text{ت})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^2} dt}{x^3} \quad (\text{ب})$$

که در آن $\alpha > 0$ و $f(t)$ تابع پیوسته‌ای روی قطعه $[0, 1]$ می‌باشد .
همگرایی انتگرالهای زیر را بررسی کنید :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx - 2368$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^2 - x^2 + 1} - 2368$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} - 2369$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}} - 2369$$

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1 - x^2}} - 2370$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} - 2370$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}} - 2370, 1$$

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx - 2371$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} - 2371$$

$$\int_0^{+\infty} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx - 2372$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} - 2371$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1 + x^n} dx \quad (n \geq 0) - 2373$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1 - x^2} dx - 2372$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n} dx \quad (a \neq 0) - 2374$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx - 2373$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx - 2375$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} - 2374$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m \arctan x}{1 + x^n} dx \quad (n \geq 0) - 2376$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r} - 2375$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^n} dx \quad (n \geq 0) - 2377$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x - a_1|^{p_1} |x - a_2|^{p_2} \dots |x - a_n|^{p_n}} - 2376$$

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha |x - 1|^\beta dx - 2376, 1$$

۲۳۷۷ - $\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$ که در آن $P_m(x)$ و $P_n(x)$ چندجمله‌ای‌های نسبت بهم

اولند که به ترتیب از درجه‌های m و n می‌باشند .

همگرایی مطلق و شروط انتگرال‌های زیر را بررسی کنید :

$$\int_0^{+\infty} x^q \cos(e^x) dx - 2380, 2$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - 2378$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^q \sin x}{1+x^q} dx (q \geq 0) - 2381$$

راهنمایی $|\sin x| \geq \sin^2 x$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx - 2379$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx - 2382$$

$$\int_0^{+\infty} x^q \sin(x^q) dx (q \neq 0) - 2380$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx - 2383$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\sec x) dx - 2380, 1$$

که در آن $P_m(x)$, $P_n(x)$ چندجمله‌ای‌های درست و $P_n(x) > 0$ اگر $x \geq 0$.

۲۳۸۴ - اگر $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ همگرا باشد در اینصورت آیا بازای $x \rightarrow +\infty$ حتماً

$f(x) \rightarrow 0$ ؟

مثالهای

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{الف)} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx \quad \text{ب)}$$

را در نظر بگیرید .

۲۳۸۴, ۱ - هرگاه $f(x) \in C^{(1)}[x, +\infty)$ و $|f'(x)| < C$ بازای $x \leq x < +\infty$.

و $\int_x^{+\infty} |f(x)| dx$ همگرا باشد ثابت کنید که $f(x) \rightarrow 0$ بازای

$x \rightarrow +\infty$.

راهنمایی - انتگرال زیر را در نظر بگیرید :

$$\int_x^{+8} f(x) f'(x) dx$$

۲۳۸۵- آیا ممکن است انتگرال ناویژه همگرای

$$\int_a^b f(x) dx$$

از تابع ناکرانداری $f(x)$ معین روی $[a, b]$ را بعنوان حد مجموع انتگرال نظیر

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

که در آن $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ و $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ در نظر گرفت ؟
۲۳۸۶- فرض کنیم

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

همگرا و تابع $\varphi(x)$ کراندار باشد .
آیا انتگرال

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (2)$$

حتماً همگرا است ؟ مثال نظیری بیاورید .

اگر انتگرال (۱) مطلقاً همگرا باشد در باره همگرایی انتگرال (۲) چه میتوان گفت ؟

۲۳۸۷- ثابت کنید که اگر $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ همگرا و $f(x)$ تابع یکنواپی باشد

در آنصورت $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

۲۳۸۸- فرض کنیم تابع $f(x)$ در فاصله $0 < x \leq 1$ یکنوا باشد و در

همسایگی نقطه $x=0$ کراندار نباشد .

ثابت کنید که اگر

$$\int_0^1 f(x) dx$$

وجود داشته باشد در آنصورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

۲۳۸۹- ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصله $0 < x < a$ یکنوا و

$$\int_0^a x^p f(x) dx$$

وجود داشته باشد در آنصورت

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

۲۳۹۰- نشان دهید که :

$$\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0 \quad (\text{الف}) \quad ; \quad \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2} = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0 \quad (\text{پ})$$

۲۳۹۱- ثابت کنید که بازای $x \geq 0$

$$\text{li } x = \text{v.p.} \int_0^x \frac{d\xi}{\ln \xi}$$

وجود دارد .

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

$$\text{v.p.} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x} - 2393$$

$$\text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} - 2392$$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx - 2395$$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx - 2394$$

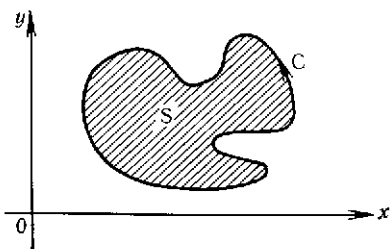
بخش ۵ - محاسبه مساحت

بند ۱- مساحت در مختصات قائم . مساحت $S = A_1 A_2 B_2 B_1$ (شکل ۱۰)

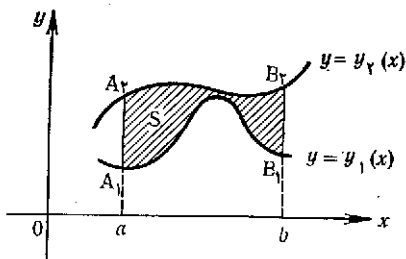
محدود به دو منحنی پیوسته $y = y_1(x)$ و $y = y_2(x)$ و $(y_2(x) \geq y_1(x))$ و دو خط $x = a$ و $x = b$ ($a < b$) برابر است با

$$S = \int_a^b |y_2(x) - y_1(x)| dx$$

بند ۲- مساحت محدود به منحنی‌ایکه بصورت پارامتری داده شده است .
 اگر $[0 \leq t \leq T]$ معادلات پارامتری منحنی بسته ساده $x = x(t), y = y(t)$ باشد که از قطعات هموار تشکیل شده و در سمت چپ خود نسبت به جهت C خلاف گردش عقربه ساعت را محصور میکند (شکل ۱۱) در آنصورت



شکل ۱۱



شکل ۱۰

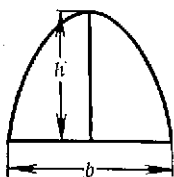
$$S = - \int_a^b y_2(x) x'(t) dt = \int_a^b x(t) y_1'(t) dt$$

یا

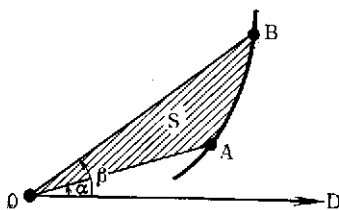
$$S = \frac{1}{2} \int_a^b [x(t) y_1'(t) - x_2'(t) y(t)] dt$$

بند ۳- مساحت در مختصات قطبی . مساحت $S = OAB$ (شکل ۱۲) محدود به منحنی پیوسته $r = r(\varphi)$ و دو نیم خط $\varphi = \alpha$ و $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) برابر است با

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$



شکل ۱۳



شکل ۱۲

۲۳۹۶ - ثابت کنید که مساحت قطعه^۱ سهمی قائم (شکل ۱۳) برابر است با

$$S = \frac{2}{3}bh$$

که در آن b قاعده و h ارتفاع قطعه است (شکل ۱۳).

مطلوبست تعیین مساحت‌های محدود به منحنی‌های داده‌شده در مختصات قائم* .

$$ax = y^2, \quad ay = x^2 \quad - 2397$$

$$y = x^2, \quad x + y = 2 \quad - 2398$$

$$y = 2x - x^2, \quad x + y = 0 \quad - 2399$$

$$y = |\lg x|, \quad y = 0 \quad x = 0, 1, \quad x = 10 \quad - 2400$$

$$y = 2^x, \quad y = 2, \quad x = 0 \quad - 2400, 1$$

$$y = (x+1)^2, \quad x = \sin \pi y, \quad y = 0 \quad (0 \leq y \leq 1) \quad - 2400, 2$$

$$y = x, \quad y = x + \sin^2 x \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad - 2401$$

$$y = \frac{a^2}{a^2 + x^2}, \quad y = 0 \quad - 2402$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - 2403$$

$$y^2 = x^2(a^2 - x^2) \quad - 2404$$

$$y^2 = 2px, \quad 2\sqrt{py^2} = \lambda(x-p)^2 \quad - 2405$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (AC - B^2 > 0, A > 0) \quad - 2406$$

$$y^2 = \frac{x^2}{2a-x}, \quad x = 2a \quad - 2407$$

(میسوید)

$$y = 0, \quad x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \quad - 2408$$

(تراکتیس)

$$y^2 = \frac{x^n}{(1+x^2+2)^2} \quad (n > -2, x > 0) \quad - 2409$$

$$y = e^{-x} |\sin x|, \quad y = 0 \quad (x \geq 0) \quad - 2410$$

۲۴۱۱ - سهمی $y^2 = 2x$ مساحت دایره^۱ $x^2 + y^2 = 8$ را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

* (جمیع پارامترها در این بخش و بخش‌های دیگر فصل ۴ مثبت در نظر گرفته شده‌اند .

۲۴۱۳ - مختصات نقطه $M(x, y)$ از هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را بعنوان توابعی از مساحت قطاع هذلولی $S = OM'M$ محدود به کمان $M'M$ هذلولی و دو شعاع OM' ، OM که در آن $M'(x, -y)$ قرینه نقطه M نسبت به محور Ox است بیان کنید .

مساحت‌های محدود به منحنی‌های پارامتری زیر را پیدا کنید :

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad - 2413$$

(سیکلویید) $y = 0$ و

$$x = 2t - t^2, \quad y = 2t^2 - t^3 \quad - 2414$$

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad - 2415$$

(گسترده دایره) و $x = a, y \leq 0$.

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t) \quad - 2416$$

$$x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, \quad y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t \quad (c^2 = a^2 - b^2) \quad - 2417$$

(گسترده بیضی) .

$$x = a \cos t, \quad y = \frac{a \sin^2 t}{1 + \sin t} \quad - 2417,1$$

مساحت‌های S محدود به منحنی‌های داده شده در مختصات قطبی را پیدا کنید :

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi \quad (\text{لمنیسکات}) \quad - 2418$$

$$r = a(1 + \cos \varphi) \quad (\text{کاردیویید}) \quad - 2419$$

$$r = a \sin 3\varphi \quad (\text{سه‌برگی}) \quad - 2420$$

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (\text{سه‌می}) \quad - 2421$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (\text{بیضی}) \quad - 2422$$

$$r = 2 + 2 \cos \varphi \quad - 2422,2$$

$$r = \frac{1}{\varphi}, \quad r = \frac{1}{\sin \varphi} \quad \left(0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad - 2422,2$$

$$r = a \cos \varphi, \quad r = a(\cos \varphi + \sin \varphi) \quad \left(M\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in S\right) \quad - 2423$$

۲۴۲۴ - مطلوبست محاسبه مساحت قطاع محدود به منحنی

$$\varphi = r \operatorname{arc} \operatorname{tg} r$$

$$\varphi = 0 \quad \text{و} \quad \varphi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

و دو شعاع

۱، ۲۴۲۴ - مساحت محدود به منحنی زیر را پیدا کنید :

$$r^2 + \varphi^2 = 1$$

۲، ۲۴۲۴ - مساحت محدود به منحنی زیر را پیدا کنید :

$$\varphi = \sin(\pi r) \quad (1 \leq r \leq 1)$$

۳، ۲۴۲۴ - مساحت محدود به خطوط زیر را پیدا کنید :

$$\varphi = 4r - r^3, \quad \varphi = 0$$

۴، ۲۴۲۴ - مساحت محدود به خطوط زیر را پیدا کنید :

$$\varphi = r - \sin r, \quad \varphi = \pi$$

۵، ۲۴۲۵ - مساحت محدود به منحنی بسته

$$r = \frac{2at}{1+t^2}, \quad \varphi = \frac{\pi t}{1+t^2}$$

را پیدا کنید .

با گذر به مختصات قطبی مساحت‌های محدود به منحنی‌های زیر را پیدا

کنید :

$$x^3 + y^3 = 3axy \quad (\text{برگ دکارت}) \quad ۲۴۲۶$$

$$x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2) \quad ۲۴۲۷$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy \quad (\text{لمنیسکات}) \quad ۲۴۲۸$$

با درآوردن معادلات بصورت پارامتری مساحت‌های محدود به منحنی‌های

زیر را پیدا کنید :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (\text{آستروئید}) \quad ۲۴۲۹$$

$$x^4 + y^4 = ax^2y - ۲۴۳۰$$

راهنمایی - فرض کنید $y = tx$.

بخش ۶ - محاسبه طول قوس (کمان)

بند ۱ - طول قوس در مختصات قائم . طول قوس قطعه منحنی هموار (پیوسته)

دیفرانسیل پذیر

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

برابر است با

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

بند ۲ - طول قوس منحنی پارامتری . اگر منحنی C با معادلات

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_0 \leq t \leq T)$$

داده شود که در آن $x(t), y(t) \in C^{(1)}[t_0, T]$ در اینصورت طول قوس منحنی C برابر است با

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

بند ۳ - طول قوس در مختصات قطبی . اگر

$$r = r(\varphi) \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta)$$

که در آن $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$ در اینصورت طول قوس قطعه نظیر منحنی برابر است با

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$$

برای طول قوس منحنی‌های فضایی فصل ۸ را ببینید .

طول قوس منحنی‌های زیر را پیدا کنید :

$$y^2 = 2px \quad (0 \leq x \leq x_0) - ۲۴۳۲ \quad y = x^{\frac{r}{2}} \quad (0 \leq x \leq 1) - ۲۴۳۱$$

$$B(b, h) \text{ تا نقطه } A(0, a) \text{ از نقطه } y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} - ۲۴۳۳$$

$$y = e^x \quad (0 \leq x \leq x_0) - ۲۴۳۴$$

$$x = \frac{1}{\xi} y^2 - \frac{1}{\gamma} \ln y \quad (1 \leq y \leq e) - ۲۴۳۵$$

$$y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq b < a) - ۲۴۳۶$$

$$y = \ln \cos x \quad \left(0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}\right) - ۲۴۳۷$$

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \quad (0 < b \leq y \leq a) - ۲۴۳۸$$

$$y^2 = \frac{x^2}{2a-x} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{5}{2}a \right) - 2439$$

$$(آستروئید) \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - 2440$$

$$(گسترده بیضی) \quad x = \frac{c^2}{a} \cos^2 t, \quad y = \frac{c^2}{b} \sin^2 t, \quad c^2 = a^2 - b^2 - 2441$$

$$x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t - 2442$$

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) - 2443$$

$$0 \leq t \leq 2\pi \text{ بازای } x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t) - 2444$$

(گسترده دایره)

$$x = a(\operatorname{sh} t - t), \quad y = a(\operatorname{ch} t - 1) \quad (0 \leq t \leq T) - 2445$$

$$x = \operatorname{ch}^3 t, \quad y = \operatorname{sh}^3 t \quad (0 \leq t \leq T) - 2445, 1$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ بازای } r = a\varphi - 2446$$

$$0 < r < a \text{ بازای } r = ae^{m\varphi} \quad (m > 0) - 2447$$

$$r = a(1 + \cos \varphi) - 2448$$

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \quad \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \right) - 2449$$

$$r = a \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2450$$

$$r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) - 2451$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \quad (1 \leq r \leq 2) - 2452$$

$$\varphi = \sqrt{r} \quad (0 \leq r \leq 5) - 2452, 1$$

$$\varphi = \int_0^r \frac{\operatorname{sh} \rho}{\rho} d\rho \quad (0 \leq r \leq R) - 2452, 2$$

$$r = 1 + \cos t, \quad \varphi = t - \operatorname{tg} \frac{t}{2} \quad (0 \leq t \leq T < \pi) - 2452, 3$$

۲۴۵۳ - ثابت کنید طول قوس بیضی

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

مساوی طول یک موج سینوسی $y = c \sin \frac{x}{b}$ می باشد که در آن

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

- ۲۴۵۴ - سهمی $ay = x^2$ روی محور Ox می‌غلطد. ثابت کنید که مسیر کانون، منحنی زنجیری است.
- ۲۴۵۵ - نسبت مساحت محدود به حلقه منحنی

$$y = \pm \left(\frac{1}{y} - x \right) \sqrt{x}$$

به مساحت دایره‌ای را پیدا کنید که طول آن برابر محیط حلقه منحنی باشد.

بخش ۷ - محاسبه اجماع

بند ۱ - حجم جسم از روی مقطع عرضی معلوم. اگر حجم جسم V وجود داشته باشد و $[a \leq x \leq b]$ مساحت مقطع جسم با صفحه عمود بر محور Ox در نقطه x باشد در آن صورت

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

بند ۲ - حجم جسم دوار. حجم حاصل از دوران مساحت

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x)$$

حول محور Ox که در آن تابع پیوسته تک مقدار است برابر است با

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx$$

در حالت کلی‌تر حجم حلقه حاصل از دوران مساحت $a \leq x \leq b$ $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ حول Ox که در آن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ توابع پیوسته نامنفی هستند برابر است با

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx$$

۲۴۵۶ - مطلوب است محاسبه حجم زیر شیروانی که قاعده آن مستطیلی به ابعاد a و b و طول یال بالائی آن c و ارتفاع آن برابر h باشد.

۲۴۵۷ - مطلوب است محاسبه حجم ناوای که قاعده‌های متوازی آن مستطیل‌هایی به ابعاد A ، B ، a ، b و ارتفاع آن h است.

۲۴۵۸ - مطلوب است محاسبه حجم مخروط ناقصی که قاعده‌های آن بیضی‌هایی با نیم قطرهای A ، B ، a ، b و ارتفاع آن h است.

۲۴۵۹ - مطلوبست محاسبهٔ حجم سهمی دوار بقاعدهٔ S و ارتفاع H .
 ۲۴۶۰ - فرص کنیم مساحت $S = S(x)$ مقطع عرضی عمود بر محور Ox جسم شبه منشوری طبق قانون کوادراتیک

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad [a \leq x \leq b]$$

تغییر کند، که در آن A ، B ، C ثابت هستند.
 ثابت کنید که حجم این جسم برابر است با

$$V = \frac{H}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right]$$

که در آن $H = b - a$ (دستور سیمپسون).

۲۴۶۱ - جسمی عبارتست از مجموعهٔ نقاط $M(x, y, z)$ که در آن $0 \leq z \leq 1$ و ضمناً اگر z گویا باشد $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ و اگر z گنگ باشد $0 \leq x \leq -1$ و $-1 \leq y \leq 0$. ثابت کنید که حجم این جسم وجود ندارد با وجودیکه انتگرال نظیر آن

$$\int_0^1 S(z) dz = 1$$

حجم اجسام محدود به سطوح زیر را پیدا کنید :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = \frac{c}{a}x, \quad z = 0 \quad - 2462$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{بیضوی}) \quad - 2463$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \pm c \quad - 2464$$

$$x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2 \quad - 2465$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = ax \quad - 2466$$

$$z^2 = b(a-x), \quad x^2 + y^2 = ax \quad - 2467$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1 \quad (0 < z < a) \quad - 2468$$

$$x + y + z^2 = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad - 2469$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2 \quad - 2470$$

۲۴۷۱ - ثابت کنید که حجم جسم حاصل از دوران مساحت

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x)$$

حول محور Oy که در آن تابع تک مقداری پیوسته‌ای است مساویست با

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx$$

حجم اجسام محدود به سطوح حاصل از دوران منحنی‌های زیر را پیدا کنید :

۲۴۷۲ - الف) $y = b \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$ ($0 \leq x \leq a$) حول محور Ox (نیلویید) .

ب) $y = 2x - x^2$, $y = 0$ - ۲۴۷۳

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy .

۲۴۷۴ - الف) $y = \sin x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$)

ب) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy

۲۴۷۵ - الف) $y = b \left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = b \left|\frac{x}{a}\right|$

ب) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy .

۲۴۷۶ - الف) $y = e^{-x}$, $y = 0$ ($0 \leq x < +\infty$)

ب) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy .

۲۴۷۷ - الف) $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$) حول محور Ox .

ب) $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$) حول محور Ox .

۲۴۷۸ - الف) $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ ($0 \leq x < +\infty$) حول محور Ox .

ب) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y = 0$ - ۲۴۸۰

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy ؛ پ) حول خط $y = 2a$.

۲۴۸۱ - الف) $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

ب) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy .

۲۴۸۱، ۱ - حجم جسم حاصل از دوران حلقه منحنی

$$x = 2t - t^2, \quad y = 4t - t^3$$

را حول : الف) محور Ox ؛ ب) محور Oy پیدا کنید .

۲۴۸۲ - ثابت کنید که حجم جسم حاصل از دوران مساحت

$$0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq r(\varphi)$$

حول محور قطبی (φ, r) مختصات قطبی برابر است با .

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_a^b r^3(\alpha) \sin \varphi d\varphi$$

حجم اجسام حاصل از دوران مساحت‌های داده شده زیر را در مختصات قطبی پیدا کنید :

$$r = a(1 + \cos \varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad - ۲۴۸۳$$

الف) حول محور قطبی ؛ ب) حول خط $r \cos \varphi = -\frac{a}{4}$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad - ۲۴۸۴$$

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy ؛ پ) حول خط $y = x$.
راهنمایی - به مختصات قطبی بگذرید .

۱، ۲۴۸۴ - حجم جسم حاصل از دوران مساحت محدود به نیم‌پهلو حلزونی ارشمیدس

$$r = a\varphi \quad (a > 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi)$$

را حول محور قطبی پیدا کنید .

۲، ۲۴۸۴ - حجم جسم حاصل از دوران مساحت محدود به منحنی‌های

$$\varphi = \pi r^3, \quad \varphi = \pi$$

را حول محور قطبی پیدا کنید .

۵، ۲۴۸۴ - حجم جسم حاصل از دوران مساحت

$$a \leq r \leq a \sqrt{2 \sin 2\varphi}$$

را حول محور قطبی پیدا کنید .

بخش ۸ - محاسبه مساحت سطوح دوار

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی هموار AB حول محور Ox برابر است با

$$P = 2\pi \int_A^B |y| ds$$

که در آن ds دیفرانسیل قوس است .

مطلوبست محاسبه مساحت سطح حاصل از دوران منحنی‌های زیر :

$$y = x \sqrt{\frac{x}{a}} \quad (0 \leq x \leq a) \quad \text{حول محور } Ox \quad - ۲۴۸۶$$

$$y = a \cos \frac{\pi x}{2b} \quad (|x| \leq b) \quad \text{حول محور } Ox \quad - ۲۴۸۷$$

۲۴۸۸ - حول محور Ox $y = \operatorname{tg} x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$

: $y^2 = 2px \quad (0 \leq x \leq x_0) - 2489$

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy

: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < b \leq a) - 2490$

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy

۲۴۹۱ - حول محور Ox $x^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad (b \geq a)$

۲۴۹۲ - حول محور Ox $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

: $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \quad (|x| \leq b) - 2493$

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy

۲۴۹۴ - حول محور Ox $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$

: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) - 2495$

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy ؛ ب) حول خط $y = 2a$

۲۴۹۶ - $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ حول خط $y = x$

۲۴۹۷ - $r = a(1 + \cos \varphi)$ حول محور قطبی

: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi - 2498$

الف) حول محور قطبی ؛ ب) حول محور $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ؛

پ) حول محور $\varphi = \frac{\pi}{4}$

۲۴۹۹ - جسمی از دوران شکل محدود به سهمی $ay = a^2 - x^2$ و محور

Ox حول محور Ox حاصل شده است. نسبت سطح جسم دوار به سطح

کره همحجم آن را پیدا کنید.

۲۵۰۰ - شکل محدود به سهمی $y^2 = 2px$ و خط $x = \frac{p}{4}$ حول خط $y = p$

دوران میکند. حجم و سطح جسم دوار را پیدا کنید.

بخش ۹ - محاسبه لنگرها (گشتاورها) . مختصات مرکز ثقل (گراینگاه)

بند ۱ - لنگرها* (گشتاورها یا ممان‌ها) اگر جرم M بچگالی $\rho = \rho(y)$ یک پیوستار** کراندار Ω (منحنی یا حوزه مستوی) را روی صفحه Oxy پر کند و $\omega = \omega(y)$ اندازه نظیر (طول قوس، مساحت) آن قسمت از پیوستار Ω باشد که عرضهای آن از y بیشتر نیست در آنصورت لنگر مرتبه k -ام جرم M نسبت به محور Ox عبارتست از عدد

$$M_k = \lim_{\max \Delta y_l \rightarrow 0} \sum_{l=1}^n \rho(y_l) y_l^k \Delta \omega(y_l) = \int_{\Omega} \rho y^k d\omega(y) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

در حالت‌های خاص، بازای $k=0$ جرم M ، بازای $k=1$ لنگر ایستی (استاتیگ)، بازای $k=2$ لنگر لختی بدست می‌آید.

بطریق مشابهی لنگرهای جرم نسبت به صفحه‌های مختصات تعریف می‌شوند. اگر $\rho=1$ در آنصورت لنگر نظیر را هندسی (لنگر خط، شکل مستوی، و جسم غیره) نامند.

بند ۲ - مرکز ثقل (گراینگاه). مختصات مرکز ثقل (x_0, y_0) شکل مستوی همگان S از دستوره‌های

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S}$$

تبعین می‌شوند که در آن $M_1^{(y)}, M_1^{(x)}$ لنگرهای هندسی ایستی مساحت S نسبت به محورهای Ox و Oy می‌باشند.

۲۵۰۱ - لنگرهای ایستی و لختی کمان نیم‌دایره‌ای بشعاع a را نسبت به قطر مار بر دو انتهای این کمان پیدا کنید.

۲۵۰۱,۱ - مطلوبست محاسبه لنگر ایستی قوس سهمی

$$y^2 = 2px \quad \left(0 \leq x \leq \frac{p}{2} \right)$$

نسبت به خط $x = \frac{p}{2}$.

* - برای moment در فارسی کلمات - ممان - عزم - گشت‌آور - لنگر و برای inertia - اینرسی - جبر - ماندولختی و برای عبارت moment of inertia ترکیبی از این دو کلمه بکار می‌رود (مترجم).

** - پیوستار ترجمه کلمه لاتینی continuum می‌باشد که عبارتست از مجموعه عناصر بطوریکه از یکی به دیگری بطور پیوسته بتوان گذر نمود (مترجم).

۲۵۰۲ - مطلوبست محاسبهٔ لنگرهای ایستی و لختی صفحهٔ مثلثی همگن به قاعدهٔ b و ارتفاع h نسبت به قاعده‌اش ($p = 1$).

۲۵۰۲،۱ - مطلوبست محاسبهٔ لنگرهای لختی $I_y = M_y^{(y)}$ و $I_x = M_x^{(x)}$ قطعهٔ سهمی محدود به منحنی‌های

$$ay = 2ax - x^2 \quad (a > 0), \quad y = 0.$$

نسبت به محورهای Ox و Oy . شعاعهای لختی r_x و r_y وارد به روابط

$$I_x = Sr_x^2, \quad I_y = Sr_y^2$$

که در آن S مساحت قطعه است چقدر می‌باشد؟

۲۵۰۳ - مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی صفحهٔ بیضی شکل همگن به نیم‌قطرهای a و b نسبت به محورهای اصلی آن ($p = 1$).

۲۵۰۴ - مطلوبست محاسبهٔ لنگرهای ایستی و لختی مخروط مستدیر همگن بشعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h نسبت به صفحهٔ قاعدهٔ این مخروط ($p = 1$).

۲۵۰۴،۱ - مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی کرهٔ همگن بشعاع R و جرم M نسبت به قطر آن.

۲۵۰۵ - مطلوبست اثبات قضیهٔ اول گولدن: مساحت سطح حاصل از دوران قوس

مستوی C حول محوری که در صفحه‌اش واقع بوده آنرا نبرد مساویست با طول این قوس ضرب در طول دایرهٔ مسیر مرکز ثقل قوس C .

۲۵۰۶ - مطلوبست اثبات قضیهٔ دوم گولدن: حجم جسم حاصل از دوران شکل

مستوی S حول محوری که در صفحه‌اش واقع بوده و آنرا نبرد مساویست با حاصل ضرب مساحت S در طول مسیر مرکز ثقل این

شکل.

۲۵۰۷ - مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل قوس دایره‌ای: $x = a \cos \varphi$,

$$y = a \sin \varphi \quad (|\varphi| \leq \alpha \leq \pi)$$

۲۵۰۸ - مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل حوزهٔ محدود به سهمی‌های

$$ay = x^2, \quad ax = y^2 \quad (a > 0).$$

۲۵۰۹ - مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل حوزهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$

$$(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b).$$

۲۵۱۰ - مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل نیمکرهٔ همگن بشعاع a .

۲۵۱۱ - مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل $C(\varphi, r)$ قوس OP حلزونی

لگاریتمی ($r = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$)) از نقطهٔ $O(-\infty, 0)$ تا نقطهٔ $P(\varphi, r)$.

نقطهٔ C با حرکت نقطهٔ P کدام منحنی را طی میکند؟

۲۵۱۲- مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل حوزه محدود به منحنی
 $r = a(1 + \cos \varphi)$.

۲۵۱۳- مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل حوزه محدود به طاقنمای اول
 سیکلوئید $(0 \leq t \leq 2\pi)$ $y = a(1 - \cos t)$, $x = a(t - \sin t)$ و
 محور Ox .

۲۵۱۴- مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل جسم حاصل از دوران مساحت
 $0 \leq x \leq a$, $y^2 \leq 2px$ حول محور Ox .

۲۵۱۵- مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل نیمکره $(z \geq 0)$ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

بخش ۱۰- مسائلی از مکانیک و فیزیک

با تشکیل مجموع انتگرال‌های نظیر و تعیین حد آنها مسائل زیر را حل
 کنید:

۲۵۱۶- مطلوبست تعیین جرم میله‌ای بطول $l = 1.0m$ در صورتیکه چگالی
 خطی میله موافق قانون $\delta = 6 + 0.3x \text{ kg/m}$ تغییر کند که در آن
 x فاصله از یک سر میله است.

۲۵۱۷- چه مقدار کار صرف کنیم تا جسم بجرم m را تا ارتفاع h از سطح
 کره زمین بشعاع R بلند کنیم؟ اگر جسم تا بینهایت دور شود
 مقدار کار چقدر است؟

۲۵۱۸- فرض کنیم فنر قابل ارتجاع بازای نیروی یک کیلوگرم یک سانتیمتر
 کشیده شود. برای اینکه این فنر را ۱۰ سانتیمتر بکشیم چه مقدار
 کار باید صرف کنیم؟

راهنمایی- از قانون هوک استفاده شود.

۲۵۱۹- استوانه‌ای بقطر ۲۰ cm و طول ۸۰ cm مملو از بخار تحت
 فشار 10 kg/cm^2 می‌باشد. مطلوبست کار لازم برای اینکه در
 درجه حرارت ثابت حجم بخار دو بار کمتر گردد.

۲۵۲۰- مطلوبست نیروی فشار وارد بر جدار قائم بشکل نیمدایره‌ای بشعاع
 a در صورتیکه قطر آن بر سطح آب قرار گرفته باشد.

۲۵۲۱- مطلوبست تعیین نیروی فشار آب بر جدار قائم بشکل ذوزنقه‌ای که
 قاعده پائین آن $a = 10m$ و قاعده بالایی آن $b = 6m$ و ارتفاع
 $h = 5m$ در صورتیکه قاعده پائین در عمق $c = 20m$ از سطح
 آب قرار گرفته باشد.

با تشکیل معادله دیفرانسیل ، مسایل زیر را حل کنید :

۲۵۲۲- سرعت نقطه با قانون

$$v = v_0 + at$$

تغییر می یابد . این نقطه در فاصله زمانی $[0, T]$ چه مسافتی را می پیماید ؟

۲۵۲۳- کره همگن بشعاع R و چگالی δ با سرعت زاویه ای ω حول قطر خود دوران می کند . مطلوبست تعیین انرژی جنبشی کره .

۲۵۲۴- خط نامتناهی با چگالی ثابت μ ، نقطه بجرم m واقع بفاصله a را با چه نیرویی جذب میکند ؟

۲۵۲۵- قرص بشعاع a و چگالی سطحی ثابت δ ، نقطه مادی P بجرم m را واقع بر عمود بر صفحه قرص و مار بر مرکز Q - ی آن در کوتاه ترین فاصله PQ برابر b ، با چه نیرویی جذب میکند ؟

۲۵۲۶- طبق قانون تریچلی سرعت خروج مایع از ظرف برابر است با

$$v = c\sqrt{2gh}$$

که در آن g شتاب ثقل ، h ارتفاع سطح مایع از سوراخ ، $c = 0,6$ ضریب آزمایش است .

بشکه استوانه ای قائم بر از مایع بقطر $D = 1$ m و ارتفاع $H = 2$ m ، از راه سوراخ گرد بقطر $d = 1$ cm واقع در ته آن در چه مدتی خالی می شود ؟

۲۵۲۷- شکل ظرف مدوری چگونه باشد تا کاهش سطح مایع هنگام خروج از آن یکنواخت باشد ؟

۲۵۲۸- سرعت انهدام رادیوم در هر لحظه زمان با کمیت موجود آن متناسب است . مطلوبست قانون انهدام رادیوم در صورتیکه در مبداء زمان $t = 0$ مقدار آن Q گرم و پس از گذشت $T = 1600$ سال مقدار آن نصف شود .

۲۵۲۹- برای حالت فرایند مرتبه دوم سرعت واکنش شیمیایی گذر از ماده A به ماده B با حاصل ضرب غلظت های این مواد متناسب است . پس از گذشت $t = 1$ ساعت چند درصد از ماده B در ظرف وجود خواهد داشت در صورتیکه بازای $t = 0$ دقیقه مقدار 20% از ماده B وجود داشته باشد و بازای $t = 15$ دقیقه مقدار آن به 80% رسیده باشد ؟

۲۵۳۰- طبق قانون هوک انبساط طول نسبی ϵ میله متناسب با تنش σ در مقطع عرضی آن است یعنی

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

که در آن E مدول یونگ است .
 مطلوبست تعیین انبساط طول میلۀ وزین مخروطی شکل که قاعده‌اش ثابت شده و رأس آن بسط پایین متوجه است در صورتیکه شعاع قاعدهٔ مخروط R و ارتفاع آن H و وزن مخصوصش γ باشد .

بخش ۱۱ - محاسبهٔ تقریبی انتگرالهای معین

بند ۱ - دستور مستطیل‌ها . اگر تابع $y = y(x)$ در قطعۀ $[a, b]$ متناهی پیوسته و بتعداد کافی دفعات دیفرانسیل‌پذیر و $h = \frac{b-a}{n}$ ، $y_i = y(x_i)$ و $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$) باشد در آنصورت

$$\int_a^b y(x) dx = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n$$

که در آن

$$R_n = \frac{(b-a)h}{2} y'(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b)$$

بند ۲ - دستور ذوزنقه‌ها . با همان علائم داریم :

$$\int_a^b y(x) dx = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) + R_n$$

که در آن

$$R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi') \quad (a \leq \xi' \leq b)$$

بند ۳ - دستور سهمی‌ها (دستور سیمپسون) . با فرض $n = 2k$ نتیجه می‌شود :

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2k-2})] + R_n$$

که در آن

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{90} f^{(4)}(\xi'') \quad (a \leq \xi'' \leq b)$$

۲۵۳۱- با کاربرد دستور مستطیل‌ها ($n = 12$) مطلوبت محاسبه تقریبی

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$$

و نتیجه را با جواب دقیق مقایسه کنید.

بیاری دستور ذوزنقه‌ها انتگرالهای زیر را محاسبه و خطای آنها را برآورد کنید:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \quad (n=12) - 2533 \qquad \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8) - 2537$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} \, dx \quad (n=6) - 2534$$

بیاری دستور سیمپسون مطلوبت محاسبه انتگرالهای زیر:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \, dx \quad (n=10) - 2537 \qquad \int_1^9 \sqrt{x} \, dx \quad (n=4) - 2535$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} \, dx \quad (n=6) - 2536$$

$$\int_0^1 \frac{x \, dx}{\ln(1+x)} \quad (n=6) - 2538$$

۲۵۳۹- با اختیار $n=10$ مطلوبت محاسبه مقدار ثابت کاتلان

$$G = \int_0^1 \frac{\arctg x}{x} \, dx$$

۲۵۴۰- با استفاده از دستور

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

مطلوبت محاسبه عدد π با تقریب 10^{-5}

۲۵۴۱ - مطلوبست محاسبه

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

با تقریب ۰,۰۰۱

۲۵۴۲ - مطلوبست محاسبه $\int_0^1 [(e^x - 1) \ln \frac{1}{x}] dx$ با تقریب 10^{-4}

۲۵۴۳ - مطلوبست محاسبه انتگرال احتمالات

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

با تقریب ۰,۰۰۱

۲۵۴۴ - مطلوبست محاسبه تقریبی طول بیضی دارای نیم‌قطرهای $a = 10$ و

$$b = 6$$

۲۵۴۵ - نمودار تابع

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

را نقطه به نقطه با فرض $\Delta x = \frac{\pi}{3}$ رسم کنید .

فصل ۵

سری ها

بخش ۱ - سری های عددی . آزمون های همگرایی سری های ثابت العلامت

بند ۱ - مفاهیم کلی . سری عددی

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

وقتی همگرا (متقارب) نامیده میشود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (\text{مجموع سری})$$

وجود داشته باشد که در آن $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. در حالت خلاف ، سری (۱) را واگرا (متباعد) نامند .

بند ۲ - معیار (آزمون) کوشی . برای همگرایی سری (۱) لازم و کافی است که برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $N = N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد چنان که بازای $n > N$ و $p > 0$ نامساوی

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

برقرار باشد . بخصوص اگر سری همگرا باشد در آن صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

بند ۳ - نشانه (آزمون) مقایسه* I . هرگاه علاوه بر سری (۱) سری

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (2)$$

را داشته باشیم اگر بازای $n \geq n_0$ نامساوی

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

برقرار باشد در آنصورت : (۱) از همگرایی سری (۲) همگرایی سری (۱) نتیجه میشود ؛ (۲) از واگرایی سری (۱) واگرایی سری (۲) نتیجه میشود .
 بویژه اگر $a_n \sim b_n$ ، بازای $n \rightarrow \infty$ در آنصورت سری‌های با جملات مثبت (۱) و (۲) همزمان همگرا یا واگرا هستند .
بند ۴ - نشانه مقایسه II . اگر

$$a_n = O^* \left(\frac{1}{n^p} \right)$$

در آنصورت : الف) بازای $p > 1$ سری (۱) همگرا ؛ ب) بازای $p \leq 1$ واگرا است .

بند ۵ - نشانه دالامبر . اگر $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

در آنصورت : الف) بازای $q < 1$ سری (۱) همگرا ؛ ب) بازای $q > 1$ واگرا است .

بند ۶ - نشانه کوشی . اگر $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

در آنصورت : الف) بازای $q < 1$ سری (۱) همگرا ؛ ب) بازای $q > 1$ واگرا است .

بند ۷ - نشانه رایبه . اگر $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p$$

در آنصورت : الف) بازای $p > 1$ سری (۱) همگرا ؛ ب) بازای $p < 1$ واگرا است .

بند ۸ - نشانه گوس . اگر $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) و

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

* - راجع به معنای نماد O^* فصل I ، بخش ۶ ، بند ۱ را ببینید .

که در آن $|\theta_n| < C$ و $\varepsilon > 0$ در آن صورت (الف) بازای $\lambda > 1$ سری
 (۱) همگرا؛ (ب) بازای $\lambda < 1$ واگرا است؛ (پ) بازای $\lambda = 1$ اگر $\mu > 1$
 سری (۱) همگرا و اگر $\mu \leq 1$ واگرا است.
 بند ۹ - نشانه انتگرالی کوشی. اگر $f(x)$ ($x > 0$) تابع نامنفی
 ناصعودی‌ای باشد در آن صورت سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

همزمان با انتگرال

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

همگرا یا واگرا است.

همگرایی سربهای زیر را مستقیماً اثبات و مجموع آنها را پیدا کنید:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots - 2546$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots - 2547$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots - 2548$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{n(n+1)} + \dots - 2549$$

$$\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots - 2550$$

$$q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \dots + q^n \sin n\alpha + \dots \quad (\text{الف}) \quad 2551$$

$$q \cos \alpha + q^2 \cos \alpha + \dots + q^n \cos n\alpha + \dots \quad (|q| < 1) \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - 2552$$

$$2553 - \text{همگرایی سری } \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \text{ را بررسی کنید.}$$

راهنمایی - نشان دهید که بازای $x \neq k\pi$ (k عددیست درست) هرگز

$\sin nx \rightarrow 0$ بازای $n \rightarrow \infty$ ممکن نیست.

$$2554 - \text{ثابت کنید که اگر سری } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ همگرا باشد در آن صورت سری } \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

که در آن $\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ ($p_1 = 1, p_1 < p_2 < \dots$) که در نتیجه گروه بندی جملات سری مفروض بدون بهم ریختن ترتیب آنها بدست میآید نیز همگرا و دارای همان مجموع است. مطلب عکس درست نیست. مثال بیاورید.

۲۵۵۵- ثابت کنید که اگر جملات سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مثبت و سری $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ منتج از گروه بندی جملات این سری، همگرا باشد در آنصورت سری مفروض نیز همگرا است.

همگرایی سریهای زیر را بررسی کنید:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots - 2556$$

$$0,001 + \sqrt{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \dots - 2557$$

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots - 2558$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots - 2559$$

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots - 2560$$

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots - 2561$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots - 2562$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \dots - 2563$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \times 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \times 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots - 2564$$

۲۵۶۵- ثابت کنید که سری اعدادی که نسبت به جملات تصاعد حسابی معکوس باشند واگرا است.

۲۵۶۶- ثابت کنید که اگر سریهای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(A)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(B)$ همگرا

باشند و $a_n \leq c_n \leq b_n$ ($n=1, 2, \dots$) در آنصورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(C)$

۲۵۶۷- هرگاه دو سری واگرای نیز همگرا است. اگر سری‌های (A) و (B) واگرا باشند در باره همگرایی سری (C) چه میتوان گفت؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ و } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

با جملات نامنفی مفروض باشند در باره همگرایی سری های :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n) \text{ (الف) و } \sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) \text{ (ب)}$$

۲۵۶۸- ثابت کنید که اگر سری $(a_n \geq 0)$ همگرا باشد در

آنصورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ نیز همگرا است. عکس مطلب درست نیست. مثال بیاورید.

۲۵۶۹- ثابت کنید که اگر سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ همگرا باشند در

آنصورت سری های

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

نیز همگرا میباشند.

۲۵۷۰- ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0$$

در آنصورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

۲۵۷۱- ثابت کنید که اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با جملات مثبت و نزولی یکنوا

همگرا باشد در آنصورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$$

۲۵۷۲ - آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با شرط

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$$

بازای $p = 1, 2, 3, \dots$ همگرا است ؟

با استفاده از معیار کوشی همگرایی سری‌های زیر را ثابت کنید :

$$a_n + \frac{a_1}{1.0} + \dots + \frac{a_n}{1.0^n} + \dots \quad (|a_n| < 1.0) \quad - 2573$$

$$\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots \quad - 2574$$

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots + \frac{\cos nx - \cos (n+1)x}{n} + \dots \quad - 2575$$

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots \quad - 2575,1$$

راهنمایی - از نامساوی زیر استفاده کنید :

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

با استفاده از معیار کوشی واگرایی سری‌های زیر را ثابت کنید :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad - 2576$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad - 2577$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \times 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \times 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots \quad - 2577,1$$

با استفاده از نشانه‌های مقایسه دالامبر یا کوشی همگرایی سری‌های زیر

را بررسی کنید :

$$\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1!} + \frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4}{2!} + \frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 3}{3!} + \dots + \frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot n}{n!} + \dots \quad - 2578$$

$$\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \dots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \dots \quad - 2579$$

$$\frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots - 2580$$

$$\frac{2 \times 1!}{1} + \frac{2^2 \times 2!}{2^2} + \frac{2^3 \times 3!}{3^3} + \dots + \frac{2^n n!}{n^n} + \dots \text{ (الف) } - 2581$$

$$\frac{2 \times 1!}{1} + \frac{2^2 \times 2!}{2^2} + \frac{2^3 \times 3!}{3^3} + \dots + \frac{2^n n!}{n^n} + \dots \text{ (ب)}$$

$$\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \dots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \dots - 2582$$

$$\frac{1 \dots 1}{1} + \frac{1 \dots 1 \times 1 \dots 1}{1 \times 2} + \frac{1 \dots 1 \times 1 \dots 1 \times 1 \dots 2}{1 \times 2 \times 3} + \dots - 2583$$

$$\frac{4}{2} + \frac{4 \times 7}{2 \times 6} + \frac{4 \times 7 \times 10}{2 \times 6 \times 10} + \dots - 2584$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - \sqrt[n-1]{2} \right) \left(\sqrt[n]{2} - \sqrt[n-2]{2} \right) \dots \left(\sqrt[n]{2} - \sqrt[n-1]{2} \right) - 2585$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2585, 1$$

که در آن

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{اگر } n = m^2 \\ \frac{1}{n^2}, & \text{اگر } n \neq m^2 \end{cases}$$

(m - عددیست طبیعی).

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx \prod_{k=1}^n \frac{\sin^2 ka}{1 + x^2 + \cos^2 ka} - 2585, 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^n} - 2586$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n} - 2586$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{2^n + 2^n} - 2586, 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n + \frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} - 2587$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)} - 2586, 2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}} - 2588$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \dots$$

$$\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \quad \text{راهنمایی}$$

۲۵۹۱ - ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (a_n > 0)$$

در آن صورت $a_n = o(q^n)$ که در آن $q_1 > q$.

۲۵۹۱،۱ - هرگاه برای جملات مثبت علامه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$)

نامساوی

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho < 1$$

بازای $n \geq n_0$ برقرار باشد، ثابت کنید که برای مانده سری

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

بازای $n \geq n_0$ برآورد زیر را داریم:

$$R_n \leq a_n \times \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}$$

۲۵۹۱،۲ - چند جمله از سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!!!]^2}{(\varepsilon n)!!!}$$

که در آن $2 \times 4 \times \dots \times 2n = [(2n)!!!]^2$ ، کافی است اختیار شود تا مجموع جزئی S_n نظیر، با مجموع S سری، اختلافی کمتر از $\varepsilon = 10^{-6}$ داشته باشد؟
۲۵۹۲ - ثابت کنید که اگر

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \quad (a_n > 0)$$

در آن صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

عکس مطلب درست نیست. مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

۲۵۹۳- ثابت کنید اگر برای سری $(a_n > 0)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (A)$$

وجود داشته باشد در آنصورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (B)$$

نیز وجود دارد.

عکس مطلب درست نیست : اگر حد (B) وجود داشته باشد در آنصورت حد (A) ممکن است وجود نداشته باشد. مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^{n+1}}$$

۲۵۹۴- ثابت کنید که اگر

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (a_n \geq 0)$$

در آنصورت : الف) بازای $q < 1$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است ؛ ب) بازای $q > 1$ سری واگرا است (نشانه تعمیم یافته کوشی)

همگرایی سری های زیر را بررسی کنید :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 [\sqrt{2} + (-1)^n]^{2n}}{3^n} \quad - 2595$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \quad - 2596$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^{2n - \ln n} \quad - 2597, 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} \quad - 2598$$

با استفاده از نشانه‌های رابه و گوس همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^p + \left(\frac{1 \times 2 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^p + \dots - 2598$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots - 2599$$

$$(a > 0, b > 0, d > 0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}} - 2600$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})} - 2601$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)} \quad (q > 0) - 2602$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} \times \frac{1}{n^q} - 2603$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \times 3 \times 5 \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \dots (2n)} \right]^p \times \frac{1}{n^q} - 2604$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)} \right]^a \quad (p > 0, q > 0) - 2605$$

۲۶۰۶ - ثابت کنید که اگر برای سری مثبت‌المامه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$)

بازای $n \rightarrow \infty$ شرط

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

مجرا باشد در آنصورت

$$a_n = \left(\frac{1}{n^p - \varepsilon}\right)$$

که در آن $\varepsilon > 0$ باندازهٔ داخواه کوچک است ؛ ضمناً اگر $p > 0$ در آنصورت $a_n \rightarrow 0$ بازای $n \rightarrow \infty$ ، یعنی a_n بازای $n \geq n_0$ وقتی که $n \rightarrow \infty$ بطور نزولی یکنوا ، بسوی صفر می‌گراید .

با تعیین مرتبهٔ نزول جملهٔ عمومی a_n همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را بررسی

کنید، در صورتیکه:

$$a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q} \quad - ۲۶۰۷$$

که در آن $n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q > 0$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n} \quad - ۲۶۰۸$$

$$a_n = (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1} \quad (n > 1) \quad - ۲۶۰۹$$

$$a_n = \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n} \right) \quad - ۲۶۱۰$$

$$a_n = \log_{b,n} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right) \quad (a > 0, b > 0) \quad - ۲۶۱۱$$

$$a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p \quad - ۲۶۱۲$$

$$a_n = \frac{1}{n^1 + \frac{1}{n}} \quad - ۲۶۱۴$$

$$a_n = \frac{1}{n^1 + \frac{k}{\ln n}} \quad - ۲۶۱۳$$

۲۶۱۴،۱ - مطلوبست اثبات نشانهٔ ژامه: سری مثبت علامهٔ $(a_n \geq 0)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

همگرا است اگر

$$n > n. \quad \text{بازای} \quad \left(1 - \sqrt[n]{a_n} \right) \frac{n}{\ln n} \geq p > 1$$

و واگرا است اگر

$$n > n. \quad \text{بازای} \quad \left(1 - \sqrt[n]{a_n} \right) \frac{n}{\ln n} \leq 1$$

۲۶۱۵ - ثابت کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ وقتی همگرا است که

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha \quad \text{وجود داشته باشد بطوریکه} \quad \alpha > 0$$

بازای $n \geq n$ ، $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$ و وقتی واگرا است که $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > 1$ (نشانه لگاریتمی).

همگرایی سری های دارای جمله عمومی زیر را بررسی کنید :

$$a_n = n^{\ln n} \quad (x > 0) - 2616$$

$$a_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} \quad (n > 1) - 2617$$

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} \quad (n > 1) - 2618$$

با استفاده از نشانه انتگرالی کوشی مطلوبت بررسی همگرایی سریهای دارای جمله عمومی زیر :

$$a_n = \frac{1}{n \ln^p n} \quad (n > 1) - 2619$$

$$a_n = \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q} \quad (n > 2) - 2620$$

همگرایی سری زیر را بررسی کنید :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \times \ln 3 \dots \ln(n+1)}{\ln(2+p) \times \ln(3+p) \dots \ln(n+1+p)} \quad (p > 0)$$

همگرایی سری - 2620,2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^2}$$

را که در آن $v(n)$ تعداد ارقام عدد n است بررسی کنید .

2620,3 - فرض میکنیم $(n = 1, 2, \dots)$ ریشه های مثبت متوالی معادله

$$\operatorname{tg} x = x$$

باشد . مطلوبت بررسی همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$$

۲۶۲۱ - همگرایی سری زیر را بررسی کنید :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

۲۶۲۲ - ثابت کنید که سری با جملات مثبت نزولی یکنوا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ توأمآ همگرا یا واگرا است.}$$

۲۶۲۳ - هرگاه $f(x)$ تابع ناصعودی یکنوای مثبتی باشد ثابت کنید که اگر سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$
 همگرا باشد در آنصورت برای مانده آن

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$$

بر آورد زیر محقق است :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx$$

با استفاده از این مطلب مجموع سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

را با تقریب 0.01 پیدا کنید.

۲۶۲۴ - مطلوبست اثبات نشانهٔ یرماکوف : هرگاه $f(x)$ تابع نزولی یکنوای مثبتی باشد و

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda$$

در آنصورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ اگر $\lambda < 1$ ، همگرا و اگر $\lambda > 1$ ، واگرا است .

۲۶۲۵ - نشانهٔ لوهافسکی را ثابت کنید : سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با جملات مثبت و

بطور یکنوا گراینده بصفر ، همزمان با

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$$

همگرا یا واگرا است ، که در آن بزرگترین نمره جملات a_n صادق در نامساوی زیر است :

$$a_n \geq 2^{-m} \quad (n = 1, 2, \dots, p_m)$$

همگرایی سری های زیر را بررسی کنید :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^{\alpha}} \quad - 2626$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+a} - \sqrt{n^{\xi} + n + b} \quad - 2627$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{\xi n - \gamma} - \sin \frac{n\pi}{\gamma n + 1} \right) \quad - 2628$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right) \quad - 2629$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\gamma} \left(\sin \frac{1}{n} \right)} \quad - 2630$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} \quad - 2630$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^{\gamma}} \quad - 2636$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[n]{n}} \quad - 2631$$

$$\sum_{n=\gamma}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right) \quad - 2637$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} e^{-\sqrt{n}} \quad - 2632$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}} \quad - 2638$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma+1}} - 1 \quad - 2633$$

$$\sum_{n=\gamma}^{\infty} \frac{n \ln n}{(\ln n)^n} \quad - 2639$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}} \quad - 2634$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} = \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{\gamma} \right) \quad (c > 0, b > 0, a > 0) \quad - 2640$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^a - 1) - ۲۶۴۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^a} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^a} \right) \right] - ۲۶۴۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{- (b \ln n + c \ln^2 n)} \quad (a > 0) - ۲۶۴۳$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\gamma n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}} \quad (b > 0, a > 0) - ۲۶۴۴$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{\gamma! \times \xi! \dots (\gamma n)!} - ۲۶۴۵$$

همگرایی سری های u_n دارای جمله های عمومی زیر را بررسی کنید :

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx - ۲۶۴۹$$

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2} - ۲۶۴۶$$

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\gamma} x}{1+x} dx - ۲۶۵۰$$

$$u_n = \frac{1}{\int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^2} dx} - ۲۶۴۷$$

$$u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(\gamma n)!} - ۲۶۵۱$$

$$u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln^{\gamma} k}{n^a} - ۲۶۵۲$$

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^{\gamma} x}{x} dx - ۲۶۴۸$$

با تعویض دنباله های $x_n (n=1, 2, \dots)$ با سری های نظیر ، همگرایی آنها را بررسی کنید در صورتیکه :

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} - ۲۹۵۳$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2} - 2654$$

۲۶۵۵ - تخمیناً چند جمله از سری‌های زیر را باید اختیار کرد تا مجموع آنها با تقریب 10^{-5} بدست آید :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \quad (\text{پ} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \quad (\text{ب} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (\text{الف}))$$

بخش ۲ - نشانه‌های همگرایی سریهای متغیرالعامه

بند ۱ - همگرایی مطلق سری . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

را وقتی مطلقاً همگرا نامند که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (2)$$

همگرا باشد . در این صورت سری (۱) نیز همگرا است . مجموع سری مطلقاً همگرا مستقل از ترتیب جملات آن است .

برای تعیین همگرایی مطلق سری (۱) کافی است در سری (۲) نشانه‌های معلوم همگرایی سری‌های ثابت‌العامه را بکار برد .

اگر سری (۱) همگرا ولی سری (۲) واگرا باشد در آنصورت سری (۱) را همگرای مشروط (نامطلق) نامند . مجموع سری همگرای مشروط را با تغییر آرایش جمله‌های آن میتوان برابر عدد دلخواهی نمود (قضیهٔ ریمن) .
بند ۲ - نشانهٔ لایب‌نیتز . سری متناوب‌العامه

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n-1} b_n + \dots$$

$(b_n \geq 0)$ همگرا است (بطور کلی ، همگرایی نامطلق) اگر : الف) $b_n \geq b_{n+1}$ ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ (ب) ؛ در این صورت برای ماندهٔ سری

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \dots$$

بر آورد زیر را داریم :

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leq \theta_n \leq 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (۳)$$

وقتی همگراست که: (۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد؛ (۲) اعداد $b_n (n=1, 2, \dots)$ تشکیل یک دنباله یکنوا ی کراندار بدهند .

بند ۴ - نشانه دیریکله . سری (۳) وقتی همگرا است که: (۱) مجموع

جزئی $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ کراندار باشد؛ (۲) بازای $n \rightarrow \infty$ بطور یکنوا بسمت صفر بگراید .

۲۶۵۶ - ثابت کنید که جملات یک سری را که همگرای نامطلق است میتوان بدون تغییر محل جملات طوری گروه‌بندی کرد که سری حاصل مطلقاً همگرا باشد .

۲۶۵۷ - ثابت کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ وقتی همگرا است که شرط‌های زیر

برقرار باشد: (الف) جمله عمومی این سری a_n بازای $n \rightarrow \infty$

بسمت صفر بگراید؛ (ب) سری $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ حاصل از گروه‌بندی جملات سری

مفروض بدون بهم ریختن ترتیب آنها همگرا باشد؛ (پ) تعداد عناصر a_i موجود

در جمله $(1 = p_1 < p_2 < \dots)$ $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ محدود باشد .

۲۶۵۸ - ثابت کنید که اگر جملات یک سری را طوری جابجا کنیم که

هیچیک از آنها از وضع سابق خود بیشتر از m جا بدور نشود (m عدد

قبلاً داده‌شده‌ای است) مجموع این سری تغییر نمی‌کند .

همگرایی سری‌های زیر را اثبات و مجموع آنها را پیدا کنید :

$$1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots - ۲۶۵۹$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots - ۲۶۶۰$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots - ۲۶۶۱$$

راهنمایی - دستور $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + e_n$ را که در آن مقدار ثابت اولر و $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$ است بکار برید .

۲۶۶۲ - با علم به اینکه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ ، مطلوبست محاسبهٔ مجموع

سری‌های حاصل از سری مقروض در نتیجهٔ جایجا کردن جملات آن :

(الف) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$

و

(ب) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$

۲۶۶۳ - جملات سری همگرایی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

را طوری جایجا کنید که واگرا شود .

همگرایی سری‌های متغیرالامهٔ زیر را بررسی کنید :

۲۶۶۴ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$

۲۶۶۵ - $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$

۲۶۶۶،۱ - هرگه

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \quad (1)$$

که در آن $b_n > 0$ و $b_n \rightarrow 0$ بازای $n \rightarrow \infty$ آیا از این جا نتیجه میشود که سری (۱) همگرا است ؟ مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}) - 26671$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} - 26672$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt{n}} - 26673$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1} - 26673,1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4} - 26677$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} - 26678$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} - 26679$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}} - 26670$$

۲۶۶۷۴ - ثابت کنید که سری متناوب علامه

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n-1} b_n + \dots \quad (b_n > 0)$$

وقتی همگراست که

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

که در آن $p > 0$ (۲۶۵۶ را ببینید).

همگرایی مطلق (سوی ۲۶۹۰) و شروط سریهای زیر را بررسی کنید :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} - 26680$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p} - 26681$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} - 26682$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} - 26683$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n} - 26684$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} - 26675$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p + \frac{1}{n}} - 26676$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right] - 26677$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^2 n x}{n} - 26678$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} - 26679$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p} - 2687$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} - 2688$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n} - 2688$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\ln n} - 2689$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \right]^p - 2689$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2 - 2691$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \times \sin n^2}{n} - 2690$$

راهنمایی - ثابت کنید که $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 \neq 0$.

۲۶۹۲ - فرض کنیم

$$R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q}$$

تابعی باشد گویا، که در آن $a_0 \neq 0$ ، $b_0 \neq 0$ و $x \geq n$. برای $|b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q| > 0$.
مطلوبست بررسی همگرایی مطلق و مشروط سری

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$$

همگرایی سری های زیر را بررسی کنید :

$$\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \dots - 2693$$

$$1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \dots - 2694$$

$$1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \dots - 2695$$

$$1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \dots - 2696$$

۲۶۹۷ - ثابت کنید که سری های

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \quad (\text{الف})$$

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots \quad (\text{ب})$$

در فاصله $(0, \pi)$ همگرایی مطلق نیستند.
۲۶۹۸- برای سری های

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi)$$

بازای مجموعه پارامترهای (p, x) مطلوبست تعیین: (الف) حوزه همگرایی مطلق؛ (ب) حوزه همگرایی نامطلق.
۲۶۹۸, ۱- همگرایی سری های زیر را بررسی کنید:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n} \quad (\text{پ})$$

۲۶۹۹- برای سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\dots(n+p)}{n! n^q}$$

مطلوبست تعیین: (الف) حوزه همگرایی مطلق؛ (ب) حوزه همگرایی مشروط.
۲۷۰۰- مطلوبست بررسی همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{n}\right)$$

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \quad \text{که در آن}$$

۲۷۰۱- اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$$

باشد در آنصورت آیا میتوان گفت که سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز همگرا است ؟

مثالهای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$ را در نظر بگیرید .

۲۷۰۲ - فرض میکنیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای نامطلق باشد و

$$P_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| + a_i}{2}, \quad N_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| - a_i}{2}$$

ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1$$

۲۷۰۳ - ثابت کنید که مجموع سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

برای هر $p > 0$ بین $\frac{1}{p}$ و ۱ قرار دارد .

۲۷۰۳،۱ - چند جمله از سریهای زیر را باید اختیار کرد تا مجموع آنها را بتوان با تقریب $\varepsilon = 10^{-1}$ بدست آورد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^*}{\sqrt{n}} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}} \quad (\text{الف})$$

۲۷۰۴ - ثابت کنید که اگر جملات سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

را طوری گروه‌بندی کنیم که در پی هر p جمله مثبت متوالی ، q جمله منفی متوالی آید در آنصورت مجموع سری جدید عبارتست از

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$$

۲۷۰۵ - ثابت کنید که اگر جملات سری هارمونیک

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

را جابجا نکرده علامت آنها را بنحوی عوض کنیم که بدنبال p جمله مثبت، q جمله منفی ($p \neq q$) قرار گیرد در آنصورت این سری واگرا خواهد ماند. همگرایی فقط برای $p = q$ وجود دارد.

بخش ۳ - اعمال روی سریها

مجموع و حاصل ضرب سریها. بنا به تعریف فرض میشود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (\text{ب})$$

که در آن

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$$

تساوی الف بی قید دارای معناست اگر هر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشند و تساوی ب وقتی دارای معناست (بدون قید) که علاوه بر این دست کم یکی از این سریها مطلقاً همگرا باشد.

۲۷۰۶ - راجع به مجموع دو سری در صورتیکه: الف) یکی از آنها همگرا و دیگری واگرا باشد؛ ب) هر دو سری واگرا باشند چه میتوان گفت؟

۲۷۰۷ - مطلوبست محاسبه مجموع دو سری:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right]$$

مجموع سریهای زیر را پیدا کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{3^n} - 2709$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right] - 2708$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \quad (|xy| < 1) - 2710$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 \quad \text{نشان دهید که} - 2711$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n \quad (|q| < 1) \quad \text{نشان دهید که} - 2712$$

نشان دهید که مجذور سری همگرای

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

یک سری واگرا است.

۲۷۱۴- ثابت کنید که حاصل ضرب دو سری همگرای

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} \quad (\beta > 0)$$

بازای $\alpha + \beta > 1$ همگرا و بازای $\alpha + \beta < 1$ واگرا است.

۲۷۱۵- تحقیق کنید که حاصل ضرب دو سری واگرای

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^n \quad \text{و} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^{n-1} \left(r^n + \frac{1}{r^{n+1}}\right)$$

یک سری مطلقاً همگرا است.

بخش ۴ - سریهای تابعی

بند ۱- حوزه همگرایی. مجموعه X از آن مقدارهای x که بازای آنها

سری تابعی

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

همگرا باشد حوزه همگرایی این سری نامیده میشود و تابع

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n u_l(x) \quad (x \in X)$$

مجموع آن است.

بند ۲ - همگرایی یکنواخت . دنباله توابع

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

را روی مجموعه X وقتی همگرایی یکنواخت نامند که :
(۱) تابع حدی زیر وجود داشته باشد :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in X)$$

(۲) برای هر عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ بتوان عدد $N = N(\varepsilon)$ را تعیین نمود چنان که

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

برای $n > N$ و $x \in X$.

در این حالت مینویسند $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

سری تابعی (۱) را روی مجموعه X وقتی همگرایی یکنواخت نامند که روی این مجموعه دنباله مجموع‌های جزئی آن

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

همگرایی یکنواخت باشد.

بند ۳ - معیار کوشی . برای همگرایی یکنواخت سری (۱) روی مجموعه X لازم و کافی است که برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $N = N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد چنان که برای $n > N$ و $p > 0$ ناساوی

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \varepsilon$$

برای هر $x \in X$ برقرار باشد.

بند ۴ - نشانه ویرشتراس . سری (۱) وقتی روی مجموعه X مطلقاً و بطور یکنواخت همگرا است که سری عددی همگرایی

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (۲)$$

وجود داشته باشد چنان که

$$x \in X \quad (n = 1, 2, \dots) \quad |u_n(x)| \leq c_n$$

بند ۵ - نشانه آبل . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

در صورتی روی مجموعه X همگرایی یکنواخت است که (۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ روی مجموعه X همگرایی یکنواخت باشد؛ (۲) توابع $b_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) مجموعاً کراندار و برای هر x دنباله $b_n(x)$ یکنوا تشکیل دهند. بند ۶ - نشانه دیریکله. سری (۳) روی مجموعه X در صورتی همگرایی

یکنواخت است که (۱) مجموع های جزئی $\sum_{n=1}^N a_n(x)$ مجموعاً کراندار باشد؛ (۲) دنباله $b_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) برای هر x یکنوا باشد و روی X برای $n \rightarrow \infty$ بطور یکنواخت بسمت صفر میل کند.

بند ۷ - ویژگی های سری های تابعی. الف) مجموع سری همگرایی یکنواخت از توابع پیوسته تابعی است پیوسته. ب) اگر سری تابعی (۱) روی هر $(a, b) \subset [\alpha, \beta]$ بطور یکنواخت همگرا باشد و حدود متناهی

$$\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = A_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

وجود داشته باشد در آن صورت (۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ همگرا است؛ (۲) تساوی زیر برقرار است:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \right\}$$

پ) اگر جملات سری همگرایی (۱) برای $a < x < b$ بطور پیوسته ديفرانسیبل پذیر و سری مشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ روی فاصله (a, b) همگرایی یکنواخت باشد در آن صورت

$$x \in (a, b) \quad \text{بازای} \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

ت) اگر جملات سری (۱) پیوسته و این سری روی قطعه متناهی $[a, b]$ همگرایی یکنواخت باشد در آن صورت

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \quad (4)$$

$\int_a^b R(x) dx \rightarrow 0$ بطور کلی دستور (۴) در صورتی درست است که

برای $n \rightarrow \infty$ که در آن $R_n(x) = \sum_{l=n+1}^{\infty} u_l(x)$ شرط اخیر برای انتگرال گیری با حدود نامتناهی نیز دارای اعتبار است .

مطلوبست تعیین حوزه همگرایی (مطلق و مشروط) سربهای تابعی زیر :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \times 2^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n - 2720 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} - 2716$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n \sin^2 x}{n^2} - 2721 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n - 2717$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n - 2718$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} - 2722 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \dots (2n-1)}{2 \times 4 \dots (2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n - 2719$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^q \sin nx}{1+n^q} \quad (q > 0; 0 < x < \pi) - 2723$$

$$(سری لامبرت) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} - 2724$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} - 2726 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n - 2725$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2) \dots (1+x^n)} - 2727$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \times \frac{1}{1+a^{2n}x^2} - 2729 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} - 2728$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r-x) \left(r - x^{\frac{1}{r}} \right) \left(r - x^{\frac{1}{r^2}} \right) \dots \left(r - x^{\frac{1}{r^n}} \right) \quad (x > 0) - 2730$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}} - 2731$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n + y^n} \quad (x > 0; y > 0) - 2732$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y} \quad (x \geq 0) - 2733$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n} \quad (y \geq 0) - 2733$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \left(x + \frac{y}{n} \right) - 2736$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}} - 2734$$

۲۷۳۷- ثابت کنید که اگر سری لوران $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ برای $x = x_1$ و

$x = x_2$ همگرا باشد در آنصورت برای $|x_1| < |x| < |x_2|$ نیز همگرا است.

۲۷۳۸- مطابقت تعیین حوزه همگرایی سری لوران

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{|n|} x^n$$

و محاسبه مجموع آن.

۲۷۳۹- مطابقت تعیین حوزه همگرایی (مطلق و مشروط) سری‌های نیوتن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n} \quad \text{ت) ؛} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \frac{x^{[n]}}{n!} \quad \text{ب) ؛} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!}$$

که در آن $x^{[n]} = x(x-1) \dots [x-(n-1)]$

۲۷۴۰- ثابت کنید که اگر سری دیریکله $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ برای $x = x_0$ همگرا

باشد در آنصورت برای $x > x_0$ نیز همگرا است.

۲۷۴۱- ثابت کنید که برای همگرایی یکنواخت دنباله $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$)

به تابع حدی $f(x)$ روی مجموعه X لازم و کافی است که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in X} r_n(x) \right\} = 0$$

که در آن $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$

۲۷۴۲ - مفهوم اینکه دنباله $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) (الف) روی فاصله $(x_0, +\infty)$ همگرا است؛ (ب) روی هر فاصله متناهی $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$ بطور یکنواخت همگرا است؛ (پ) روی فاصله $(x_0, +\infty)$ بطور یکنواخت همگرا است، یعنی چه؟

۲۷۴۳ - برای دنباله

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1)$$

مطلوبست تعیین کمترین نمره جمله $N = N(\varepsilon, x)$ ، که با ابتدا از آن انحراف جمله‌های دنباله در نقطه مفروض x از تابع حدی از $0,001$ تجاوز نکند در صورتیکه

$$x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \dots$$

یا این دنباله در فاصله $(0, 1)$ بطور یکنواخت همگرا است؟

۲۷۴۴ - چند جمله از سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

را باید اختیار نمود تا مجموع جزئی $S_n(x)$ برای $-\infty < x < +\infty$ با مجموع سری، اختلافی کمتر از ε داشته باشد؟ محاسبه عددی برای: (الف) $\varepsilon = 0,1$ ؛ (ب) $\varepsilon = 0,01$ ؛ (پ) $\varepsilon = 0,001$ انجام دهید.

۲۷۴۵ - در ازای چه مقادیری از n ناساوی بر قرار خواهد بود؟

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0,001 \quad (0 \leq x \leq 10)$$

مطلوبست بررسی همگرایی یکنواخت دنباله‌های زیر در فواصل ذکر شده:

$$f_n(x) = x^n \quad (الف) \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad (ب) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad - 2746$$

$$f_n(x) = x^n - x^{2n}; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad - 2748$$

$$f_n(x) = \frac{1}{x+n}; \quad 0 < x < +\infty \quad - 2749$$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}; \quad 0 \leq x \leq 1 - 2750$$

$$1 - \varepsilon \leq x \leq 1 + \varepsilon \quad (\text{ب} \quad 0 \leq x \leq 1 - \varepsilon \quad \text{الف}) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} - 2751$$

(ب) $1 + \varepsilon < x < +\infty$ که در آن $\varepsilon > 0$.

$$1 < x < +\infty \quad (\text{ب} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{الف}) \quad f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} - 2752$$

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \infty < x < +\infty - 2753$$

$$f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right); \quad 0 < x < +\infty - 2754$$

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}; \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{الف}) - 2755$$

$$f_n(x) = \sin \frac{x}{n}; \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{ب})$$

$$f_n(x) = \text{arc tg } nx; \quad 0 < x < +\infty \quad (\text{الف}) - 2756$$

$$f_n(x) = x \text{ arc tg } nx; \quad 0 < x < +\infty \quad (\text{ب})$$

$$f_n(x) = e^{n(x-1)}; \quad 0 < x < 1 - 2757$$

$$f_n(x) = e^{-(x-n)^2}; \quad -l < x < l \quad (\text{الف}) \quad \text{که در آن } l \text{ عدد دلخواه}$$

مثبتی است؛ (ب) $-\infty < x < +\infty$.

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}; \quad 0 < x < 1 - 2758$$

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n; \quad (a, b) \text{ روی فاصله متناهی (الف)}$$

(ب) روی فاصله $(-\infty, +\infty)$.

$$f_n(x) = n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right); \quad 1 \leq x \leq a - 2761$$

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}; \quad 0 \leq x \leq 2 - 2762$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{اگر } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x \right), & \text{اگر } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0, & \text{اگر } x \geq \frac{2}{n} \end{cases} - 2763$$

روی قطعه $0 \leq x \leq 1$.

۲۷۶۴ - فرض کنیم $f(x)$ تابع دلخواهی، معین روی قطعه $[a, b]$ باشد و

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ثابت کنید که

$$f_n(x) \Rightarrow f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

بازای $n \rightarrow \infty$.

۲۷۶۵ - فرض کنیم تابع $f(x)$ دارای مشتق پیوسته $f'(x)$ در فاصله (a, b) باشد و

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$$

ثابت کنید که $f_n(x) \Rightarrow f'(x)$ روی قطعه $\alpha \leq x \leq \beta$ که در آن $a < \alpha < \beta < b$.

۲۷۶۶ - فرض کنیم $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$ که در آن $f(x)$ تابعی

است پیوسته. ثابت کنید که دنباله $f_n(x)$ روی هر قطعه متناهی $[a, b]$ همگرای یکنواخت است.

مطلوبست بررسی نوع همگرایی سریهای زیر:

۲۷۶۷ - $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (الف) روی فاصله $|x| < q$ که در آن $q < 1$ ؛

(ب) روی فاصله $|x| < 1$.

۲۷۶۸ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ روی قطعه $-1 \leq x \leq 1$.

۲۷۶۸,۱ - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ روی فاصله $(0, +\infty)$.

۲۷۶۹ - $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ روی قطعه $0 \leq x \leq 1$.

۲۷۷۰ - $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$; $-1 \leq x \leq 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}; \quad 0 < x < +\infty \quad - ۲۷۷۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}; \quad 0 < x < +\infty \quad - ۲۷۷۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)} \quad - ۲۷۷۳$$

الف) $\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ که در آن $\varepsilon > 0$ ؛ ب) $\varepsilon \leq x < +\infty$

۲۷۷۴- با استفاده از نشانه* ویرشتراس ، همگرایی یکنواخت سری های تابعی زیر را در فواصل ذکر شده اثبات کنید :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}; \quad -\infty < x < +\infty \quad \text{الف)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n^2}; \quad -2 < x < +\infty \quad \text{ب)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}; \quad 0 \leq x < +\infty \quad \text{پ)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^2 x^2}; \quad |x| < +\infty \quad \text{ت)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}); \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2 \quad \text{ث)}$$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$ ، که در آن a عدد دلخواه مثبتی است. $|x| < a$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^2+x^2}}; \quad |x| < +\infty \quad \text{چ)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}; \quad |x| < +\infty \quad \text{ح)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \sqrt{n}}; \quad |x| < +\infty \quad (\text{خ})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right); \quad |x| < a \quad (\text{د})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}; \quad 0 \leq x \leq +\infty \quad (\text{ذ})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2x}{x^2 + n^2}; \quad |x| < +\infty \quad (\text{ر})$$

مطلوبست بررسی همگرایی یکنواخت سری‌های تابعی زیر در فواصل ذکرشده :

الف) روی قطعه $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ که در آن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - 2775$

$\varepsilon > 0$ ؛ ب) روی قطعه $0 \leq x \leq 2\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{2^n x}; \quad 0 < x < +\infty - 2776$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}; \quad 0 < x < +\infty - 2777$$

راه‌نمایی - مانده سری را بر آورد کنید .

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}; \quad 0 \leq x \leq 2\pi - 2778$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n^2 + e^x}}; \quad |x| \leq 10 - 2779$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}; \quad -\infty < x < +\infty - 2780$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}; \quad 0 \leq x < +\infty - 2781$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[V\sqrt{n}]} }{\sqrt{n(n+x)}}; \quad 0 \leq x < +\infty \quad -2782$$

۲۷۸۳- آیا دنباله* توابع منفصل میتواند بطور یکنواخت بسمت تابع پیوسته‌ای همگرا باشد ؟

مثال

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \psi(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

را که در آن

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x \text{ گنگ است} \\ 1, & \text{اگر } x \text{ کویاست} \end{cases}$$

در نظر بگیرید .

۲۷۸۴- ثابت کنید که اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ روی $[a, b]$ همگرای

یکنواخت باشد در آنصورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ نیز روی $[a, b]$ همگرای یکنواخت است .

۲۷۸۵- اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ روی $[a, b]$ بطور مطلق و یکنواخت همگرا

باشد ، آیا در آنصورت حتماً سری $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ روی $[a, b]$ همگرای یکنواخت است ؟

مثال $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ را که در آن $0 \leq x \leq 1$ ، در نظر بگیرید .

۲۷۸۶- ثابت کنید که مازوره کردن سری همگرای مطلق و یکنواخت

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

که در آن

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)} \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1} \pi x), & \text{اگر } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n} \\ 0, & \text{اگر } 2^{-n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

با یک سری عددی همگرای دارای جملات نامنفی ممکن نیست .

۲۷۸۷ - ثابت کنید اگر سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

که جملات آن روی قطعه $[a, b]$ توابع یکنوا هستند در نقاط انتهایی این قطعه بطور مطلق همگرا باشد در آنصورت سری مفروض روی قطعه $[a, b]$ بطور مطلق و یکنواخت همگرا میباشد.

۲۷۸۸ - ثابت کنید که سری تام

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

روی قطعه دلخواهی که بتامی در داخل فاصله همگرایی آن واقع شده باشد بطور یکنواخت همگرا است.

۲۷۸۹ - هر گاه $a_n \rightarrow \infty$ بقسمی که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ همگرا باشد ثابت کنید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

روی هر مجموعه محدود بسته دلخواهی که شامل نقاط $a_n (n = 1, 2, \dots)$ نباشد مطلقاً و بطور یکنواخت همگرا است.

۲۷۹۰ - ثابت کنید که اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد در آنصورت سری دیریکله:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

بازای $x \geq 0$ همگرای یکنواخت میباشد.

۲۷۹۱ - هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ثابت کنید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

در حوزه $x \geq 0$ همگرای یکنواخت است.

۲۷۹۲ - نشان دهید که تابع

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

پیوسته و دارای مشتق پیوسته در حوزه $-\infty < x < +\infty$ میباشد.

۲۷۹۳ - نشان دهید که تابع

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

(الف) در تمام نقاط بااستثنای نقاط نظیر اعداد درست: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ معین و پیوسته است؛ (ب) دوره‌ای با دوره یک است.

۲۷۹۴ - نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n x e^{-nx} - (n-1) x e^{-(n-1)x}]$$

روی قطعه $0 \leq x \leq 1$ همگرایی نایکخواخت است ولی مجموع آن روی این قطعه تابعی است پیوسته.

۲۷۹۵ - مطلوبست تعیین حوزه وجود تابع $f(x)$ و بررسی پیوستگی آن در صورتیکه

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2} \quad (\text{ب}) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} \quad (\text{پ})$$

۲۷۹۶ - فرض کنیم $r_k (k = 1, 2, \dots)$ اعداد گویای قطعه $[0, 1]$ باشند. ثابت کنید که تابع

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x-r_k|}{r_k^k} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

دارای ویژگی‌های زیر است؛ (۱) پیوستگی؛ (۲) مشتق‌پذیری در نقاط گنگ و مشتق‌ناپذیری در نقاط گویا.

۲۷۹۷- ثابت کنید که تابع زتای ریمان

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

در حوزه $x > 1$ پیوسته و دارای مشتقات پیوسته از هر مرتبه در این حوزه است.

۲۷۹۸- ثابت کنید که تابع تتای

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

بازای $x > 0$ معین ولی بینهایت بار دیفرانسیل پذیر است.

۲۷۹۹- مطوبست تعیین حوزه وجود تابع $f(x)$ و بررسی دیفرانسیل پذیری آن در صورتیکه:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x} \quad (\text{الف})$$

۲۸۰۰- نشان دهید که دنباله

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

روی فاصله $(-\infty, +\infty)$ همگرای یکنواخت است اما

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1)$$

۲۸۰۱- نشان دهید که دنباله

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

روی فاصله $(-\infty, +\infty)$ همگرای یکنواخت است اما

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

۲۸۰۲- در ازای چه مقادیری از پارامتر α : الف) دنباله

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \quad (1)$$

($n = 1, 2, \dots$) روی قطعه $[0, 1]$ همگرا است ؛ ب) دنباله (۱) روی $[0, 1]$ همگرایی یکنواخت است ؛ پ) انتقال حدود به عبارت زیر علامت انتگرال

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

ممکن است ؟

۲۸۰۳ - نشان دهید که دنباله

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

روی قطعه $[0, 1]$ همگرا است ، ولی

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

۲۸۰۴ - نشان دهید که دنباله

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

روی قطعه $[0, 1]$ همگرایی نایکنواخت است ولی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

۲۸۰۵ - آیا انتقال حد به عبارت زیر علامت انتگرال در عبارت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx$$

قابل اعتبار است ؟

سطلویست محاسبه :

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \times \frac{x^n}{x^n+1} - 2806$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) - 2807$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2 x^2} - 2808,1$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} x} - 2808$$

۲۸۰۹ - آیا دیفرانسیل گیری جمله به جمله سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$$

قابل اعتبار است ؟

۲۸۱۰ - آیا انتگرال گیری جمله به جمله سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right)$$

روی قطعه $[0, 1]$ قابل اعتبار است ؟

۲۸۱۱ - هر گاه $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ تابعی بینهایت بار دیفرانسیل پذیر باشد و دنباله مشتقات $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ آن بطور یکنواخت در هر فاصله متناهی (a, b) بسمت تابع $\varphi(x)$ همگرا باشد ثابت کنید که $\varphi(x) = Ce^x$ که در آن مقدار ثابتی است. مثال $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ $(n = 1, 2, \dots)$ را در نظر بگیرید.

۲۸۱۱,۱ - هرگاه توابع $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ روی $(-\infty, +\infty)$ معین و کراندار باشند و $f_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ روی هر قطعه $[a, b]$ ، آیا از اینجا نتیجه میشود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x f_n(x) = \sup_x \varphi(x)$$

بخش ۵ - سری های تام

بند ۱ - فاصله همگرایی. برای هر سری تام

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

فاصله همگرایی $|x-a| \leq R$ وجود دارد که در درون آن سری مفروض همگرا و در بیرون آن واگرا است. شعاع همگرایی R از روی دستور کوشی - آدامار معین می شود :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

شعاع همگرایی R از روی دستور

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

در صورتی که این حد وجود داشته باشد نیز حساب می‌شود .
بند ۲ - قضیه آبل . اگر سری تام

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (|x| < R)$$

در نقطه انتهایی $x = R$ فاصله همگرایی ، همگرا باشد در آنصورت

$$S(R) = \lim_{x \rightarrow R-} S(x)$$

بند ۳ - سری تیلر . تابع $f(x)$ تحلیل در نقطه a ، بسری تام

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

قابل بسط است .

جمله مانده این سری را :

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

بشکل

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(شکل لاگرانژ) یا بشكل

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x-a))}{n!} (1 - \theta_1)^n (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

(شکل کوشی) می‌توان درآورد .

بیاد داشتن پنج بسط اساسی زیر لازم است :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty) - I$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty) - II$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty) - \text{III}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (-1 < x < 1) - \text{IV}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1) - \text{V}$$

بند ۴ - اعمال روی سری‌های تام . در داخل فاصله مشترک همگرایی
 $|x-a| < R$ داریم :

$$\text{الف) } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n$$

$$\text{ب) } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

که در آن

$$c_n = a_n b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$\text{پ) } \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n$$

$$\text{ت) } \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

بند ۵ - سری‌های تام در حوزه مختلط . سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

را که در آن

$$c_n = a_n + i b_n, \quad a = \alpha + i\beta, \quad z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}$$

در نظر میگیریم برای هر سری از این گونه یک دایره همگرایی $|z-a| \leq R$ وجود دارد که درون آن سری مفروض همگرا (و ضمناً مطلقاً) و برون آن واگرا است . شعاع همگرایی R برابر شعاع همگرایی سری تام

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

در حوزه حقیقی است .

برای سری‌های تام زیر مطلوبست تعیین شعاع و فاصله همگرایی و بررسی رفتار در نقاط مرزی فاصله همگرایی :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \times x^n \quad (0 < \alpha < 1) - 2815 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p} - 2812$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n - 2816 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n + (-r)^n}{n} (x+1)^n - 2813$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1) - 2817 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^r}{(rn)!} x^n - 2814$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \right]^p \left(\frac{x-1}{2}\right)^n - 2818$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{r^n (n!)^r}{(rn+1)!} \right]^p x^n - 2819$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n - 2820$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^r} \right) x^n \quad (a > 0, b > 0) - 2821$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0) - 2822$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a \sqrt[n]{n}} \quad (a > 0) - 2823$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(rn)!!}{(rn+1)!!} x^n - 2825 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r - \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^r+1}} x^n - 2824$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\gamma + (-1)^n]^n}{n} x^n - 2828$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n - 2829$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + \gamma \cos \frac{\pi n}{2}\right)}{\ln n} x^n - 2829$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n - 2827$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{\gamma^n} - 2830$$

(سری پرینسهایم)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[Vn]}}{n} x^n - 2831$$

n در آن $v(n)$ تعداد ارقام عدد n است
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot v(n)}{n} (1-x)^n - 2831,1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n - 2831,2$$

2832 - مطلوبست تعیین حوزه همگرایی سری فوق هندسی (هیپرژئومتریک)

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \times 2 \times \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{1 \times 2 \dots n\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} x^n + \dots$$

مطلوبست تعیین حوزه همگرایی سری های تام تعمیم یافته :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^{\gamma}} e^{-nx} - 2836$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma n + 1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n - 2837$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^{\gamma n} (n!)^{\gamma}}{(\gamma n)!} \operatorname{tg}^n x - 2837$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{\gamma^n} - 2838$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{\gamma^{n^2}} - 2839$$

$$f(x) = x^2$$

را بر حسب توانهای درست مثبت دوجمله‌ای $x + 1$ بسط دهید .

$$f(x) = \frac{1}{a-x} \quad (a \neq 0)$$

را به سری تام : الف) بر حسب توانهای x ؛ ب) بر حسب توانهای دوجمله‌ای $x - b$ که در آن $b \neq a$ ؛ پ) بر حسب توانهای $\frac{1}{x}$ ، بسط دهید . حوزه‌های همگرایی نظیر را معلوم کنید .

۲۸۴۰ - تابع $f(x) = \ln x$ را بر حسب توانهای درست مثبت تقاض $x - 1$ بسط دهید و فاصله همگرایی بسط را تعیین کنید .
مجموع سری زیر را پیدا کنید :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

بسط توابع زیر را بر حسب توانهای درست مثبت متغیر x بنویسید و فاصله همگرایی نظیر را پیدا کنید :

$$f(x) = a^x \quad (a > 0) \quad 2844$$

$$f(x) = \operatorname{sh} x \quad 2841$$

$$f(x) = \sin(\mu \operatorname{arc} \sin x) \quad 2845$$

$$f(x) = \operatorname{ch} x \quad 2842$$

$$f(x) = \cos(\mu \operatorname{arc} \sin x) \quad 2846$$

$$f(x) = \sin^2 x \quad 2843$$

۲۸۴۷ - سه جمله از بسط تابع $f(x) = x^x$ را بر حسب توانهای درست مثبت تقاض $x - 1$ بنویسید .

۲۸۴۸ - سه جمله از بسط تابع $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ و $f(0) = e$ را بر حسب توانهای درست مثبت متغیر x بنویسید .

۲۸۴۹ - توابع $\cos(x+h)$ و $\sin(x+h)$ را بر حسب توانهای درست مثبت متغیر h بسط دهید .

۲۸۵۰ - مطلوبست فاصله همگرایی بسط تابع زیر به سری تام :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

الف) بر حسب توانهای x ؛ ب) بر حسب توانهای دوجمله‌ای $x - 5$ بدون اجرای خود بسط .

۲۸۵۰،۱ - آیا میتوان گفت که روی $(-\infty, +\infty)$ بازای $N \rightarrow \infty$:

$$\sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \Rightarrow \sin x$$

با استفاده از بسطهای اساسی I-V بست توابع زیر بسری تام را نسبت

به x بنویسید :

$\frac{x}{\sqrt{1-2x}} - 2856$	$e^{-x^2} - 2851$
$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2857$	$\cos^2 x - 2852$
$\frac{x}{1+x-2x^2} - 2858$	$\sin^3 x - 2853$
	$x^{10} - 2854$
	$\frac{1}{1-x} - 2855$
	$\frac{1}{(1-x)^2} - 2855$

راهنمایی - کسر مقروض را به کسرهای ساده تجزیه کنید .

$\frac{x \cos a - x^2}{1 - 2x \cos a + x^2} - 2863$	$\frac{12 - 5x}{6 - 5x - x^2} - 2859$
$\frac{x \sin a}{1 - 2x \cos a + x^2} - 2864$	$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} - 2860$
$\frac{x \operatorname{sh} a}{1 - 2x \operatorname{ch} a + x^2} - 2865$	$\frac{1}{1-x-x^2} - 2861$
$\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - 2866$	$\frac{1}{1+x+x^2} - 2862$
$\ln(1+x+x^2+x^3) - 2867$	$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3} - 2862,1$
$e^{x \cos a} \cos(x \sin a) - 2868$	$f(1000)$ چقدر است ؟

راهنمایی - دستورهای اولر را بکار برید .

از طریق انتگرال گیری جمله به جمله مشتق های قبلا بسط داده شده ، بسط توابع زیر بسری تام را بدست آورید :

$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 2869$ ؛ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ را پیدا کنید .

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - 2871$$

$$f(x) = \arcsin x - 2870$$

$$f(x) = \ln(1 - 2x \cos \alpha + x^2) - 2872$$

۲۸۷۳ - با کاربرد روش‌های مختلف بسط توابع زیر بسری تام را پیدا کنید:

$$\text{الف) } f(x) = (1+x) \ln(1+x)$$

$$\text{ب) } f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctg x$$

$$\text{پ) } f(x) = \arctg \frac{2-2x}{1+x}$$

$$\text{ت) } f(x) = \arctg \frac{2x}{2-x^2}$$

$$\text{ث) } f(x) = x \arctg x - \ln \sqrt{1+x^2}$$

$$\text{ج) } f(x) = \arccos(1-2x^2)$$

$$\text{چ) } f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{ح) } f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$$

۲۸۷۴ - با استفاده از یکتایی بسط

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots,$$

مشتق مرتبه n - ام توابع زیر را پیدا کنید:

$$\text{الف) } f(x) = e^{x^2} \quad \text{ب) } f(x) = e^{\frac{a}{x}} \quad \text{پ) } f(x) = \arctg x$$

۲۸۷۵ - تابع

$$f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$$

را بر حسب توانهای درست مثبت دوجمله‌ای $x+1$ بسط دهید.

۲۸۷۶ - تابع

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

را بر حسب توانهای منفی متغیر x بسری تام بسط دهید.

۲۸۷۷ - تابع

$$f(x) = \ln x$$

را بر حسب توانهای درست مثبت کسر $\frac{x-1}{x+1}$ بسری تام بسط دهید

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

را بر حسب توانهای درست مثبت کسر $\frac{x}{x+1}$ بسری تام بسط دهید .
۲۸۷۹ - هرگاه

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

مستقیماً ثابت کنید که

$$f(x)f(y) = f(x+y)$$

۲۸۸۰ - هرگاه بنا به تعریف

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

و

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ثابت کنید که

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{الف} \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \text{ب}$$

۲۸۸۱ - چند جمله از بسط تابع زیر بسری تام :

$$f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n+1} \right) \right]^{-1}$$

بنویسید .

با اجرای اعمال مناسب روی سریهای تام ، بسط توابع زیر را بسری تام بدست آورید :

$$f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x - 2885 \quad f(x) = (1+x)e^{-x} - 2882$$

$$f(x) = e^x \cos x - 2886 \quad f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x} - 2883$$

$$f(x) = e^x \sin x - 2887 \quad f(x) = \ln^2(1-x) - 2884$$

$$f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2 - 2890$$

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} - 2888$$

$$f(x) = (\arctg x)^2 - 2889$$

سه جمله (مخالف صفر) از بسط توابع زیر بوسیله تام بر حسب توانهای مثبت متغیر x بنویسید :

$$f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} - 2893$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x - 2891$$

$$f(x) = \operatorname{th} x - 2892$$

هرگه بسط $\sec x$ بصورت

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}$$

نوشته شود رابطه بازگشتی را برای ضرایب E_n (اعداد اولر) تعیین کنید .
- 2895 - تابع زیر را بوسیله تام بسط دهید :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \quad (|x| < 1)$$

- 2896 - هرگه $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، بسط تابع $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ را بنویسید .

- 2897 - اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی R_1 و سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

دارای شعاع همگرایی R_2 باشد در آنصورت سری های

(الف) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ ؛ (ب) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ دارای کدام شعاع

همگرایی خواهند بود ؟

- 2898 - فرض کنیم

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{و} \quad L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

ثابت کنید که شعاع همگرایی R سری تام $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در نامساوی

$$l \leq R \leq L$$

صادق است .

۲۸۹۹- ثابت کنید که اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و ضمناً

$$|n! a_n| < M \quad (n = 1, 2, \dots)$$

که در آن M مقدار ثابتی است در آنصورت (۱) $f(x)$ در هر نقطه دلخواه a بی‌نهایت بار دیفرانسیل‌پذیر است؛ (۲) بسط زیر درست است:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (|x| < +\infty)$$

۱، ۲۸۹۹- هرگاه $|f^{(n)}(x)| \leq c^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) و $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ بازای $x \in (a, b)$ ثابت کنید که تابع $f(x)$ به سری تام

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (x \in (a, b))$$

قابل بسط است که در فاصله (a, b) همگرا می‌باشد.

۲، ۲۸۹۹- هرگاه $f^{(n)}(x) \geq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) و $f(x) \in C^{(\infty)}[-1, 1]$ بازای $x \in [-1, 1]$ ثابت کنید که در فاصله $(-1, 1)$ تابع $f(x)$ به سری تام

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

قابل بسط می‌باشد.

راهنمایی - با استفاده از یکنوایی مشتقات $f^{(n)}(x)$ برای جمله مانده $R_n(x)$ سری تیلر تابع $f(x)$ برآورد

$$|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} f(1)$$

را بدست آورید.

۲۹۰۰- ثابت کنید که اگر $a_n \geq 0$ و (۱) $\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S$

وجود داشته باشد در آنصورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$

توانع زیر را بسط دهید :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt - 2903$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt - 2901$$

$$\int_0^x \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} dx - 2904$$

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - 2902$$

$$(\text{چهار جمله بسط را بنویسید.}) \int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} - 2905$$

با کاربرد مشتق گیری جمله به جمله مجموع سری های زیر را حساب کنید :

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots - 2908$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots - 2906$$

$$\frac{x}{1 \times 2} + \frac{x^2}{2 \times 3} + \frac{x^3}{3 \times 4} + \dots - 2909$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots - 2907$$

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}x^2 + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}x^3 + \dots - 2910$$

راهنمایی - مشتق سری را در $1-x$ ضرب کنید .

با کاربرد انتگرال گیری جمله به جمله مجموع سری های زیر را حساب کنید :

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots - 2911$$

$$x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots - 2912$$

$$1 \times 2x + 2 \times 3x^2 + 3 \times 4x^3 + \dots - 2913$$

$$2914 - \text{نشان دهید که سری}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

در معادله $y^{(2)} = x$ صادق است .

2915 - نشان دهید که سری

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

در معادله

$$xy'' + y' - y = 0$$

صادق است .

مطلوبست تعیین شعاع و دایره همگرایی سری‌های تام زیر در حوزه مختلط

$$: (z = x + iy)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha + i\beta}} - 2919$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n \times 2^n} - 2916$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - e^{i\alpha})^n}{n(1 - e^{i\alpha})^n} - 2920$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{n!(n+1)(n+2)} - 2917$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{(1+i)(1+2i)\dots(1+ni)} - 2918$$

۲۹۲۱- با استفاده از دستور دو جمله‌ای نیوتن، $\sqrt[3]{9}$ را بطور تقریبی محاسبه و خطائی را که با در نظر گرفتن سه جمله از بسط حاصل می‌شود برآورد کنید.

۲۹۲۲- مطلوبست محاسبه تقریبی:

الف) $\text{arc tg } 1,2$ ؛ ب) $\sqrt[3]{1000}$ ؛ پ) $\ln 1,2$ و برآورد خطاهای

نظیر .

با استفاده از بسط‌های مربوطه با درجه تقریب ذکر شده مقدار توابع زیر را حساب کنید:

$$10^{-5} - 2923 \quad \sin 18^\circ \text{ با تقریب}$$

$$10^{-6} - 2924 \quad \cos 1^\circ \text{ با تقریب}$$

$$10^{-3} - 2925 \quad \text{tg } 9^\circ \text{ با تقریب}$$

$$10^{-6} - 2926 \quad e \text{ با تقریب}$$

$$10^{-4} - 2927 \quad \ln 1,2 \text{ با تقریب}$$

$$- 2928 \quad \text{از روی تساوی}$$

$$\frac{\pi}{6} = \text{arc sin } \frac{1}{2}$$

مقدار π را با تقریب 10^{-4} حساب کنید.

$$- 2929 \quad \text{با استفاده از اتحاد}$$

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg } \frac{1}{2} + \text{arc tg } \frac{1}{3}$$

مطلوبست محاسبه عدد π با تقریب $0,001$.

۲۹۳۰- با استفاده از اتحاد

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}$$

مطلوبست محاسبه عدد π با تقریب 10^{-9}

۲۹۳۱- با استفاده از دستور

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots \right]$$

مطلوبست محاسبه $\ln 2$ و $\ln 3$ با تقریب 10^{-5}

۲۹۳۲- بیاری بسط توابع تحت علامت انتگرال گیری به سری مطلوبست محاسبه

انتگرال های زیر با تقریب $0,001$:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} \quad (\text{ج})$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad (\text{ح})$$

$$\int_1^4 e^{\frac{1}{x}} dx \quad (\text{ب})$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (\text{خ})$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{پ})$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} dx \quad (\text{د})$$

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \quad (\text{ت})$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} dx \quad (\text{ذ})$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx \quad (\text{ث})$$

$$\int_0^1 x^x dx \quad (\text{ر})$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \quad (\text{ج})$$

۲۹۳۳- مطلوبست تعیین طول قوس یک نیم موج از سینوسوید زیر با

تقریب $0,01$:

$$y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

۲۹۳۴- مطلوبست محاسبه طول قوس بیضی با نیم قطرهای $a=1$ و $b=\frac{1}{4}$

با تقریب $0,01$

۲۹۳۵ - سیمی که در بین دو ستون بفاصله $2l = 20 \text{ m}$ از یکدیگر آویخته شده بشکل سهمی است. اگر سهم خمیدگی $h = 40 \text{ cm}$ ، طول سیم را با تقریب تا یک سانتیمتر حساب کنید

بخش ۶ - سری های فوریه

بند ۱ - قضیه بسط. اگر تابع $f(x)$ پیوسته قطعه ای و دارای مشتق پیوسته قطعه ای $f'(x)$ در فاصله $(-l, l)$ باشد و ضمناً جميع نقاط انفصال ξ منظم باشند (یعنی $|f(\xi) - \frac{1}{\nu}[f(\xi - 0) + f(\xi + 0)]|$ در آنصورت تابع $f(x)$ را زوی این فاصله میتوان با سری فوریه نمایش داد:

$$(1) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

که در آن

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(2') \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

مخصوص:

الف) اگر تابع $f(x)$ زوج باشد در آنصورت داریم:

$$(3) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

که در آن

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ب) اگر تابع $f(x)$ فرد باشد در آنصورت خواهیم داشت:

$$(4) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

که در آن

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

تابع $f(x)$ معین در فاصله $(0, l)$ و دارای ویژگی‌های پیوستگی فوق‌الذکر را می‌توان در این فاصله بر حسب هر یک از دستورهای (۳) و (۴) بدون تفاوت بیان نمود.

بند ۲ - شرط کمال. برای هر تابع $f(x)$ که روی فاصله $(-l, l)$ با مجذورش انتگرال‌پذیر باشد سری (۱) که بطور اسمی با ضرایب (۲) و (۲') تشکیل می‌شود در تساوی لیاپونوف صادق است:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx$$

بند ۳ - انتگرال‌گیری سری‌های فوریه. سری فوریه (۱) را از تابع $f(x)$ که در فاصله $(-l, l)$ بمعنی ریمان انتگرال‌پذیر است حتی در صورت واگرایی آن می‌توان در این فاصله جمله به جمله انتگرال‌گیری کرد.

۲۹۲۶ - تابع

$$f(x) = \sin^4 x$$

را به سری فوریه بسط دهید.

۲۹۲۷ - سری فوریه برای چند جمله‌ای مثلثاتی

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)$$

چگونه است؟

۲۹۲۸ - تابع

$$f(x) = \operatorname{sg} nx \quad (-\pi < x < \pi)$$

را بسری فوریه بسط داده و نمودار تابع و نمودار برخی از مجموع‌های جزئی سری فوریه این تابع را رسم کنید. با استفاده از بسط، مجموع سری لایبنتز را پیدا کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

توابع زیر را در فواصل ذکر شده بسری فوریه بسط دهید :

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{اگر } 0 < x < l \\ 0, & \text{اگر } l < x < 2l \end{cases} - 2939$$

که در آن A ثابت است ، در فاصله $(0, 2l)$

$$f(x) = x \quad \text{در فاصله } (-\pi, \pi) - 2940$$

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{در فاصله } (0, 2\pi) - 2941$$

$$f(x) = |x| \quad \text{در فاصله } (-\pi, \pi) - 2942$$

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{اگر } -\pi < x < 0 \\ bx, & \text{اگر } 0 < x < \pi \end{cases} - 2943$$

که در آن a و b ثابتند ، در فاصله $(-\pi, \pi)$

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \quad \text{در فاصله } (-\pi, \pi) - 2944$$

$$f(x) = \cos ax \quad \text{در فاصله } (-\pi, \pi) - 2945$$

$$f(x) = \sin ax \quad \text{در فاصله } (-\pi, \pi) - 2946$$

(a عددیست نادرست)

$$f(x) = \text{sh } ax \quad \text{در فاصله } (-\pi, \pi) - 2947$$

$$f(x) = e^{ax} \quad \text{در فاصله } (-h, h) - 2948$$

$$f(x) = x \quad \text{در فاصله } (a, a + 2l) - 2949$$

$$f(x) = x \sin x \quad \text{در فاصله } (-\pi, \pi) - 2950$$

$$f(x) = x \cos x \quad \text{در فاصله } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - 2951$$

توابع دوره‌ای زیر را بسری فوریه بسط دهید :

$$f(x) = \text{sgn}(\cos x) - 2952$$

$$f(x) = \text{arc sin}(\sin x) - 2953$$

$$f(x) = \text{arc sin}(\cos x) - 2954$$

$$f(x) = x - [x] - 2955$$

$f(x) = (x)$ تا نزدیکترین عدد درست است . - 2956

$$f(x) = |\sin x| - 2957$$

$$f(x) = |\cos x| - 2958$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \quad (|\alpha| < 2) - 2959$$

۲۹۶۰ - تابع زیر را بسری فوريه بسط دهيد :

$$f(x) = \sec x \quad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right)$$

راهنمايي - رابطه بين ضرايب a_n و a_{n-2} را بيابيد .

۲۹۶۱ - مطلوبست بسط تابع $f(x) = x^2$ بسري فوريه : الف) بر حسب

کوسينوس کمانهاي داراي مضرب مشترک ؛ ب) بر حسب سينوس

کمانهاي داراي مضرب مشترک ؛ پ) در فاصله $(0, 2\pi)$.

نمودار تابع و نمودارهاي مجموع سريهاي فوريه را در حالتهاي الف)،

ب) و پ) رسم کنيد .

با استفاده از اين بسطها مجموع سريهاي زیر را پيدا کنيد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

۲۹۶۲ - با انتگرال گيري جمله به جمله از بسط

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi)$$

بسط توابع x^2 ، x^3 ، x^4 بسري فوريه را در فاصله $(-\pi, \pi)$ بدست آوريد .

۲۹۶۳ - تساوي لياپونوف را براي تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{بازاي } |x| < \alpha \\ 0, & \text{بازاي } \alpha < |x| < \pi \end{cases}$$

بنويسيد .

از روی تساوي لياپونوف مجموعهاي سري زیر را پيدا کنيد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2}$$

۲۹۶۴ - تابع

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{اگر } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

را به سري فوريه بسط دهيد .

با استناد از دستوره‌ای

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} (t + \bar{t}), \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}i} (t - \bar{t})$$

که در آن $t = e^{ix}$ و $t = e^{-ix}$ بسط توابع زیر بسری فوریه را بدست آورید :

$$\cos^m x - 2965 \quad (m \text{ عدد درست مثبتی است})$$

$$\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1) - 2966$$

$$\frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1) - 2967$$

$$\frac{1 - q \cos x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1) - 2968$$

$$\ln(1 - 2q \cos x + q^2) \quad (|q| < 1) - 2969$$

توابع ناگراندار [دوره‌ای زیر را] بسری فوریه بسط دهید :

$$f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| - 2970$$

$$f(x) = \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| - 2971$$

$$f(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - 2972$$

- 2973 - مطلوبست بسط تابع زیر بسری فوریه :

$$f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|} dt \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

- 2974 - تابع‌های

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (0 \leq s \leq a)$$

را که نمایشگر پارامتری دور گرد مربع است : $0 < x < a$ ، $0 < y < a$.
که در آن s طول کمان حساب شده از نقطه $(0, 0)$ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد به سری فوریه بسط دهید .

- 2975 - تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر مفروض در فاصله $(0, \frac{\pi}{4})$ را چگونه باید

در فاصله $(-\pi, \pi)$ ادامه داد تا بسط آن بسری فوریه بشکل زیر باشد :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

۲۹۷۶- تابع $f(x)$ انتگرال پذیر مفروض در فاصله $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ را چگونه باید در فاصله $(-\pi, \pi)$ ادامه داد تا بسط آن بسری فوریه بشکل زیر باشد :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

۲۹۷۷- تابع

$$f(x) = x \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

را در فاصله $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ بسط دهید :

الف) بر حسب کوسینوس قوس های فرد ؛
ب) بر حسب سینوس قوس های فرد .

نمودار مجموع سری های فوریه را برای حالت های الف) و ب) رسم کنید .

۲۹۷۸- تابع $f(x)$ پادوره ای (آنتیپریودیک) با دوره π است یعنی

$$f(x + \pi) = -f(x)$$

بسط این تابع بسری فوریه در فاصله $(-\pi, \pi)$ دارای چه ویژگی است ؟

۲۹۷۹- بسط تابع $f(x)$ بسری فوریه در فاصله $(-\pi, \pi)$ دارای چه ویژگی

است در صورتیکه $f(x + \pi) = f(x)$ ؟

۲۹۸۰- ضرایب فوریه a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) از تابع $y = f(x)$ با دوره

2π دارای چه ویژگی می باشند در صورتیکه نمودار تابع :

الف) در نقاط $(0, 0)$ ، $\left(\pm \frac{\pi}{2}, 0\right)$ مرکز تقارن داشته باشد ؛

ب) دارای مرکز تقارن در مبدأ مختصات و محورهای تقارن $x = \pm \frac{\pi}{2}$

باشد ؟

۲۹۸۱- بین ضرایب فوریه α_n, β_n و a_n, b_n در توابع

$\varphi(x)$ ، $\psi(x)$ چه روابطی وجود دارد اگر

$$\varphi(-x) = \psi(x)$$

باشد ؟

۲۹۸۲- بین ضرایب فوریه $(a = 0, 1, 2, \dots)$ و α_n, β_n و a_n, b_n در توابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ چه روابطی وجود دارد اگر

$$\varphi(-x) = -\psi(x)$$

باشد ؟

۲۹۸۳- با دانستن ضرایب فوریه $(n = 0, 1, 2, \dots)$ در توابع انتگرال پذیر $f(x)$ بدوره، 2π ، مطلوبست محاسبه ضرایب فوریه $f(x+h)$ «جابجا شده» در تابع \bar{a}_n, \bar{b}_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ $(h = \text{ثابت})$

۲۹۸۴- با دانستن ضرایب فوریه $(a = 0, 1, 2, \dots)$ در تابع انتگرال پذیر $f(x)$ به دوره 2π ، مطلوبست محاسبه ضرایب فوریه A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ در تابع استکوف

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi$$

۲۹۸۵- فرض کنیم $f(x)$ تابع پیوسته‌ای با دوره 2π و a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ ضرایب فوریه آن باشند. مطلوبست محاسبه ضرایب فوریه A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ در تابع تاییده

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt$$

با استفاده از نتیجه بدست آمده تساوی لیاپونوف را بدست آورید.

بخش ۷ - جمع کردن سری‌ها

بند ۱ - جمع کردن مستقیم. اگر

$$u_n = v_{n+1} - v_n \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_\infty$$

در آنصورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1$$

بویژه اگر

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}}$$

که در آن اعداد a_i ($i = 1, 2, \dots$) تصاعد حسابی با قدر نسبت d را تشکیل میدهند در آنصورت

$$v_n = -\frac{1}{md} \times \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+m-1}}$$

در بعضی موارد سری مطلوب بصورت ترکیب خطی سری های معلوم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

و غیره ارائه می شود.

بند ۲- روش آبل. اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد در آنصورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

مجموع سری تام $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در حالات ساده بکمک مشتق گیری و یا انتگرال گیری جمله به جمله بدست می آید.

بند ۳- جمع کردن سری های مثلثاتی. برای پیدا کردن مجموع سری های

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin x$$

معمولا آنها را بترتیب بعنوان بخش حقیقی و ضریب بخش سوهومی مجموع سری

تام $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ که در آن $z = e^{ix}$ در حوزه مختلط در نظر میگیرند.

سری زیر در اغلب موارد در این مرحله مفید است :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}$$

مطلوبست محاسبه مجموع سری های زیر :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots - 2986$$

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots - 2987$$

$$\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} + \dots - 2988$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} - 2989$$

$$(m \text{ عدديست طبيعي}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} - 2990$$

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6 \times 7} + \dots - 2991$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma}(n+1)^{\gamma}} - 2997$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma-1}} - 2997$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma}(n+1)^{\gamma}(n+2)^{\gamma}} - 2998$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^{\gamma}(n+1)^{\gamma}} - 2997$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} - 2999$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} - 2994$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\gamma} + n - 2} - 3000$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\gamma}}{n!} - 2995$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!} - 2996$$

3001 - هرگاه $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ ، مطلوبست محاسبهٔ مجموع سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$$

مجموع سری‌های زیر را پیدا کنید :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{\gamma}}{(n+1)!} x^n - 3002$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\gamma} + 1}{2^n n!} x^n - 3002$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n+1)!} - 3005 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n! + 1)}{(2n)!} x^{2n} - 3004$$

بیاری مشتق گیری جمله به جمله ، مجموع سری های زیر را پیدا کنید :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - 3008 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - 3006$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)} - 3007$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d) \dots [a+(n-1)d]}{d \times 2d \dots nd} x^n \quad (d > 0) - 3009$$

راهنامه‌ی - مشتق سری را در $1-x$ ضرب کنید.

$$\frac{1}{3} \frac{x}{2} + \frac{1 \times 4}{3 \times 6} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1 \times 4 \times 7}{3 \times 6 \times 9} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots - 3010$$

بکمک انتگرال گیری جمله به جمله ، مجموع سری های زیر را پیدا کنید :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) x^{2n}}{n!} - 3013 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} - 3011$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) x^n - 3012$$

با استفاده از روش آبل مجموع سری های زیر را پیدا کنید :

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots - 3014$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \dots - 3015$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} + \dots - 3016$$

$$1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1 \times 2}{2 \times 4} \times \frac{1}{6} + \dots - 3017$$

مجموع سری‌های مثلثاتی زیر را پیدا کنید :

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^{\gamma-1}} - 3023$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - 3018$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^{\gamma}} - 3024$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} - 3019$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)} - 3025$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na \sin nx}{n} - 3020$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} - 3026 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{\gamma} na \sin nx}{n} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{\gamma} \right) - 3021$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} - 3022$$

3027 - منحنی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \times \sin ny}{n^{\gamma}} = .$$

را رسم کنید .

مجموع سری‌های زیر را پیدا کنید :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^{\gamma}}{(2n)!} x^n - 3029$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^{\gamma}}{(2n)!} (2x)^{2n} - 3028$$

$$\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots - 3030$$

$$\frac{a_1}{a_{\gamma} + x} + \frac{a_1}{a_{\gamma} + x} \times \frac{a_2}{a_{\gamma} + x} + \dots - 3031$$

بشرطیکه $x > 0$, $(n = 1, 2, \dots)$, $a_n > 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ واگرا باشد .

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots - 3032$$

در صورتیکه الف) $|x| < 1$ ؛ ب) $|x| > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} + 1}{(1-x^{2n})(1-x^{2n+1})} - 3033$$

در صورتیکه الف) $|x| < 1$ ؛ ب) $|x| > 1$.

بخش ۸ - پیدا کردن انتگرالهای معین بکمک سری

بکمک بسط توابع تحت انتگرال به سری، مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر :

$$\int \frac{\ln(1+x)}{x} dx - 3036$$

$$\int \ln \frac{1}{1-x} dx - 3034$$

$$\int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx - 3035$$

$$\int x^{p-1} \ln(1-x^q) dx \quad (p > 0, q > 0) - 3037$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} - 3040$$

$$\int \ln x \times \ln(1-x) dx - 3038$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{e^{\sqrt{\pi}x} - 1} - 3039$$

۳۰۴۱ - انتگرال الیبتیک کامل نوع اول

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

را بر حسب توانهای درست مثبت مدول k ($0 \leq k < 1$) بسط دهید .
۳۰۴۲ - انتگرال الیبتیک کامل نوع دوم

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

را بر حسب توانهای درست مثبت مدول k ($0 \leq k < 1$) بسط دهید .
۳۰۴۳ - طول قوس بیضی

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

را بیاری سری تنظیمی بر حسب توانهای درست مثبت خروج از مرکز بیان کنید

مطلوبست اثبات تساویهای زیر :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} - 3044$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^y} \sin ax \, dx = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1} - 3045$$

$$\int_0^{y\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \, dx = \frac{\pi}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) - 3046$$

مطلوبست محاسبه :

$$\int_0^{y\pi} e^{a \cos x} \cos(a \sin x - nx) \, dx - 3047$$

(n عددیست طبیعی)

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin \alpha}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} \, dx - 3048$$

راهنمایی - مسأله 2864 را ببینید.

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) \, dx - 3049$$

3050 - مطلوبست اثبات دستور

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} \, dx = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}} \quad (1)$$

که در آن $0 < \theta_n < 1$ و $a > 0$.

اگر در دستور (1) دو جمله اختیار شود انتگرال

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} \, dx$$

با چه تقریبی بیان می‌شود ؟

بند ۱ - همگرایی حاصل ضرب . حاصل ضرب نامتناهی

$$p_1 p_2 \dots p_n \dots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad (1)$$

را وقتی همگرا ناسند که حد ستاهی و مخالف صفر زیر وجود داشته باشد :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$$

اگر $P = 0$ و هیچیک از عوامل p_n برابر صفر نباشد در آنصورت حاصل ضرب (۱) را واگرا بسمت صفر ناسند ؛ در حالت خلاف حاصل ضرب به همگرا بسمت صفر موسوم است .

همگرایی حاصل ضرب (۱) هم ارز همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n \quad (2)$$

است . شرط لازم همگرایی چنین است :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$$

اگر $p_n = 1 + \alpha_n$ ($n = 1, 2, \dots$) و α_n علامت عوض نکند در آنصورت برای همگرایی حاصل ضرب (۱) لازم و کافی است که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1) \quad (3)$$

همگرا باشد .

در حالت کلی وقتی که α_n علامت ثابتی را حفظ نکند و سری (۳) همگرا باشد حاصل ضرب (۱) با سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2$$

متفقاً همگرا یا واگرا بسمت صفر می باشد .

بند ۲ - همگرایی مطلق. حاصل ضرب (۱) همگرایی مطلق یا همگرایی مشروط (نا مطلق) نامیده می شود بر حسب آنکه سری (۲) همگرایی مطلق یا همگرایی مشروط باشد. شرط لازم و کافی همگرایی مطلق حاصل ضرب (۱) عبارتست از همگرایی مطلق سری (۳).

بند ۳ - بسط توابع به حاصل ضرب های نامتناهی. برای $-\infty < x < +\infty$ بسط های زیر را داریم:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right), \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right]$$

بخصوص از عبارت سینوس برای $x = \frac{\pi}{2}$ دستور وایس بدست می آید:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n}{2n+1}$$

تساوی های زیر را ثابت کنید:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right] = 2 - 3004$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2} - 3001$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi} - 3000$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{2}{3} - 3002$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x} - 3006$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3} - 3003$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x} - 3007$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) - 3008$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots - 3009$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n}{2n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - 3010$$

مطلوبست اثبات همگرایی و تعیین مقدار حاصل ضرب‌های نامتناهی زیر :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)} - 3063 \qquad \prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1} - 3061$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} a \frac{(-1)^n}{n} \quad (a > 0) - 3064 \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right] - 3062$$

۳۰۶۵ - آیا از همگرایی حاصل ضرب‌های $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ و $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ همگرایی حاصل

ضرب‌های زیر نتیجه می‌شود :

$$? \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} \quad (ت) \quad ; \quad \prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n \quad (پ) \quad ; \quad \prod_{n=1}^{\infty} p_n^2 \quad (ب) \quad ; \quad \prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n) \quad (الف)$$

همگرایی حاصل ضرب‌های نامتناهی زیر را بررسی کنید :

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) - 3069 \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - 3066$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{(n^2-1)^p}{(n^2+1)^p} - 3070 \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} - 3067$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p} \right) - 3068$$

$$n \geq n_0. \quad \text{که در آن } n^2 + an + b > 0. \quad \text{بازای } \prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^2 + a_1 n + b_1}{n^2 + an + b} - 3071$$

$$n_0 > b_i \quad \text{که در آن } \prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\dots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\dots(n-b_p)} - 3072$$

($i = 1, 2, \dots, p$)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} - 3075$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}} - 3073$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n} - 3076$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n^2]{n+1}} - 3074$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} - 3077$$

$$c > 0 \text{ در آن } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{n}} - 3087$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q} - 3083$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) - 3079$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p - 3084$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^d}\right) - 3080$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n} - 3085$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right] - 3081$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[n]{x}\right) e^{\frac{x}{\sqrt[n]{n}} + \frac{x^2}{2n^2}} - 3082$$

3086 - ثابت کنید که حاصل ضرب $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ وقتی همگرا است که سری

$$\prod_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ همگرا باشد.}$$

3087 - ثابت کنید که حاصل ضرب $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n\right)$ ($|\alpha_n| < \frac{\pi}{4}$)

وقتی همگرا است که سری $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد.

همگرایی مطلق و شروط حاصل ضرب‌های نامتناهی زیر را بررسی کنید :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right] - 3090$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right] - 3088$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\ln n}\right] - 3091$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}\right] - 3089$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}} - ۳۰۹۴ \qquad \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+(-1)^n}} - ۳۰۹۲$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right] - ۳۰۹۵ \qquad \prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} - ۳۰۹۳$$

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt[1]{1}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt[2]{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right) \times -۳۰۹۶$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{\sqrt[5]{5}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt[6]{6}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt[7]{7}}\right) \dots$$

$$\left(1 + \frac{1}{1^a}\right) \left(1 - \frac{1}{2^a}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^a}\right) \left(1 + \frac{1}{4^a}\right) \left(1 - \frac{1}{5^a}\right)^2 \times -۳۰۹۷$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{6^a}\right) \dots$$

۳۰۹۸ - نشان دهید که حاصل ضرب

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt[2]{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt[2]{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) \dots$$

همگرا است با اینکه سری

$$\left(\frac{1}{\sqrt[2]{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt[2]{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) + \dots$$

واگرا است.

۳۰۹۹ - نشان دهید که حاصل ضرب $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ که در آن

$$\alpha_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt[k]{k}}, & \text{اگر } n = 2k - 1 \\ \frac{1}{\sqrt[k]{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt[k]{k}}, & \text{اگر } n = 2k \end{cases}$$

همگرا است با اینکه سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ و $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n$ واگرا می‌باشند.

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(تابع زتای ریمان) و $p_n (n = 1, 2, \dots)$ اعداد اول متوالی باشد. ثابت کنید که

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x)$$

۳۱۰۰ - ثابت کنید که حاصل ضرب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^{-1}$$

و سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

که در آن $p_n (n = 1, 2, \dots)$ اعداد اول متوالی است و اگر می‌باشند (اولر).
۳۱۰۲ - هرگاه $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ و

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0)$$

ثابت کنید که

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

راه‌نمایی -

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^p = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$$

را در نظر بگیرید.

۳۱۰۳ - بیاری دستور والیس ثابت کنید که

$$\frac{1 \times 2 \times 5 \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \dots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$a_n = \frac{n! e^n}{n + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}}$$

بازای $n \rightarrow \infty$ دارای حد مخالف صفر A می باشد.
از اینجا دستور استیرلینگ را نتیجه بگیرید :

$$n! = A n^{n + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} e^{-n} (1 + \varepsilon_n)$$

که در آن $A = \sqrt{2\pi}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$

راهنمایی - حد مطلوب را بشکل حاصل ضرب نامتناهی

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

در آورید .

برای تعیین مقدار ثابت A از دستور والیس استفاده کنید .

۳۱۰۵ - اولر تابع گامای $\Gamma(x)$ را با دستور زیر تعریف کرده است :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

از روی این دستور : الف) تابع $\Gamma(x)$ را بشکل حاصل ضرب نامتناهی نمایش دهید ؛ ب) نشان دهید که تابع $\Gamma(x)$ بازای جمیع مقادیر حقیقی x جز اعداد درست منفی دارای معناست ؛ پ) ویژگی زیر را بدست آورید :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

ت) مقدار $\Gamma(n)$ را که در آن n عدد درست مثبتی باشد بدست آورید .

۳۱۰۶ - هرگاه تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ انتگرال ویژه پذیر باشد و

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, \quad f_{in} = f(a + i\delta_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in}) e^{-\int_a^b f(x) dx}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{t=1}^{n-1} (a+ib)}}{\sum_{i=1}^{n-1} (a+ib)} = \frac{2}{e}$$

که در آن $a > 0$ و $b > 0$.

۳۱۰۸ - فرض کنیم $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) روی فاصله (a, b) توابعی

باشند پیوسته و $|f_n(x)| \leq c_n$ ($n = 1, 2, \dots$) که در آن سری $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

همگرا است.

ثابت کنید که تابع

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

روی فاصله (a, b) پیوسته است.

۳۱۰۹ - عبارت مشتق تابع

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

را پیدا کنید. شرط کافی وجود $F'(x)$ کدام است؟

۳۱۱۰ - ثابت کنید که اگر $x < y$ در آن صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1) \dots (x+n)}{y(y+1) \dots (y+n)} = 0$$

بخش ۱۵ - دستور استیرلینگ

برای محاسبه $n!$ بازای مقادیر بزرگ n دستور استیرلینگ مفید است:

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} + \frac{\theta_n}{12n} \quad (0 < \theta_n < 1)$$

با استفاده از دستور استیرلینگ مطلوبست محاسبه تقریبی:

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \dots 99}{2 \times 4 \times 6 \dots 100} \approx 3113$$

$$3111 - \lg 100!$$

$$3112 - 1 \times 3 \times 5 \dots 1999$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^{50} dx - 3116 \quad C_{10}^{50} - 3114$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx - 3117 \quad \frac{100!}{20!30!50!} - 3115$$

۳۱۱۸- برای حاصل ضرب زیر دستور مجانبی پیدا کنید :

$$(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \dots (2n-1)$$

۳۱۱۹- مطلوبست محاسبه تقریبی C_{2n}^n برای مقادیر بزرگ n .

۳۱۲۰- با استفاده از دستور استیرلینگ حدهای زیر را پیدا کنید :

$$\begin{aligned} \text{پ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{(2n-1)!!}} & \quad \text{الف) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!} \\ \text{ت) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n} & \quad \text{ب) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \end{aligned}$$

بخش ۱۱ - تقریب توابع پیوسته بیاری چندجمله‌ای

بند ۱ - دستور انترپولاسیون (درون‌یابی) لاگرانژ. چندجمله‌ای لاگرانژ

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)} y_i$$

دارای ویژگی $P_n(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) می‌باشد.

بند ۲ - چندجمله‌ای‌های برنشتین. اگر $f(x)$ روی قطعه $[0, 1]$ تابع پیوسته‌ای باشد در آنصورت چندجمله‌ای‌های برنشتین

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

روی قطعه $[0, 1]$ برای $n \rightarrow \infty$ بطور یکنواخت بسط تابع $f(x)$ همگرا می‌باشند.

۳۱۲۱- چندجمله‌ای P_n با حتمین توان n که n را با در نظر گرفتن دستگاه مقادیر مفروض زیر تشکیل دهید:

x	-۲	۰	۴	۵
y	۵	۱	-۳	۱

$P_n(-1)$ ، $P_n(1)$ ، $P_n(6)$ بطور تقریبی چقدر می‌باشند؟

۳۱۲۲- معادله سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرنده بر ۳ نقطه $A(x_0 - h, y_{-1})$ ، $B(x_0, y_0)$ ، $C(x_0 + h, y_1)$ را بنویسید.

۳۱۲۳- برای استخراج تقریبی ریشه $y = \sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 100$) با استفاده

از مقادیر $x_0 = 1$ ، $y_0 = 1$ ؛ $x_1 = 25$ ، $y_1 = 5$ ؛

$x_2 = 100$ ، $y_2 = 10$ دستوری بیابید.

۳۱۲۴- دستور تقریبی بصورت

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3 \quad (0 \leq x \leq 90^\circ)$$

را با استفاده از مقادیر

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 90^\circ = 1$$

نتیجه بگیرید.

با استفاده از این دستور

$$\sin 20^\circ, \quad \sin 40^\circ, \quad \sin 80^\circ$$

را بطور تقریبی پیدا کنید.

۳۱۲۵- برای تابع $f(x) = |x|$ روی قطعه $[-1, 1]$ با اختیار نقطه‌های گرهی

$x = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ چندجمله‌ای انترپولاسیونی لاگرانژ را تشکیل

دهید.

۳۱۲۶- با عوض کردن تابع $y(x)$ با چندجمله‌ای لاگرانژ مطلوبست محاسبه

تقریبی

$$\int_0^1 y(x) dx$$

که در آن

x	۰	۰,۵	۱	۱,۵	۲
$y(x)$	۵	۴,۵	۳	۲,۵	۰

۳۱۲۷ - چندجمله‌ای برنشتین $B_n(x)$ را روی قطعه $[0, 1]$ برای توابع x ، x^2 ، x^3 تشکیل دهید .

۳۱۲۸ - دستور چندجمله‌ای‌های $B_n(x)$ برنشتین را برای تابع $f(x)$ روی قطعه مفروض $[a, b]$ بنویسید .

۳۱۲۹ - تابع $f(x) = \frac{|x|+x}{2}$ را روی قطعه $[-1, 1]$ بوسیله چندجمله‌ای برنشتین $B_4(x)$ تقریب کنید .

نمودار توابع $y = \frac{|x|+x}{2}$ و $y = B_4(x)$ را رسم کنید .

۳۱۳۰ - تابع $f(x) = |x|$ را بازای $-1 \leq x \leq 1$ بوسیله چندجمله‌ای‌های برنشتین مرتبه‌های زوج تقریب کنید .

۳۱۳۱ - چندجمله‌ای برنشتین $B_n(x)$ را برای تابع زیر بنویسید :

$$f(x) = e^{kx} \quad (a \leq x \leq b)$$

۳۱۳۲ - چندجمله‌ای $B_n(x)$ را برای تابع $f(x) = \cos x$ روی قطعه $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ حساب کنید .

۳۱۳۳ - ثابت کنید که $|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ روی قطعه $[-1, 1]$ که در آن

$$P_n(x) = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{i=2}^n \frac{1 \times 3 \dots (2i-3)}{2 \times 4 \dots (2i)} (1-x^2)^i$$

و $f(x) \in C[a, b]$ فرض کنیم

$$M_k = \int_a^b x^k f(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

ثابت کنید که $f(x) \equiv 0$ بازای $x \in [a, b]$

راهنمایی - از قضیه ویرشتراس در باره تقریب توابع پیوسته بوسیله چندجمله‌ای‌ها استفاده کنید .

۳۱۳۴- فرض کنیم $f(x)$ بازای $-\pi \leq x \leq \pi$ تابعی باشد پیوسته و
 ضرایب فوریه^{*} آن باشند. ثابت کنید
 که چندجمله‌ای‌های مثلثاتی فهیر

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

روی فاصله^{*} $(-\pi, \pi)$ بطور یکنواخت بطرف تابع $f(x)$ همگرا هستند.
 ۳۱۳۵- چندجمله‌ای فهیر $\sigma_{2n-1}(x)$ را برای تابع

$$f(x) = |x| \quad \text{بازای} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

تشکیل دهید.

قسمت دوم

توابع چند متغیره

فصل ۶

حساب دیفرانسیل توابع یک متغیره

بخش ۱ - حد تابع . پیوستگی

بند ۱ - حد تابع . هرگاه تابع $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در مجموعه E که دارای نقطه^{*} تجمع P_0 است معین باشد گوئیم که

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

اگر برای هر عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ عدد $\delta = \delta(\varepsilon, P_0) > 0$ وجود داشته باشد بطوری که

$$|f(P) - A| < \varepsilon$$

اگر $P \in E$ و $0 < \rho(P, P_0) < \delta$. که در آن $\rho(P, P_0)$ فاصله بین دو نقطه^{*} P و P_0 میباشد .

بند ۲ - پیوستگی . تابع $f(P)$ را در نقطه^{*} P_0 پیوسته نامند هر گاه

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$$

تابعی که در جمیع نقاط یک حوزه پیوسته باشد در آن حوزه پیوسته است .
بند ۳ - پیوستگی یکنواخت . تابع $f(P)$ را در حوزه^{*} G وقتی پیوسته^{*} یکنواخت

نامند که بازای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ که فقط به ε بستگی دارد وجود داشته باشد بطوری که برای هر دو نقطه^{*} P' و P'' از G ، ناساوی

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon$$

بازای $\rho(P', P'') < \delta$ برقرار میباشد .

هر تابعی که در یک حوزه بسته و کران دار پیوسته باشد، در این حوزه پیوسته^{*} یکنواخت است .

حوزه وجود توابع زیر را تعیین کنید :

$$\begin{aligned}
 u &= \arcsin \frac{y}{x} - ۳۱۴۴ & u &= x + \sqrt{y} - ۳۱۳۶ \\
 u &= \arcsin \frac{x}{x+y} - ۳۱۴۵ & u &= \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1} - ۳۱۳۷ \\
 u &= \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y) - ۳۱۴۶ & u &= \sqrt{1-x^2-y^2} - ۳۱۳۸ \\
 u &= \sqrt{\sin(x^2+y^2)} - ۳۱۴۷ & u &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} - ۳۱۳۹ \\
 u &= \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} - ۳۱۴۸ & u &= \sqrt{(x^2+y^2-1)(-x^2-y^2)} - ۳۱۴۰ \\
 u &= \ln(xyz) - ۳۱۴۹ & u &= \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}} - ۳۱۴۱ \\
 u &= \ln(-1-x^2-y^2+z^2) - ۳۱۵۰ & u &= \sqrt{1-(x^2+y^2)^2} - ۳۱۴۲ \\
 & & u &= \ln(-x-y) - ۳۱۴۳
 \end{aligned}$$

خطهای تراز هر یک از توابع زیر را رسم کنید :

$$\begin{aligned}
 z &= |x| + y - ۳۱۵۸ & z &= x + y - ۳۱۵۱ \\
 z &= |x| + |y| - |x+y| - ۳۱۵۹ & z &= x^2 + y^2 - ۳۱۵۲ \\
 z &= \min(x, y) - ۳۱۵۹, ۱ & z &= x^2 - y^2 - ۳۱۵۳ \\
 z &= \max(|x|, |y|) - ۳۱۵۹, ۲ & z &= (x+y)^2 - ۳۱۵۴ \\
 z &= \min(x^2, y) - ۳۱۵۹, ۳ & z &= \frac{y}{x} - ۳۱۵۵ \\
 z &= e^{\frac{2x}{x^2+y^2}} - ۳۱۶۰ & z &= \frac{1}{x^2+2y^2} - ۳۱۵۶ \\
 z &= x^y \quad (x > 0) - ۳۱۶۱ & z &= \sqrt{xy} - ۳۱۵۷ \\
 z &= x^y e^{-x} \quad (x > 0) - ۳۱۶۲ & z &= \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}} \quad (a > 0) - ۳۱۶۳ \\
 z &= \arctg \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2} \quad (a > 0) - ۳۱۶۴ \\
 z &= \operatorname{sgn}(\sin x \sin y) - ۳۱۶۵
 \end{aligned}$$

سطوح تراز هر یک از توابع زیر را بدست آورید :

$$\begin{aligned}
 u &= x^2 + y^2 - z^2 - ۳۱۶۸ & u &= x + y + z - ۳۱۶۶ \\
 u &= (x+y)^2 + z^2 - ۳۱۶۹ & u &= x^2 + y^2 + z^2 - ۳۱۶۷ \\
 u &= \operatorname{sgn} \sin(x^2 + y^2 + z^2) - ۳۱۷۰
 \end{aligned}$$

خصوصیت سطوحی را که با معادلات زیر تعریف شده اند بررسی کنید :

$$z = f\left(\frac{y}{y}\right) - ۳۱۷۴$$

$$z = f(y - ax) - ۳۱۷۱$$

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) - ۳۱۷۲$$

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) - ۳۱۷۳$$

۳۱۷۵ - نمودار تابع

$$F(t) = f(\cos t, \sin t)$$

را که در آن

$$f(x, y) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } y \geq x \\ ۰, & \text{اگر } y < x \end{cases}$$

رسم کنید .

۳۱۷۶ - مطلوبست محاسبه*

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad \text{اگر } f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

۳۱۷۷ - مطلوبست $f(x)$

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (x > ۰) \quad \text{اگر}$$

۳۱۷۸ - با فرض

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - ۱)$$

مطلوبست توابع f و z در صورتیکه $z = x$ بازای $y = ۱$.

۳۱۷۹ - با فرض

$$z = x + y + f(x - y)$$

مطلوبست توابع f و z در صورتیکه $z = x^2$ بازای $y = ۰$.

۳۱۸۰ - مطلوبست محاسبه*

$$f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2 \quad \text{اگر } f(x, y)$$

۳۱۸۱ - نشان دهید که برای تابع

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

داریم :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = +\infty \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = -\infty$$

در صورتیکه $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y)$ وجود ندارد .

۳۱۸۲ - نشان دهید که برای تابع

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

داریم :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = 0$$

با این وجود ، $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y)$ وجود ندارد .

۳۱۸۳ - نشان دهید که برای تابع

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

هر دو حد مکرر $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right\}$ و $\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) \right\}$ وجود ندارند معینا

$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = 0$ وجود دارد .

۳۱۸۳،۱ - آیا حد زیر وجود دارد :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

۳۱۸۳،۲ - حد تابع

$$f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$$

در طول شعاع دلخواه

$$x = t \cos \alpha, \quad y = t \sin \alpha \quad (0 < t < +\infty)$$

بازای $t \rightarrow +\infty$ چقدر است ؟

آیا میتوان این تابع را بازای $x \rightarrow \infty$ و $y \rightarrow \infty$ بی نهایت کوچک

نامید ؟

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right\} \quad \text{و} \quad \lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right\}$$

در هر یک از حالات زیر :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \quad a = \infty, \quad b = \infty \quad (\text{الف})$$

$$f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}, \quad a = \infty, \quad b = +0 \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x+y}, \quad a = \infty, \quad b = \infty \quad (\text{پ})$$

$$f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}, \quad a = 0, \quad b = \infty \quad (\text{ت})$$

$$f(x, y) = \log_x(x+y), \quad a = 1, \quad b = 0 \quad (\text{ث})$$

مطلوبست محاسبه حد مضاعف توابع زیر :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{xy} - 3189$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} - 3185$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow + \\ y \rightarrow +}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} - 3190$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} - 3186$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}} - 3191$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x} - 3187$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 3192$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)} - 3188$$

۳۱۹۳ - در چه امتدادهایی از φ حدود متناهی

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{x^2 - y^2} \times \sin 2xy \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}} \quad (\text{الف})$$

بازای $x = \rho \cos \varphi$ و $y = \rho \sin \varphi$ وجود دارد ؟

نقاط انفصال توابع زیر را پیدا کنید :

$$u = \frac{x+y}{x^2 + y^2} - 3196$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 3194$$

$$u = \sin \frac{1}{xy} - 3197$$

$$u = \frac{xy}{x+y} - 3195$$

$$u = \frac{1}{xyz} - ۳۲۰۰$$

$$u = \frac{1}{\sin x \sin y} - ۳۱۹۸$$

$$u = \ln(1 - x^2 - y^2) - ۳۱۹۹$$

$$u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} - ۳۲۰۱$$

۳۲۰۲ - نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{اگر } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{اگر } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

بطور جداگانه نسبت به هر یک از متغیرهای x و y پیوسته است (در صورتیکه یکی متغیر و دیگری ثابت فرض شود) ولی نسبت به هر دو متغیر توأمآ پیوسته نیست.

۳۲۰۳ - نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{اگر } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{اگر } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

در نقطه $O(0, 0)$ در طول هر شعاع

$$x = t \cos \alpha, \quad y = t \sin \alpha \quad (0 \leq t < +\infty)$$

مار بر این نقطه پیوسته است یعنی

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0)$$

وجود دارد. معهداً تابع در نقطه $(0, 0)$ پیوسته نیست.

۳۲۰۳، ۱ - پیوستگی یکنواخت تابع خطی

$$u = 2x - 2y + 0$$

را در صفحه نامتناهی $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ بررسی کنید.

۳۲۰۳، ۱ - پیوستگی یکنواخت تابع زیر را در صفحه $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$

بررسی کنید:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

۳۲۰۳، ۳ - آیا تابع زیر در حوزه $x^2 + y^2 < 1$ پیوسته یکنواخت است:

$$f(x, y) = \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$$

$$u = \arcsin \frac{x}{y}$$

مفروض است. آیا این تابع در حوزهٔ تعریف خودش E پیوسته است؟
 آیا تابع u در حوزهٔ E پیوستهٔ یکنواخت است؟

۳۲۰۴ - ثابت کنید که مجموعهٔ نقاط انفصال تابع $f(xy) = x \sin \frac{1}{y}$ اگر $y \neq 0$ و $f(x, 0) = 0$ ، بسته نیست.

۳۲۰۵ - ثابت کنید اگر تابع $f(x, y)$ در یک حوزهٔ G نسبت به متغیر x پیوسته و بطور یکنواخت نسبت به x ، نسبت به متغیر y پیوسته باشد در اینصورت تابع در حوزهٔ مفروض پیوسته است.

۳۲۰۶ - ثابت کنید اگر تابع $f(x, y)$ در یک حوزهٔ G نسبت به متغیر x پیوسته و نسبت به متغیر y صادق در شرط لیشیتس باشد یعنی

$$|f(x, y') + f(x, y'')| \leq L |y' - y''|$$

که در آن $(x, y') \in G$ ، $(x, y'') \in G$ و L ثابت میباشد در اینصورت تابع در آن حوزه پیوسته است.

۳۲۰۷ - ثابت کنید که اگر تابع $f(x, y)$ بطور جداگانه نسبت به هر یک از متغیرهای x و y پیوسته و نسبت ییکی از آنها یکنواخت باشد در اینصورت این تابع نسبت به مجموعهٔ متغیرها پیوسته میباشد (قضیهٔ یانگ)

۳۲۰۸ - فرض کنیم تابع $f(x, y)$ در حوزهٔ $a \leq x \leq A$ و $b \leq y \leq B$ پیوسته و دنبالهٔ توابع $(\varphi_n(x))$ ($n = 1, 2, \dots$) بطور یکنواخت روی $[a, A]$ همگرا و صادق در شرط $b \leq \varphi_n(x) \leq B$ باشد. ثابت کنید دنبالهٔ توابع

$$F_n(x) = f(x, \varphi_n(x)) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

نیز بطور یکنواخت روی $[a, A]$ همگرا است.

۳۲۰۹ - فرض کنیم (۱) تابع $f(x, y)$ در حوزهٔ $R(a < x < A; b < y < B)$ پیوسته باشد؛ (۲) تابع $\varphi(x)$ در فاصلهٔ (a, A) پیوسته و دارای مقادیری متعلق به فاصلهٔ (b, B) باشد. ثابت کنید که تابع

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

در فاصلهٔ (a, A) پیوسته است.

۳۲۱۰ - فرض کنیم: (۱) تابع $f(x, y)$ در حوزه $R (a < x < A; b < y < B)$ پیوسته باشد؛ (۲) توابع $x = \varphi(u, v)$ و $y = \psi(u, v)$ در حوزه $R' (a' < u < A'; b' < v < B')$ پیوسته و دارای مقادیری به ترتیب متعلق به فاصله‌های (a, A) و (b, B) باشد. ثابت کنید که تابع

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

در حوزه R' پیوسته است.

بخش ۲ - مشتق‌های جزئی. دیفرانسیل تابع

بند ۱ - مشتق‌های جزئی. نتیجه مشتق‌گیری جزئی تابع چند متغیره در صورتیکه تمام مشتقات جزئی داخل محاسبه پیوسته باشند مستقل از ترتیب مشتق‌گیری میباشد.

بند ۲ - دیفرانسیل تابع. اگر نمو کامل تابع $f(x, y, z)$ از متغیرهای مستقل x, y, z را بتوان بصورت

$$\Delta f(x, y, z) = A \Delta x + B \Delta y + C \Delta z + o(\rho)$$

در آورد که در آن A, B, C مستقل از $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ و $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ میباشد در اینصورت تابع $f(x, y, z)$ را در نقطه (x, y, z) دیفرانسیل پذیر نامند و بخش خطی اصلی نمو $A \Delta x + B \Delta y + C \Delta z$ مساوی

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z) dx + f'_y(x, y, z) dy + f'_z(x, y, z) dz \quad (۱)$$

که در آن $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$ دیفرانسیل این تابع نامیده میشود. هر گاه متغیرهای x, y, z توابع دیفرانسیل پذیر از متغیرهای مستقل باشند فرمول (۱) در آن حالت نیز ارزش خود را حفظ میکند. اگر x, y, z متغیرهای مستقلی باشند برای دیفرانسیل‌های مرتبه بالاتر فرمول نمادی زیر را داریم:

$$d^n f(x, y, z) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(x, y, z)$$

بند ۳ - مشتق تابع مرکب. اگر $w = f(x, y, z)$ که در آن $x = \varphi(u, v)$ و $y = \psi(u, v)$ و $z = \chi(u, v)$ توابع φ, ψ, χ دیفرانسیل پذیر باشند در اینصورت

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$

برای محاسبه مشتقات مرتبه دوم تابع w استفاده از فرمول‌های نمادی زیر مفید میباشد:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 w + \frac{\partial P_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial z}$$

و

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(P_2 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y} + R_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) w + \frac{\partial P_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial z}$$

که در آن

$$P_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad Q_1 = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad R_1 = \frac{\partial z}{\partial u}$$

و

$$P_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Q_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad R_2 = \frac{\partial z}{\partial v}$$

بند ۴ - مشتق در امتداد مفروض. اگر امتداد l در فضای $Oxyz$ بوسیله کسینوس‌های هادی $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ مشخص شده باشد و تابع $u = f(x, y, z)$ دیفرانسیل پذیر باشد در اینصورت مشتق در امتداد l از فرمول

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

محاسبه میشود. بزرگترین سرعت رشد تابع در نقطه مفروض از لحاظ مقدار و امتداد با بردار

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

تعریف میشود که گرادیان تابع است و قدر مطلق آن عبارتست از

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

۳۲۱۱- ثابت کنید که

$$f'_x(x, b) = \frac{d}{dx} [f(x, b)]$$

۳۲۱۲- مطلوبست محاسبه $f'_x(x, 1)$ اگر

$$f(x, y) = x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$$

۳۲۱۲،۱- مطلوبست محاسبه $f'_x(0, 0)$ و $f'_y(0, 0)$ اگر

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$$

آیا این تابع در نقطه $O(0, 0)$ دیفرانسیل پذیر است؟

۳۲۱۲،۲- آیا تابع زیر در نقطه $O(0, 0)$ دیفرانسیل پذیر است:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

۳۲۱۲،۳- دیفرانسیل پذیری تابع زیر را در نقطه $O(0, 0)$ بررسی کنید:

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} \quad \text{بازای } x^2 + y^2 > 0$$

و $f(0, 0) = 0$.

مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم هر یک از تابع های زیر را بدست

آورید:

$$u = x \sin(x+y) \quad - ۳۲۱۷$$

$$u = x^2 + y^2 - x^2 y^2 \quad - ۳۲۱۳$$

$$u = \frac{\cos x^y}{y} \quad - ۳۲۱۸$$

$$u = xy + \frac{x}{y} \quad - ۳۲۱۴$$

$$u = \text{tg} \frac{x^y}{y} \quad - ۳۲۱۹$$

$$u = \frac{x}{y^2} \quad - ۳۲۱۵$$

$$u = x^y \quad - ۳۲۲۰$$

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad - ۳۲۱۶$$

$$u = \ln(x+y^2) \quad - ۳۲۲۱$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - ۳۲۲۵$$

$$u = \left(\frac{x}{y}\right)^2 - ۳۲۲۶$$

$$u = x^{\frac{y}{z}} - ۳۲۲۷$$

$$u = x^{y^z} - ۳۲۲۸$$

$$u = \arctg \frac{y}{x} - ۳۲۲۲$$

$$u = \arctg \frac{x+y}{1-xy} - ۳۲۲۳$$

$$u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - ۳۲۲۴$$

۳۲۲۹ - تساوی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

را بازی

$$u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}} \quad (\text{پ}) \quad u = x^{y^z} \quad (\text{ب}) \quad u = x^2 - 2xy - 3y^2 \quad (\text{الف})$$

تحقیق کنید.

۳۲۳۰ - فرض کنیم

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{اگر } x^2 + y^2 \neq 0 \quad \text{و } f(0, 0) = 0$$

نشان دهید که

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$$

۳۲۳۰، ۱ - اگر

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{اگر } x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & \text{اگر } x = y = 0 \end{cases}$$

آیا $f''_{xy}(0, 0)$ وجود دارد؟

۳۲۳۱ - فرض کنیم $u = f(x, y, z)$ تابع همگن مرتبه n باشد. قضیه توابع

همگن اولر را برای هر یک از مثالهای زیر تحقیق کنید:

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{ب}) \quad u = (x - 2y + 3z)^2 \quad (\text{الف})$$

$$u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}} \quad (\text{پ})$$

۲۲۳۲- ثابت کنید که اگر تابع دیفرانسیل پذیر $u = f(x, y, z)$ صادق در معادله*

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = nu$$

باشد در اینصورت تابع همگن مرتبه n میباشد.
راهنمایی - تابع کمکی

$$F(t) = \frac{f(tx, ty, tz)}{t^n}$$

را در نظر بگیرید.

۲۲۳۳- ثابت کنید که اگر $f(x, y, z)$ تابع دیفرانسیل پذیر همگن مرتبه n باشد در آنصورت مشتقات جزئی $f_x(x, y, z)$ ، $f_y(x, y, z)$ ، $f_z(x, y, z)$ توابع همگن مرتبه $n-1$ میشوند.

۲۲۳۴- هر گاه $u = f(x, y, z)$ تابع دو بار دیفرانسیل پذیر همگن مرتبه n باشد ثابت کنید که

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u$$

مطلوبست محاسبه دیفرانسیل‌های مرتبه اول و دوم هر یک از توابع

زیر (x, y, z) متغیرهای مستقل میشوند):

$$u = e^{xy} \quad - 2239$$

$$u = x^m y^n \quad - 2235$$

$$u = xy + yz + zx \quad - 2240$$

$$u = \frac{x}{y} \quad - 2236$$

$$u = \frac{z}{x^2 + y^2} \quad - 2241$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad - 2237$$

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad - 2238$$

۲۲۴۲- مطلوبست محاسبه $df(1, 1, 1)$ و $d^2f(1, 1, 1)$ اگر

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

۲۲۴۳- نشان دهید اگر

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

در اینصورت $d^2u \geq 0$.

۳۲۴۴- فرض کنیم که x ، y از لحاظ قدر مطلق کوچک باشند. برای هر یک از عبارات زیر دستور تقریبی تشکیل دهید:

(الف) $(1+y)^n (1+x)^m$ ؛ (ب) $\ln(1+x) \times \ln(1+y)$ ؛
 (پ) $\text{arc tg} \frac{x+y}{1+xy}$

۳۲۴۵- اگر بجای نمو توابع، دیفرانسیل آنها را قرار دهیم مطلوبست محاسبه تقریبی هر یک از عبارات زیر:

(الف) $1,002 \times 2,003^2 \times 3,004^3$ ؛
 (ب) $\frac{1,02^2}{3 \sqrt[4]{1,05}}$ ؛
 (پ) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$ ؛
 (ت) $\sin 29^\circ \times \text{tg} 46^\circ$ ؛
 (ث) $0,97105$

۳۲۴۶- مستطیل باضلاع $x = 6$ m و $y = 8$ m مفروض است. اگر ضلع اول ۲ mm افزایش و ضلع دوم ۵ mm کاهش یابد قطر و مساحت آن چقدر تغییر میکنند؟

۳۲۴۷- زاویه مرکزی یک قطاع دایره $\alpha = 60^\circ$ را با اندازه $\Delta\alpha = 1^\circ$ زیاد میکنیم. شعاع $R = 20$ cm قطاع را چقدر کم کنیم تا سطح آن تغییر نکند؟

۳۲۴۸- ثابت کنید که خطای نسبی حاصل ضرب تقریباً مساوی مجموع خطاهای نسبی عوامل آن است.

۳۲۴۹- در اندازه گیری شعاع قاعده R و ارتفاع H استوانه نتایج زیر بدست آمده:

$$R = 2,5 \text{ m} \pm 0,1 \text{ m}; \quad H = 4,5 \text{ m} \pm 0,2 \text{ m}$$

با چه خطای مطلق Δ و خطای نسبی δ میتوان حجم استوانه را محاسبه نمود.

۳۲۵۰- اضلاع مثلث $a = 200 \text{ m} \pm 2 \text{ m}$ ، $b = 300 \text{ m} \pm 5 \text{ m}$ و زاویه

بین آنها $C = 60^\circ \pm 1^\circ$ میباشد. با چه خطای مطلق میتوان ضلع سوم

c مثلث را حساب کرد؟

۳۲۵۱- نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

در نقطه $(0, 0)$ پیوسته و دارای هر دو مشتق جزئی $f'_x(0, 0)$ و $f'_y(0, 0)$ میباشد معهداً در این نقطه دیفرانسیل پذیر نیست.

روند مشتقات $f'_x(x, y)$ و $f'_y(x, y)$ را در همسایگی نقطه $(0, 0)$ روشن

کنید.

۳۲۵۲ - نشان دهید که تابع

$$x^2 + y^2 \neq 0 \quad \text{اگر} \quad f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

و

$$f(0, 0) = 0$$

در همسایگی نقطه $(0, 0)$ پیوسته و دارای مشتقات جزئی کراندار $f'_x(x, y)$ و $f'_y(x, y)$ میباشد معهداً در این نقطه دیفرانسیل پذیر نیست.

۳۲۵۳ - نشان دهید که تابع

$$x^2 + y^2 \neq 0 \quad \text{اگر} \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

و

$$f(0, 0) = 0$$

در همسایگی نقطه $(0, 0)$ دارای مشتقات جزئی $f'_x(x, y)$ و $f'_y(x, y)$ میباشد که در نقطه $(0, 0)$ منفصل و در همسایگی دلخواه آن ناکراندار میباشند، با این وجود، تابع در نقطه $(0, 0)$ دیفرانسیل پذیر است.

۳۲۵۴ - ثابت کنید که تابع $f(x, y)$ که دارای مشتقات جزئی کراندار $f'_x(x, y)$ و $f'_y(x, y)$ در یک حوزه محدب E میباشند در این حوزه پیوسته یکنواخت است.

۳۲۵۵ - ثابت کنید که اگر تابع $f(x, y)$ به ازای هر مقدار ثابت y ، نسبت به متغیر x پیوسته و دارای مشتق جزئی $f'_y(x, y)$ کراندار نسبت به متغیر y باشد در این صورت این تابع نسبت به متغیرهای x و y توأمآ پیوسته است.

مطلوبست محاسبه مشتقات جزئی ذکرشده در هر یک از مسایل زیر:

$$3256 - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad \text{اگر}$$

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4$$

$$3257 - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{اگر} \quad u = x \ln(x, y)$$

$$3258 - \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y^3} \quad \text{اگر} \quad u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$$

$$u = \text{arc tg } \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz} \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} - 3259$$

$$u = e^{xyz} \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} - 3260$$

$$u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta} - 3261$$

$$u = (x-x_0)^p (y-y_0)^q \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^p + q u}{\partial x^p \partial y^q} - 3262$$

$$u = \frac{x+y}{x-y} \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^m + n u}{\partial x^m \partial y^n} - 3263$$

$$u = (x^2 + y^2) e^{x+y} \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^m + n u}{\partial x^m \partial y^n} - 3264$$

$$u = xyz e^{x+y+z} \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^p + q + r u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} - 3265$$

مطلوبست محاسبه - 3266

$$f(x, y) = e^x \sin y \quad \text{اگر} \quad f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0, 0)$$

نشان دهید که اگر - 3267

$$u = f(xyz)$$

در این صورت

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = F(t)$$

که در آن $t = xyz$ و تابع F را پیدا کنید.

مطلوبست محاسبه $d^4 u$ اگر - 3268

$$u = x^4 - 2x^3y - 2xy^3 + y^4 + x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1$$

مشتقات $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ ، $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$ ، $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ ، $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ و $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ چقدر است ؟

دیفرانسیل‌های کامل مرتبه ذکر شده را در مسایل زیر پیدا کنید :

$$u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y) \quad \text{اگر} \quad d^3 u - 3269$$

$$u = \sin(x^2 + y^2) \quad \text{اگر} \quad d^3 u - 3270$$

$$u = \ln(x + y) \quad \text{اگر} \quad d^1 u - ۳۲۷۱$$

$$u = \cos x \operatorname{ch} y \quad \text{اگر} \quad d^2 u - ۳۲۷۲$$

$$u = xyz \quad \text{اگر} \quad d^3 u - ۳۲۷۳$$

$$u = \ln(x^x y^y z^z) \quad \text{اگر} \quad d^4 u - ۳۲۷۴$$

$$u = e^{ax + by} \quad \text{اگر} \quad d^n u - ۳۲۷۵$$

$$u = X(x) Y(y) \quad \text{اگر} \quad d^n u - ۳۲۷۶$$

$$u = f(x + y + z) \quad \text{اگر} \quad d^n u - ۳۲۷۷$$

$$u = e^{ax + by + cz} \quad \text{اگر} \quad d^n u - ۳۲۷۸$$

۳۲۷۹ - فرض کنیم $P_n(x, y, z)$ چندجمله‌ای همگن درجه n باشد. ثابت کنید که

$$d^n P_n(x, y, z) = n! P_n(dx, dy, dz)$$

۳۲۸۰ - با فرض

$$Au = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$$

مطلوبست محاسبه Au و $A^2 u = A(Au)$ اگر :

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (\text{الف})$$

۳۲۸۱ - با فرض

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

مطلوبست محاسبه Δu اگر

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad u = \sin x \operatorname{ch} y \quad (\text{الف})$$

۳۲۸۲ - فرض کنیم

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

و

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

مطلوبست محاسبه $\Delta_1 u$ و $\Delta_2 u$ اگر

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \quad (\text{الف})$$

مطلوبست محاسبهٔ مشتقات مرتبهٔ اول و دوم از توابع مرکب زیر :

$$u = f(x^2 + y^2 + z^2) - ۳۲۸۳$$

$$u = f\left(x, \frac{x}{y}\right) - ۳۲۸۴$$

$$u = f(x, xy, xyz) - ۳۲۸۵$$

$$۳۲۸۶ - \text{مطلوبست محاسبهٔ } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ اگر}$$

$$u = f(x + y, xy)$$

$$۳۲۸۷ - \text{مطلوبست محاسبهٔ}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

اگر

$$u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$$

مطلوبست محاسبهٔ دیرانسیل‌های کامل مرتبه اول و دوم از توابع مرکب

زیر (x, y, z متغیرهای مستقل میباشند) :

$$۳۲۸۸ - u = f(t) \text{ که در آن } t = x + y$$

$$۳۲۸۹ - u = f(t) \text{ که در آن } t = \frac{y}{x}$$

$$۳۲۹۰ - u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$۳۲۹۱ - u = f(t) \text{ که در آن } t = xyz$$

$$۳۲۹۲ - u = f(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$۳۲۹۳ - u = f(\xi, \eta) \text{ که در آن } \xi = ax, \eta = by$$

$$۳۲۹۴ - u = f(\xi, \eta) \text{ که در آن } \xi = x + y, \eta = x - y$$

$$۳۲۹۵ - u = f(\xi, \eta) \text{ که در آن } \xi = xy, \eta = \frac{x}{d}$$

$$۳۲۹۶ - u = f(x + y, z)$$

$$۳۲۹۷ - u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$$

$$۳۲۹۸ - u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$$

$$۳۲۹۹ - u = f(x, y, z) \text{ که در آن } x = t, y = t^2, z = t^3$$

$$۳۳۰۰ - u = f(\xi, \eta, \zeta) \text{ که در آن } \xi = ax, \eta = by, \zeta = cz$$

$$۳۳۰۱ - u = f(\xi, \eta, \zeta) \text{ که در آن } \xi = x^2 + y^2, \eta = x^2 - y^2, \zeta = 2xy$$

مطلوبست محاسبه $d^n u$ اگر :

$$u = f(ax + by + cz) - ۳۳۰۲$$

$$u = f(ax, by, cz) - ۳۳۰۳$$

$u = f(\xi, \eta, \zeta) - ۳۳۰۴$ که در آن $\xi = a_1x + b_1y + c_1z$ ، $\eta = a_2x + b_2y + c_2z$ ، $\zeta = a_3x + b_3y + c_3z$

$$\xi = a_3x + b_3y + c_3z$$

۳۳۰۵ - فرض کنیم $u = f(r)$ که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و f تابع دو بار دیفرانسیل پذیر است. نشان دهید که

$$\Delta u = F(r)$$

که در آن $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ اپراتور لاپلاس میباشد و تابع F را بدست آورید.

۳۳۰۶ - فرض کنیم u و v توابع دو بار دیفرانسیل پذیر و Δ اپراتور لاپلاس (مساله ۳۳۰۵ را ببینید) باشد. ثابت کنید که

$$\Delta(uv) = u \Delta v + v \Delta u + 2 \Delta(u, v)$$

که در آن

$$\Delta(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}$$

۳۳۰۷ - نشان دهید که تابع

$$u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

(a و b ثابت میباشند) در معادله* لاپلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

صادق است.

۳۳۰۸ - ثابت کنید که اگر تابع $u = u(x, y)$ در معادله* لاپلاس (مساله ۳۳۰۷ را ببینید) صادق باشد تابع

$$v = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

نیز در این معادله صادق است.

۳۳۰۹ - نشان دهید که تابع

$$u = \frac{1}{\sqrt{a} \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

(a و b ثابتند) در معادلهٔ هدایت حرارت

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

صالح است.

۳۳۱۰ - ثابت کنید که اگر تابع $u = u(x, t)$ در معادلهٔ هدایت حرارت (مسالهٔ ۳۳۰۹ را ببینید) صالح باشد تابع

$$v = \frac{1}{a \sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} u\left(\frac{x}{a^2 t}, -\frac{1}{a^2 t}\right) \quad (t > 0)$$

نیز در این معادله صالح است.

۳۳۱۱ - ثابت کنید که تابع

$$u = \frac{1}{r}$$

که در آن $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ برای $r \neq 0$ در معادلهٔ لاپلاس

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

صالح است.

۳۳۱۲ - ثابت کنید که اگر تابع $u = u(x, y, z)$ در معادلهٔ لاپلاس (مسالهٔ ۳۳۱۱ را ببینید) صالح باشد تابع

$$v = \frac{1}{r} u\left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \frac{k^2 z}{r^2}\right)$$

که در آن k ثابت می‌باشد و $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ نیز در این معادله صالح است.

۳۳۱۳ - ثابت کنید که تابع

$$u = \frac{C_1 e^{-ar} + C_2 e^{ar}}{r}$$

که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و C_1 ، C_2 ثابتند، در معادلهٔ هلمهولتز

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u$$

صادق است.

۳۳۱۴ - فرض کنیم توابع $u_1 = u_1(x, y, z)$ و $u_2 = u_2(x, y, z)$ در معادلهٔ لاپلاس $\Delta u = 0$ صادق باشند.

ثابت کنید که تابع

$$v = u_1(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2) u_2(x, y, z)$$

در معادلهٔ بیهارمونیک

$$\Delta(\Delta v) = 0$$

صادق است.

۳۳۱۵ - فرض کنیم $f(x, y, z)$ تابع همگن مرتبهٔ n بوده و m بار دیفرانسیل پذیر باشد. ثابت کنید که

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^m f(x, y, z) = n(n-1) \dots$$

$$\dots (n-m+1) f(x, y, z)$$

۳۳۱۶ - اگر

$$z = \sin y + f(\sin x - \sin y)$$

و f تابعی دیفرانسیل پذیر باشد عبارت زیر را ساده کنید:

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y}$$

۳۳۱۷ - نشان دهید تابع

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

که در آن f تابع دیفرانسیل پذیر دلخواه است در معادلهٔ

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$$

صادق است .

۳۳۱۸ - نشان دهید که تابع

$$z = yf(x^2 - y^2)$$

که در آن f تابع دیفرانسیل پذیر دلخواه است در معادله^{*}

$$y^2 = \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz$$

صادق است .

۳۳۱۹ - اگر

$$u = \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{7} x^3 (y + z) + \frac{1}{4} x^2 yz + f(y - x, z - x)$$

و f تابعی دیفرانسیل پذیر باشد عبارت زیر را ساده کنید :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

۳۳۲۰ - با فرض

$$x^2 = uv, \quad y^2 = uw, \quad z^2 = vw$$

و

$$f(x, y, z) = F(u, v, w)$$

ثابت کنید که

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w$$

با فرض آنکه توابع دلخواه φ و ψ و غیره به تعداد کافی دفعات دیفرانسیل پذیر باشند درستی تساوی های زیر را تحقیق کنید :

$$z = \varphi(x^2 + y^2) \quad \text{اگر} \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad - 3321$$

$$z = \frac{y^2}{xy} + \varphi(xy) \quad \text{اگر} \quad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0 \quad - 3322$$

$$z = e^y \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right) \quad \text{اگر} \quad (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz \quad - 3323$$

$$u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right) \quad \text{اگر} \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu - ۳۳۲۴$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z} - ۳۳۲۵$$

$$u = \frac{xy}{z} \ln x + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \quad \text{اگر}$$

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ۳۳۲۶$$

$$u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y) \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 - ۳۳۲۷$$

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{اگر} \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + - ۳۳۲۸$$

$$+ 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{اگر} \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u - ۳۳۲۹$$

$$u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u = \varphi[x + \psi(y)] \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ۳۳۳۰$$

با مشتق گیری پیاپی، توابع دلخواه φ و ψ را حذف کنید:

$$z = \varphi(x) + \psi(y) - ۳۳۳۶$$

$$z = x + \varphi(xy) - ۳۳۳۱$$

$$z = \varphi(x) \psi(y) - ۳۳۳۷$$

$$z = x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right) - ۳۳۳۲$$

$$z = \varphi(x+y) + \psi(x-y) - ۳۳۳۸$$

$$z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) - ۳۳۳۳$$

$$z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y\psi\left(\frac{x}{y}\right) - ۳۳۳۹$$

$$u = \varphi(x-y, y-z) - ۳۳۳۴$$

$$z = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right) - ۳۳۴۰$$

$$u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) - ۳۳۳۵$$

۳۳۴۱ - مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع

$$z = x^2 - y^2$$

در نقطهٔ $M(1, 1)$ در امتداد l که زاویهٔ $\alpha = ۶۰^\circ$ را با امتداد مثبت محور Ox میسازد.

۳۳۴۲ - مطلوبست محاسبه مشتق تابع

$$z = x^2 - xy + y^2$$

در نقطه $M(1, 1)$ در امتداد l که زاویه α با امتداد مثبت محور Ox میسازد. در چه امتدادهایی این مشتق دارای : الف) بیشترین مقدار ب) کمترین مقدار ؟ پ) مساوی صفر است ؟

۳۳۴۳ - مطلوبست محاسبه مشتق تابع

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

در نقطه $M(x_0, y_0)$ در امتداد عمود بر خط تراز مار بر این نقطه.

۳۳۴۴ - مطلوبست محاسبه مشتق تابع

$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$$

در نقطه $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ در امتداد قائم داخلی در این نقطه بر منحنی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

۳۳۴۵ - مطلوبست محاسبه مشتق تابع

$$u = xyz$$

در نقطه $M(1, 1, 1)$ در امتداد $l\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$

مقدار گرادیان تابع در این نقطه چقدر است ؟

۳۳۴۶ - مقدار و امتداد گرادیان تابع

$$u = \frac{1}{r}$$

را که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، در نقطه $M(x_0, y_0, z_0)$ پیدا کنید.

۳۳۴۷ - مطلوبست تعیین زاویه بین گرادیانهای تابع

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

در نقاط $A(e, 0, 0)$ و $B(0, e, 0)$

۳۳۴۸ - تفاضل بین مقدار گرادیان تابع

$$u = x + y + z$$

و مقدار گرادیان تابع

$$v = x + y + z + \dots \sin(10^6 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

در نقطه $M(1, 2, 2)$ چقدر است؟
 ۳۳۴۹ - نشان دهید که در نقطه $M(x, y, z)$ زاویه بین گرادیانهای
 توابع

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2$$

و

$$v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$$

($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ و a, b, c, m, n, p مقادیر ثابت می باشند و
 وقتی نقطه M بی نهایت دور شود بسمت صفر میل میکند.

۳۳۵۰ - بفرض آنکه $u = f(x, y, z)$ تابع دو بار دیفرانسیل پذیر و $\cos \gamma$ ،
 $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ کسینوسهای هادی امتداد l باشد مطلوبست محاسبه

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)$$

۳۳۵۱ - فرض کنیم $u = f(x, y, z)$ تابع دو بار دیفرانسیل پذیر و

$$l_1 \{ \cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1 \}, l_2 \{ \cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2 \},$$

$$l_3 \{ \cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3 \}$$

سه امتداد متعامد باشند.

ثابت کنید:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{ب})$$

۳۳۵۲ - فرض میکنیم $u = u(x, y)$ تابعی دیفرانسیل پذیر باشد و بازای
 $y = x^2$ داشته باشیم:

$$u(x, y) = 1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = x$$

مطلوبست محاسبه $\frac{\partial u}{\partial y}$ بازای $y = x^2$.

۳۳۵۳ - بفرض آنکه تابع $u = u(x, y)$ در معادله

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

و علاوه بر آن در شرایط

$$u = (x, 2x) = x, \quad u'_x(x, 2x) = x^2$$

صادق باشد. مطلوبست

$$u'_{xx}(x, 2x), \quad u''_{xy}(x, 2x), \quad u''_{yy}(x, 2x)$$

با فرض $z = z(x, y)$ معادلات زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 - 3355 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 - 3354$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 - 3356$$

۳۳۵۷ - با فرض $u = u(x, y, z)$ معادله* زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$$

۳۳۵۸ - جواب $z = z(x, y)$ معادله*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$$

صادق در شرط $z(x, x^2) = 1$ را پیدا کنید.

۳۳۵۹ - جواب $z = z(x, y)$ معادله*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

صادق در شرایط $z(x, 0) = 1$ و $z'_y(x, 0) = x$ را پیدا کنید.

۳۳۶۰ - جواب $z = z(x, y)$ معادله*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$$

صادق در شرایط $z(x, 0) = x$ و $z(0, y) = y^2$ را پیدا کنید.

بخش ۳ - مشتق گیری توابع ضمنی

بند ۱ - قضیه وجود. اگر: (۱) تابع $F(x, y, z)$ در نقطه* $\hat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$ برابر صفر شود: (۲) $F(x, y, z)$ و $F'_z(x, y, z)$ در همسایگی نقطه* \hat{A}_0 معین و پیوسته باشند؛ (۳) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ در آنصورت در یک همسایگی

بقدر کافی کوچک نقطه $A(x, y)$ تابع تک مقداری پیوسته یکنای

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

صادق در معادله

$$F(x, y, z) = 0$$

وجود دارد چنان که $z = f(x, y)$

بند ۲ - دیفرانسیل پذیری توابع ضمنی. اگر علاوه بر آن (x, y, z) تابع

$F(x, y, z)$ در همسایگی نقطه $A(x, y, z)$ دیفرانسیل پذیر باشد در این

صورت تابع (۱) در همسایگی نقطه $A(x, y)$ دیفرانسیل پذیر و مشتقات

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ و } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ آنرا میتوان از معادلات زیر حساب کرد.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

اگر تابع $F(x, y, z)$ به تعداد کافی دفعات دیفرانسیل پذیر باشد در

این صورت از مشتق گیری پیاپی تساوی های (۲) مشتقات مرتبه های بالا نیز

از تابع z محاسبه میشوند.

بند ۳ - توابع ضمنی که با دستگاه معادلات تعریف میشوند. هرگاه توابع

$F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ در شرایط زیر صادق

باشند:

(۱) در نقطه $\bar{A}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$ برابر صفر شوند،

(۲) در همسایگی نقطه \bar{A} دیفرانسیل پذیر باشند،

(۳) در نقطه \bar{A} دیرمینان تابعی

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$$

در این صورت دستگاه معادلات

$$F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

بطور تک مقداری در یک همسایگی نقطه $A(x_1, \dots, x_m)$ دستگاه توابع

دیفرانسیل پذیر

$$y_i = f(x_1, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

و که در معادلات (۳) و شرایط اولیه

$$f_i(x_1, \dots, x_m) = y_i. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

صدق میکنند، مشخص میسازد.

دیفرانسیل‌های این توابع ضمنی را از دستگاه

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k} dy_k = 0.$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$ * میتوان پیدا کرد.

۳۳۶۱ - نشان دهید که تابع دیریکله^۱ منفصل در هر نقطه

$$y = \begin{cases} 1, & \text{اگر } x \text{ گویاست} \\ 0, & \text{اگر } x \text{ گنگ است} \end{cases}$$

در معادله^۲

$$y^x - y = 0.$$

صدق میکنند.

۳۳۶۲ - هرگاه تابع $f(x)$ در فاصله^۳ (a, b) معین باشد در چه حالتی معادله^۴

$$f(x)y = 0$$

بازای $a < x < b$ دارای تنها جواب پیوسته^۵ $y = 0$ میباشد؟

۳۳۶۳ - فرض کنیم توابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله^۶ (a, b) معین و پیوسته باشد در چه حالتی

$$f(x)y = g(x)$$

در فاصله^۷ (a, b) دارای یک جواب پیوسته^۸ منحصر بفردی است.

۳۳۶۴ - هرگاه معادله^۹

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

مفروض باشد و

$$y = y(x) \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (2)$$

تابع تک مقداری صادق در معادله^{۱۰} (۱) باشد،

(۱) چند تابع تک مقداری (۲) در معادله^{۱۱} (۱) صادق میکنند؟

* در بیان اکثر مسایل این بخش بدون تذکر فرض میشود که شرایط وجود توابع ضمنی و مشتقات نظیر آنها بر آورده شده است.

(۲) چند تابع تک مقداری پیوسته^۱ (۲) در معادله^۱ (۱) صدق میکنند؟
 (۳) چند تابع تک مقداری پیوسته^۱ (۲) در معادله^۱ (۱) صدق میکنند
 در صورتیکه :

(الف) $y(0) = 1$ ؛ (ب) $y(1) = 0$ ؟
 ۳۳۶۵ - هرگاه معادله^۱

$$x^2 = y^2 \quad (1)$$

مفروض و

$$y = y(x) \quad (-\infty \leq x \leq +\infty) \quad (2)$$

تابع تک مقداری صادق در معادله^۱ (۱) باشد،

(۱) چند تابع تک مقداری (۲) در معادله^۱ (۱) صدق میکنند ؟
 (۲) چند تابع تک مقداری پیوسته^۱ (۲) در معادله^۱ (۱) صدق میکنند ؟
 (۳) چند تابع تک مقداری دیفرانسیل پذیر (۲) در معادله^۱ (۱) صدق میکنند ؟
 (۴) چند تابع تک مقداری پیوسته^۱ (۲) در معادله^۱ (۱) صدق میکنند در
 صورتیکه :

(الف) $y(1) = 1$ ؛ (ب) $y(0) = 0$ ؟

(۵) چند تابع تک مقداری پیوسته^۱ $(1 - \delta < x < 1 + \delta)$ $y = y(x)$
 در معادله^۱ (۱) صادقند در صورتیکه $y(1) = 1$ و δ بقدر کافی کوچک باشد ؟
 ۳۳۶۶ - معادله^۱

$$x^2 + y^2 = x^4 + y^4$$

y را بعنوان تابع چند مقداری از x مشخص میسازد. در کدام حوزه‌ها این تابع
 (۱) تک مقداری است، (۲) دو مقداری است، (۳) سه مقداری است، (۴) چهار
 مقداری است؟ مطلوبست تعیین نقاط انشعاب این تابع و شاخه‌های پیوسته^۱
 تک مقداری آن.

۳۳۶۷ - مطلوبست تعیین نقاط انشعاب و شاخه‌های پیوسته^۱ تک مقداری
 تابع $(-1 \leq x \leq 1)$ $y = y(x)$ تابع چند مقداری y که با معادله^۱

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

مشخص میشود.

۳۳۶۸ - هرگاه $f(x)$ بازای $a < x < b$ پیوسته و $\varphi(y)$ صعودی یکنوا و بازای
 $c < y < d$ پیوسته باشد، در چه حالتی معادله^۱

$$\varphi(y) = f(x)$$

تابع تک مقداری

$$y = \varphi^{-1}(f(x))$$

را معین میکند؟

مثالهای الف) $\sin y + \operatorname{sh} y = x$ ؛ ب) $e^{-y} = -\sin^2 x$ را در نظر بگیرید .

۲۳۶۹ - هرگه

$$x = y + \varphi(y) \quad (1)$$

که در آن $\varphi(0) = 0$ و $1 < k \leq |\varphi'(y)|$ بازای $-a < y < a$ ثابت کنید که بازای $-\varepsilon < x < \varepsilon$ تابع یکتای ديفرانسیل پذیر $y = y(x)$ صادق در معادله (۱) وجود دارد چنان که $y(0) = 0$.
۲۳۷۰ - فرض کنیم $y = y(x)$ تابع ضمنی تعریف شده با معادله

$$x = ky + \varphi(y)$$

باشد که در آن ثابت $k \neq 0$ و $\varphi(y)$ تابع ديفرانسیل پذیر دوره‌ای با دوره ω طوری است که $|k| < |\varphi'(y)|$. ثابت کنید که

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x)$$

که در آن $\psi(x)$ تابعی دوره‌ای به دوره ω میباشد .

مطلوبست محاسبه y' و y'' از تابع y که با معادلات زیر تعریف میشود :

$$x^y = y^x \quad (x \neq y) \quad - 2371 \quad x^2 + 2xy - y^2 = a^2 \quad - 2371$$

$$y = 2x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad - 2375 \quad \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad - 2372$$

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad - 2373$$

ثابت کنید که بازای

$$1 + xy = k(x - y)$$

که در آن k مقداری ثابت است تساوی زیر بر قرار است :

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}$$

۲۳۷۷ - بفرض آنکه

$$x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

ثابت کنید که بازای $xy > 0$ تساوی

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

برقرار است.

۳۳۷۸ - ثابت کنید که معادله

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a \neq 0)$$

در همسایگی نقطه $x=0, y=0$ دو تابع دیفرانسیال پذیر $y = y_1(x)$ و $y = y_2(x)$ را مشخص میکند. $y_1'(0)$ و $y_2'(0)$ را پیدا کنید.

۳۳۷۹ - مطلوبست محاسبه y' بازای $y=0$ و $x=0$ اگر

$$(x^2 + y^2)^2 = 2x^2y - y^3$$

۳۳۸۰ - مطلوبست محاسبه y', y'', y''' اگر $x^2 + xy + y^2 = 3$

۳۳۸۱ - مطلوبست محاسبه y', y'', y''' بازای $y=1, x=0$ اگر

$$x^2 - xy - 2y^2 + x - y - 1 = 0$$

۳۳۸۲ - ثابت کنید که برای منحنی درجه دوم

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

تساوی زیر درست است:

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[(y'')^{-\frac{2}{3}} \right] = 0$$

برای تابع $z = z(x, y)$ مطلوبست محاسبه مشتقات جزئی مرتبه اول و

دوم اگر:

$$z = \sqrt{x^2 - y^2} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad 3386$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad 3383$$

$$z^3 - 2xyz = a^3 \quad 3384$$

$$x + y + z = e^{-(x+y+z)} \quad 3387$$

$$x + y + z = e^z \quad 3385$$

۳۳۸۸ - فرض میکنیم

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 0 \quad (1)$$

و

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

مطلوبست محاسبه: الف) اگر $f'_x(1, 1, 1)$ $z = z(x, y)$ تابع ضمنی تعریف شده با معادله (۱) باشد؛ ب) اگر $f'_x(1, 1, 1)$ $y = y(x, z)$ تابع ضمنی تعریف شده با معادله (۱) باشد. توضیح دهید که چرا این مشتقات متفاوتند.

۳۳۸۹ - مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ برای $x = 1$ ، $y = -2$ ،

اگر $z = 1$ $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$

مطلوبست محاسبه d^2z و dz اگر:

$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$ - ۳۳۹۲

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - ۳۳۹۰

$z = x + \arctg \frac{y}{z-x}$ - ۳۳۹۳

$xyz = x + y + z$ - ۳۳۹۱

۳۳۹۴ - مطلوبست محاسبه du اگر

$u^3 - 2(x+y)u^2 + z^3 = 0$

۳۳۹۵ - مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ اگر $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$

۳۳۹۶ - مطلوبست محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ اگر $F(x-y, y-z, z-x) = 0$

۳۳۹۷ - مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}$ اگر

$F(x, x+y, x+y+z) = 0$

۳۳۹۸ - مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ اگر $F(xz, yz) = 0$

۳۳۹۹ - مطلوبست محاسبه d^2z ، اگر:

$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ (ب)؛ $F(x+z, y+z) = 0$ (الف)

۳۳۹۹، ۱ - هرگه $z = z(x, y)$ آن تابع دیفرانسیل پذیری باشد که با معادله

$x^3 - xz + y = 0$

مشخص می شود و برای $y = -2$ و $x = 3$ مقدار $z = 2$ را اختیار می کند

مطلوبست محاسبه $d^2z(3, -2)$ و $dz(3, -2)$

۳۴۰۰ - فرض کنیم $z = z(x, y)$ و $y = y(x, z)$ و $x = x(y, z)$ توابعی

باشند که با معادله $F(x, y, z) = 0$ مشخص میشود.

ثابت کنید که

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

۳۴۰۱ - مطلوبست محاسبه $\frac{dx}{dz}$ ، $\frac{dy}{dz}$ اگر $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، $x + y + z = 0$

۳۴۰۲ - مطلوبست محاسبه $\frac{d^2x}{dz^2}$ ، $\frac{d^2y}{dz^2}$ بازای $x = 1$ ، $y = -1$ ،

$$x + y + z = 2, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{4} z^2 \quad \text{اگر } z = 2$$

۳۴۰۳ - مطلوبست محاسبه $\frac{\partial v}{\partial x}$ ، $\frac{\partial v}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ اگر $xu - yv = 0$ ،

$$yu + xv = 1$$

۳۴۰۳، ۱ - توابع دیفرانسیل پذیر $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ طور است که $u(1, 2) = 0$ ، $v(1, 2) = 0$ و با دستگاه معادلات

$$\left. \begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{v-u} - \frac{u}{1+v} &= 2x \end{aligned} \right\}$$

مشخص میشوند. مطلوبست محاسبه $du(1, 2)$ و $dv(1, 2)$ اگر du ، dv ، d^2u ، d^2v مطلوبست محاسبه

$$u + v = x + y, \quad \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$$

۳۴۰۵ - مطلوبست محاسبه d^2u ، d^2v ، du ، dv بازای $y = 1$ ، $u = 0$ ، $v = \frac{\pi}{4}$

$$\text{اگر } x = 1$$

$$e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

۳۴۰۶ - مطلوبست محاسبه $\frac{d^2z}{dx^2}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ اگر $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{dz}{dx}$ ،

$$x = t + t^{-1}, \quad y = t^2 + t^{-2}, \quad z = t^3 + t^{-3}$$

۳۴۰۷ - در کدام حوزه صفحه Oxy دستگاه معادلات

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3$$

که در آن پارامترهای u, v جميع مقادير حقيقي را اختيار ميکنند z را بعنوان تابعي از متغيرهاي x و y مشخص ميکند؟ مشتقات $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را پيدا کنيد.

۳۴۰۷، ۱ - مطلوبست محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه $u = 1, v = 1$ اگر

$$\left. \begin{aligned} x &= u + \ln v \\ y &= v - \ln u \\ z &= 2u + v \end{aligned} \right\}$$

۳۴۰۸، ۲ - مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ در نقطه $u = 2, v = 1$ اگر

$$\left. \begin{aligned} x &= u + v^2 \\ y &= u^2 - v^3 \\ z &= 2uv \end{aligned} \right\}$$

۳۴۰۸ - مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ اگر

$$x = \cos \varphi \cos \psi, \quad y = \cos \varphi \sin \psi, \quad z = \sin \varphi$$

۳۴۰۹ - مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ اگر

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v$$

۳۴۱۰ - هرگاه $z = z(x, y)$ تابع تعريف شده با دستگاه

$$x = e^{u+v}, \quad y = e^{u-v}, \quad z = uv$$

(u و v پارامترند) باشد d^2z و dz را بازي $u = 0$ و $v = 0$ پيدا کنيد.

۳۴۱۱ - مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{dz}{dx}$ اگر

$$z = x^2 + y^2$$

که در آن $y = y(x)$ از معادله

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

تعيين مي شود.

۳۴۱۲ - مطلوبست محاسبه $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ اگر

$$u = \frac{x+z}{y+z}$$

که در آن z از معادله^{*} زیر تعیین می‌شود:

$$ze^z = xe^x + ye^y$$

۳۴۱۳ - هرگاه معادلات

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

z را بعنوان تابعی از y و x مشخص کنند $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ را پیدا کنید.

۳۴۱۴ - فرض کنیم

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

مشتقات جزئی مرتبه^{*} اول و دوم از توابع معکوس: $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ را پیدا کنید.

۳۴۱۵ - مطلوبست محاسبه^{*} $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ ، $\frac{\partial v}{\partial x}$ ، $\frac{\partial v}{\partial y}$ اگر:

$$x = u \cos \frac{v}{u}, \quad y = u \sin \frac{v}{u} \quad (\text{الف})$$

$$x = e^u + u \sin v, \quad y = e^u - u \cos v \quad (\text{ب})$$

۳۴۱۶ - تابع $u = u(x)$ با دستگاه معادلات

$$u = f(x, y, z), \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0$$

مشخص می‌شود. $\frac{du}{dx}$ و $\frac{d^2u}{dx^2}$ را پیدا کنید.

۳۴۱۷ - تابع $u = u(x, y)$ با دستگاه معادلات

$$u = f(x, y, z, t), \quad g(y, z, t) = 0, \quad h(z, t) = 0$$

مشخص می‌شود. $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ را پیدا کنید.

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w)$$

مطلوبست محاسبه $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$

۳۴۱۹ - فرض میکنیم که تابع $z = z(x, y)$ در دستگاه معادلات

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad g(x, y, z, t) = 0$$

که در آن t پارامتر متغیر است صادق باشد. مطلوبست محاسبه dz

۳۴۲۰ - هرگاه $u = f(z)$ که در آن z تابع ضمنی از متغیرهای x و y است با

معادله $z = x + y\varphi(z)$ مشخص شود دستور لاگرانژ

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ [\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$$

را ثابت کنید.

راهنمایی - دستور را برای $n = 1$ ثابت کرده و از روش استقرای ریاضی

استفاده کنید.

۳۴۲۱ - نشان دهید که تابع $z = z(x, y)$ مشخص شده با معادله

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0$$

که در آن $\Phi(u, v)$ تابع دیفرانسیل پذیر دلخواهی از متغیرهای v و u (a, b ثابتند)

است جواب معادله

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

می باشد.

ویژه‌گی‌های هندسی سطح (۱) را روشن کنید.

۳۴۲۲ - نشان دهید که تابع $z = z(x, y)$ مشخص شده با معادله

$$(2) \quad \Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0$$

که در آن $\Phi(u, v)$ تابع دیفرانسیل پذیر دلخواهی از متغیرهای v و u می باشد

در معادله

$$(x - x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0$$

صادق است.

ویژه‌گی‌های هندسی سطح (۲) را روشن کنید.

۳۴۲۳ - نشان دهید که تابع $z = z(x, y)$ تعریف شده با معادله*

$$ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2)$$

که در آن $\Phi(u)$ تابع دیفرانسیل پذیر دلخواهی از متغیر u و a, b, c ثابت می‌باشند در معادله*

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$$

صداق است .

ویژه‌گی‌های هندسی سطح (۳) را روشن کنید .

۳۴۲۴ - تابع $z = z(x, y)$ بصورت معادله*

$$x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$$

داده شده است . نشان دهید که

$$(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$$

۳۴۲۵ - تابع $z = z(x, y)$ بصورت معادله*

$$F(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0$$

داده شده است . نشان دهید که

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$$

۳۴۲۶ - نشان دهید که تابع $z = z(x, y)$ تعریف شده با دستگاه معادلات :

$$\left. \begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha + \ln z &= f(\alpha) \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha &= f'(\alpha) \end{aligned} \right\}$$

که در آن $\alpha = \alpha(x, y)$ پارامتری است متغیر و $f(\alpha)$ تابع دیفرانسیل پذیر دلخواهی می‌باشد در معادله*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2$$

صداق است .

۳۴۲۷ - نشان دهید که تابع

$$z = z(x, y)$$

که بصورت دستگاه معادلات

$$\left. \begin{aligned} z &= \alpha x + \frac{y}{\alpha} + f(\alpha) \\ 0 &= x - \frac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha) \end{aligned} \right\}$$

داده شده است در معادله*

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

صافق است.

۳۴۲۸ - نشان دهید که تابع $z = z(x, y)$ داده شده بصورت معادلات

$$\left. \begin{aligned} [z - f(\alpha)]^2 &= x^2 (y^2 - \alpha^2) \\ [z - f(\alpha)] f'(\alpha) &= \alpha x^2 \end{aligned} \right\}$$

در معادله*

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = xy$$

صافق است.

۳۴۲۹ - نشان دهید که تابع $z = z(x, y)$ داده شده بصورت معادلات

$$\left. \begin{aligned} z &= \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha) \\ 0 &= x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha) \end{aligned} \right\}$$

در معادله*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

صافق است.

۳۴۳۰ - نشان دهید که تابع ضمنی $z = z(x, y)$ تعریف شده با معادله*

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

در معادله* زیر صافق است :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

بخش ۴ - تعویض متغیرها

بند ۱ - تعویض متغیرها در عبارت شامل مشتقات معمولی. هرگاه در عبارت دیفرانسیلی

$$A = \Phi(x, y, y'_x, y''_{xx}, \dots)$$

بخواهیم به متغیرهای جدید بگذریم: به متغیر مستقل t و تابع u که با متغیرهای پیشین x و y بوسیله معادلات

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u) \quad (1)$$

مربوط هستند.

با مشتق‌گیری از معادله (۱) خواهیم داشت:

$$y'_x = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} u'_t}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t}$$

به طریق مشابهی مشتقات مرتبه بالاتر y''_{xx}, \dots بیان می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$A = \Phi_1(t, u, u'_t, u''_{tt}, \dots)$$

بند ۲ - تعویض متغیرهای مستقل در عبارتهای شامل مشتقات جزئی.

اگر در عبارت دیفرانسیلی

$$B = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots\right)$$

فرض کنیم

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v) \quad (2)$$

که در آن u, v متغیرهای مستقل جدید می‌باشند در اینصورت مشتقات جزئی متوالی

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ و غیره از معادلات زیر تعیین می‌شوند:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v}$$

و غیره.

بند ۳ - تعویض متغیرهای مستقل و تابع در عبارات شامل مشتقات جزئی .

در حالت کلی تر اگر معادلات

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w) \quad (۳)$$

را داشته باشیم که در آن u, v متغیرهای مستقل جدید و $w = w(u, v)$

تابع جدید می باشد در اینصورت برای مشتقات جزئی $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ چنین

معادلاتی بدست می آید:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) = \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v},$$

و غیره .

در بعضی موارد تعویض متغیر بهتر است از دیفرانسیل کامل استفاده شود .

۳۴۳۱ - مطلوبست تبدیل معادله

$$y' y''' - 3y''^2 = x$$

با اختیار y بعنوان متغیر مستقل جدید .

۳۴۳۲ - با همان ترتیب معادله زیر را تبدیل کنید :

$$y'^2 y^{(4)} - 10 y' y'' y''' + 10 y''^3 = 0.$$

۳۴۳۳ - معادله

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0.$$

را با اختیار x بعنوان تابع و $t = xy$ بعنوان متغیر مستقل تبدیل کنید .

با وارد کردن متغیرهای جدید، معادلات دیفرانسیل معمولی زیر را تبدیل

کنید :

$$x = e^t \quad \text{اگر} \quad x^2 y'' + xy' + y = 0 \quad - ۳۴۳۴$$

$$t = \ln |x| \quad \text{اگر} \quad y''' = \frac{6y}{x^2} \quad - ۳۴۳۵$$

$$x = \cos t \quad \text{اگر} \quad (1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0 \quad - ۳۴۳۶$$

$$x = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \quad \text{اگر} \quad y'' + y' \operatorname{th} x + \frac{m^2}{\operatorname{ch}^2 x} y = 0. \quad - 3437$$

$$- \frac{1}{y} \int p(\xi) d\xi$$

$$y = ue \quad \text{اگر} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad - 3438$$

$$\text{که در آن} \quad y = ue^{xt} \quad \text{و} \quad x = e^t \quad \text{اگر} \quad x^2 y'' + x y y' - 2 y^2 = 0. \quad - 3439$$

$$u = u(t)$$

$$\text{که در آن} \quad y = \frac{u}{\cos t} \quad \text{و} \quad x = \operatorname{tg} t \quad \text{اگر} \quad (1 + x^2)^2 y'' = y - 3440$$

$$u = u(t)$$

$$\text{که در آن} \quad y = \frac{u}{\operatorname{ch} t} \quad \text{و} \quad x = \operatorname{th} t \quad \text{اگر} \quad (1 - x^2)^2 y'' = -y - 3441$$

$$u = u(t)$$

$$y = u - t \quad \text{و} \quad x = u + t \quad \text{اگر} \quad y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0. \quad - 3442$$

$$u = u(t) \quad \text{که در آن}$$

$$\text{که در آن} \quad y = \frac{u}{t} \quad \text{و} \quad x = \frac{1}{t} \quad \text{اگر} \quad y''' - x^3 y'' + x y' - y = 0. \quad - 3443$$

$$u = u(t)$$

- 3444 معادله استوکس

$$y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2 (x-b)^2}$$

را با فرض

$$u = \frac{y}{x-b}, \quad t = \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right|$$

و با اختیار u بعنوان تابعی از t تبدیل کنید.

- 3445 نشان دهید که اگر معادله

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0.$$

با جایگزینی $x = \varphi(\xi)$ به معادله

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + P(\xi) \frac{dy}{d\xi} + Q(\xi)y = 0.$$

بدل شود در اینصورت

$$[rP(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)]|Q(\xi)|^{-\frac{3}{2}} = [rp(x)q(x) + q'(x)]|q(x)|^{-\frac{3}{2}}$$

۳۴۴۶ - در معادله*

$$\Phi(y, y', y'') = 0$$

که در آن Φ تابع همگنی از متغیرهای y, y', y'' می باشد فرض کنید

$$y = e^{\int u dx}$$

۳۴۴۷ - در معادله*

$$F(xy'', xy', y) = 0$$

که در آن F تابع همگنی از آرگومانهای خود می باشد فرض کنید.

$$u = x \frac{y'}{y}$$

۳۴۴۸ - ثابت کنید که معادله*

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$$

در نتیجه* تبدیل هوموگرافیک

$$x = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1}{a\xi + b\eta + c}, \quad y = \frac{a_4\xi + b_4\eta + c_4}{a\xi + b\eta + c}$$

تغییر شکل نمی دهد.

راهنمایی - تبدیل مذکور را بشکل ترکیبی از تبدیلهای ساده زیر بیان کنید:

$$x = \alpha X + \beta Y + \gamma, \quad y = Y$$

$$X = \frac{1}{X_1}, \quad Y = \frac{Y_1}{X_1}$$

$$X_1 = a\xi + b\eta + c, \quad Y_1 = a_4\xi + b_4\eta + c_4$$

۳۴۴۹ - ثابت کنید که شوارتزین

$$S[x(t)] = \frac{x'''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2} \left[\frac{x''(t)}{x'(t)} \right]^2$$

با تبدیل کسری - خطی

$$y = \frac{ax(t) + b}{cx(t) + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

تغییر نمی‌کند.

با فرض $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ معادلات زیر را بر حسب مختصات قطبی r , φ بیان کنید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} - 3450$$

$$(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2) - 3451$$

$$(x^2 + y^2)^2 y'' = (x + yy')^2 - 3452$$

۳۴۵۳ - عبارت زیر را بر حسب مختصات قطبی بیان کنید:

$$\frac{x + yy'}{xy' - y}$$

۳۴۵۴ - انحنای منحنی مستوی

$$K = -\frac{|y''_{xx}|}{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}$$

را در مختصات قطبی r , φ بیان کنید.

۳۴۵۵ - در دستگاه معادلات

$$\frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2 + y^2), \quad \frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2)$$

به مختصات قطبی بگذرید.

۳۴۵۶ - عبارت

$$W = x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}$$

وارد کردن توابع جدید $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \text{arc tg } \frac{y}{x}$ تبدیل کنید.

۳۴۵۷ - در تبدیل لژاندر با هر نقطه (x, y) منحنی $y = y(x)$ نقطه (X, Y) متناظر می‌شود که در آن

$$X = y', \quad Y = xy' - y$$

Y' , Y'' و Y''' را پیدا کنید.

با وارد کردن متغیرهای مستقل جدید ξ, η , معادلات زیر را حل کنید :

$$\eta = x - y \quad \text{و} \quad \xi = x + y \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} - ۳۴۵۸$$

$$\eta = x^2 + y^2 \quad \text{و} \quad \xi = x \quad \text{اگر} \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = ۰ - ۳۴۵۹$$

$$\eta = y - bz \quad \text{و} \quad \xi = x \quad \text{اگر} \quad a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = ۱ - ۳۴۶۰$$

($a \neq ۰$)

$$\eta = \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad \xi = y \quad \text{اگر} \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - ۳۴۶۱$$

با اختیار v, u بعنوان متغیرهای مستقل جدید معادلات زیر را تبدیل کنید :

$$u = \ln x \quad \text{اگر} \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1 + y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = xy - ۳۴۶۲$$

$$v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \quad \text{و}$$

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{اگر} \quad (x + y) \frac{\partial z}{\partial x} - (x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = ۰ - ۳۴۶۳$$

$$v = \arctg \frac{y}{x} \quad \text{و}$$

$$\text{اگر} \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ۳۴۶۴$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad v = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$v = \frac{y}{z} \quad \text{و} \quad u = 2x - z^2 \quad \text{اگر} \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z} - ۳۴۶۵$$

$$\text{اگر} \quad (x + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z - ۳۴۶۶$$

$$u = x + z, \quad v = y + z$$

عبارت - ۳۴۶۷

$$(z + e^x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y) \frac{\partial z}{\partial y} - (z^2 - e^{x+y})$$

را با اختیار متغیرهای مستقل جدید

$$\xi = y + ze^{-x}, \quad \eta = x + ze^{-y}$$

تبدیل کنید.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

را با فرض

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{v}(u^2 - v^2)$$

تبدیل کنید.

۳۴۶۹ - در معادله*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

فرض کنید

$$\xi = x, \quad \eta = y - x, \quad \zeta = z - x$$

۳۴۷۰ - معادله*

$$(x - z) \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

را با اختیار x بعنوان تابع y و z بعنوان متغیرهای مستقل، تبدیل کنید.

۳۴۷۱ - معادله*

$$(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

را با اختیار x بعنوان تابع $u = y - z$ و $v = y + z$ بعنوان متغیرهای مستقل، تبدیل کنید.

۳۴۷۲ - عبارت

$$A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

را با اختیار x بعنوان تابع و

$$u = xz, \quad v = yz$$

بعنوان متغیرهای مستقل، تبدیل کنید.

۳۴۷۳ - در معادله*

$$(x + z + u) \frac{\partial u}{\partial x} + (x + z + u) \frac{\partial u}{\partial y} + (x + y + u) \frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z$$

فرض کنید :

$$e^{\xi} = x - u, \quad e^{\eta} = y - u, \quad e^{\zeta} = z - u$$

در معادلات زیر به متغیرهای جدید u, v, w که در آن $\omega = \omega(u, v)$ بگذرید :

$$\text{اگر } y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z - 2474$$

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \omega = \ln z - (x+y)$$

$$\text{اگر } x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - 2475$$

$$u = x, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad \omega = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$$

$$\text{اگر } (xy+z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1-y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = x + yz - 2476$$

$$u = yz - x, \quad v = xz - y, \quad \omega = xy - z$$

$$\text{اگر } \left(x \frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2 \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial z}{\partial y} - 2477$$

$$x = ue^w, \quad y = ve^w, \quad z = we^w$$

عبارت - 2478

$$(x-y) : \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

را با فرض

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \operatorname{arc} \operatorname{tg} z, \quad \omega = x + y + z$$

که در آن $\omega = \omega(u, v)$ تبدیل کنید .

عبارت - 2479

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}$$

را با فرض $\omega = \omega(u, v)$ که در آن $u = xe^z, \quad v = ye^z, \quad \omega = ze^z$ تبدیل کنید

۳۴۸۰ - در معادله

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$$

فرض کنید: $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$, $\zeta = z$, $\omega = \frac{u}{z}$ که در آن

$$\omega = \omega(\xi, \eta, \zeta)$$

با فرض $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ عبارت زیر را بر حسب مختصات قطبی φ و r بیان کنید:

$$\omega = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad - ۳۴۸۳$$

$$\omega = x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} \quad - ۳۴۸۱$$

$$\omega = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad - ۳۴۸۴$$

$$\omega = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \quad - ۳۴۸۲$$

$$\omega = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad - ۳۴۸۵$$

$$\omega = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad - ۳۴۸۶$$

۳۴۸۷ - در عبارت

$$I = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

فرض کنید $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

۳۴۸۸ - مطلوبست حل معادله

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

با وارد کردن متغیرهای مستقل جدید

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

u, v را بعنوان متغیرهای مستقل جدید اختیار نموده و معادلات زیر را

تبدیل کنید:

$$2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad - ۳۴۸۹$$

$$u = x + 2y + 2 \quad \text{و} \quad v = x - y - 1$$

اگر $(1+x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1+y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - ۳۴۹۰

$u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ و $v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$

اگر $ax^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ - ۳۴۹۱

$u = \ln x$ و $v = \ln y$

اگر $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ - ۳۴۹۲

$u = \frac{x}{x^2+y^2}$ و $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$

اگر $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0$ - ۳۴۹۳

$x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$

اگر $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y}$ ($y > 0$) - ۳۴۹۴

$u = x - 2\sqrt{y}$ و $v = x + 2\sqrt{y}$

اگر $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ - ۳۴۹۵

$u = xy$ و $v = \frac{x}{y}$

اگر $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ - ۳۴۹۶

$u = x + y$ و $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

اگر $xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - ۳۴۹۷

$u = \frac{1}{y}(x^2 + y^2)$ و $v = xy$

$$\text{اگر } x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x \sin y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin^2 y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad - ۳۴۹۸$$

$$u = x \lg \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad v = x$$

$$\text{اگر } x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (x > 0, y > 0) \quad - ۳۴۹۹$$

$$x = (u + v)^2 \quad \text{و} \quad y = (u - v)^2$$

$$\text{اگر } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \quad - ۳۵۰۰$$

$$u = x \quad \text{و} \quad v = y + z$$

- ۳۵۰۱ - بکمک تعویض خطی

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y$$

معادله

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (۱)$$

را که در آن A ، B و C ثابت می باشد و $AC - B^2 < 0$ ، بصورت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

تبدیل کنید .

صورت کلی تابع صادق در معادله (۱) را بدست آورید .
- ۳۵۰۲ - ثابت کنید صورت معادله لا پلاس

$$\Delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

بازای هر تعویض غیر ناقص متغیرهای

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

صادق در شرایط

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

تغییر نمیکند .

$$\Delta(\Delta u) = 0 \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{الف})$$

را با فرض $u = f(r)$ که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ تبدیل کنید .
۳۵۰۴ - معادله

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + cw = 0$$

با فرض

$$w = f(u)$$

که در آن $u = (x - x_0)(y - y_0)$ بچه صورتی در میآید ؟
۳۵۰۵ - عبارت

$$A = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

را با فرض

$$x + y = X, \quad y = XY$$

تبدیل کنید .

۳۵۰۶ - نشان دهید که معادله

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3) \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 y^2 z = 0$$

بازای تبدیل متغیرهای

$$x = uv \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{v}$$

صورت خود را عوض نمیکند .

۳۵۰۷ - نشان دهید که معادله

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

بازای تعویض متغیرهای

$$u = x + z, \quad v = y + z$$

صورت خود را عوض نمیکند .

$$xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0$$

را با فرض

$$x = \eta \zeta, \quad y = \xi \zeta, \quad z = \xi \eta$$

تبدیل کنید.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

را با فرض

$$y_1 = x_2 + x_3 - x_1, \quad y_2 = x_1 + x_3 - x_2, \quad y_3 = x_1 + x_2 - x_3$$

تبدیل کنید.

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$$

را با فرض

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = \frac{z}{x}, \quad \zeta = y - z$$

تبدیل کنید.

راه‌نمایی - معادله را بصورت $A^2 u - Au = 0$ در آورید که در آن

$$A = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

و

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

را با فرض

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

بر حسب مختصات کروی بیان کنید .
راهنامه‌ای - تعویض متغیرها را بشکل ترکیبی از دو تعویض جزئی

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = z$$

و

$$R = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = z \cos \theta$$

در آورید .

۳۵۱۲ - در معادله

$$z \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$$

تابع جدید w را با فرض $w = z^2$ وارد کنید .

با اختیار u و v بعنوان متغیرهای مستقل جدید و $w = w(u, v)$ بعنوان تابع جدید، معادلات زیر را تبدیل کنید .

$$u = \frac{x}{y}, \quad v = x, \quad w = xz - y \quad \text{اگر} \quad y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x} - 3513$$

$$u = x + y, \quad v = \frac{y}{x}, \quad w = \frac{z}{x} \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 - 3514$$

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = xy - z \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 - 3515$$

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2}, \quad w = ze^{y^2} \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z - 3516$$

$$u = x, \quad v = x + y, \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 - 3517$$

$$w = x + y + z$$

$$x = \sin u, \quad \text{اگر} \quad (2 - x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 - y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - 3518$$

$$y = \sin v, \quad z = e^w$$

$$\text{اگر} \quad (1 - x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2} z = 0 \quad (|x| < 1) - 3519$$

$$u = \frac{1}{2} (y + \arccos x), \quad v = \frac{1}{2} (y - \arccos x), \quad w = z \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{اگر } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}}{x^2 - y^2} - \frac{z(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \quad (|x| > |y|) - 3520$$

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

۳۵۲۱- ثابت کنید که هر معادله*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

(a, b, c ثابتند) را با جایگزینی

$$z = ue^{\alpha x + \beta y}$$

که در آن α, β مقادیر ثابت هستند و $u = u(x, y)$ میتوان بصورت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 u = 0 \quad (c_1 = \text{const})$$

نمایش داد.

۳۵۲۲- نشان دهید که معادله*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

با زای تعویض متغیرهای

$$x' = \frac{x}{y}, \quad y' = -\frac{1}{y}, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

که در آن u' تابعی است از متغیرهای x' و y' ، صورت خود را عوض نمیکند.

۳۵۲۳- در معادله*

$$q(1+q) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1+p+q+2pq) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p(1+p) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

که در آن $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ، $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ ، فرض کنید $u = x + z$ ، $v = y + z$ ،

$w = w(u, v)$ با توجه باینکه

۳۵۲۴- در معادله*

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(z \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

فرض کنید $u = e^w$ ، $z = e^\xi$ ، $y = e^\eta$ ، $x = e^\xi$ که در آن $w = w(\xi, \eta, \xi)$

۳۵۲۵ - نشان دهید که صورت معادله

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

بازای هر نوع توزیع نقش بین متغیرهای x, y, z تغییر نمیکند.
۳۵۲۶ - معادله

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

را با اختیار x بعنوان تابعی از متغیرهای y, z حل کنید.
۳۵۲۷ - معادله

$$A \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

را با کاربرد تبدیل لژاندر

$$X = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z$$

که در آن $Z = Z(X, Y)$ تبدیل کنید.

بخش ۵ - کاربردهای هندسی

بند ۱ - خط مماس و صفحه قائم. معادله خط مماس بر منحنی

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

در نقطه $M(x, y, z)$ آن بصورت زیر است:

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}}$$

معادله صفحه قائم در این نقطه:

$$\frac{dx}{dt} (X - x) + \frac{dy}{dt} (Y - y) + \frac{dz}{dt} (Z - z) = 0.$$

بند ۲ - صفحه مماس و خط قائم. معادله صفحه مماس بر سطح

$z = f(x, y)$ در نقطه $M(x, y, z)$ آن بصورت زیر است:

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial z}{\partial y} (Y - y)$$

معادله خط قائم در نقطه M عبارتست از :

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z-z}{-1}$$

اگر معادله سطح بصورت ضمنی $F(x, y, z) = 0$ داده شده باشد در انبصورت به ترتیب

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0$$

را برای معادله صفحه مماس و

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

را برای معادله قائم خواهیم داشت .

بند ۳ - منحنی پوش دسته منحنی های مستوی . منحنی پوش دسته منحنی های تک پارامتری $f(x, y, \alpha) = 0$ (α پارامتر است) در دستگاه معادلات زیر صدق میکند :

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

بند ۴ - سطح پوش دسته سطوح . سطح پوش دسته سطوح تک پارامتری $F(x, y, z, \alpha) = 0$ در دستگاه معادلات زیر صدق میکند :

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$$

در حالت دسته سطوح دو پارامتری $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ ، سطح پوش در معادلات زیر صادق است :

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

معادلات خط مماس و صفحه قائم بر هر یک از منحنی های زیر را در نقطه داده شده بنویسید .

$$t=t, \quad \text{نقطه} \quad x = a \cos \alpha \cos t, \quad y = a \sin \alpha \cos t, \quad z = a \sin t - 3528$$

$$t = \frac{\pi}{4}, \quad \text{نقطه} \quad x = a \sin^2 t, \quad y = b \sin t \cos t, \quad z = c \cos^2 t - 3529$$

$$M(1, 1, 1) \quad \text{نقطه} \quad y = x, \quad z = x^2 - 3530$$

$$M(1, 1, 3) \quad \text{نقطه} \quad x^2 + z^2 = 10, \quad y^2 + z^2 = 10 - 3531$$

- ۳۵۳۴ - $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ و $x + y + z = 0$ در نقطه $M(1, -2, 1)$.
- ۳۵۳۵ - روی منحنی $x = t, y = t^2, z = t^3$ نقطه‌ای پیدا کنید که مماس در آن موازی صفحه $x + 2y + z = 4$ باشد.
- ۳۵۳۶ - ثابت کنید مماس بر مارپیچ $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ با محور Oz زاویه ثابتی می‌سازد.
- ۳۵۳۷ - ثابت کنید که منحنی

$$x = ae^t \cos t, \quad y = ae^t \sin t, \quad z = ae^t$$

- تمام مولدهای مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ را تحت زاویه ثابتی قطع میکند.
- ۳۵۳۸ - ثابت کنید لوکسودروم

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) = e^{k\varphi} \quad (k = \text{const})$$

- که در آن φ و ψ به ترتیب طول و عرض نقطه روی کره میباشند تمام نصف‌النهارات کره را تحت زاویه ثابتی می‌برد.
- ۳۵۳۹ - مطلوبست محاسبه تانژانت زاویه‌ای که مماس در نقطه $M(x_0, y_0)$ بر منحنی

$$z = f(x, y), \quad \frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\sin \alpha}$$

- که در آن f تابعی ایست دیفرانسیبل پذیر، با صفحه Oxy می‌سازد.
- ۳۵۴۰ - مطلوبست محاسبه مشتق تابع

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

در نقطه $M(1, 2, -2)$ در امتداد مماس بر منحنی

$$x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = -2t^4$$

در این نقطه.

معادلات صفحه مماس و خط قائم بر سطوح زیر را در نقطه داده شده

بنویسید:

$$M(1, 2, 0) \text{ در نقطه } z = x^2 + y^2 - 3539$$

$$M(3, 4, 12) \text{ در نقطه } x^2 + y^2 + z^2 = 169 - 3540$$

$$M\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right) \text{ در نقطه } z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - 3541$$

$$M_*(x, y, z) \text{ در نقطه } ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 - 3542$$

$$M_*(1, 1, 1) \text{ در نقطه } z = y + \ln \frac{x}{z} - 3543$$

$$M_*(2, 2, 1) \text{ در نقطه } 2 \frac{x}{z} + 2 \frac{y}{z} = 8 - 3544$$

$$\text{در نقطه } x = a \cos \psi \cos \varphi, \quad y = b \cos \psi \sin \varphi, \quad z = c \sin \psi - 3545$$

$$M_*(\varphi, \psi)$$

$$M_*(\varphi, r) \text{ در نقطه } x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r \operatorname{ctg} \alpha - 3546$$

$$M_*(u, v) \text{ در نقطه } x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = uv - 3547$$

- 3548 - مطلوبست تعیین وضع صفحه مماس بر سطح

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3$$

و تیکه نقطه مماس $M(u, v)$ ($u \neq v$) به نقطه $M_*(u, v)$ خط مرزی $u = v$ سطح بی نهایت نزدیک شود.

$$- 3549 \text{ روی سطح}$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$$

تقاطی را پیدا کنید که صفحات مماس در آن نقاط موازی صفحات مختصات باشد.

$$- 3550 \text{ در چه نقطه‌ای از بیضوی}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

قائم بر آن با محورهای مختصات زوایای متساوی می‌سازد؟

$$- 3551 \text{ بر سطح } x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21 \text{ صفحات مماس موازی با صفحه}$$

$$x + 4y + 6z = 0$$

را عبور دهید.

$$- 3552 \text{ ثابت کنید که صفحات مماس بر سطح } xyz = a^3 \quad (a > 0) \text{ با صفحات}$$

مختصات چهاروجهی به حجم ثابت می‌سازد.

$$- 3553 \text{ ثابت کنید هر صفحه مماس بر سطح}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

پاره خط‌هایی بمجموع ثابت روی محورهای مختصات جدا می‌سازد.

۳۵۵۴ - ثابت کنید صفحه‌های مماس بر مخروط

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

از رأسش میگذرند.

۳۵۵۵ - ثابت کنید قائم‌های بر سطح دوارن

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (f' \neq 0)$$

محور دوران را قطع میکند.

۳۵۵۶ - مطلوبست تصاویر بیضوی

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$$

روی صفحات مختصات.

۳۵۵۷ - مربع $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ را به تعداد متناهی قسمت‌های σ بقطر $\delta \leq \epsilon$ تقسیم شده است. حد اعلاى عده δ را بر آورد کنید اگر امتداد قائمها بر سطح

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

در نقاط دلخواه $P(x, y)$ و $P_1(x_1, y_1)$ متعلق به یک قسمت σ کمتر از 1° اختلاف داشته باشند.

۳۵۵۸ - بفرض آنکه

$$(1) \quad z = f(x, y) \quad \text{که در آن } (x, y) \in D$$

معادله یک سطح و $\varphi(P_1, P)$ زاویه بین قائم‌های بر سطح (۱) در نقاط $P(x, y) \in D$ و $P_1(x_1, y_1) \in D$ باشد ثابت کنید که اگر حوزه D بسته و محدود و تابع $f(x, y)$ دارای مشتق‌های متناهی مرتبه دوم در حوزه D باشد در آنصورت نامساوی لیاپونف درست است:

$$(2) \quad \varphi(P_1, P) < C\rho(P_1, P)$$

که در آن C مقدار ثابت و $\rho(P_1, P)$ فاصله بین نقاط P, P_1 می‌باشد.
۳۵۵۹ - استوانه $ax^2 + ay^2 = bxz$ را در نقطه مشترک و محدود $M(x_0, y_0, z_0)$ تحت چه زاویه‌ای قطع میکند؟

۳۵۶۰ - نشان دهید که سطوح مختصات در دستگاه مختصات کروی $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \theta$, $y = x \operatorname{tg} \varphi$, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ دو بدو برهم عمودند.

۳۵۶۱ - نشان دهید که کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ یک دستگاه سه قائمه تشکیل می‌دهند.

۳۵۶۲ - از هر نقطه $M(x, y, z)$ بازی $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$ سه سطح درجه دوم:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = -1 \quad (a > b > c > 0)$$

می‌گذرند. ثابت کنید این سه سطح متعامدند.

۳۵۶۳ - مطلوبست محاسبه مشتق تابع $u = x + y + z$ در امتداد قائم خارجی بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ در نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$. آن M_0 .

در چه نقاطی از کره مشتق قائم تابع u دارای (الف) بیشترین مقدار است؛ (ب) کمترین مقدار است؟؛ (پ) مساوی صفر است؟

۳۵۶۴ - مطلوبست محاسبه مشتق تابع $u = x^2 + y^2 + z^2$ در امتداد قائم

خارجی بر بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ در نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$. آن M_0 .

۳۵۶۵ - فرض کنیم $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ مشتقات قائم توابع u, v در یک نقطه از سطح

$F(x, y, z) = 0$ باشند. ثابت کنید که

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv) = u \frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial u}{\partial n}$$

پوش دسته منحنی‌های تک پارامتری مستوی زیر را پیدا کنید:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad (p = \text{const}) \quad 3566$$

$$(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\gamma} \quad 3567$$

$$y = kx + \frac{a}{k} \quad (a = p \text{ const}) \quad 3568$$

$$y^2 = 2px + p^2 \quad 3569$$

۳۵۷۰ - مطلوبست منحنی پوش پاره خطی بطول l که دو سر آن روی محورهای مختصات می‌لغزد.

۳۵۷۱ - مطلوبست پوش بیضی‌های $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ که دارای مساحت

ثابت S می‌باشند.

۳۵۷۳ - مطلوبست پوش مسیره‌های گلوله‌ای که در خلا با سرعت اولیه v پرتاب می‌شود بطوریکه زاویه پرتاب α در صفحه قائم، متغیر باشد.
 ۳۵۷۳ - ثابت کنید که پوش قائم‌های بر یک منحنی مستوی، گسترده این منحنی است.

۳۵۷۴ - خصوصیت منحنی‌های مبین دسته منحنی‌های زیر را بررسی کنید
 (c پارامتر متغیر است):

الف) سهمی‌های مکعب (کویک) $y = (x - c)^3$

ب) سهمی‌های نیمه مکعب $y^2 = (x - c)^3$

پ) سهمی‌های نیل $y^3 = (x - c)^2$

ت) ستروفوئیدهای $(y - c)^2 = x^2 \frac{a - x}{a + x}$

۳۵۷۵ - مطلوبست پوش دسته کرات شعاع r که مرکز آنها روی دایره $x = R \cos t, y = R \sin t, z = 0$ ($R > r$ پارامتر است و t) واقع‌اند.

۳۵۷۶ - مطلوبست پوش دسته کرات

$$(x - t \cos \alpha)^2 + (y - t \cos \beta)^2 + (z - t \cos \gamma)^2 = 1$$

که در آن $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ و t پارامتری است متغیر.

۳۵۷۷ - مطلوبست پوش دسته بیضوی‌های $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ که دارای حجم ثابت V می‌باشند.

۳۵۷۸ - مطلوبست پوش دسته کرات شعاع ρ که مرکز آنها روی سطح مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ قرار گرفته است.

۳۵۷۹ - نقطه نورانی در مبدأ مختصات قرار گرفته. مطلوبست مخروط سایه حاصله از کره

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2$$

اگر $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2$

۳۵۸۰ - مطلوبست پوش دسته صفحات

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

در صورتیکه بین پارامترهای p, q معادله زیر برقرار باشد:

$$p^2 + q^2 = 1$$

بخش ۶ - فرمول تیلر

بند ۱ - فرمول تیلر. اگر در یک همسایگی نقطه* (a, b) همه مشتقات جزئی تابع $f(x, y)$ تا مرتبه* $(n + 1)$ (با احتساب آن) پیوسته باشند در آنصورت در این همسایگی دستور زیر صحیح است :

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^i f(a, b) + R_n(x, y) \quad (1)$$

که در آن

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(a + \theta_n(x-a), b + \theta_n(y-b)) \quad (0 < \theta_n < 1)$$

بند ۲ - سری تیلر. اگر تابع $f(x, y)$ بی‌نهایت بار دیفرانسیل‌پذیر و $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, y) = 0$ باشد در اینصورت میتوان این تابع را بصورت سری تام نمایش داد :

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i+j \geq 1}^{\infty} \frac{1}{i!j!} f_{x^i y^j}^{(i+j)}(a, b) (x-a)^i (y-b)^j \quad (2)$$

حالات خاص دستوره‌های (۱) و (۲) بازای $a = b = 0$ بترتیب به دستور ماکلورن و سری ماکلورن موسومند. فرمول‌های مشابهی برای توابع بیش از دو متغیره نیز صادق است.

بند ۳ - نقاط خاص منحنی‌های مستوی. فرض میکنیم در نقطه* $M_0(x_0, y_0)$ منحنی دو بار دیفرانسیل‌پذیر $F(x, y) = 0$ شرایط زیر مجرا باشد :

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0$$

و اعداد

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = F''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = F''_{yy}(x_0, y_0)$$

همگی در عین حال صفر نباشند. آنوقت اگر

$$AC - B^2 > 0 \quad (1) \text{ در اینصورت } M_0 \text{ نقطه* منفرد است ؛}$$

$$AC - B^2 < 0 \quad (2) \text{ در اینصورت } M_0 \text{ نقطه* مضاعف (گرهی) است ؛}$$

$$AC - B^2 = 0 \quad (3) \text{ در اینصورت } M_0 \text{ نقطه* برگشت یا نقطه* منفرد است ؛}$$

در حالت $A = B = C = 0$ ممکن است که نقاط خاصی از نوع پیچیده‌تری هم پیدا شوند. در منحنی‌هاییکه متعلق به کلاسه همواری $C^{(2)}$ نباشند ممکن است ویژگیهای پیچیده‌تری را هم پیدا کرد: نقاط انقطاع، نقاط زاویه‌دار و غیره.

۳۵۸۱- تابع $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ را بر حسب فرمول تیلر در همسایگی نقطه $A(1, -2)$ بسط دهید.

۳۵۸۲- تابع $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ بر حسب فرمول تیلر در همسایگی نقطه $A(1, 1, 1)$ بسط دهید.

۳۵۸۳- مطلوبست محاسبهٔ نمو تابع $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$ بازای عبور از مقادیر $x = 1, y = -1$ به مقادیر $x_1 = 1+h, y_1 = -1+k$.

۳۵۸۴- $f(x+h, y+k, z+l)$ را بر حسب توانهای درست مثبت مقادیر l, k, h اگر

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

بسط دهید.

۳۵۸۵- در بسط تابع

$$f(x, y) = x^y$$

در همسایگی نقطه $A(1, 1)$ جمله‌های تا مرتبهٔ دوم و خود جملهٔ مرتبهٔ دوم را بنویسید.

۳۵۸۶- تابع $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ را بر حسب دستور ماکلورن تا جملهٔ درجهٔ چهارم وارده بسط دهید.

۳۵۸۷- دستورهایی تقریبی با دقت تا جملهٔ مرتبهٔ دوم برای عبارات:

$$\text{الف) } \frac{\cos x}{\cos y} \quad ; \quad \text{ب) } \arctg \frac{1+x+y}{1-x+y}$$

استخراج کنید در صورتیکه $|y|$ و $|x|$ در مقایسه با ۱ کوچک باشند.

۳۵۸۸- عبارت

$$\cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z$$

را بفرض آنکه x, y, z از لحاظ قدر مطلق کوچک باشند ساده کنید.

$$F(x, y) = \frac{1}{4} [f(x+h, y) + f(x, y+h) + f(x-h, y) + f(x, y-h) - f(x, y)]$$

بر حسب توانهای h با دقت تا h^4 بسط دهید.

۳۵۹۰ - فرض کنیم $P_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, 3$) و $f(P) = f(x, y)$ رئوس

مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره با مرکز در نقطه $P(x, y)$

و بشعاع ρ و ضمناً $x_1 = x + \rho$, $y_1 = y$ باشد. تابع

$$F(\rho) = \frac{1}{3} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)]$$

را بر حسب توانهای درست مثبت ρ با دقت تا ρ^2 بسط دهید.

۳۵۹۱ - تابع

$$\Delta_{xy} f(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$

را بر حسب توانهای h, k بسط دهید.

۳۵۹۲ - تابع

$$F(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi) d\varphi$$

را بر حسب توانهای ρ بسط دهید.

توابع زیر را بسری ماکورن بسط دهید:

$$f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y - 3597 \quad f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n - 3593$$

$$f(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y - 3598 \quad f(x, y) = \ln(1+x+y) - 3594$$

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) - 3599 \quad f(x, y) = e^x \sin y - 3595$$

$$f(x, y) = \ln(1+x) \ln(1+y) - 3600 \quad f(x, y) = e^x \cos y - 3596$$

۳۶۰۱ - سه جمله از بسط تابع زیر بسری ماکورن را بنویسید:

$$f(x, y) = \int_0^1 (1+x)^{x^2 y} dt$$

۳۶۰۲ - تابع $e^x + y$ را بر حسب توانهای درست مثبت دوجمله‌ای‌های $x-1$,

$y+1$ بسری تام بسط دهید.

۳۶۰۳ - بسط تابع $f(x, y) = \frac{x}{y}$ بسری تیلر را در همسایگی نقطه $M(1, 1)$ بنویسید.

۳۶۰۴ - فرض کنیم z تابع ضمنی از y و x تعریف شده با معادله $z^3 - 2xz + y = 0$ باشد که بازای $y=1, x=1$ مقدار $z=1$ را اختیار میکند.

چند جمله از بسط تابع z بر حسب توانهای صعودی دوجمله‌ئیهای $y-1$ و $x-1$ را بنویسید.

انواع نقاط خاص منحنی‌های زیر را بررسی کرده و این منحنی‌ها را بطور تقریبی نمایش دهید:

$$y^2 = ax^2 + x^3 - 3605 \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) - 3609$$

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0 - 3606 \quad (y - x^2)^2 = x^6 - 3610$$

$$x^2 + y^2 = x^4 + y^4 - 3607 \quad (a+x)y^2 = (a-x)x^2 - 3611$$

$$x^2 + y^4 = x^7 - 3608$$

۳۶۱۲ - شکل منحنی $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$ را بر حسب مقادیر پارامترهای a, b, c ($a \leq b \leq c$) بررسی کنید.

نقاط خاص منحنی‌های ترانساندان (متعالی) زیر را بررسی کنید:

$$y^2 = 1 - e^{-x^2} - 3613 \quad y = \arctg\left(\frac{1}{\sin x}\right) - 3617$$

$$y^2 = 1 - e^{-x^3} - 3614$$

$$y^2 = \sin \frac{\pi}{x} - 3618$$

$$y = x \ln x - 3615$$

$$y^2 = \sin x^2 - 3619$$

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - 3616$$

$$y^2 = \sin^2 x - 3620$$

بخش ۷ - اکستریم تابع چند متغیره

نید ۱ - تعریف اکستریم. فرض کنیم تابع $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ در همسایگی نقطه P معین باشد. هرگاه $f(P_0) > f(P)$ یا $f(P_0) < f(P)$ بازای $\rho(P_0, P) < \delta$. آنگاه میگویند که تابع $f(P)$ در نقطه P_0 دارای اکستریم (بترتیب ماکزیمم یا مینیمم) است.

نید ۲ - شرط لازم اکستریم. تابع دیفرانسیل پذیر $f(P)$ فقط در نقطه سکون P_0 میتواند به اکستریم برسد یعنی در چنین نقطه‌ایکه $df(P_0) = 0$.

در نتیجه نقاط اکسترمم تابع $f(P)$ در دستگاه معادلات $f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) صدق میکنند.

بند ۳ - شرط کافی اکسترمم. تابع $f(P)$ در نقطه P_0 :

الف) دارای ماکزیمم است اگر $df(P_0) = 0$ و $d^2f(P_0) < 0$ بازای

$\sum_{i=1}^n |dx_i| \neq 0$ و $df(P_0) = 0$ اگر $d^2f(P_0) > 0$ و بازای

$$\sum_{i=1}^n |dx_i| \neq 0$$

بررسی علامت دیفرانسیل مرتبه دوم $d^2f(P_0)$ را ممکن است با تبدیل صورت درجه دوم به صورت کانونیک صورت گیرد.

بخصوص برای حالت تابع $f(x, y)$ از دو متغیر مستقل x و y در نقطه سکون $df(x_0, y_0) = 0$ با شرط $D = AC - B^2 \neq 0$ که در آن

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

۱) می‌نیمم اگر $A > 0, D > 0, C > 0$ ؛

۲) ماکزیمم اگر $A < 0, D > 0, C < 0$ ؛

۳) عدم اکسترمم اگر $D < 0$.

بند ۴ - اکسترمم مشروط. مساله تعیین اکسترمم تابع $f(P_0) = f(x_1, \dots, x_n)$

بشرط وجود سری روابط ($m < n$) $\varphi_i(P) = 0$ ($i = 1, \dots, m$) منجر به تعیین اکسترمم معمولی تابع لاگرانژ

$$L(P) = f(P) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(P)$$

می‌شود که در آن ضرایب ثابتی میباشند. مساله وجود و خصوصیت اکسترمم مشروط در حالت‌های ساده بر پایه بررسی علامت دیفرانسیل مرتبه دوم $d^2L(P_0)$ در نقطه سکون P_0 تابع $L(P)$ بشرطی که متغیرهای dx_1, \dots, dx_n با روابط زیر مربوط باشند حل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

بند ۵ - اکسترمم مطلق. تابع $f(P)$ دیفرانسیل پذیر در حوزه بسته و

محدود، به بزرگترین و کمترین مقدارهای خود در این حوزه یا در نقطه سکون و یا در نقاط مرزی میرسد.

اکسترمم توابع چند متغیره زیر را بررسی کنید :

$$z = x^y y^x (7 - x - y) - 3625 \quad z = x^y + (y - 1)^y - 3621$$

$$z = x^y + y^y - 2xy - 3626 \quad z = x^y - (y - 1)^y - 3622$$

$$z = x^x + y^x - x^y - 2xy - y^y - 3627 \quad z = (x - y + 1)^y - 3623$$

$$z = 2x^x + y^x - x^y - 2y^y - 3627, 1 \quad z = x^y - xy + y^y - 2x + y - 3624$$

$$z = xy + \frac{0 \cdot 0}{x} + \frac{y \cdot 0}{y} \quad (x > 0, y > 0) - 3628$$

$$z = xy \sqrt{1 - \frac{y^y}{a^y} - \frac{y^y}{b^y}} \quad (a > 0, b > 0) - 3629$$

$$z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^y + y^y + 1}} \quad (a^y + b^y + c^y \neq 0) - 3630$$

$$z = 1 - \sqrt{x^y + y^y} - 3631$$

$$z = e^{2x+2y} (\sqrt{x^y} - \sqrt{xy} + \sqrt{y^y}) - 3632$$

$$z = e^{x^y - y} (0 - 2x + y) - 3633$$

$$z = (0x + \sqrt{y} - 20) e^{-(x^y + xy + y^y)} - 3634$$

$$z = x^y + xy + y^y - \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{10} \ln y - 3635$$

$$z = \sin x + \cos y + \cos(x - y) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right) - 3636$$

$$z = \sin x \sin y \sin(x + y) \quad (0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi) - 3637$$

$$z = x - 2y + \ln \sqrt{x^y + y^y} + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 3638$$

$$z = xy \ln(x^y + y^y) - 3639$$

$$z = x + y + \frac{1}{2} \sin x \sin y - 3640$$

$$z = (x^y + y^y) e^{-(x^y + y^y)} - 3641$$

$$u = x^y + y^y + z^y + 2x + \frac{1}{2}y - 7z - 3642$$

$$u = x^y + y^y + z^y + 12xy + 2z - 3643$$

$$u = x + \frac{y^y}{\frac{1}{2}x} + \frac{z^y}{y} + \frac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0) - 3644$$

$$u = xy^y z^y (a - x - 2y - 3z) \quad (a > 0) - 3645$$

$$u = \frac{a^y}{x} + \frac{x^y}{y} + \frac{y^y}{z} + \frac{z^y}{b} - 3646$$

$$(x > 0, y > 0, z > 0, a > 0, b > 0)$$

$$u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z) - ۳۶۴۷$$

($0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, $0 < z < \pi$)

$$u = x_1 x_2^2 \dots x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \dots - nx_n) - ۳۶۴۸$$

($x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ..., $x_n > 0$)

$$u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n} - ۳۶۴۹$$

($x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$)

۳۶۵۰ - مساله هویگنس. بین دو عدد مثبت a و b عدد n x_1, x_2, \dots, x_n را طوری درج کنید تا کسر

$$u = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \dots (x_n + b)}$$

بیشترین مقدار را دارا باشد.

مقادیر اکستریم توابع ضمنی z از متغیرهای x, y را پیدا کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0 - ۳۶۵۱$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0 - ۳۶۵۲$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2) - ۳۶۵۳$$

نقاط اکستریم مشروط توابع زیر را پیدا کنید:

$$x + y = 1 \quad \text{اگر} \quad z = xy - ۳۶۵۴$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{اگر} \quad z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - ۳۶۵۵$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{اگر} \quad z = x^2 + y^2 - ۳۶۵۶$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{اگر} \quad z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - ۳۶۵۷$$

$$4x^2 + y^2 = 20 \quad \text{اگر} \quad z = x^2 + 12xy - 2y^2 - ۳۶۵۷, 1$$

$$x - y = \frac{\pi}{4} \quad \text{اگر} \quad z = \cos^2 x + \cos^2 y - ۳۶۵۸$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{اگر} \quad u = x - 2y + 2z - ۳۶۵۹$$

$$\text{اگر} \quad u = x^m y^n z^p - ۳۶۶۰$$

$$x + y + z = a \quad (m > 0, n > 0, p > 0, a > 0)$$

اگر $u = x^2 + y^2 + z^2 - 3661$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0)$$

$x + 2y + 3z = a$ اگر $u = xy^2z^3 - 3662$

$(x > 0, y > 0, z > 0, a > 0)$

$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$ اگر $u = xyz - 3663$

$x^2 + y^2 = 2, y + z = 2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) اگر $u = xy + yz - 3663, 1$

$x + y + z = \frac{\pi}{4}$ اگر $u = \sin x \sin y \sin z - 3664$

$(x > 0, y > 0, z > 0)$

اگر $u \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 3665$

$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$

$(a > b > c > 0, \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1)$

اگر $u = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - 3666$

$Ax + By + Cz = 0, x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ که در آن $\frac{\xi}{\cos \alpha} = \frac{\eta}{\cos \beta} = \frac{\zeta}{\cos \gamma}$

اگر $u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 3667$

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1 \quad (a_i > 0; i = 1, 2, \dots, n)$$

اگر $u = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$ ($p > 1$) - 3668

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ ($a > 0$)

اگر $u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{x_n} - 3669$

$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n = 1$

$(\alpha_i > 0, \beta_i > 0, x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n)$

اگر $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} - ۳۶۷۰$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \quad (a > 0, \alpha_i > 1, i = 1, 2, \dots, n)$

۳۶۷۱ - مطلوبست اکسترمم صورت درجه دوم (کوادراتیک)

$$u = \sum_{i,j}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

بازای شرط

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$$

۳۶۷۲ - نامساوی

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n$$

را اگر $n \geq 1, x \geq 0, y \geq 0$ ثابت کنید.

راهنامه‌ی - می‌نیمم تابع $z = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ را بازای شرط $x + y = s$

جستجو کنید.

۳۶۷۳ - نامساوی هولدر را ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}}$$

$$\left(a_i \geq 0, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n; k > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1 \right)$$

راهنامه‌ی - می‌نیمم تابع

$$u = \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}}$$

را بازای شرط

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = A$$

جستجو کنید.

۳۶۷۴ - نامساوی آدامار

$$A^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)$$

را برای دترمینان $A = |a_{ij}|$ مرتبه n ثابت کنید.
راهنمائی - اکسترمم دترمینان $A = |a_{ij}|$ را با وجود بستگی‌های

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = S_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

بررسی کنید.

بیشترین مقدار (sup) و کمترین مقدار (inf) توابع زیر را در حوزه داده شده تعیین کنید:

$$z = x - 2y - 3 \quad \text{اگر } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y - 3 \quad \text{اگر } x^2 + y^2 \leq 25$$

$$z = x^2 - xy + y^2 \quad \text{اگر } |x| + |y| \leq 1$$

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 3 \quad \text{اگر } x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$$

$$u = x + y + z \quad \text{اگر } x^2 + y^2 \leq z \leq 1$$

$$-3 \quad \text{کران پائینی (inf) و کران بالایی (sup) تابع}$$

$$u = (x + y + z)e^{-(x + 2y + 3z)}$$

را در حوزه $x > 0, y > 0, z > 0$ بدست آورید.

$$-3 \quad \text{نشان دهید که تابع } z = (1 + e^y) \cos x - ye^y \text{ دارای تعداد نامتناهی}$$

ماکزیمم است و حتی یک می‌نیمم هم ندارد.

$$-3 \quad \text{آیا برای می‌نیمم تابع } f(x, y) \text{ در نقطه } M_0(x_0, y_0) \text{ کافی است که}$$

این تابع در طول هر خط مستقیم مار بر نقطه M_0 می‌نیمم داشته باشد؟

$$\text{مثال } f(x, y) = (x - y)^2(2x - y)^2 \text{ را در نظر بگیرید.}$$

$$-3 \quad \text{عدد مثبت مفروض } a \text{ را بصورت حاصلضرب } n \text{ عامل مثبت طوری نمایش}$$

دهید که مجموع معکوسات آنها کمترین باشد.

$$-3 \quad \text{عدد مثبت مفروض } a \text{ را بصورت مجموع } n \text{ عدد طوری نمایش دهید که}$$

مجموع مربعات آنها کمترین باشد.

$$-3 \quad \text{عدد مثبت مفروض } a \text{ را بصورت حاصلضرب } n \text{ عامل مثبت طوری}$$

نمایش دهید که مجموع توانهای مثبت مفروض آنها کمترین باشد.

$$-3 \quad \text{روی صفحه } n \text{ نقطه } P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n) \text{ مادی}$$

بجرمهای بترتیب برابر m_1, m_2, \dots, m_n داده شده‌اند. نقطه

$$P(x, y) \text{ در چه وضعی باشد تا گشتاور لختی دستگاه نقاط مفروض}$$

نسبت باین نقطه حداقل باشد؟

$$-3 \quad \text{در چه اندازه‌هایی وان مکعب مستطیل رویازی که گنجایشش } V$$

است، کمترین سطح را دارد؟

۳۶۸۸- در چه اندازه‌هایی وان استوانه‌ای رویازی که مقطع عرضی آن نیم‌دایره و سطح آن S است بیشترین گنجایش را دارد؟

۳۶۸۹- روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ نقطه‌ای تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آن از n نقطه مفروض $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) مینیمال باشد.

۳۶۹۰- جسمی از استوانه قائم مستدیری که بمخروط قائم دواری منتهی می‌شود تشکیل شده است. بفرض اینکه سطح کل جسم مساوی Q باشد، ابعاد آنرا چنان تعیین کنید که حجم جسم بیشترین باشد.

۳۶۹۱- جسمی که حجم آن برابر V است از یک مکعب مستطیل قائم تشکیل شده است که قاعده‌های بالایی و پائینی آن به هرمهای منتظم چهارپهلوی متساوی منتهی شده. بازای چه زاویه شیب سطوح جانبی هرهما نسبت به سطح قاعده، سطح کل جسم مینیمال است؟

۳۶۹۲- مطلوبست تعیین مستطیلی با محیط مفروض $2p$ که در دوران حول یکی از اضلاعش جسم با بیشترین حجم را تولید کند.

۳۶۹۳- مطلوبست تعیین مثلثی با محیط مفروض $2p$ که در دوران حول یکی از اضلاعش جسم با بیشترین حجم را تولید کند.

۳۶۹۴- در نیمکره بشاع R مکعب مستطیل با بزرگترین حجم را محاط کنید.

۳۶۹۵- در مخروط قائم مستدیر مفروض مکعب مستطیل با بزرگترین حجم را محاط کنید.

۳۶۹۶- در بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

مکعب مستطیل با بیشترین حجم را محاط کنید

۳۶۹۷- در مخروط مستدیر قائم که زاویه شیب مولد l آن با صفحه قاعده α است مکعب مستطیل با بیشترین سطح کل را محاط کنید.

۳۶۹۸- در قطاع پارابولیوید الیپتیک (سه‌موی بیضی گونه) $z=c$ ، $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

مکعب مستطیل با بیشترین حجم را محاط کنید.

۳۶۹۹- کوتاهترین فاصله نقطه $M(x, y, z)$ از صفحه

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

را پیدا کنید.

۳۷۰۰- کوتاهترین فاصله d بین دو خط فضایی

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

را پیدا کنید.

۳۷۰۱ - کوتاه‌ترین فاصله^۴ بین سهمی $y = x^2$ و خط $x - y - 2 = 0$ پیدا کنید.

۳۷۰۲ - نیم‌محورهای منحنی مرکزی درجه^۴ دوم

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$$

را پیدا کنید.

۳۷۰۳ - نیم‌محورهای سطح مرکزی درجه^۴ دوم

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx = 1$$

را پیدا کنید.

۳۷۰۴ - مساحت بیضی حاصل از تقاطع استوانه^۴

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

با صفحه^۴ زیر را حساب کنید :

$$Ax + By + Cz = 0$$

۳۷۰۵ - مطلوبست محاسبه^۴ مساحت مقطع بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

با صفحه^۴

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$$

که در آن

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

۳۷۰۶ - طبق اصل فرما نوری که از نقطه^۴ A خارج می‌شود و به نقطه^۴ B میرسد در روی منحنی‌ای منتشر می‌شود که حد اقل زمان برای عبور آن لازم است.

فرض میکنیم نقاط A و B در محیطهای اپتیک متفاوتی که بوسیلهٔ صفحه‌ای از هم جدا شده‌اند قرار داشته باشند. اگر سرعت انتشار نور در محیط اول v_1 و در محیط دوم v_2 باشد قانون انکسار نور را نتیجه بگیرید.

۳۷۰۷- بازای چه زاویه تابشی انحراف شعاع نورانی (یعنی زاویهٔ بین شعاع تابش و شعاع خروجی) گذرنده از منشور بزایهٔ انکسار α و ضریب انکسار n کمترین خواهد بود؟ این کمترین مقدار انحراف را تعیین کنید.

۳۷۰۸- مقادیر متغیر x, y در معادلهٔ خطی

$$y = ax + b$$

که تعیین ضرایب آن مورد نظر است صدق میکنند. در نتیجه یک سری اندازه‌گیری‌های متساوی‌الذات برای اندازه‌های x, y مقادیر $x_i, y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ حاصل شده است.

با استفاده از روش کمترین مربعات مطلوبست تعیین محتمل‌ترین مقادیر ضرایب a و b .

راهنمائی - طبق روش کمترین مربعات محتمل‌ترین مقادیر ضرایب a و b عبارتند از مقادیری که بازای آنها مجموع مجذورات خطاهای

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

کمترین باشد.

۳۷۰۹- روی صفحه دستگاه n نقطهٔ $M_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ داده شده است. بازای چه وضعی از خط $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ مجموع مجذورات انحرافات نقاط مفروض از این خط کمترین خواهد بود؟

۳۷۱۰- تابع x^2 را در فاصلهٔ $(1, 3)$ با تابع خطی $ax + b$ بطور تقریبی طوری عوض کنید که مقدار مطلق انحراف

$$\Delta = \sup |x^2 - (ax + b)| \quad (1 \leq x \leq 3)$$

مینیمال باشد.

فصل ۷

انتگرالهای وابسته به پارامتر

بخش ۱ - انتگرالهای ویژه وابسته به پارامتر

بند ۱ - پیوستگی انتگرال. هرگاه تابع $f(x, y)$ در حوزه کران دار $R[a \leq x \leq A, b \leq y \leq B]$ معین و پیوسته باشد آنگاه

$$F(y) = \int_a^A f(x, y) dx$$

نیز تابع پیوسته‌ای روی قطعه $b \leq y \leq B$ می‌باشد.

بند ۲ - مشتق‌گیری زیر علامت انتگرال. اگر علاوه بر شرایط بند ۱ مشتق جزئی $f'_y(x, y)$ در حوزه R پیوسته باشد در اینصورت بازای $b < y < B$ فرمول لایبنتز

$$\frac{d}{dy} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A f'_y(x, y) dx$$

محقق است.

در حالت کلی‌تر وقتی حدود انتگرال‌گیری توابع دیفرانسیل‌پذیر $\varphi(y)$, $\psi(y)$ از پارامتر y و $a < \varphi(y) < A$, $a < \psi(y) < A$ بازای $b < y < B$ باشد در اینصورت داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx &= f(\psi(y), y) \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y) + \\ &+ \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx \quad (b < y < B) \end{aligned}$$

بند ۳ - انتگرال گیری زیر علامت انتگرال بازای شرایط بند ۱ داریم :

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy$$

۳۷۱۱ - نشان دهید که انتگرال

$$F(y) = \int_a^A f(x, y) dx$$

از تابع ناپیوسته $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$ تابعی پیوسته است. نمودار تابع $u = F(y)$ را رسم کنید.

۳۷۱۲ - پیوستگی تابع

$$F(y) = \int_a^A \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx$$

را که در آن $f(x)$ تابعی پیوسته و مثبت روی قطعه $[0, 1]$ می باشد بررسی کنید.

۳۷۱۳ - مطلوبست :

$$\text{الف) } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$$

$$\text{پ) } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos \alpha x dx$$

$$\text{ب) } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx$$

$$\text{ت) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$$

۳۷۱۳،۱ - مطلوبست

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta$$

۳۷۱۴ - فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعه $[A, B]$ پیوسته باشد. ثابت کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(a) \quad (A < a < x < B)$$

- ۱، ۳۷۱۴ - فرض کنیم (۱) $\varphi_n(x) \geq 0$ روی $[-1, 1]$ ؛
 (۲) $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ بازای $n \rightarrow \infty$ روی $0 \leq \varepsilon \leq |x| \leq 1$ ؛
 (۳) $\int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx \rightarrow 1$ بازای $n \rightarrow \infty$.

ثابت کنید که اگر $f(x) \in C[-1, 1]$ در اینصورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) \varphi_n(x) dx = f(0)$$

۳۷۱۵ - آیا میتوان عمل حدگیری در عبارت

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx$$

را زیر علامت انتگرال انجام داد ؟

۳۷۱۶ - آیا میتوان با قاعده لایبنتز مشتق تابع

$$F(y) = \int \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

را بازای $y = 0$ حساب نمود ؟

۳۷۱۷ - مطلوبست محاسبه $F'(x)$ اگر

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy$$

۳۷۱۸ - مطلوبست $F'(\alpha)$ اگر :

الف) $F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx$ ؛ ب) $F(\alpha) = \int_{\alpha+\alpha}^{\alpha+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$

پ) $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\log(1+\alpha x)}{x} dx$ ؛

ت) $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha) dx$

ث) $F(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy$

$$F(x) = \int_0^x (x+y)f(y) dy$$

که در آن $f(x)$ تابعی است دیفرانسیل پذیر.
 ۳۷۲۰ - مطلوبست محاسبه $F''(x)$ اگر

$$F(x) = \int_a^b f(y) |x-y| dy$$

که در آن $a < b$ و $f(y)$ تابعی است پیوسته روی $[a, b]$.
 ۳۷۲۱ - مطلوبست $F''(x)$ اگر

$$F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x+\xi+\eta) d\eta \quad (h > 0)$$

که در آن $f(x)$ تابعی است پیوسته.
 ۳۷۲۲ - مطلوبست $F^{(n)}(x)$ اگر

$$F(x) = \int_0^x f(t) (x-t)^{n-1} dt$$

۳۷۲۲، ۱ - مطلوبست اثبات دستور

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x y^n \cos \left(y + \frac{n\pi}{2} \right) dy \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

با استفاده از دستور (۱) برآورد زیر را نتیجه بگیرید:

$$x \in (-\infty, +\infty) \text{ بازای } \left| \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

۳۷۲۳ - تابع $f(x) = x^2$ را روی فاصله $1 \leq x \leq 3$ بطور تقریبی با تابع خطی $a + bx$ طوری عوض کنید که

$$\int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx = \min$$

۳۷۲۴ - دستور تقریبی بصورت

$$\sqrt{1+x^2} \approx a + bx \quad (0 \leq x \leq 1)$$

را از شرط اینکه انحراف متوسط کوادراتیک توابع $a + bx$ و $\sqrt{1+x^2}$ روی فاصله مفروض $[0, 1]$ حد اقل باشد بدست آورید.

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 < k < 1)$$

را پیدا کنید و آنها را بر حسب توابع $E(k)$ و $F(k)$ بیان کنید.
 نشان دهید که $E(k)$ در معادله دیفرانسیل

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1 - k^2} = 0$$

صدق میکند.

۲۷۲۶ - ثابت کنید که تابع بسل با اندیس (شاخص) درست n

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) \, d\varphi$$

در معادله بسل

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0$$

صادق است.

۲۷۲۷ - فرض کنیم

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\varphi(x) \, dx}{\sqrt{\alpha - x}}$$

که در آن تابع $\varphi(x)$ و مشتق آن $\varphi'(x)$ روی قطعه $0 \leq x \leq \alpha$ پیوسته می‌باشند.

ثابت کنید بازای $0 < \alpha < a$ داریم:

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^{\alpha} \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha - x}} \, dx$$

راهنمایی - فرض کنید $x = \alpha t$.

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y) v(y) dy$$

که در آن

$$K(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & \text{اگر } x \leq y \\ y(1-x), & \text{اگر } x > y \end{cases}$$

و $v(y)$ پیوسته می‌باشد، در معادله*

$$u''(x) = -v(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

صالح است.

۳۷۲۹ - مطلوبست $F''_{xy}(x, y)$ اگر

$$F(x, y) = \int_{\frac{x}{y}}^{xy} (x-yz) f(z) dz$$

که در آن $f(z)$ تابعی است دیفرانسیل پذیر.

۳۷۳۰ - فرض کنیم $f(x)$ تابع دو بار دیفرانسیل پذیر و $F(x)$ تابع دیفرانسیل پذیر باشد.

ثابت کنید که تابع

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz$$

در معادله* ارتعاش تار

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

و شرایط اولیه* $u_t(x, 0) = F(x)$ و $u(x, 0) = f(x)$ صدق میکند.

۳۷۳۱ - نشان دهید که اگر تابع $f(x)$ روی قطعه* $[0, l]$ پیوسته باشد و $0 \neq (x-\xi)^2 + y^2 + z^2 \leq l$ بازای $0 \leq \xi \leq l$ در اینصورت تابع

$$u(x, y, z) = \int_0^l \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2}}$$

در معادله* لاپلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

صدق میکند .
با مشتق گیری نسبت به پارامتر ، انتگرال های زیر را حساب کنید :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^x \sin^x x + b^x \cos^x x) dx - ۳۷۳۲$$

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx - ۳۷۳۳$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx - ۳۷۳۴$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \times \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1) - ۳۷۳۵$$

۳۷۳۶ - با کاربرد دستور

$$\frac{\arctg x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2}$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_0^1 \frac{\arctg x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

۳۷۳۷ - با استفاده از انتگرال گیری زیر علامت انتگرال ، مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0)$$

۳۷۳۸ - انتگرالهای :

$$\int \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (\text{الف})$$

$$\int \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0) \quad (\text{ب})$$

را حساب کنید .

۳۷۲۹ - فرض کنیم $E(k)$ و $F(k)$ انتگرالهای الیپتیک کامل (مساله ۳۷۲۵ را ببینید) باشد. مطلوبست اثبات دستورهای

$$\int_0^k F(k) k dk = E(k) - k^2 F(k) \quad \text{الف}$$

$$\int_0^k E(k) k dk = \frac{1}{3} [(1+k^2)E(k) - k^2 F(k)] \quad \text{ب}$$

که در آن $k^2 = 1 - k'^2$.
۳۷۴۰ - مطلوبست اثبات دستور

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x)$$

که در آن $J_0(x)$ و $J_1(x)$ توابع بسل برای اندیسهای ۰ و ۱ میباشند. (مساله ۳۷۲۹ را ببینید).

بخش ۲ - انتهای ناولیته وابسته به پارامتر.

همگرایی یکنواخت انتگرالها

بند ۱ - تعریف همگرایی یکنواخت. انتگرال ناولیته

$$(1) \quad \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

را که در آن $f(x, y)$ در حوزه $a \leq x < +\infty, y_1 < y < y_2$ پیوسته میباشد در فاصله (y_1, y_2) وقتی پیوسته یکنواخت نامند که برای هر $\epsilon > 0$ عددی مانند $B = B(\epsilon)$ وجود داشته باشد بطوری که برای هر $b \geq B$ داشته باشیم:

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \epsilon \quad (y_1 < y < y_2)$$

همگرایی یکنواخت انتگرال (۱) هم ارز همگرایی یکنواخت جمیع سریهای

بشکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y) dx$$

میباشد،

که در آن $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ و $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$

اگر انتگرال (۱) در فاصله (y_1, y_2) بطور یکنواخت همگرا باشد در آنصورت تابع پیوسته‌ای از پارامتر y در این فاصله می‌باشد
 بند ۲- آزمون (معیار) کوشی. برای همگرایی یکنواخت انتگرال (۱) در فاصله (y_1, y_2) لازم و کافی است که بازای $\varepsilon > 0$ دلخواه عدد $B = B(\varepsilon)$ وجود داشته باشد چنان که

$$y_1 < y < y_2 \quad \left| \int_{b'}^{b''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

اگر $b'' > B, b' > B$.

بند ۳- آزمون ویرشتراس. برای همگرایی یکنواخت انتگرال (۱) کافی است که تابع مازوران $F(x)$ مستقل از پارامتر y وجود داشته باشد بطوریکه
 (۱) $|f(x, y)| \leq F(x)$ بازای $a \leq x \leq +\infty$

و

$$\int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty \quad (۲)$$

بند ۴- قضایای مشابهی برای انتگرالهای ناویژه از توابع ناپیوسته وجود دارند.

مطلوبست تعیین حوزه همگرایی انتگرالهای زیر :

$$\int_1^2 \frac{dx}{|\ln x|^p} - ۳۷۴۴$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx - ۳۷۴۱$$

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{n \sqrt{1-x^2}} dx - ۳۷۴۵$$

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx - ۳۷۴۲$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx \quad (p > 0) - ۳۷۴۶$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx - ۳۷۴۳$$

بکمک مقایسه با سری، همگرایی انتگرالهای زیر را بررسی کنید :

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt{\sin^2 x}} - ۳۷۴۹$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx - ۳۷۴۷$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx - ۳۷۵۰$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} \quad (n > 0) - ۳۷۴۸$$

۳۷۵۱ - منظور از اینکه انتگرال

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

در فاصله مفروض (y_1, y_2) بطور غیر یکنواخت همگراست چیست؟ آنرا با معنای مثبت فرمول بندی کنید.

۳۷۵۲ - ثابت کنید که هرگاه (۱) انتگرال

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

همگرا و (۲) تابع $\varphi(x, y)$ نسبت به x کراندار و یکنوا باشد آنگاه انتگرال

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x, y) dx$$

بطور یکنواخت همگراست (در حوزه مربوطه).

۳۷۵۳ - ثابت کنید که انتگرال همگرای یکنواخت

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2} dx \quad (0 < y < 1)$$

را نمیتوان با انتگرال همگرای مستقل از پارامتر مازوره کرد.

۳۷۵۴ - نشان دهید که انتگرال

$$I = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

(۱) در فاصله دلخواه $a \leq \alpha \leq b$ بطور یکنواخت همگراست و (۲) در

فاصله $0 \leq \alpha \leq b$ بطور غیر یکنواخت همگراست.

۳۷۵۵ - ثابت کنید که انتگرال دیریکله

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

(۱) روی هر قطعه $[a, b]$ که شامل مقدار $\alpha = 0$ نباشد بطور یکنواخت

همگراست و (۲) روی هر قطعه $[a, b]$ که شامل مقدار $\alpha = 0$ باشد بطور

غیر یکنواخت همگراست.

۳۷۵۵،۱ - همگرایی یکنواخت انتگرال

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

را در فواصل زیر بررسی کنید: (لف) $1 < \alpha \leq \alpha + \infty$ ؛ (ب) $1 < \alpha < +\infty$
 ۳۷۵۵،۲ - همگرایی یکنواخت انتگرال زیر را برای $0 < \alpha < 1$ بررسی کنید:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

۳۷۵۵،۳ - نشان دهید که انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^n + 1}$$

فاصله $1 < \alpha < +\infty$ همگرایی نایکنواخت است.

انتگرالهای زیر را در فاصله ذکر شده بررسی کنید:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx \quad (0 < \alpha \leq \alpha < +\infty) - 3756$$

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \, dx \quad (a \leq \alpha \leq b) - 3757$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} \, dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty) - 3758$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-a)^2 + 1} \quad (0 \leq \alpha < +\infty) - 3759$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} \, dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty) - 3760$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln^p x}{x \sqrt{x}} \, dx \quad (0 \leq p \leq 1) - 3760,1$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty) - ۳۷۶۱$$

که در آن $p > 0$ ثابت است.

$$\int_0^{+\infty} \sqrt[p]{\alpha} e^{-ax^p} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty) - ۳۷۶۲$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx - ۳۷۶۳$$

الف) $a < \alpha < b$ ؛ ب) $-\infty < \alpha < +\infty$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy \quad (-\infty < x < +\infty) - ۳۷۶۴$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx \quad (p \geq 0) - ۳۷۶$$

۱، ۳۷۶۵ - عدد $b > 0$ را طوری انتخاب کنید که

$$0 < \int_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} < \varepsilon \quad \text{بازای } 1, 1 \leq n \leq 10$$

که در آن $\varepsilon = 10^{-6}$

$$\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx - ۳۷۶۶$$

الف) $p > 0$ ؛ ب) $p > 0$ (الف) $(q > -1)$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (0 \leq n < +\infty) - ۳۷۶۷$$

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \times \frac{dx}{x^n} \quad (0 < n < 2) - ۳۷۶۸$$

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \quad \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right) - ۳۷۶۹$$

$$\int \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} \quad (0 \leq \alpha \leq 1) - 3770$$

۳۷۷۱ - انتگرالی را بازای مقدار مفروضی از پارامتر، همگرای یکنواخت نامند اگر در یک همسایگی این مقدار، همگرای یکنواخت باشد. ثابت کنید که انتگرال

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1 + a^2 x^2}$$

بازای هر مقدار $\alpha \neq 0$ همگرای یکنواخت است و بازای $\alpha = 0$ همگرای یکنواخت نیست.

۳۷۷۲ - آیا در عبارت زیر انتقال علامت حد بزرگ علامت انتگرال معتبر است :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

۳۷۷۳ - تابع $f(x)$ در فاصله $(0, +\infty)$ انتگرال پذیر است. مطلوبست اثبات دستور

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

۳۷۷۳،۱ - ثابت کنید که هرگاه $f'(x)$ بطور مطلق روی $[a, +\infty)$ انتگرال پذیر باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وجود دارد.

۳۷۷۴ - اگر $f(x)$ بطور مطلق در فاصله $(0, +\infty)$ انتگرال پذیر باشد ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0$$

۳۷۷۵ - ثابت کنید که هر گاه (1) در هر فاصله متناهی (a, b) ، $f(x, y) \Rightarrow f(x, y)$ ؛ (2) $|f(x, y)| \leq F(x)$ که در آن

$$\int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n} \right] dx$$

با استفاده از حدگیری زیر علامت انتگرال.
 ۳۷۷۶، ۱ - فرض کنیم $f(x)$ روی $[0, +\infty)$ پیوسته و کراندار باشد. ثابت کنید که

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx = f(0)$$

۳۷۷۶، ۲ - مطلوبست محاسبه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^n + 1}$$

۳۷۷۷ - ثابت کنید که انتگرال

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$$

تابع پیوسته‌ایست از پارامتر a .
 ۳۷۷۷، ۱ - نشان دهید که

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx$$

در فاصله $0 < \alpha < 1$ تابع ایست پیوسته.
 ۳۷۷۸ - مطلوبست تعیین نقاط انفصال تابع

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{x} dx$$

نمودار تابع $y = F(a)$ را رسم کنید.

توابع زیر را در فواصل داده‌شده از لحاظ پیوستگی بررسی کنید:

$$\alpha > 2 \quad F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2 + x^\alpha} \quad ۳۷۷۹$$

$$\alpha > 0 \quad \text{بازای} \quad F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx - ۳۷۸۰$$

$$0 < \alpha < 2 \quad \text{بازای} \quad F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi-x)^\alpha} dx - ۳۷۸۱$$

$$0 < \alpha < 1 \quad \text{بازای} \quad F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha} dx - ۳۷۸۲$$

$$-\infty < \alpha < +\infty \quad \text{بازای} \quad F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x^2} dx - ۳۷۸۳$$

بخش ۳ - مشتق گیری و انتگرال گیری انتگرالهای ناویژه زیر علامت انتگرال

بند ۱ - مشتق گیری نسبت به پارامتر. هرگاه (۱) تابع $f(x, y)$ و مشتقش

$f'_y(x, y)$ در حوزه $y_1 < y < y_2$ و $a \leq x < +\infty$ پیوسته؛ (۲) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ مشتقش

همگرا؛ (۳) $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ در فاصله (y_1, y_2) همگرای یکنواخت باشد
آنگاه بازای $y_1 < y < y_2$:

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

(قاعده لایبنیتز).

بند ۲ - دستور انتگرال گیری نسبت به پارامتر. هرگاه (۱) تابع $f(x, y)$ بازای

$y_1 \leq y \leq y_2$ و $x \geq a$ پیوسته؛ (۲) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ در قطعه y متناهی

$[y_1, y_2]$ همگرای یکنواخت باشد، آنگاه

$$(1) \quad \int_{y_1}^{y_2} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy$$

اگر $f(x, y) \geq 0$ در اینصورت دستور (۱) برای فاصله نامتناهی (y_1, y_2)

فرض آنگاه انتگرالهای داخلی تساوی (۱) پیوسته و یکی از طرفین تساوی (۱) دارای معنی باشد، نیز درست است.

$$\int x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0)$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$I = \int x^{n-1} \ln^m x dx$$

که در آن m عددیست طبیعی.

۳۷۸۵ - با استفاده از دستور

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{\sqrt{a}} \quad (a > 0)$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}$$

که در آن n عددیست طبیعی.

۳۷۸۶ - ثابت کنید که انتگرال دیریکله

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

بازای $\alpha \neq 0$ دارای مشتق است لیکن نمیتوان این مشتق را با قاعده لایبتز محاسبه نمود.

راهنمایی - فرض کنید $\alpha x = y$.

۳۷۸۷ - نشان دهید که تابع

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x + \alpha)^2} dx$$

در حوزهٔ $-\infty < \alpha < +\infty$ پیوسته و دیفرانسیل پذیر است.

۳۷۸۸ - از روی تساوی

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (a > 0, b > 0)$$

۳۷۸۹ - مطلوبست اثبات دستور فرولانی

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (a > 0, b > 0)$$

که در آن $f(x)$ تابعی است پیوسته و انتگرال $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ برای $A > 0$ دلخواه دارای معنی میباشد.

با استفاده از دستور فرولانی مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (b > 0, a > 0) \quad - 3790$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0) \quad - 3791$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg ax - \arctg bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0) \quad - 3792$$

بکمک مشتق گیری نسبت به پارامتر، انتگرالهای زیر را حساب کنید :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad - 3793$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad - 3794$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad - 3795$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad - 3796$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

$$\int \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx \quad (|\alpha| \leq 1) - ۳۷۹۷$$

$$\int \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad (|\alpha| \leq 1) - ۳۷۹۸$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx - ۳۸۰۰$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx - ۳۷۹۹$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x \arctan \beta x}{x^2} dx - ۳۸۰۱$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^2} dx - ۳۸۰۲$$

۳۸۰۳ - مطلوبست محاسبهٔ انتگرال اولر - پواسن

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

از روی دستور

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy$$

با کاربرد انتگرال اولر - پواسن مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 + 2bx + c)} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0) - ۳۸۰۴$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 a^2 + 2b_1 x + c_1) e^{-(ax^2 + 2bx + c)} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0) - ۳۸۰۵$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx \quad (a > 0) - ۳۸۰۶$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx \quad (a > 0) - ۳۸۰۷$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0) - 3808$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx \quad (a > 0) - 3809$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin bx dx \quad (a > 0) - 3810$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx dx - 3811$$

(n عددیست طبیعی)

۳۸۱۱،۱ - ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-ax^2 t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0, \delta > 0)$$

۳۸۱۲ - از روی انتگرال

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx \quad (\alpha \geq 0)$$

مطلوبست محاسبه انتگرال دیریکله

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

۳۸۱۲،۱ - نمودار تقریبی انتگرال سینوسی

$$y = Si x$$

که در آن

$$Si x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

چيست ؟

با استفاده از انتگرالهای دیریکله و فرولانی انتگرالهای زیر را حساب

کنید :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx \quad (\alpha > 0) - 3813$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 dx - 3818$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx - 3814$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx - 3819$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx - 3815$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x - \sin^2 \beta x}{x} dx - 3820$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x} dx - 3816$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx - 3821$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 dx - 3817$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx \quad (k \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0) - 3822$$

3822 - مطلوبست محاسبه عامل ناپیوسته دیریکله

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}$$

بازای مقادیر مختلف x نمودار تابع $y = D(x)$ را رسم کنید.

3824 - مطلوبست محاسبه انتگرالهای:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b} dx \quad (\text{ب}) \quad \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx \quad (\text{الف})$$

3825 - با استفاده از دستور

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy$$

انتگرال لاپلاس

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$$

را محاسبه کنید.

$$L_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx$$

مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} dx - ۳۸۲۸ \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx - ۳۸۲۷$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{ax^2 + 2bx + c} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0) - ۳۸۲۹$$

۳۸۳۰ - با استفاده از دستور

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xy^2} dy \quad (x > 0)$$

مطلوبست محاسبه انتگرالهای فرزل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

9

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

مطلوبست محاسبه مقدار انتگرالهای زیر :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx \quad (a \neq 0) - ۳۸۳۱$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \times \cos 2ax dx - ۳۸۳۳$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \times \cos 2ax dx - ۳۸۳۲$$

۳۸۳۴ - مطلوبست اثبات دستورهای :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \sin aa \quad (۱)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{a^2 - x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \cos ax \quad (2)$$

که در آن $a \neq 0$ و انتگرالها در معنای مقدار اصلی کوشی دارای مفهومند .
۳۸۳۵ - مطلوبست تبدیل لاپلاس

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (p > 0)$$

برای تابع $f(t)$ اگر :

الف) $f(t) = t^n$ (n عددیست طبیعی)

ب) $f(t) = \sqrt{t}$ ؛ $f(t) = \cos t$ (ث)

پ) $f(t) = e^{-at}$ ؛ $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$ (ج)

ت) $f(t) = te^{-at}$ ؛ $x(t) = \sin \alpha \sqrt{t}$ (چ)

۳۸۳۶ - مطلوبست اثبات دستور (انتگرال لیشیتز)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt) dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (a > 0)$$

که در آن $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi) d\varphi$ تابع بسل بازی اندیس صفر (مسأله^{*})

۳۷۲۶ را ببینید) میباشد .

۳۸۳۷ - مطلوبست تبدیل ویرشتراس

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y) dy$$

اگر :

الف) $f(y) = 1$ ؛ $f(y) = e^{2ay}$ (پ)

ب) $f(y) = y^2$ ؛ $f(y) = \cos ay$ (ت)

۳۸۳۸ - چندجمله‌ای‌های چیشف - هریت از دستور

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

تعیین میشود. ثابت کنید که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \sqrt{\pi} n! V \frac{1}{\pi}, & m = n \end{cases} \text{ اگر}$$

۳۸۳۹ - انتگرال

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1\sigma_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{\xi^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-\xi)^2}{\sigma_2^2} \right]} d\xi \quad (\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0)$$

۳۸۴۰ - فرض کنیم تابع $f(x)$ بطور مطلق روی فاصله $(-\infty, +\infty)$ انتگرال پذیر باشد.

ثابت کنید که انتگرال

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi t}}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

در معادله انتقال حرارت

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

و شرط اولیه

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x)$$

صادق است.

بخش ۴ - انتگرالهای اولری

بند ۱ - تابع گاما. بازای $x > 0$ داریم:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

ویژگی اساسی تابع گاما با دستور کاهشی

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

بیان میشود.

اگر n عدد درست مثبتی باشد در آنصورت

$$\Gamma(n) = (n-1)!; \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \times 3 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

بند ۲ - دستور تکمیلی. بازای عدد x نادرست داریم :

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

این دستور تعیین گاما را برای مقادیر منفی آرگومان ممکن میسازد.
بند ۳ - تابع بتا. بازای $x > 0, y > 0$ داریم :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

دستور

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

درست است.

۳۸۴۱ - ثابت کنید که تابع گاما $\Gamma(x)$ در حوزه $x > 0$ پیوسته و دارای مشتق‌های پیوسته از هر مرتبه است.

۳۸۴۲ - ثابت کنید که تابع بتا $B(x, y)$ در حوزه $x > 0, y > 0$ پیوسته و دارای مشتقات پیوسته از هر مرتبه است.

بکمک انتگرالهای اولری، انتگرالهای زیر را حساب کنید :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} - ۳۸۴۷$$

$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx - ۳۸۴۳$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \times \cos^4 x dx - ۳۸۴۸$$

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0) - ۳۸۴۴$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n > 1) - ۳۸۴۹$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx - ۳۸۴۵$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx - ۳۸۵۰$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} - ۳۸۴۶$$

(n عدد درست مثبتی است).

حوزه وجود انتگرالهای زیر را تعیین و آنها را بر حسب انتگرالهای اولری بیان کنید :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx \quad (n > 0) - ۳۸۵۱$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx - ۳۸۵۲$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} \quad (a > 0, b > 0, n > 0) - ۳۸۵۳$$

$$\int_a^{\infty} \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}} dx \quad (0 < a < b, c > 0) - ۳۸۵۴$$

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx - ۳۸۶۱$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} \quad (m > 0) - ۳۸۵۵$$

$$\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx \quad (a > 0) - ۳۸۶۲$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx - ۳۸۵۶$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p - 1}{1+x} \ln x dx - ۳۸۶۳$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x dx - ۳۸۵۷$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p - 1}{1+x} \ln^2 x dx - ۳۸۶۴$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k \cos x)^n} dx - ۳۸۵۸$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{1+x^2} dx - ۳۸۶۴, ۱$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n > 0) - ۳۸۵۹$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2} dx - ۳۸۶۴, ۲$$

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx - ۳۸۶۰$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p - 1 - x^q - 1}{(1+x) \ln x} dx - ۳۸۶۵ \quad \int_0^1 \frac{x^p - 1 + x^{-p}}{1-x} dx \quad (0 < p < 1) - ۳۸۶۶$$

راهنمایی - این انتگرال را می‌توانید بصورت

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [B(p, \varepsilon) - B(1-p, \varepsilon)]$$

در نظر بگیرید.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sh } \alpha x}{\text{sh } \beta x} dx \quad (0 < \alpha < \beta) - ۳۸۶۷$$

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx - ۳۸۶۸$$

$$\int_0^{a+1} \ln \Gamma(x) dx \quad (a > 0) - ۳۸۶۹$$

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x dx - ۳۸۷۰$$

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2n\pi x dx - ۳۸۷۱$$

$(n$ عددیست طبیعی)

مساویهای زیر را ثابت کنید :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \times \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4} - ۳۸۷۲$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \times \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} - ۳۸۷۳$$

$$\prod_{m=1}^n \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{n}} - ۳۸۷۴$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = 1 - ۳۸۷۵$$

با استفاده از تساوی $\int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt = \frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)}$ ($x > 0$) انتگرالهای

زیر را محاسبه کنید :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m} dx \quad (0 < m < 1) - ۳۸۷۶$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^m} dx \quad (0 < m < 2) - ۳۸۷۷$$

۳۸۷۸ - مطلوبست اثبات دستورهای اولر :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x \quad (\text{ب})$$

$$\left(\lambda > 0, \quad x > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

۳۸۷۹ - مطلوبست طول قوس منحنی

$$r^n = a^n \cos n\varphi \quad (n, a > 0)$$

۳۸۸۰ - مطلوبست محاسبه مساحت محدود به منحنی

$$|x|^n + |y|^n = a^n \quad (n > 0, a > 0)$$

بحث ۵ - دستور انتگرالی فوریه

بند ۱ - نمایش تابع با انتگرال فوریه. اگر تابع $f(x)$ روی محور $-\infty < x < +\infty$ مفروض باشد، (۲) تابع و مشتقش $f'(x)$ در هر فاصله متناهی پیوسته قطعهای باشد و (۳) روی فاصله $(-\infty, +\infty)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد در اینصورت در هر نقطه پیوستگی قابل نمایش بشکل انتگرال فوریه میباشد:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \quad (1)$$

که در آن

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \quad \text{و} \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi$$

در نقاط انفصال تابع $f(x)$ طرف چپ دستور (۱) را باید با $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ عوض نمود.

برای تابع زوج $f(x)$ با همان سلاخظات نسبت به نقاط انفصال از دستور (۱) نتیجه میشود:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\lambda) \cos \lambda x d\lambda \quad (2)$$

که در آن

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi$$

بطرز مشابهی برای تابع فرد $f(x)$ نتیجه میشود:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\lambda) \sin \lambda x d\lambda \quad (3)$$

که در آن

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi$$

بند ۲- نمایش تابع با انتگرال فوریه در فاصله $(0, +\infty)$. تابع $f(x)$ مفروض در فاصله $(0, +\infty)$ که خود و مشتقش $f'(x)$ در هر فاصله متناهی $(a, b) \subset (0, +\infty)$ پیوسته قطعه‌ای و مطلقاً انتگرال پذیر روی $(0, +\infty)$ میباشد بدلخواه میتوان آنرا در فاصله مفروض یا با دستور (۲) (ادامه زوج) یا با دستور (۳) (ادامه فرد) نمایش داد.

توابع زیر را با انتگرال فوریه نمایش دهید:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 & \text{اگر} \\ 0, & |x| > 1 & \text{اگر} \end{cases} \quad -3881$$

$$j(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| < 1 & \text{اگر} \\ 0, & |x| > 1 & \text{اگر} \end{cases} \quad -3882$$

$$j(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b) \quad (b > a) \quad -3883$$

$$f(x) = \begin{cases} h \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \leq a & \text{اگر} \\ 0, & |x| > a & \text{اگر} \end{cases} \quad -3884$$

$$f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0) \quad -3885 \quad f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0) \quad -3886$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi & \text{اگر} \\ 0, & |x| > \pi & \text{اگر} \end{cases} \quad -3887$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} & \text{اگر} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} & \text{اگر} \end{cases} \quad -3888$$

$$f(t) = \begin{cases} A \sin \omega t & |t| \leq \frac{2\pi n}{\omega} \text{ اگر} \\ \cdot, & |t| > \frac{2\pi n}{\omega} \text{ اگر} \end{cases} \quad - ۳۸۸۹$$

(n عددیست طبیعی)

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha > 0) \quad - ۳۸۹۰$$

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x \quad (\alpha > 0) \quad - ۳۸۹۱$$

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x \quad (\alpha > 0) \quad - ۳۸۹۲$$

$$f(x) = xe^{-x^2} \quad - ۳۸۹۴$$

$$f(x) = e^{-x^2} \quad - ۳۸۹۳$$

- ۳۸۹۵ تابع

$$f(x) = e^{-x} \quad (0 < x < +\infty)$$

را با انتگرال فوریه نمایش دهید در صورتیکه آنرا الف) به ترتیب زوج؛
ب) به ترتیب فرد ادامه دهیم.

مطلوبست تبدیل فوریه

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt$$

برای تابع $f(t)$ اگر :

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha > 0) \quad - ۳۸۹۶$$

$$f(x) = xe^{-\alpha|x|} \quad (\alpha > 0) \quad - ۳۸۹۷$$

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{\gamma}} \cos \alpha x \quad - ۳۸۹۹$$

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{\gamma}} \quad - ۳۸۹۸$$

- ۳۹۰۰ - مطلوبست توابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ اگر :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \cos xy dy = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{الف})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \sin xy dy = e^{-x} \quad (x > 0) \quad (\text{ب})$$

اشگرهای چندگانه و منحنی انحن

بخش ۱ - انتگرال های دوگانه (دوئل)

بند ۱ - محاسبه مستقیم انتگرال دوگانه. انتگرال دوگانه تابع پیوسته $f(x, y)$ گسترده روی حوزه کراندار بسته مربع پذیر (کواد رابل) Ω عبارتست از عدد

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max |\Delta y_j| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

که در آن $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ و مجموع روی آن مقادیر i و j که بازای آنها $(x_i, y_j) \in \Omega$ گسترده است. اگر حوزه Ω با ناساویهای

$$a \leq x \leq \beta, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

که در آن $y_1(x)$, $y_2(x)$ توابع پیوسته ای روی قطعه $[a, b]$ میباشند مشخص شده است در آن صورت انتگرال دوگانه نظیر را از روی دستور

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

میتوان محاسبه نمود.

بند ۲ - تعویض متغیرها در انتگرال دوگانه. اگر توابع پیوسته ديفرانسیل پذیر

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v)$$

یک تصویر یک به یک (بی ژکتیو یا دوسوئی) حوزه بسته و کراندار Ω از صفحه Oxy را بر حوزه Ω' در صفحه Ouv بوجود آورند و ژاکوبین

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0.$$

در اینصورت دستور

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v)) |I| du dv$$

محقق است.

بویژه برای حالت گذر به مختصات قطبی r, φ بیاری دستورهای
داریم: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

۳۹۰۱ - مطلوبست محاسبه انتگرال

$$\iint_{\substack{x \leq 1 \\ y \leq 1}} xy dx dy$$

با در نظر گرفتن آن بصورت حد مجموع انتگرالی در صورتیکه حوزه انتگرال گیری
توسط خطوط مستقیم

$$x = \frac{i}{n}, y = \frac{j}{n} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

به مربع‌ها تقسیم نموده و مقدار تابع تحت انتگرال را در رئوس سمت راست
این مربع‌ها انتخاب نمائیم.

۳۹۰۲ - مجموع‌های انتگرالی پائین S و بالای \bar{S} را برای تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$
در حوزه $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$ با تقسیم حوزه مذکور توسط
خطوط مستقیم

$$x = 1 + \frac{i}{n}, y = \frac{2j}{x} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n)$$

به مستطیل‌ها تشکیل دهید.

حد این مجموع‌ها بازای $n \rightarrow \infty$ چقدر است؟

۳۹۰۳ - مطلوبست محاسبه تقریبی انتگرال

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 20} \frac{dx dy}{\sqrt{24 + x^2 + y^2}}$$

عمل تقریب حوزه انتگرال گیری را بکمک دستگاه مربعهای محاطی که رئوسشان در نقاط متناظر اعداد درست واقع شده باشند انجام دهید و در ضمن مقادیر تابع زیر انتگرال را در رئوسی از این مربعها اختیار کنید که از مبدا مختصات دورترین هستند. نتیجه بدست آمده را با مقدار دقیق انتگرال مقایسه کنید.

۳۹۰۴ - مطلوبست محاسبه تقریبی انتگرال

$$\iint_S \sqrt{x+y} dS$$

که در آن S مثلث محدود به خطوط $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ است با تقسیم حوزه S توسط خطوط $x=\text{const}$, $y=\text{const}$, $x+y=\text{const}$ به چهار مثلث متساوی و انتخاب مقادیر تابع زیر انتگرال در گرانیگاه این مثلث ها.

۳۹۰۵ - حوزه $\{x^2+y^2 \leq 1\}$ به تعداد متناهی اجزا مربع پذیر ΔS_i $(i=1, 2, \dots, n)$ به قطر کمتر از δ تقسیم شده است.

بازای چه مقادیری از δ ناساوی

$$\left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i+y_i) \Delta S_i \right| < 0,001$$

که در آن $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$ ، برقرار است؟

مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر :

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy - 3907$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy - 3906$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr - 3908$$

۳۹۰۹ - مطلوبست اثبات تساوی

$$\int X(x)Y(y) dx dy = \int_a^A X(x) dx \times \int_b^B Y(y) dy$$

اگر R مستطیل باشد :

$$a \leq x \leq A, \quad b \leq y \leq B$$

۳۹۱۰ - مطلوبست محاسبه

$$I = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy$$

اگر

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$$

۳۹۱۱- فرض کنیم $f(x)$ تابع پیوسته در فاصله $a \leq x \leq b$ باشد. نامساوی

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$$

را که در آن علامت تساوی فقط برای $f(x) = \text{const}$ برقرار است ثابت کنید.

راهتمایی - انتگرال

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$$

را در نظر بگیرید.

۳۹۱۲- انتگرالهای زیر دارای چه علامتی هستند:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \quad (\text{ب}) \quad \iint_{|x|+|y| \leq 1} \ln(x^2+y^2) dx dy \quad (\text{الف})$$

$$\iint_{\substack{-1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy \quad (\text{پ})$$

۳۹۱۳- مقدار میانگین تابع

$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

را در مربع $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ پیدا کنید.

۳۹۱۴- با استفاده از قضیه میانگین، مطلوبیت برآورد انتگرال

$$I = \iint_{|x|+|y| \leq 1} \frac{dx dy}{1 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

۳۹۱۵- مطلوبیت محاسبه مقدار میانگین مجذور فاصله نقاط دایره

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2 \text{ از مبدا مختصات.}$$

در مسائل ۳۹۱۶-۳۹۲۲ در انتگرال دوگانه $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ بازای

حوزه‌های مشخص شده Ω ، حدود انتگرال گیری را بهر ترتیب بنویسید.

۳۹۱۶- Ω مثلثی است برئوس $O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1)$

۳۹۱۷- Ω مثلثی است برئوس $O(0, 0), A(2, 1), B(-2, 1)$

۳۹۱۸- Ω ذوزنقه‌ای است برئوس $O(0, 0), A(1, 0), B(1, 2), C(0, 1)$

۳۹۱۹- Ω دایره $x^2 + y^2 \leq 1$ است.

۳۹۲۰ - دایره $\Omega: x^2 + y^2 \leq y$ است.

۳۹۲۱ - قطعه سهمی گونه محدود به منحنی‌های $y = x^2$ و $y = 1$ میباشد.

۳۹۲۲ - حلقه دایره‌ای $\Omega: x^2 + y^2 \leq 4$ میباشد.

۳۹۲۳ - مطلوبست اثبات دستور دیریکله

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx \quad (a > 0)$$

در انتگرالهای زیر ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنید:

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy - 3924 \quad \int_0^1 dx \int_x^{1-x} f(x, y) dy - 3924$$

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{1-x} f(x, y) dy - 3925 \quad \int_{-1}^1 dx \int_{\frac{x^2}{2}-1}^{1-x^2} f(x, y) dy - 3925$$

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{1-x^2} f(x, y) dy - 3926 \quad \int_0^1 dx \int_{x^2}^{1-x^2} f(x, y) dy - 3926$$

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy \quad (a > 0) - 3929$$

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy - 3931 \quad \int_0^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy - 3930$$

مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر:

۳۹۳۲ - $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$ اگر حوزه Ω محدود به سهمی $y^2 = 2px$ و خط

$$x = \frac{p}{2} \quad (p > 0)$$

۳۹۳۳ - $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}$ اگر حوزه Ω محدود به کمان کوتاه‌تر

دایره به مرکز نقطه (a, a) و شعاع a مماس بر محورهای مختصات، و به محورهای مختصات باشد.

۳۹۳۴ - $\iint_{\Omega} |xy| dx dy$ اگر Ω دایره شعاع a و بمرکز مبدأ مختصات

باشد.

۳۹۳۵ - $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$ اگر Ω متوازی الاضلاع با اضلاع $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 2a$ ($a > 0$) باشد.

۳۹۳۶ - $\iint_{\Omega} y^2 dx dy$ اگر Ω محدود به محور طولها و طاقتمای اول سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

باشد.

در انتگرال دوگانه

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

با فرض $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ به مختصات قطبی r, φ بگذرید و حدود انتگرال گیری را بنویسید در صورتیکه:

۳۹۳۷ - Ω دایره $x^2 + y^2 \leq a^2$ باشد.

۳۹۳۸ - Ω دایره $x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$) باشد.

۳۹۳۹ - Ω حلقه $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ باشد.

۳۹۴۰ - Ω مثلث $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1 - x$ باشد.

۳۹۴۱ - Ω قطعه سهمی گونه $\frac{x^2}{a} \leq y \leq a$, $-a \leq x \leq a$ باشد.

۳۹۴۲ - در چه حالتی پس از گذر به مختصات قطبی حدود انتگرال گیری مقادیر ثابتی میشوند؟

یا فرض $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ به مختصات قطبی r, φ بگذرید و حدود انتگرال گیری را در انتگرالهای زیر به هر دو ترتیب بنویسید:

$$\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy - 3943 \quad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy - 3943$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy - 3946 \quad \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy - 3944$$

۳۹۴۷ - $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ که در آن Ω حوزه محدود به منحنی زیر میباشد:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (x \geq 0)$$

بفرض آنکه r, φ مختصات قطبی باشند ترتیب انتگرال گیری را در انتگرالهای زیر عوض کنید :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0) - ۳۹۴۸$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^{a \sqrt{\sin \varphi}} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0) - ۳۹۴۹$$

$$\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r) dr \quad (0 < a < 2\pi) - ۳۹۵۰$$

با گذر به مختصات قطبی انتگرالهای دوگانه زیر را به انتگرالهای ساده بدل کنید :

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy - ۳۹۵۱$$

$$\Omega = \{|y| \leq |x|; |x| \leq 1\} \text{ که در آن } \iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy - ۳۹۵۲$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy - ۳۹۵۳$$

با گذر به مختصات قطبی مطلوبست محاسبه انتگرالهای دوگانه زیر :

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy - ۳۹۵۴$$

$$\iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy - ۳۹۵۵$$

۳۹۵۶ - مربع $S\{a < x < a+h, b < y < b+h\}, (a > 0, b > 0)$ بکمک دستگاه توابع

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \sqrt{xy}$$

به حوزه S' تبدیل میشود. نسبت مساحت حوزه S' به حوزه S را پیدا کنید. حد این نسبت بازای $h \rightarrow 0$ چقدر است ؟

در انتگرالهای دوگانه* زیر بجای x, y متغیرهای جدید u, v را وارد نموده و حدود انتگرال گیری را بنویسید:!

$$\int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy \quad (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta) - ۳۹۵۷$$

اگر

$$u = x, \quad v = \frac{y}{x}$$

$$\int dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy - ۳۹۵۸$$

اگر

$$u = x + y, \quad v = x - y$$

$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy - ۳۹۵۹$ که در آن Ω حوزه‌ای است محدود به منحنی‌های

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (a > 0)$$

$$x = u \cos^2 v, \quad y = u \sin^2 v$$

۳۹۶۰ - نشان دهید که تعویض متغیرهای

$$x + y = \xi, \quad y = \xi \eta$$

مثلت $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$ را به مربع یکان $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$ بدل میسازد.

۳۹۶۱ - بازای چه تعویض متغیرها، چهارضلعی منحنی‌الخط محدود به منحنی‌های

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad x - y + 1 = 0, \quad x - y - 1 = 0 \quad (x > 0, y > 0)$$

به مستطیل به اضلاع موازی محورهای مختصات بدل میشود؟

با انجام تعویض مناسب متغیرها انتگرالهای دوگانه* زیر را به انتگرالهای ساده بدل کنید:

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y) dx dy - ۳۹۶۲$$

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(ax+by+c) dx dy \quad (a^2+b^2 \neq 0) - ۳۹۶۳$$

$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy - ۳۹۶۴$ که در آن Ω حوزه‌ای است محدود به منحنی‌های

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = x, \quad y = \varepsilon x \quad (x > 0, y > 0)$$

مطلوبست محاسبه انتگرالهای دوگانه زیر :

$$\iint_{\Omega} (x+y) dx dy - ۲۹۶۵ \quad \text{که در آن } \Omega \text{ حوزه‌ای است محدود به منحنی}$$

$$x^2 + y^2 = x + y$$

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|) dx dy - ۲۹۶۶$$

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy - ۲۹۶۷ \quad \text{که در آن } \Omega \text{ حوزه‌ای است محدود}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{به بیضی}$$

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2) dx dy - ۲۹۶۸$$

$$\iint_{\Omega} (x+y) dx dy - ۲۹۶۹ \quad \text{که در آن } \Omega \text{ حوزه‌ای است محدود به منحنی‌های}$$

$$y^2 = 2x, \quad x+y = 1, \quad x+y = 1/2$$

$$\iint_{\Omega} xy dx dy - ۲۹۷۰ \quad \text{که در آن } \Omega \text{ حوزه‌ای است محدود به منحنی‌های}$$

$$xy = 1, \quad x+y = \frac{5}{2}$$

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\cos(x+y)| dx dy - ۲۹۷۱$$

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy - ۲۹۷۲$$

$$\iint_{\substack{|x|\leq 1 \\ -1 \leq y \leq 2}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy - ۲۹۷۳$$

انتگرالهای توابع ناپیوسته زیر را حساب کنید :

$$\iint_{x^2+y^2\leq 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy - ۲۹۷۴$$

$$\iint_{x^2\leq y\leq 4} \sqrt{|y-x^2|} dx dy - ۲۹۷۶$$

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x+y] dx dy - ۲۹۷۵$$

۳۹۷۷ - اگر m و n اعداد درست ثابت و حداقل یکی از آنها فرد باشد، ثابت کنید که

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$$

۳۹۷۸ - مطلوبست محاسبه

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy$$

که در آن تابعی است پیوسته.
۳۹۷۹ - مطلوبست $F'(t)$ اگر

$$F(t) = \iint_{\substack{x \leq t \\ y \leq t}} e^{\frac{tx}{y^2}} dx dy$$

۳۹۸۰ - مطلوبست $F'(t)$ اگر

$$F(t) = \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

۳۹۸۱ - مطلوبست $F'(t)$ اگر

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy \quad (t > 0)$$

۳۹۸۲ - ثابت کنید که اگر $f(x, y)$ پیوسته باشد در اینصورت تابع

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\xi-x+y}^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta) d\eta$$

در معادله^{*} زیر صادق است :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

۳۹۸۳ - فرض کنیم منحنی‌های تراز تابع $f(x, y)$ ساده بسته و حوزه $S(v_1, v_2)$ محدود به منحنی‌های $f(x, y) = v_1, f(x, y) = v_2$ باشد.

ثابت کنید که

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv$$

که در آن $F(v)$ مساحت محدود به منحنی‌های $f(x, y) = v_1$, $f(x, y) = v$ می‌باشد.

راهنمایی - حوزه انتگرال‌گیری تابع $f(x, y)$ را به بخش‌های محدود به منحنی‌های تراز بی‌نهایت نزدیک بهم تقسیم کنید.

بخش ۲ - محاسبه مساحت

مساحت حوزه S واقع در صفحه Oxy از دستور

$$S = \iint_S dx dy$$

بدست می‌آید.

مطلوبست محاسبه مساحت محدود به منحنی‌های زیر :

$$xy = a^2, x + y = \frac{a}{p} \quad (a > 0) - 3984$$

$$y^2 = 2px + p^2, y^2 = -2qx + q^2 \quad (p > 0, q > 0) - 3985$$

$$(x - y)^2 + x^2 = a^2 \quad (a > 0) - 3986$$

با گذر به مختصات قطبی مطلوبست محاسبه مساحت محدود به منحنی‌های

زیر :

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2); x^2 + y^2 \geq a^2 - 3987$$

$$(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0 - 3988$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - 3xy^2) \quad (a > 0) - 3989$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy; (x - a)^2 + (y - a)^2 \leq a^2 \quad (a > 0) - 3990$$

با وارد کردن مختصات قطبی تعمیم یافته r, φ با دستورهای

$$x = ar \cos^{\alpha} \varphi, \quad y = br \sin^{\alpha} \varphi \quad (r \geq 0)$$

که در آن a, b, α مقادیر ثابتی است که بطور مناسب انتخاب شده و

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \alpha a b r \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi$$

زیر (پارامترها مثبتند) :

$$\frac{x^{\gamma}}{a^{\gamma}} + \frac{y^{\gamma}}{b^{\gamma}} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} \quad - ۲۹۹۱$$

$$\frac{x^{\gamma}}{a^{\gamma}} + \frac{y^{\gamma}}{b^{\gamma}} = \frac{x^{\gamma}}{h^{\gamma}} + \frac{y^{\gamma}}{k^{\gamma}}; \quad x = \cdot, \quad y = \cdot \quad - ۲۹۹۲$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{\xi} = \frac{x^{\gamma}}{h^{\gamma}} + \frac{y^{\gamma}}{k^{\gamma}} \quad (x > \cdot, y > \cdot) \quad - ۲۹۹۳$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{\xi} = \frac{x^{\gamma}}{h^{\gamma}} - \frac{y^{\gamma}}{k^{\gamma}} \quad (x > \cdot, y > \cdot) \quad - ۲۹۹۴$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{\circ} = \frac{x^{\gamma}y^{\gamma}}{c^{\xi}} \quad - ۲۹۹۴, ۱$$

$$\sqrt[\xi]{\frac{x}{a}} + \sqrt[\xi]{\frac{y}{b}} = ۱; \quad x = \cdot, \quad y = \cdot \quad - ۲۹۹۵$$

با انجام تعویض مناسب متغیرها مطلوبست محاسبه مساحت شکل‌های
محصور با منحنی‌های زیر :

$$x + y = a, \quad x + y = b, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x \quad (\cdot < \alpha < b, \cdot < \alpha < \beta) \quad - ۲۹۹۶$$

$$xy = a^{\gamma}, \quad xy = \gamma a^{\gamma}, \quad y = x, \quad y = \gamma x \quad (x > \cdot, y > \cdot) \quad - ۲۹۹۷$$

$$y^{\gamma} = \gamma px, \quad y^{\gamma} = \gamma qx, \quad x^{\gamma} = \gamma ry, \quad x^{\gamma} = \gamma sy \quad - ۲۹۹۸$$

$$(\cdot < p < q, \cdot < r < s)$$

$$x^{\gamma} = ay, \quad x^{\gamma} = by, \quad x^{\gamma} = cy^{\gamma}, \quad x^{\gamma} = dy^{\gamma} \quad - ۲۹۹۸, ۱$$

$$(\cdot < a < b, \cdot < c < d)$$

$$y = ax^p, \quad y = bx^p, \quad y = cx^q, \quad y = dx^q \quad - ۲۹۹۸, ۲$$

$$(\cdot < p < q, \cdot < a < b, \cdot < c < d)$$

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = ۱, \quad \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = ۲, \quad - ۲۹۹۹$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad \xi \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (a > \cdot, b > \cdot)$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{\gamma}{\xi}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{\gamma}{\xi}} = ۱; \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{\gamma}{\xi}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{\gamma}{\xi}} = \xi, \quad - ۲۹۹۹, ۱$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad \wedge \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (x > \cdot, y > \cdot)$$

$$\frac{1}{\lambda} c^2, \text{ مقادیر } \lambda \text{ به ترتیب } \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1 - \epsilon \dots$$

$$\text{را اختیار میکند } \frac{2}{3} c^2, \frac{4}{3} c^2, \frac{5}{3} c^2 \quad (x > 0, y > 0)$$

$$(x > 0, y > 0)$$

۴۰۰۱ - مطلوبست محاسبه مساحت محصور با بیضی

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 = 1$$

که در آن

$$\delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0.$$

$$4002 - \text{مطلوبست محاسبه مساحت محدود به بیضی های } \frac{x^2}{\text{ch}^2 u} + \frac{y^2}{\text{sh}^2 u} = c^2$$

$$\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = c^2 \quad (v = v_1, v_2) \text{ و هذلولی های } (u = u_1, u_2)$$

$$(0 < u_1 < u_2; 0 < v_1 < v_2; x > 0, y > 0)$$

راهنامه‌ای - فرض کنید

$$x = c \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = c \operatorname{sh} u \sin v$$

۴۰۰۳ - مطلوبست محاسبه مساحت مقطع سطح

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a^2$$

با صفحه $x + y + z = 0$.

۴۰۰۴ - مطلوبست محاسبه مساحت مقطع سطح

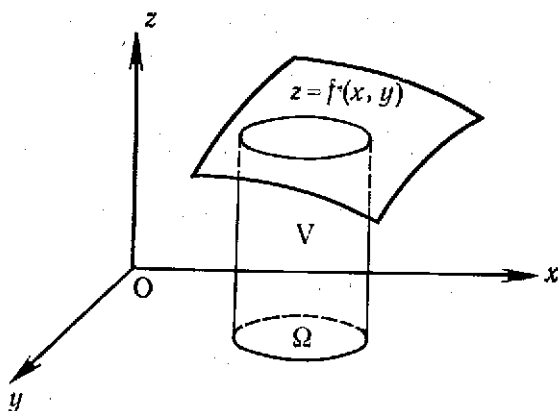
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0.$$

با صفحه $z = 1 - 2(x + y)$.

بخش ۳ - محاسبه انجام

حجم استوانه گون محدود از بالا بسطح پیوسته $z = f(x, y)$ و از پائین به صفحه $z = 0$ و از اطراف بسطح استوانه‌ای قائم که در صفحه Oxy حوزه مربع پذیر Ω را جدا می‌سازد (شکل ۱۴) برابر است با:

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$



شکل ۱۴

۴۰۰۵ - جسمی را که حجم آن با انتگرال

$$V = \int dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy$$

بیان شده ترسیم کنید.

۴۰۰۶ - حجم‌های بیان شده بوسیله انتگرال‌های دوگانه زیر را نمایش دهید:

الف) $\iint_{\substack{0 \leq x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} (x+y) dx dy$

ب) $\iint_{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy$

ث) $\iint_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x}} \sqrt{xy} dx dy$

پ) $\iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy$

ج) $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sin \pi \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

ت) $\iint_{x^2 + y^2 \leq x} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

مطلوبست محاسبه حجم اجسام محدود به سطوح زیر:

۴۰۰۷ - $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0$

۴۰۰۸ - $x + y + z = a, x^2 + y^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0$

($a \geq R\sqrt{2}$)

$$z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0 - 4009$$

$$z = \cos x \cos y, z = 0, (x+y) \leq \frac{\pi}{2}, (x-y) \leq \frac{\pi}{2} - 4010$$

$$z = \sin \frac{\pi y}{2x}, z = 0, y = x, y = 0, x = \pi - 4011$$

$$[z = xy, x + y + z = 1, z = 0 - 4012$$

با گذر به مختصات قطبی مطلوبست محاسبهٔ حجم اجسام محدود بسطوح

زیر :

$$z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2 - 4013$$

$$z = x + y, (x^2 + y^2)^2 = 2xy, z = 0 \quad (x > 0, y > 0) - 4014$$

$$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0 - 4015$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \geq a|x| \quad (a > 0) - 4016$$

$$x^2 + y^2 - az = 0, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), z = 0 \quad (a > 0) - 4017$$

$$z = e^{-(x^2 + y^2)}, z = 0, x^2 + y^2 = R^2 - 4018$$

$$z = c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}{2a}, z = 0, y = x \operatorname{tg} \alpha, y = x \operatorname{tg} \beta - 4019$$

$$[(a > 0, c > 0, 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi)$$

$$z = x^2 + y^2, z = x + y - 4020$$

مطلوبست محاسبهٔ حجم اجسام محدود بسطوح زیر (پارامترها مثبت فرض

شده‌اند):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (z > 0) - 4021$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - 4022$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, z = 0 - 4023$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z}{c} = 1, z = 0 - 4024$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0, y = 0, z = 0 - 4025$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 4026$$

$$z^{\sqrt{}} = xy, \quad x + y = a, \quad x + y = b \quad (0 < a < b) - \text{ع. ۲۷}$$

$$z = x^{\sqrt{}} + y^{\sqrt{}}, \quad xy = a^{\sqrt{}}, \quad xy = \sqrt{2}a^{\sqrt{}}, \quad y = \frac{x}{\sqrt{}}, \quad y = \sqrt{2}x, \quad z = 0 - \text{ع. ۲۸}$$

$$z = xy, \quad x^{\sqrt{}} = y, \quad x^{\sqrt{}} = \sqrt{2}y, \quad y^{\sqrt{}} = x, \quad y^{\sqrt{}} = \sqrt{2}x, \quad z = 0 - \text{ع. ۲۹}$$

$$z = c \sin \frac{\sqrt{xy}}{a^{\sqrt{}}}, \quad z = 0, \quad xy = a^{\sqrt{}}, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x - \text{ع. ۳۰}$$

$$(x > 0, \quad 0 < \alpha < \beta) - \text{ع. ۳۰}$$

$$z = x^{\frac{\sqrt{}}{\sqrt{}}} + y^{\frac{\sqrt{}}{\sqrt{}}}, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 - \text{ع. ۳۱}$$

$$\frac{x^{\sqrt{}}}{a^{\sqrt{}}} + \frac{y^{\sqrt{}}}{b^{\sqrt{}}} + \frac{z}{c} = 1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{\sqrt{}}{\sqrt{}}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{\sqrt{}}{\sqrt{}}} = 1, \quad z = 0 - \text{ع. ۳۲}$$

$$z = c \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \quad z = 0, \quad \sqrt{x^{\sqrt{}} + y^{\sqrt{}}} = a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad (y \geq 0) - \text{ع. ۳۳}$$

$$z = ye^{-\frac{xy}{a^{\sqrt{}}}}, \quad xy = a^{\sqrt{}}, \quad xy = \sqrt{2}a^{\sqrt{}}, \quad y = m, \quad y = n, \quad z = 0 - \text{ع. ۳۴, ۱}$$

$$(0 < m < n)$$

$$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (n > 0) - \text{ع. ۳۴}$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 - \text{ع. ۳۵}$$

$$(n > 0, \quad m > 0)$$

بخش ۴ - محاسبه مساحت سطوح

بند ۱ - حالتیکه سطح بطور صریح داده شده است. مساحت سطح خمیده

هموار $z = z(x, y)$ با انتگرال

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

بیان میشود که در آن Ω تصویر سطح مفروض بر صفحه Oxy میباشد.
بند ۲ - حالتیکه سطح بصورت پارامتری داده شده است. اگر معادله

سطح بصورت پارامتری

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

داده شود که در آن $(u, v) \in \Omega$ ، حوزه بسته محدود مربع پذیر و توابع x, y, z در حوزه Ω پیوسته دیفرانسیل پذیر میباشند در آنصورت برای مساحت سطح، دستور

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

را داریم که در آن

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

۴۰۳۶ - مطلوبست محاسبه مساحت بخشی از سطح $az = xy$ که در داخل استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ واقع است.

۴۰۳۷ - مطلوبست محاسبه مساحت سطح جسم محدود به سطوح $x^2 + z^2 = a^2$ ، $y^2 + z^2 = a^2$

۴۰۳۸ - مطلوبست محاسبه مساحت بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ که در داخل استوانه $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b \leq a$) قرار دارد.

۴۰۳۹ - مطلوبست محاسبه مساحت بخشی از سطح $z^2 = 2xy$ که توسط صفحات $x + y = 1$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ جدا شده است.

۴۰۴۰ - مطلوبست محاسبه مساحت بخشی از سطح $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ که در خارج استوانه های $x^2 + y^2 = \pm ax$ قرار دارد (مسئله ویویانی).

۴۰۴۱ - مطلوبست محاسبه مساحت بخشی از سطح $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ که در داخل استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ قرار دارد.

۴۰۴۲ - مطلوبست محاسبه مساحت بخشی از سطح $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ که در داخل استوانه $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ قرار دارد.

۴۰۴۳ - مطلوبست محاسبه مساحت بخشی از سطح $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - y^2)$ که توسط صفحه های $x + y = \pm 1$ ، $x - y = \pm 1$ بریده شده است.

۴۰۴۴ - مطلوبست محاسبه مساحت بخشی از سطح $z = 2ax$ که در داخل استوانه $(x^2 + y^2) = 2a^2xy$ قرار دارد.

۴۰۴۵ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح $x^2 + y^2 = a^2$ که با صفحه‌های $x + z = 0$, $x - z = 0$ ($x > 0$, $y > 0$) بریده شده است.

۴۰۴۵,۱ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح

$$(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}} + z = 1$$

که با صفحه $z = 0$ جدا شده است.

۴۰۴۵,۲ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{2z}{c} = 1$$

که با صفحه‌های $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ بریده شده است.

۴۰۴۵,۳ - مطلوبست محاسبهٔ بخشی از سطح

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

که با سطح

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (z \geq 0)$$

بریده شده است.

۴۰۴۵,۴ - مطلوبست محاسبهٔ بخشی از سطح

$$\sin z = \operatorname{sh} x \times \operatorname{sh} y$$

که با صفحه‌های $x = 1$, $x = 2$ ($y \geq 0$) جدا شده است.

۴۰۴۶ - مطلوبست محاسبهٔ سطح و حجم جسم محدود به سطوح

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2, \quad x + y + z = 2a \quad (a > 0)$$

۴۰۴۷ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از کرهٔ محدود به دو مدار و دو

نصف‌التهار.

۴۰۴۸ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از هلیکونید

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h\varphi$$

که در آن $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$

۴۰۴۹ - مطلوبست محاسبه مساحت بخشی از سطح چنبره

$$x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, \quad y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, \quad z = a \sin \psi \quad (0 < a \leq b)$$

محدود بدو نصف النهار $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ و دو مدار $\psi = \psi_1$ و $\psi = \psi_2$ مساحت کل چنبره چقدر است؟

۴۰۵۰ - مطلوبست محاسبه زاویه حجمی ω که تحت آن مستطیل $x = a > 0, 0 \leq z \leq c, 0 \leq y \leq b$ از مبدأ مختصات رؤیت میشود. اگر a بزرگ باشد دستور تقریبی برای ω استخراج کنید.

بخش ۵ - کاربردهای انتگرال دوگانه در مکانیک

بند ۱ - مرکز ثقل (گرانیه) . اگر x, y مختصات مرکز ثقل پلاک Ω واقع در صفحه Oxy و $\rho = \rho(x, y)$ چگالی پلاک باشد در آنصورت

$$(1) \quad x_c = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho x \, dx \, dy, \quad y_c = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho y \, dx \, dy$$

که در آن $M = \iint_{\Omega} \rho \, dx \, dy$ جرم پلاک است .

اگر پلاک همگن باشد در آنصورت در دستورهای (۱) باید $\rho = 1$ را قرار داد .

بند ۲ - لنگرهای لغختی I_x, I_y لنگرهای لغختی پلاک Ω واقع بر صفحه Oxy نسبت به محورهای مختصات Ox, Oy بترتیب با دستورهای

$$(2) \quad I_x = \iint_{\Omega} \rho y^2 \, dx \, dy, \quad I_y = \iint_{\Omega} \rho x^2 \, dx \, dy$$

بیان میشوند که در آن $\rho = \rho(x, y)$ چگالی پلاک است . لنگر لغختی گریز از مرکز نیز چنین در نظر گرفته میشود :

$$(3) \quad I_{xy} = \iint_{\Omega} \rho xy \, dx \, dy$$

با فرض $\rho = 1$ در دستورهای (۲) و (۳) لنگرهای لغختی هندسی یک شکل مستوی بدست میآید .

۴۰۵۱ - جرم پلاک مربعی شکل به ضلع a را در صورتیکه چگالی پلاک در هر نقطه متناسب با فاصله این نقطه از یکی از رأسهای مربع و برابر ρ در مرکز مربع باشد پیدا کنید .

مطلوبست محاسبهٔ مختصات مرکز ثقل پلاک‌های همگن محدود به منحنی‌های

زیر :

$$ay = x^2, x + y = 2a \quad (a > 0) - 4052$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x = 0, y = 0 - 4053$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (x > 0, y > 0) - 4054$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{xy}{c^2} \quad (\text{حلقه}) - 4055$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy \quad (x > 0, y > 0) - 4056$$

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad \varphi = 0 - 4057$$

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi), y = 0 - 4058$$

مختصات مرکز ثقل پلاک گرد $x^2 + y^2 \leq a^2$ را اگر چکالی آن

در نقطهٔ $M(x, y)$ متناسب با فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ $A(a, 0)$ باشد پیدا کنید.

مطلوبست تعیین منحنی سیر مرکز ثقل مساحت متغیر محدود به منحنی‌های

$$y = \sqrt{2px}, \quad y = 0, \quad x = X$$

لنگرهای لختی I_x, I_y نسبت به محورهای مختصات Ox, Oy سطوح $(\rho = 1)$

محدود به منحنی‌های زیر را پیدا کنید :

$$\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \quad \frac{y}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, \quad y = 0 \quad (b_1 > 0, b_2 > 0, h > 0) - 4061$$

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \quad x = 0, y = 0 \quad (0 \leq x \leq a) - 4062$$

$$r = a(1 + \cos \varphi) - 4063$$

$$x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2) - 4064$$

$$xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad x = 2y, \quad 2x = y \quad (x > 0, y > 0) - 4065$$

مطلوبست محاسبهٔ لنگر قطبی

$$I. = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy$$

مساحت S محدود به منحنی

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی گریز از مرکز شکل همگن

محدود به منحنی‌های

$$ay = x^2, \quad ax = y^2 \quad (a > 0)$$

$$I_z = I_x + I_y + Sd^2$$

که در آن I_x و I_y لنگرهای لختی شکل S نسبت به دو محور متوازی I_x و I_y است و I_z از گرانگه شکل میگذرد و d فاصله بین این دو محور است.

۴۰۶۸ - ثابت کنید که لنگر لختی حوزه مستوی S نسبت به خط گذرنده از گرانگه $O(0, 0)$ که با محور Ox زاویه α میسازد مساوی

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha$$

است که در آن I_x ، I_y لنگرهای لختی حوزه S نسبت به محورهای Ox ، Oy و I_{xy} لنگر گریز از مرکز

$$I_{xy} = \iint_S pxy \, dx \, dy$$

میباشد.

۴۰۶۹ - مطلوبست محاسبه لنگر لختی مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a نسبت به خطیکه از گرانگه میگذرد و با ارتفاع آن زاویه α میسازد.

۴۰۷۰ - مطلوبست محاسبه نیروی فشار آب وارد به جدار $x \geq 0$ ظرف استوانه‌ای $x^2 + y^2 = a^2$ ، $z = 0$ در صورتیکه ارتفاع آب $z = h$ است.

۴۰۷۱ - کره بشعاع a در مایعی به چگالی ثابت δ به عمق h (نسبت به مرکز کره)، که در آن $h \geq a$ ، غوطه‌ور است. مطلوبست تعیین نیروهای فشار مایع بر سطوح فوقانی و تحتانی سطح کره.

۴۰۷۲ - استوانه مستدیر قائم به شعاع قاعده a و با ارتفاع b بشامی در مایع به چگالی δ بقسمی غوطه‌ور است که مرکز آن در عمق h از سطح آب قرار دارد و محور استوانه با امتداد قائم زاویه α میسازد. مطلوبست تعیین نیروی فشار مایع بر قاعده‌های بالائی و پائینی استوانه.

۴۰۷۳ - مطلوبست تعیین نیروی جذب نقطه مادی $P(0, 0, b)$ توسط استوانه همگن $0 \leq z \leq h$ ، اگر $x^2 + y^2 \leq a^2$ ، جرم استوانه برابر M و جرم نقطه برابر m باشد.

۴۰۷۴ - توزیع فشار جسمی روی سطح تکیه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

از دستور $p = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$ به دست میآید .

مطلوبست تعیین فشار میانگین جسم بر این سطح .

۴۰۷۵ - چمن بشکل مستطیل به اضلاع a و b بطور یکنواخت از علف دروشده به چگالی برابر $p \text{ kgf/m}^2$ پوشیده شده است . چه کار مینیمالی باید صرف کرد تا تمامی علف را در مرکز چمن جمع آورد در صورتیکه کار ترابری (حمل و نقل) بار $P \text{ kgf}$ در فاصله r برابر kPr ($0 < k < 1$) باشد .

بخش ۶ - انتگرال سه گانه (تربیل)

بند ۱ - محاسبهٔ مستقیم انتگرال سه گانه . اگر تابع $f(x, y, z)$ پیوسته و حوزهٔ V محدود و با ناساویهای زیر تعریف شود :

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$$

که در آن (x, y, z) توابع پیوسته هستند در آنصورت انتگرال سه گانهٔ تابع $f(x, y, z)$ گسترده در حوزهٔ V را میتوان از دستور

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

حساب کرد .

گاهی بهتر است دستور زیر را بکار برد :

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz$$

که در آن $S(x)$ مقطع حوزهٔ V با صفحهٔ $X = x$ میباشد .

بند ۲ - تعویض متغیرها در انتگرال سه گانه . اگر حوزهٔ بسته و محدود مکعب پذیر V از فضای $Oxyz$ بکمک توابع پیوسته ديفرانسیل پذیر

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

به حوزهٔ V' از فضای $O'uvw$ با تناظر یکبه یک تصویر شود و ضمناً

$$(u, v, w) \in V', \quad I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0$$

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_V f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |I| du dv dw \end{aligned}$$

درست است.

در حالت‌های خاص داریم: (۱) دستگاه مختصات استوانه‌ای h, r, φ که در آن

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h$$

و

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, h)} = r$$

و (۲) دستگاه مختصات کروی r, φ, ψ که در آن

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi$$

و

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = r^2 \cos \psi$$

انتگرال‌های سه‌گانه زیر را حساب کنید

$$z = xy, \quad y = x, \quad \text{که در آن حوزه } V \text{ به سطوح } z = 0, \quad y = x, \quad x = 1, \quad z = 0 \text{ محدود است.} \quad - 4076$$

$$x + y + z = 1, \quad \text{که در آن حوزه } V \text{ به سطوح } x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \text{ محدود است.} \quad - 4077$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \text{که در آن حوزه } V \text{ بسطوح } x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \text{ محدود است.} \quad - 4078$$

$$\text{که در آن حوزه } V \text{ به سطح } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ محدود است.} \quad - 4079$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

محدود است.

$x^2 + y^2 = z^2$, به سطح V حوزه در آن حوزه V که در آن $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz - 4080$
 $z = 1$ محدود است.

در انتگرالهای سه گانه^{*} زیر حدود انتگرال گیری را به طرق مختلف قرار دهید :

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz - 4081$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^1 f(x, y, z) dz - 4082$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz - 4083$$

انتگرالهای سه گانه^{*} زیر را به انتگرالهای ساده بدل کنید.

$$\int_a^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\xi) d\xi - 4084$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz - 4085$$

$- 4086$ اگر $f(x, y, z) = F''_{xyz}(x, y, z)$ و a, b, c, A, B, C مقادیر ثابتی باشند مطلوبست محاسبه^{*}

$$\int_a^A dx \int_b^B dy \int_0^C f(x, y, z) dz$$

با گذر به مختصات کروی انتگرالهای زیر را حساب کنید :

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz - 4087$$

که در آن حوزه V به سطح $x^2 + y^2 + z^2 = z$ محدود است.

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dx - 4088$$

$$\iiint_V f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz$$

که در آن حوزه V به سطوح $x = y$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 1$ محدود است به مختصات کروی بگذرید.

۴۰۹۰ - با انجام تعویض مناسب متغیرها انتگرال سه‌گانه

$$\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$$

را که در آن V درون بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ میباشد حساب کنید.

۴۰۹۱ - با گذر به مختصات استوانه‌ای انتگرال

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$$

را که در آن V به سطوح $z = 2$, $x^2 + y^2 = 2z$ محدود است حساب کنید.

۴۰۹۲ - مطلوبست محاسبه انتگرال

$$\iiint_V x^2 dx dy dz$$

که در آن حوزه V به سطوح $(0 < a < b)$, $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$, $z = h$ ($h > 0$), $z = \alpha x$, $z = \beta x$ ($0 < \alpha < \beta$) محدود است.

۴۰۹۳ - مطلوبست محاسبه انتگرال

$$\iiint_V xyz dx dy dz$$

که در آن حوزه V در ثمن $z > 0$, $y > 0$, $x > 0$ واقع و به سطوح

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{n}, \quad xy = a^2, \quad xy = b^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x$$

$$(0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad 0 < m < n)$$

محدود است.

۴۰۹۴ - مطلوبست محاسبه مقدار میانگین تابع

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

در حوزه $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$

۴۰۹۵ - مطلوبست محاسبه مقدار میانگین تابع

$$f(x, y, z) = e \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}$$

در حوزه $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

۴۰۹۶ - با استفاده از قضیه میانگین، انتگرال زیر را برآورد کنید:

$$u = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

که در آن $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$

۴۰۹۷ - ثابت کنید که هرگاه تابع $f(x, y, z)$ در حوزه V پیوسته و بازای هر حوزه دلخواه $\omega \subset V$ داشته باشیم:

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0$$

آنگاه بازای $(x, y, z) \in V$ داریم: $f(x, y, z) \equiv 0$.
۴۰۹۸ - مطلوبست $F'(t)$ اگر

$$F(t) = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \quad (\text{الف})$$

تابعی است دیفرانسیل پذیر؛

$$F(t) = \iiint_{\substack{x \leq t \\ y \leq t \\ z \leq t}} f(xyz) dx dy dz \quad (\text{ب})$$

که در آن f تابعی است

دیفرانسیل پذیر.

۴۰۹۹ - مطلوبست تعیین

$$\iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz$$

که در آن m, n, p اعداد درست نامنفی میباشد.

۴۱۰۰ - با فرض $x + y + z = \xi$, $y + z = \xi\eta$, $z = \xi\eta\zeta$ مطلوبست محاسبهٔ انتگرال دیریکله

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz$$

$$(p > 0, q > 0, r > 0, s > 0)$$

که در آن حوزه V به سطوح $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ محدود است.

بخش ۷ - محاسبهٔ حجم‌ها بکمک انتگرال‌های سه‌گانه

حجم حوزه V با دستور

$$V = \iiint_V dx dy dz$$

بیان میشود.

حجم اجسام محدود به سطوح زیر را پیدا کنید:

$$z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2 \quad - 4101$$

$$z = x + y, z = xy, x + y = 1, x = 0, y = 0 \quad - 4102$$

$$x^2 + z^2 = a^2, x + y = \pm a, x - y = \pm a \quad - 4103$$

$$az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0) \quad - 4104$$

$$xz = a^2 - x^2 - y^2, z = a - x - y, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (a > 0) \quad - 4105$$

$$z = 1 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad - 4106$$

با گذر به مختصات کروی یا استوانه‌ای حجم‌های محدود به سطوح

زیر را حساب کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq z^2 \quad - 4107$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2) \quad - 4108$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz \quad - 4109$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = z^2 \quad - 4110$$

$$(z \geq 0) \quad (0 < a < b)$$

در مثالهای زیر بهتر است از مختصات قطبی تعمیم یافته

$$r, \varphi, \psi \quad (r \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2})$$

با قرار دادن دستورهایی

$$\left. \begin{aligned} x &= ar \cos^\alpha \varphi \cos^\beta \psi \\ y &= br \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \psi \\ z &= cr \sin^\beta \psi \end{aligned} \right\}$$

(a, b, c, α, β ثابت میباشند)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \alpha \beta a b c r^\gamma \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \psi$$

استفاده شود.

حجم اجسام محدود به سطوح زیر را محاسبه کنید:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h} \quad - \text{۴۱۱۱}$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad - \text{۴۱۱۲}$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \quad - \text{۴۱۱۲,۱}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad - \text{۴۱۱۳}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \text{۴۱۱۴}$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \text{۴۱۱۵}$$

با استفاده از تعویض مناسب متغیرها حجم اجسام محدود به سطوح زیر را

محاسبه کنید (پارامترها مثبت فرض میشوند):

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) \quad - \text{۴۱۱۶}$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k} \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) \quad - \text{۴۱۱۶,۱}$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{xyz}{abc} \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) \quad - \text{۴۱۱۷}$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) \quad - \text{۴۱۱۸}$$

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) - \text{ع ۱۱۸, ۱}$$

$$\sqrt[r]{\frac{x}{a}} + \sqrt[r]{\frac{y}{b}} + \sqrt[r]{\frac{z}{c}} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) - \text{ع ۱۱۸, ۲}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{r}{r-1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{r}{r-1}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{r}{r-1}} = 1 - \text{ع ۱۱۸, ۳}$$

$$z = x^r + y^r, \quad z = r(x^r + y^r), \quad xy = a^r, \quad xy = ra^r, \quad x = ry, - \text{ع ۱۱۹}$$

$$rx = y \quad (x > 0, y > 0)$$

$$x^r + z^r = a^r, \quad x^r + z^r = b^r, \quad x^r - y^r - z^r = 0. \quad (x > 0) - \text{ع ۱۲۰}$$

$$(x^r + y^r + z^r)^r = \frac{a^r z^r}{x^r + y^r} - \text{ع ۱۲۱}$$

$$\left(\frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} + \frac{z^r}{c^r}\right)^r = \frac{z^r}{h} \times e^{-\frac{\frac{z^r}{c^r}}{\frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} + \frac{z^r}{c^r}}} - \text{ع ۱۲۲}$$

$$\frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}} = \frac{r}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right), \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, - \text{ع ۱۲۳}$$

$$x = 0, \quad x = a$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, \quad x = 0, \quad z = 0, - \text{ع ۱۲۴}$$

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

ع ۱۲۵ - حجم کره az با $x^r + y^r + z^r \leq az$ سطح $x^r + y^r + az = az$ بجه نسبتی تقسیم میشود؟

ع ۱۲۶ - مطلوبست محاسبه حجم و سطح جسم محدود به سطوح $x^r + y^r = az$, $z = ra - \sqrt{x^r + y^r}$ ($a > 0$)

ع ۱۲۷ - مطلوبست محاسبه حجم متوازی السطوح محدود به صفحات

$$a_i x + b_i y + c_i z = \pm h_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

اگر

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

۴۱۲۸ - مطلوبست محاسبهٔ حجم جسم محدود به سطح

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2$$

اگر

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

۴۱۲۹ - مطلوبست محاسبهٔ حجم جسم محدود به سطح

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \quad (n > 1)$$

۴۱۳۰ - حجم جسم واقع در ثمن مثبت فضا $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ $Oxyz$ و محدود به سطوح

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 1 \quad (m > 0, n > 0, p > 0), \quad x = 0, y = 0, z = 0$$

را پیدا کنید.

بخش ۸ - کاربردهای انتگرال سه‌گانه در مکانیک

بند ۱ - جرم جسم. اگر جسم حجم V را اشغال کند و $\rho = \rho(x, y, z)$ چگالی آن در نقطه (x, y, z) باشد در آنصورت جرم جسم برابر است با

$$M = \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz \quad (1)$$

بند ۲ - مرکز ثقل جسم. مختصات مرکز ثقل (x_c, y_c, z_c) جسم با دستورهایی زیر محاسبه میشود:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho x \, dx \, dy \, dz \\ y_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho y \, dx \, dy \, dz \\ z_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho z \, dx \, dy \, dz \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

اگر جسم همگن باشد در آنصورت در دستورهای (۱) و (۲) میتوان $\rho = 1$ را فرض کرد.

بند ۳- لنگرهای لختی. لنگرهای لختی جسم نسبت به صفحات مختصات به ترتیب با انتگرالهای زیر بیان میشوند:

$$I_{xy} = \iiint_V \rho z^2 \, dx \, dy \, dz, \quad I_{yz} = \iiint_V \rho x^2 \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{zx} = \iiint_V \rho y^2 \, dx \, dy \, dz$$

لنگر لختی جسم نسبت به یک محور l با انتگرال

$$I_l = \iiint_V \rho r^2 \, dx \, dy \, dz$$

بیان میشود که در آن r فاصله نقطه متغیر (x, y, z) از محور l است. بخصوص برای محورهای مختصات Ox, Oy, Oz به ترتیب داریم:

$$I_x = I_{xy} = I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} = I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}$$

لنگر لختی جسم نسبت به مبدأ مختصات عبارتست از انتگرال

$$I_0 = \iiint_V \rho (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

روشن است که

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}$$

بند ۴- پتانسیل میدان جاذبه. پتانسیل نیوتنی جسم در نقطه $P(x, y, z)$ با انتگرال

$$u(x, y, z) = \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi \, d\eta \, d\zeta}{r}$$

بیان میشود که در آن حجم جسم و $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ چگالی جسم میباشد و

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

نقطه مادی بجرم m بوسیله جسم با نیروئی که تصاویر آن x, y, z روی محورهای مختصات Ox, Oy, Oz عبارتند از:

$$X = km \frac{\partial u}{\partial x} = km \iiint_V \rho \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta$$

$$Y = km \frac{\partial u}{\partial y} = km \iiint_V \rho \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\eta d\zeta$$

$$Z = km \frac{\partial u}{\partial z} = km \iiint_V \rho \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta$$

جذب میشود که در آن ثابت قانون جاذبه است.

۴۱۳۱ - مطلوبست محاسبه جرم جسمی که واحد حجم، $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ ، $0 \leq z \leq 1$ را اشغال میکند در صورتیکه چگالی جسم در نقطه

$M(x, y, z)$ با دستور $\rho = x + y + z$ مشخص میشود.

۴۱۳۲ - مطلوبست جرم جسمی که حوزه نامتناهی $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ را پر کرده

است در صورتیکه چگالی آن طبق قانون $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ تغییر کند که در آن $\rho_0 > 0$ و $k > 0$ مقادیر ثابتی هستند.

مختصات مرکز ثقل اجسام همگن محدود بسطوح زیر را پیدا کنید:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}; \quad z = c \quad - 4133$$

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = a, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad - 4134$$

$$x^2 = 2pz, \quad y^2 = 2px, \quad x = \frac{p}{y}, \quad z = 0 \quad - 4135$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad - 4136$$

$$x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0) \quad - 4137$$

$$x^2 + y^2 = 2z, \quad x + y = z \quad - 4138$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{xyz}{abc} \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) - 4139$$

$$z = x^2 + y^2, z = \frac{1}{\gamma} (x^2 + y^2), x + y = \pm 1, x - y = \pm 1 - 4140$$

$$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, \quad x = 0, y = 0, z = 0 - 4141$$

$$(n > 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

4142 - مختصات مرکز ثقل جسم مکعبی شکل

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

را در صورتیکه چگالی آن در نقطه* (x, y, z) برابر

$$\rho = x^{1-\alpha} y^{1-\beta} z^{1-\gamma}$$

باشد بلست آورید که در آن $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1$

لنگرهای لغتی اجسام همگن محدود به سطوح زیر را نسبت به صفحات مختصات تعیین کنید (پارامترها مثبتند).

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad x = 0, y = 0, z = 0 - 4143$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - 4144$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c - 4145$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} - 4146$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c} - 4147$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 4147, 1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1, \quad x = 0, y = 0, z = 0 - 4147, 2$$

$$(n > 0; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

مطلوبست تعیین لنگر لغتی اجسام همگن محدود به سطوح زیر نسبت به محور Oz :

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = \pm 1, \quad x - y = \pm 1, \quad z = 0 \quad - 4148$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad (z > 0) \quad - 4149$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 z \quad - 4149, 1$$

۴۱۵۰ - مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی کرهٔ ناهمگن $R^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$ بجرم M نسبت به قطر آن در صورتیکه چگالی کره در نقطهٔ متغیر $P(x, y, z)$ متناسب با فاصلهٔ این نقطه از مرکز کره باشد.

۴۱۵۱ - مطلوبست اثبات تساوی

$$I_l = I_{l_0} + Md^2$$

که در آن I_l لنگر لختی جسم نسبت به یک محور l و I_{l_0} لنگر لختی نسبت به محور l_0 موازی l و گذرنده از مرکز ثقل جسم و d فاصلهٔ بین دو محور و M جرم جسم است.

۴۱۵۲ - ثابت کنید که لنگر لختی جسمی که حجم V را اشغال میکند نسبت به محور l که از مرکز ثقل آن $O(0, 0, 0)$ میگذرد و با محورهای مختصات زوایای α, β, γ را میسازد برابر است با

$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma -$$

$$- 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2K_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma$$

که در آن I_x, I_y, I_z لنگرهای لختی جسم نسبت به محورهای مختصات و

$$K_{xy} = \iiint_V \rho xy \, dx \, dy \, dz, \quad K_{xz} = \iiint_V \rho xz \, dx \, dy \, dz,$$

$$K_{yz} = \iiint_V \rho yz \, dx \, dy \, dz$$

لنگرهای گریز از مرکز میباشند.

۴۱۵۳ - مطلوبست تعیین لنگر لختی استوانهٔ همگن $z = \pm h, x^2 + y^2 \leq a^2$ به چگالی ρ نسبت به خط $x = y = z$.

۴۱۵۴ - مطلوبست تعیین لنگر لختی جسم همگن به چگالی ρ محدود به سطح

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

نسبت به مبدأ مختصات.

۴۱۵۵ - مطلوبست تعیین پتانسیل نیوتنی کرهٔ همگن $R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ به چگالی ρ در نقطهٔ $P(x, y, z)$.

راهنمائی - فرض کنید که محور $O\xi$ از نقطهٔ $P(x, y, z)$ میگذرد.

۴۱۵۶ - مطلوبست تعیین پتانسیل نیوتنی قشر کروی $R^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ در نقطه $P(x, y, z)$ در صورتیکه چگالی $\rho = f(R)$ که در آن f تابع معلومی است و $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

۴۱۵۷ - مطلوبست تعیین پتانسیل نیوتنی استوانه $\xi \leq \zeta \leq h$ ، $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2$ ، یا چگالی ثابت ρ در نقطه $P(0, 0, z)$.

۴۱۵۸ - کره همگن $R^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ به جرم M با چه نیروئی نقطه مادی $P(0, 0, a)$ به جرم m را جذب میکند؟

۴۱۵۹ - مطلوبست تعیین نیروی جاذبه استوانه همگن $\xi \leq \zeta \leq h$ ، $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2$ ، به چگالی ρ وارد به نقطه $P(0, 0, z)$ به جرم واحد.

۴۱۶۰ - مطلوبست تعیین نیروی جاذبه قطاع کره همگن به چگالی ρ وارد به نقطه مادی به جرم واحد که در رأس آن جا گرفته است در صورتیکه شعاع سطح کروی برابر R و زاویه مقطع محوری قطاع 2α باشد.

بخش ۹ - انتگرالهای دوگانه و سه‌گانه ناویژه

بند ۱ - حالت حوزه نامتناهی. هرگاه حوزه دوبعدی Ω نامتناهی و تابع $f(x, y)$ روی Ω پیوسته باشد در آنصورت بنا به تعریف فرض میشود:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y) dx dy \quad (1)$$

که در آن Ω_n رشته دلخواه حوزه‌های بسته و محدود سریع‌پذیر پرکننده حوزه Ω است. اگر حد طرف راست وجود داشته و مستقل از انتخاب رشته Ω_n باشد در آنصورت انتگرال نظیر را همگرا و در حالت خلاف واگرا نامند. بطرز مشابهی، انتگرال سه‌گانه ناویژه گسترده در حوزه سه بعدی نامحدود برای تابع پیوسته تعریف میشود.

بند ۲ - حالت تابع ناپیوسته. اگر تابع $f(x, y)$ در تمام مواضع حوزه بسته و محدود Ω بجز نقطه $P(a, b)$ پیوسته باشد در آنصورت فرض میشود:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{\Omega - U_{\epsilon}} f(x, y) dx dy \quad (2)$$

که در آن U_{ϵ} حوزه بقطر ϵ شامل نقطه P است و در حالت وجود حد، انتگرال مورد نظر را همگرا و در غیر اینصورت آنرا واگرا مینامند.

با فرض آنکه در نزدیکی نقطه $P(a, b)$ تساوی

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^\alpha}$$

برقرار باشد که در آن قدر مطلق تابع $\varphi(x, y)$ بین دو عدد مثبت M و m محصور است و $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ ، نتیجه میشود که : (۱) بازای $\alpha < 2$ انتگرال (۲) همگرا ؛ (۲) بازای $\alpha \geq 2$ واگرا است .

اگر تابع $f(x, y)$ دارای خط انفصال باشد انتگرال ناویژه (۲) بطرز مشابهی تعریف میشود .

مفهوم انتگرال ناویژه از تابع ناپیوسته بسادگی به انتگرالهای سه گانه منتقل میشود .

همگرایی انتگرالهای ناویژه زیر را که دارای حوزه انتگرال گیری نامتناهی میباشد بررسی کنید $(0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M)$:

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(y^2+y^2)^p} dx dy - \text{۴۱۶۱}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} - \text{۴۱۶۲}$$

$$\iint_{|x| \leq 1, |y| \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy - \text{۴۱۶۳}$$

$$\iint_{|x|+|y| \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p+|y|^q} \quad (p > 0, q > 0) - \text{۴۱۶۴}$$

$$\iint_{x+y \geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy - \text{۴۱۶۵}$$

۴۱۶۶ - ثابت کنید که اگر تابع پیوسته $f(x, y)$ نامنفی و $S_n (n = 1, 2, \dots)$ یک دنباله دلخواه از حوزه های بسته و محدود پراکنده حوزه S باشد در آن صورت

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy$$

که در آن طرف چپ و راست همزمان دارای معنی هستند و یا نیستند .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi$$

در صورتیکه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2\pi n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0$$

(n عددیست طبیعی).

۴۱۶۸ - نشان دهید با وجود آنکه انتگرالهای مکرر

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \quad \text{و} \quad \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

همگرا هستند انتگرال

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

واگرا است.

مطلوبست محاسبه^{*} انتگرالهای زیر :

$$\iint_{x^2 + y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p} - 4172$$

$$\iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1 \\ y \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} - 4179$$

$$\iint_{y \geq x^2 + 1} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} - 4173$$

$$\iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ x \geq 1 \\ y \geq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p} - 4170$$

$$\iint_{-\infty \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy - 4174$$

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - 4171$$

با گذر به مختصات قطبی مطلوبست محاسبه^{*} انتگرالهای زیر :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy - 4175$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 + y^2)} \cos(x^2 + y^2) dx dy - 4176$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 + y^2)} \sin(x^2 + y^2) dx dy - 4177$$

مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر :

$$a < 0, \text{ در آن } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f} dx dy - \text{ ۱۷۸}$$

$$ac - b^2 > 0.$$

$$\iint e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy - \text{ ۱۷۹}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2c\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy \quad (0 < |c| < 1) - \text{ ۱۸۰}$$

همگرایی انتگرالهای دوگانه ناویژه توابع ناپیوسته زیر را بررسی کنید

$$0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$$

$$|y| \leq x^2, \text{ شرایط } \Omega \text{ از حوزة } \Omega \text{ که در آن } \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} - \text{ ۱۸۱}$$

$$x^2 + y^2 \leq 1 \text{ تعیین میشود.}$$

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2 + xy + y^2)^p} dx dy - \text{ ۱۸۲}$$

$$\iint_{|x| + |y| \leq 1} \frac{dx dy}{(|x|^p + |y|^q)} \quad (p > 0, q > 0) - \text{ ۱۸۳}$$

$$\iint_a^a \frac{\varphi(x, y)}{|x - y|^p} dx dy - \text{ ۱۸۴}$$

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1 - x^2 - y^2)^p} dx dy - \text{ ۱۸۵}$$

۱۸۶ - ثابت کنید که اگر (۱) تابع $\varphi(x, y)$ در حوزة محدود $a \leq x \leq A$

$b \leq y \leq B$ پیوسته؛ (۲) تابع $f(x)$ روی قطعۀ $a \leq x \leq A$ پیوسته

و $p < 1$ باشد در آن صورت انتگرال زیر همگرا است :

$$\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy$$

مطلوبست محاسبه* انتگرالهای زیر :

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy - 4187$$

$$\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{V(a-x)(x-y)} \quad (a > 0) - 4188$$

$y = 0$. حوزة Ω به خطوط $y = 0$ که در آن $\iint_{\Omega} \ln \sin(x-y) dx dy - 4189$ محدود است .
 $y = x, x = \pi$.

$$\iint_{x^2+y^2 \leq x} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 4190$$

همگرایی انتگرالهای سه گانه* زیر را بررسی کنید :

آن که در $\iint\int_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz - 4191$
 $\cdot < m \leq |\varphi(x, y, z)| \leq M$

آن که در $\iint\int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz - 4192$
 $\cdot < m \leq |\varphi(x, y, z)| \leq M$

$$\iiint_{|x|+|y|+|z| \geq 1} \frac{dx dy dz}{(|x|^p + |y|^q + |z|^r)} \quad (p > 0, q > 0, r > 0) - 4193$$

آن که در $\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{|y-\varphi(x)|^r + |z-\psi(x)|^s\}^p} - 4194$

توابع پیوسته ای $\psi(x), \varphi(x)$ و $\cdot < m \leq |f(x, y, z)| \leq M$ روی قطعه $[0, a]$ میباشند .

$$\iiint_{\left\{ \begin{array}{l} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1 \end{array} \right\}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p} - 4195$$

مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر :

$$\iiint \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r} - \text{ع ۱۹۶}$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \text{ع ۱۹۷}$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} - \text{ع ۱۹۸}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz - \text{ع ۱۹۹}$$

ع ۲۰۰ - مطلوبست محاسبه انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3$$

که در آن $(a_{ij} = a_{ji})$

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$$

صورت کوادراتیک مثبت معین است.

بخش ۱۰ - انتگرالهای چندگانه

بند ۱ - محاسبه مستقیم انتگرال چندگانه. اگر تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در حوزه محدود Ω - ی تعریف شده با نامساویهای زیر، پیوسته باشد:

$$\begin{cases} x'_1 \leq x_1 \leq x''_1 \\ x'_2(x_1) \leq x_2 \leq x''_2(x_1) \\ \dots \\ x'_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq x''_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$$

که در آن اعداد ثابت و x'_1 و x''_1 و $x'_2(x_1)$ و $x''_2(x_1)$ و \dots و $x'_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ و $x''_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ توابع پیوسته میباشند در آنصورت انتگرال چندگانه نظیر را میتوان با دستور زیر محاسبه نمود :

$$\iint \dots \int_{\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \dots \int_{x_n'(x_1, \dots, x_{n-1})}^{x_n''(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n$$

بند ۲- تعویض متغیرها در انتگرال چندگانه. اگر (۱) تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در حوزه متناهی اندازه‌پذیر Ω پیوسته^۱ یکنواخت؛ (۲) توابع پیوسته^۲ دیفرانسیل‌پذیر

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

حوزه Ω از فضای $Ox_1x_2 \dots x_n$ را بر حوزه متناهی Ω' از فضای $O'\xi_1\xi_2 \dots \xi_n$ ، با تناظر یک به یک تصویر کند و (۳) در حوزه Ω' ژاکوبین

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}$$

در آنصورت دستور

$$\iint \dots \int_{\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \iint \dots \int_{\Omega'} f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) |I| d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$$

درست است.

بخصوص بازای گذر به مختصات قطبی $(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ یکمک دستوره‌ای

$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}$$

$$x_n = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}$$

داریم:

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1, \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2}$$

۴۲۰۱ - فرض کنیم $K(x, y)$ تابع پیوسته‌ای در حوزه $R(a \leq x \leq b; a \leq y \leq b)$ باشد و

$$K_n(x, y) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \dots K(t_n, y) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

ثابت کنید که

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt$$

۴۲۰۲ - فرض کنیم $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تابع پیوسته‌ای در حوزه $a \leq x_i \leq x$ ($i = 1, 2, \dots, n$) باشد. تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\int_a^x dx \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f dx_n = \int_a^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \dots \int_{x_2}^x f dx_1 \quad (n \geq 2)$$

۴۲۰۳ - ثابت کنید که

$$\int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left[\int_a^t f(\tau) d\tau \right]^n$$

که در آن f تابع پیوسته‌ای است.

مطلوبست محاسبه انتگرالهای چندگانه* زیر:

$$\int_a^1 \int_a^1 \dots \int_a^1 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (\text{الف} - ۴۲۰۴)$$

$$\int_a^1 \int_a^1 \dots \int_a^1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (\text{ب})$$

$$I_n = \int_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0} \int_{x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq a} dx_1 dx_2 \dots dx_n - ۴۲۰۵$$

$$\int_a^1 dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} x_1 x_2 \dots x_n dx_n - ۴۲۰۶$$

$$\int_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0} \int_{x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1} \sqrt{x_2 + x_3 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n - ۴۲۰۷$$

۴۲۰۸ - مطلوبست تعیین حجم متوازی‌السطوح n - بعدی محدود به صفحات

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \pm h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

اگر

$$\Delta = |a_{ij}| \neq 0.$$

۴۲۰۹ - مطلوبست تعیین حجم هرم n - بعدی

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(a_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n)$$

۴۲۱۰ - مطلوبست تعیین حجم مخروط n - بعدی محدود به سطوح

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n$$

۴۲۱۱ - مطلوبست تعیین حجم کره n - بعدی

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2$$

۴۲۱۲ - مطلوبست $\iint_{\Omega} \dots \int x_n^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n$ که در آن حوزه Ω با

ناساوهای

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq a^2, \quad -\frac{h}{2} \leq x_n \leq \frac{h}{2}$$

مشخص شده است.

۴۲۱۳ - مطلوبست محاسبه

$$\iiint \dots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}}$$

۴۲۱۴ - تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du$$

۴۲۱۵ - تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{\Gamma(n)!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du$$

۴۲۱۶ - مطلوبست اثبات دستور دیریکله :

$$\iint \dots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n + 1)} \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0)$$

۴۲۱۷ - مطلوبست اثبات دستور لیوویل :

$$\iint \dots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1 + p_2 + \dots + p_n - 1} du$$

(p_1, p_2, \dots, p_n > 0)

که در آن $f(u)$ تابعی است پیوسته .

راهنمایی - روش استقرای ریاضی را بکار برید .

۴۲۱۸ - انتگرال n - گانه $(n \geq 2)$

$$\iint \dots \int_{\Omega} f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

گسترده در حوزه $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2$ را که در آن تابعی $f(u)$ پیوسته است به انتگرال ساده بدل کنید .

۴۲۱۹ - مطلوبست محاسبه « پنانسیل روی خود » کره همگن بشعاع R و چگالی ρ یعنی تعیین انتگرال

$$u = \frac{\rho}{2} \iiint \iiint \iiint_{\substack{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leq R^2}} \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}}$$

که در آن

$$r_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

۴۲۰ - مطلوبست محاسبه انتگرال n - گانه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right\}} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

اگر

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

صورت کوادراتیک مثبت معینی باشد.

بخش ۱۱ - انتگرالهای منحنی الخط

بند ۱ - انتگرال منحنی الخط نوع اول. اگر $f(x, y, z)$ تابعی معین و پیوسته در نقاط منحنی هموار C :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

و ds دیفرانسیل قوس باشد در اینصورت

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

خصوصیت این انتگرال در آن است که مستقل از جهت منحنی C است.

بند ۲ - کاربرد مکانیکی انتگرال منحنی الخط نوع اول. اگر $\rho = \rho(x, y, z)$ چگالی خطی در نقطه متغیر (x, y, z) منحنی C باشد در اینصورت جرم منحنی برابر است با

$$M = \int_C \rho(x, y, z) ds$$

مختصات مرکز ثقل (x_c, y_c, z_c) این منحنی با دستورهای زیر بیان میشود:

$$x_c = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) ds, \quad y_c = \frac{1}{M} \int_C y \rho(x, y, z) ds,$$

$$z_c = \frac{1}{M} \int_C z \rho(x, y, z) ds$$

بند ۳- انتگرال منحنی الخط نوع دوم. اگر توابع $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ در نقاط منحنی (۱) پیوسته شده در جهت صعودی پارامتر t پیوسته باشد در آنصورت

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_t^T \{P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)\} dt \quad (2)$$

با تغییر جهت مسیر منحنی C این انتگرال تغییر علامت میدهد. از لحاظ مکانیکی انتگرال (۲) عبارتست از کار نیروی متغیر $\{P, Q, R\}$ که نقطه اثر آن منحنی C را میپیماید.

بند ۴- حالت دیفرانسیل کامل. اگر

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = du$$

که در آن $u = u(x, y, z)$ یک تابع تک مقداری در حوزه V است در آنصورت مستقل از شکل منحنی C که بتمامی در حوزه V واقع شده است داریم:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1)$$

که در آن (x_1, y_1, z_1) نقطه مبدأ و (x_2, y_2, z_2) نقطه انتهای مسیر است. در حالت ساده‌تر اگر حوزه V یک ارتباطی و توابع P, Q, R دارای مشتقات جزئی پیوسته مرتبه اول باشند برای آن لازم و کافی است شریط

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

در حوزه V بطور اتحادی برقرار باشند. آنوقت تابع u را میتوان از روی دستور

$$u = u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + c$$

تعیین نمود که در آن (x_0, y_0, z_0) یک نقطه ثابت از حوزه V و c یک مقدار ثابت دلخواه است.

از لحاظ مکانیکی این حالت نظیر کار نیروی دارای پتانسیل است.

مطلوبست محاسبه انتگرالهای منحنی الخط نوع اول زیر :

۴۲۲۱ - $\int_C (x+y) ds$ که در آن C دورگرد (consour) مثلث برنوس، $O(0, 0)$ ، $A(1, 0)$ و $B(0, 1)$ میباشد.

۴۲۲۲ - $\int_C y^2 ds$ که در آن C طاقتمائی است از سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

۴۲۲۳ - $\int_C (x^2 + y^2) ds$ که در آن C منحنی زیر است :

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

۴۲۲۴ - $\int_C xy ds$ که در آن C قوسی است از هذلولی

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t \quad (0 \leq t \leq t.)$$

۴۲۲۵ - $\int_C \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) ds$ که در آن C قوسی از آستروئید $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ میباشد.

۴۲۲۶ - $\int_C e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$ که در آن C دورگرد بر آمده محدود به منحنیهای

$$r = a, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

مختصات قطبی است) میباشد.

۴۲۲۷ - $\int_C |y| ds$ که در آن C قوسی از لمنیسکات زیر است :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

۴۲۲۸ - $\int_C x ds$ که در آن C بخشی از حلزونی لگاریتمی $r = ae^{k\varphi}$ ($k > 0$) است که داخل دایره $r = a$ قرار دارد.

۴۲۲۹ - $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$ که در آن C دایره $x^2 + y^2 = ax$ میباشد.

۴۲۳۰ - $\int_C \frac{ds}{y^2}$ که در آن C خط زنجیری $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ میباشد.

طول قوس منحنی‌های فضایی زیر را پیدا کنید (پارامترها مثبتند):

$$A(r, r, r) \text{ تا } O(0, 0, 0) \text{ از } x = rt, y = rt^2, z = rt^3 - 4231$$

$$\bullet < t < +\infty \text{ بازای } x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t} - 4232$$

$$\text{تا } O(0, 0, 0) \text{ از } y = a \arcsin \frac{x}{a}, z = \frac{a}{4} \ln \frac{a-x}{a+x} - 4233$$

$$A(x, y, z)$$

$$\text{تا } O(0, 0, 0) \text{ از } (x-y)^2 = a(x+y), x^2 - y^2 = \frac{9}{8} z^2 - 4234$$

$$A(x, y, z)$$

$$A(x, y, z) \text{ تا } O(0, 0, 0) \text{ از } x^2 + y^2 = cz, \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c} - 4235$$

$$A(a, 0, 0) \text{ از نقطه } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ch} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right) = a - 4236$$

$$\bullet \text{ تا نقطه } B(x, y, z)$$

انتهای منحنی‌های منحنی‌های فضایی اول زیر را در طول منحنی‌های فضایی داده شده

حساب کنید:

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds - 4237$$

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$\int_C x^2 ds - 4238$$

که در آن C دایره زیر است:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$$

$$\int_C z ds - 4239$$

که در آن C منحنی مارپیچی مخروطی زیر است:

$$x = t \cos t, y = t \sin t, z = t \quad (0 \leq t \leq t)$$

$$\int_C z ds - 4240$$

که در آن C قوسی است از منحنی $x^2 + y^2 = z^2, y^2 = ax$

$$\text{از نقطه } O(0, 0, 0) \text{ تا نقطه } A(a, a, a\sqrt{2})$$

$$- 4241 \text{ - مطلوبست محاسبه جرم منحنی } (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ } x = a \cos t, y = b \sin t$$

در صورتیکه چگال خطی آن در نقطه (x, y) برابر $\rho = |y|$ باشد.

۱، ۴۲۴۱ - مطلوبست محاسبهٔ جرم کمان سهمی

$$y^2 = 2px \quad \left(0 \leq x \leq \frac{p}{2} \right)$$

در صورتیکه چگالی خطی سهمی در نقطهٔ متغیر $M(x, y)$ برابر $|y|$ باشد.

۲، ۴۲۴۲ - مطلوبست محاسبهٔ جرم کمان منحنی $x = at, y = \frac{a}{3}t^2, z = \frac{a}{3}t^3$

۱، ۴۲۴۳ - در صورتیکه چگالی آن طبق قانون $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ تغییر کند.

۳، ۴۲۴۴ - مختصات مرکز ثقل کمان منحنی همگن $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ از نقطهٔ $A(0, a)$ تا نقطهٔ $B(b, h)$ را حساب کنید.

۴، ۴۲۴۵ - مطلوبست تعیین مرکز ثقل کمان سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

۱، ۴۲۴۶ - مطلوبست لنگرهای ایستی

$$S_y = \int_C x \, ds, \quad S_x = \int_C y \, ds$$

از کمان C آستروئید

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

نسبت به محورهای مختصات.

۲، ۴۲۴۷ - مطلوبست لنگر لختی دایرهٔ

$$x^2 + y^2 = a^2$$

نسبت به قطرش.

۳، ۴۲۴۸ - مطلوبست لنگر لختی قطبی

$$I_0 = \int_C (x^2 + y^2) \, ds$$

نسبت به نقطهٔ $O(0, 0)$ از خطهای زیر: الف) دورگرد C (contour) مربع $\max\{|x|, |y|\} = a$ ؛ ب) دورگرد C مثلث متساوی الاضلاع یا رئوس به مختصات قطبی

$$P(a, 0), \quad Q\left(b, \frac{2\pi}{3}\right), \quad R\left(a, \frac{4\pi}{3}\right)$$

۴۲۴۴،۴ - مطلوبست محاسبه شعاع قطبی میانگین آستروئید

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

یعنی عدد r . ($r > 0$) تعریف شده با دستور

$$I_s = s \times r^2$$

که در آن I لنگر لختی قطبی آستروئید نسبت به مبدأ مختصات (۴، ۲، ۴، ۲) را ببینید) و s طول کمان آستروئید است.

۴۲۴۵ - مطلوبست محاسبه مختصات مرکز ثقل دورگرد مثلث کروی

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

۴۲۴۶ - مطلوبست محاسبه مختصات مرکز ثقل کمان همگن

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t \quad (-\infty < t \leq 0)$$

۴۲۴۷ - لنگر لختی یک دور از منحنی ماریچی

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi} t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

را نسبت به محورهای مختصات پیدا کنید.

۴۲۴۸ - مطلوبست محاسبه انتگرال متعنی الحظ نوع دوم

$$\int_{OA} x dy - y dx$$

که در آن O مبدأ مختصات و نقطه A دارای مختصات $(2, 1)$ است در صورتیکه: الف) OA پاره خط باشد؛ ب) OA سهمی باشد که محور آن Oy است؛ پ) OA خط شکسته حاصل از قطعه OB محور Ox و قطعه BA موازی با محور Oy باشد.

۴۲۴۹ - مطلوبست محاسبه

$$\int_{OA} x dy + y dx$$

برای مسیرهای الف)، ب) و پ) که در مسئله قبل به آن اشاره شده است.

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای منحنی الخط نوع دوم زیر در طول منحنی‌های مشخص شده در جهت صعود پارامترها.

۴۲۵۰ $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ - که در آن عبارتست از سهمی

$$y = x^2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

۴۲۵۱ $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ - که در آن عبارتست از منحنی

$$y = 1 - |1 - x| \quad (0 \leq x \leq 2)$$

۴۲۵۲ $\oint_C (x + y) dx + (x - y) dy$ - که در آن بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

است که در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت پیچیده می‌شود.

۴۲۵۳ $\int_C (2a - y) dx + x dy$ - که در آن عبارتست از طاقم‌ای سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

۴۲۵۴ $\oint_C \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$ - که در آن دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ است

که در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت پیچیده می‌شود.

۴۲۵۵ $\oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ - که در آن دورگرد مربع برنوس $A(1, 0)$ ،

$$B(0, 1), \quad C(-1, 0), \quad D(0, -1)$$

۴۲۵۶ $\int_{AB} dx \sin y + dy \sin x$ - که در آن پاره خط واصل نقاط $A(0, \pi)$

$$B(\pi, 0)$$

۴۲۵۷ $\int_{OmAnO} dy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - dx$ - که در آن عبارتست از قطعه‌ای از

سهمی $y = x^2$ و OnA قطعه‌ای است از خط $y = x$.

با استدلال آنکه عبارت تحت انتگرال، دیفرانسیل کاملی می‌باشد انتگرال‌های منحنی‌خط زیر را حساب کنید:

$$\int_{(0,1)}^{(2,-4)} x dx + y dy - 4259$$

$$\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx - 4258$$

$$\int_{(1, -1)}^{(1, 1)} (x-y)(dx-dy) - 4261 \quad \int_{(0, 1)}^{(2, 3)} (x+y) dx + (x-y) dy - 4260$$

که در آن $f(u)$ پیوسته است .

$$\int_{(0, 0)}^{(a, b)} f(x+y)(dx+dy) - 4262$$

در طول میسرهایی که محور Oy را نبرد .

$$\int_{(1, 0)}^{(1, 2)} \frac{y dx - x dy}{x^2} - 4263$$

در طول میسرهایی که از مبدأ مختصات نگذرد .

$$\int_{(1, 0)}^{(2, 1)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 4264$$

که در آن φ, ψ توابع پیوسته‌ای میباشند .

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy - 4265$$

$$\int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^2 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy - 4266$$

در طول میسرهایی که خط $y=x$ را نبرد .

$$\int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2} - 4267$$

در طول

$$\int_{(1, \pi)}^{(2, \pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy - 4268$$

میسرهائی که محور Oy را نبرد .

$$\int_{(0, 0)}^{(a, b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy) - 4269$$

۴۲۷۰- ثابت کنید که هرگاه $f(u)$ تابعی پیوسته و C دورگرد هموار قطعه‌ای بسته‌ای باشد آنگاه

$$\oint_C f(x^2 + y^2) (x dx + y dy) = 0$$

مطلوبست تعیین تابع اولیه z اگر :

$$dz = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy - 4271$$

$$dz = \frac{y dx - x dy}{2x^2 - 2xy + 2y^2} - 4272$$

$$dz = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy}{(x+y)^3} - 4273$$

$$dz = e^x [e^y (x - y + 2) + y] dx + e^x [e^y (x - y) + 1] dy - 4274$$

$$dz = \frac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^{n+1} \partial y^m} dx + \frac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^n \partial y^{m+1}} dy - 4275$$

$$dz = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dx - \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dy - 4276$$

که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

4277 - ثابت کنید که بر آورد زیر برای انتگرال منحنی الخط درست است :

$$\left| \int_C P dx + Q dy \right| \leq LM$$

که در آن L طول میسر انتگرال گیری و $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$ روی کمان C است.

4278 - انتگرال

$$I_R = \oint_{x^2 + y^2 = R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

را بر آورد و ثابت کنید که $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

مطلوبست محاسبه انتگرالهای منحنی الخط گرفته شده در طول منحنیهای فضائی زیر (دستگاه مختصات دست راستی فرض شده است) :

$$4279 - \int_C (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz \quad x=t, \text{ منحنی } C \text{ که در آن}$$

$y = t^2, z = t^3$ ($0 \leq t \leq 1$) است که در جهت صعود پارامتر پیموده میشود.

$$4280 - \int_C y dx + z dy + x dz \quad \text{که در آن } C \text{ یک دور منحنی مارپیچی}$$

جهت صعود پارامتر پیموده میشود. $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

$$4281 - \int_C (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz \quad \text{که در آن } C \text{ دایره}$$

گردش عقربه ساعت پیموده میشود، اگر از طرف x -های مثبت، $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x \operatorname{tg} \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$) جهت بان نگاه کنیم.

$\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz - 4282$ که در آن C بخشی از منحنی ویوانی
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax \quad (z \geq 0, a > 0)$ است که
 خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت پیموده میشود، اگر از طرف
 مثبت ($x > a$) محور Ox بان نگاه کنیم.

$\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz - 4283$ که در آن C
 دورگرد محدودکننده بخشی از کره $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ میباشد و طوری پیموده میشود که قسمت بیرونی
 این سطح در سمت چپ قرار میگیرد.

مطلوبست محاسبه انتگرالهای منحنی الخط دیفرانسیل های کامل زیر :

$$\int_{(1, 1, 1)}^{(2, 3, -4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz - 4284$$

$$\int_{(1, 2, 3)}^{(6, 1, 1)} yz dx + xz dy + xy dz - 4285$$

که در آن نقطه (x_1, y_1, z_1) روی

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 4286$$

کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و نقطه (x_1, y_1, z_1) روی کره
 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \quad (b > 0, a > 0)$ قرار دارد.

که در آن φ, ψ, χ توابع

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy + \chi(z) dz - 4287$$

پیوسته میباشد.

که در آن f تابعی است

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x + y + z) (dx + dy + dz) - 4288$$

پیوسته.

که در آن f

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) (x dx + y dy + z dz) - 4289$$

تابعی است پیوسته.

مطلوبست تعیین تابع اولیه u اگر :

$$du = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz - 4290$$

$$du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz - 4291$$

$$du = \frac{(x+y-z) dx + (x+y-z) dy + (x+y+z) dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy} - 4292$$

۴۲۹۳ - مطلوبست محاسبه کار انجام شده توسط نیروی ثقل وقتی که نقطه به جرم m از وضع (x_1, y_1, z_1) به وضع (x_2, y_2, z_2) جا بجا شود (محور Oz در جهت قائم بیلا متوجه است).

۴۲۹۴ - مطلوبست محاسبه کار نیروی ارتجاعي متوجه به مبدأ مختصات که مقدار آن متناسب با دوری نقطه مادی از مبدأ مختصات است، اگر این نقطه در جهت خلاف گردش عقربه‌های ساعت ربع مثبت بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ را بپیماید.}$$

۴۲۹۵ - مطلوبست کار نیروی جاذبه $F = \frac{k}{r^2}$ که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

که روی جرم واحد اثر میکند، وقتی که این جرم از نقطه $M_1(x_1, y_1, z_1)$ به نقطه $M_2(x_2, y_2, z_2)$ جا بجا شود.

بخش ۱۲ - دستور گرین

بند ۱ - رابطه انتگرال منحنی الخط با انتگرال دوگانه. اگر C دورگرد هموار قطعه‌ای ساده بسته و محدودکننده حوزه یکارتباطی متناهی S باشد و طوری پیموده شود که حوزه S در سمت چپ قرار گیرد و توابع $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ با مشتق‌های جزئی مرتبه اول خود در حوزه S و مرز آن پیوسته باشند در آنصورت دستور گرین برقرار است:

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (1)$$

دستور (۱) برای حوزه متناهی S که با چند دورگرد ساده محدود شده نیز درست است هرگاه منظور از مرز C حوزه مذکور مجموع تمام دورگردهای مرزی باشد که جهت پیمودن آنها طوری انتخاب میشود که حوزه S در سمت چپ قرار گیرد.

بند ۲ - مساحت حوزه مستوی . مساحت S محدود به دورگرد ساده هموار
 قطعه‌ای C برابر است با

$$S = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{4} \oint_C (x dy - y dx)$$

در این بخش اگر خلاف آن تصریح نشود فرض بر این است که دورگرد بسته انتگرال گیری ساده (بدون نقطه‌های خودبری) است و طوری پیموده میشود که حوزه محدود شده آن که شامل نقطه بی‌نهایت دور نیست در سمت چپ قرار میگیرد (جهت مثبت).

۴۲۹۶ - بکمک دستور گرین انتگرال منحنی‌العظ زیر را تبدیل کنید :

$$I = \oint_C V \sqrt{x^2 + y^2} dx + y [xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy$$

که در آن دورگرد C حوزه متناهی S را محدود میسازد .
 ۴۲۹۷ - با کاربرد دستور گرین مطلوبست محاسبه انتگرال منحنی‌العظ

$$I = \oint_K (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$$

که در آن K دورگرد مثلث ABC برئوس $A(1, 1)$ ، $B(3, 2)$ ، $C(2, 0)$ پیموده شده در جهت مثبت است .

با محاسبه مستقیم انتگرال ، نتیجه حاصل را امتحان کنید .

با کاربرد دستور گرین انتگرالهای منحنی‌العظ زیر را حساب کنید :

۴۲۹۸ - $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$ که در آن C دایره $x^2 + y^2 = a^2$ میباشد .

۴۲۹۹ - $\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy$ که در آن C بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

میباشد .

۴۳۰۰ - $\oint_C e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy]$ که در آن C دورگرد

محدود کننده حوزه $0 < y < \sin x$ ، $0 < x < \pi$ ، میباشد که در جهت مثبت پیموده میشود .

$$\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy) - 4301$$

۴۳۰۲ - انتگرالهای منحنی الخط

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

و

$$I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

که در آن خط واصل نقاط $A(1, 1)$ و $B(2, 2)$ و AnB سهمی به محور قائم مار بر همان نقاط A و B و مبدأ مختصات است چه قدر از همدیگر اختلاف دارند؟

۴۳۰۳ - مطلوبست محاسبه انتگرال منحنی الخط

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$$

که در آن نیمدایره بالائی $x^2 + y^2 = ax$ پیموده شده از نقطه $A(a, 0)$ تا نقطه $O(0, 0)$ میباشد.

راهنمایی - پاره خط مستقیم OA از محور Ox را به مسیر بیافزاید تا بسته شود.

۴۳۰۴ - مطلوبست محاسبه انتگرال منحنی الخط

$$\int_{AmB} [\varphi(y) e^x - my] dx + [\varphi'(y) e^x - m] dy$$

که در آن توابع پیوسته و $\varphi(y)$, $\varphi'(y)$ مسیر دلخواه واصل نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ میباشد که توأمأ با پاره خط AB مساحت $AmBA$ بمقدار مفروض S را محدود میسازد.

۴۳۰۵ - مطلوبست تعیین دو تابع پیوسته دو بار دیفرانسیل پذیر $P(x, y)$, $Q(x, y)$ بقسمی که انتگرال منحنی الخط

$$I = \oint_C P(x + \alpha, y + \beta) dx + Q(x + \alpha, y + \beta) dy$$

برای دورگرد دلخواه بسته C مستقل از ثابتهای α و β باشد.

۴۳۰۶ - تابع دیفرانسیل پذیر $F(x, y)$ در چه شرطی باید صدق کند تا انتگرال منحنی الخط

$$\int_{AmB} F(x, y) (y dx + x dy)$$

مستقل از شکل مسیر انتگرال گیری باشد ؟
 ۴۳۰۷ - مطلوبست محاسبه

$$I = \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

که در آن C دورگرد بسته ساده ناگذرنده از مبدأ مختصات و پیمود شده در جهت شب است.

راهنمایی - دو حالت در نظر بگیرید : (۱) مبدأ مختصات در خارج دورگرد قرار دارد ؛ (۲) دورگرد C مبدأ مختصات را در بر میگیرد .
 یکمک انتگرالهای منحنی الخط مساحت های محدود به منحنی های زیر را حساب کنید :

۴۳۰۸ - بیضی $x = a \cos t, y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

۴۳۰۹ - آستروئید $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

۴۳۱۰ - سهمی $(x+y)^2 = ax \quad (a > 0)$ و محور Ox

۴۳۱۱ - حلقه برگ دکارتی $x^3 + y^3 = 3axy \quad (a > 0)$

راهنمایی - فرض کنید $y = tx$.

۴۳۱۲ - لمنیسکات $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

راهنمایی - فرض کنید $x = x \operatorname{tg} \varphi$

۴۳۱۳ - منحنی $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ و محورهای مختصات.

۴۳۱۴ - مطلوبست محاسبه مساحت محدود به منحنی

$$(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m \quad (a > 0, n > 0, m > 0)$$

۴۳۱۵ - مطلوبست محاسبه مساحت محدود به منحنی

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a > 0, b > 0, n > 0)$$

و محورهای مختصات.

راهنمایی - فرض کنید

$$\frac{x}{a} = \cos \frac{\varphi}{n}, \quad \frac{y}{b} = \sin \frac{\varphi}{n}$$

۴۳۱۶ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت محدود به منحنی

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$(a > 0, b > 0, n > 0)$ و محورهای مختصات.

۴۳۱۷ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت حلقهٔ منحنی

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n \quad (a > 0, b > 0, c > 0, n > 0)$$

۴۳۱۸ - اپی سیکلوئید (برون چرخزاد) عبارتست از منحنی پیموده شده توسط نقطه‌ای از دایرهٔ متحرک بشعاع r که بدون لغزش روی دایرهٔ ثابت بشعاع R می‌غلتد و در بیرون آن واقع است.

مطلوبست محاسبهٔ مساحت محدود به اپی سیکلوئید با فرض $\frac{R}{r} = n$

که در آن $n \geq 1$ عددیست درست.

حالت خاص $r = R$ (کاردیوئید) را بررسی کنید.

۴۳۱۹ - هیپوسیکلوئید (درون چرخزاد) عبارتست از منحنی پیموده شده توسط نقطه‌ای از دایرهٔ متحرک با شعاع r که بدون لغزش روی دایرهٔ ثابت بشعاع R می‌غلتد و در درون آن واقع است. مطلوبست محاسبهٔ

مساحت محدود به هیپوسیکلوئید با فرض $\frac{R}{r} = n$ که در آن $n \geq 2$

عددیست درست.

حالت خاص $r = \frac{R}{2}$ (آستروئید) را بررسی کنید.

۴۳۲۰ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح استوانه‌ای $x^2 + y^2 = ax$ که توسط سطح $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ بریده میشود.

۴۳۲۰، ۱ - ثابت کنید که حجم جسم حاصل از دوران دورگرد سادهٔ بستهٔ C واقع در نیم صفحهٔ بالائی $y \geq 0$ حول محور Ox برابر است با

$$V = -\pi \oint_C y^2 dx$$

۴۳۲۱ - مطلوبست محاسبهٔ

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2}$$

اگر $X = ax + by$, $Y = cx + dy$ و دورگرد بسته ساده C مبدا مختصات را در بر بگیرد ($ad - bc \neq 0$).

۴۳۲۲ - مطلوبست محاسبه انتگرال I (مسئله قبل را ببینید) اگر $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$ و دورگرد ساده C مبدا مختصات را در بر گیرد، ضمناً منحنی‌های $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ دارای چند نقطه تقاطع ساده واقع در درون دورگرد C باشند.

۴۳۲۳ - نشان دهید که اگر C دورگرد بسته و I جهت دلخواهی باشد در آنصورت

$$\oint_C \cos(t, n) ds = 0.$$

که در آن n قائم خارجی دورگرد C است.

۴۳۲۴ - مطلوبست تعیین مقدار انتگرال

$$I = \oint_C [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] ds$$

که در آن C منحنی ساده بسته‌ای است که حوزه متناهی S را محدود ساخته و n قائم خارجی دورگرد C است.

۴۳۲۵ - مطلوبست تعیین

$$\lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C (F \times n) ds$$

که در آن S مساحت محدود به دورگرد C احاطه کننده نقطه (x_0, y_0) , $d(S)$ قطر حوزه S و n بردار یکان قائم خارجی دورگرد C و $F\{XY\}$ بردار پیوسته دیفرانسیل پذیر در $S + C$ است.

بخش ۱۳ - کاربرد فیزیکی انتگرال منحنی الخط

۴۳۲۶ - جرم M که بطور یکنواخت روی نیمدایره بالائی $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$ توزیع شده با چه نیروئی نقطه مادی بجرم m را که وضع $(0, 0)$ را اشغال کرده است جذب میکند؟

۴۲۷- مطلوبست محاسبه پتانسیل لگاریتمی قشر ساده

$$u(x, y) = \oint_C \kappa \ln \frac{1}{r} ds$$

که در آن $\kappa = \text{const}$ چگالی و $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ و دورگرد C دایره $\xi^2 + \eta^2 = R^2$ میباشد.

۴۲۸- در مختصات قطبی ρ, φ مطلوبست محاسبه پتانسیل لگاریتمی قشر ساده

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi$$

که در آن r فاصله بین نقطه (ρ, φ) و نقطه متغیر $(1, \psi)$ و m عدد طبیعی است.

۴۲۹- مطلوبست محاسبه انتگرال گوس:

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(r, n)}{r} ds$$

که در آن $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ طول بردار \vec{r} واصل نقطه $A(x, y)$ و نقطه متغیر $M(\xi, \eta)$ از دورگرد هموار ساده بسته C میباشد و (r, n) زاویه بین بردار r و قائم خارجی n بر منحنی C در نقطه M آن است. ۴۳۰- در مختصات قطبی ρ, φ مطلوبست محاسبه پتانسیل لگاریتمی قشر دوگانه

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(r, n)}{r} d\psi, \quad K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(r, n)}{r} d\psi$$

که در آن r فاصله بین نقطه $A(\rho, \varphi)$ و نقطه متغیر $M(1, \psi)$ و (r, n) زاویه بین امتداد $AM = r$ و شعاع $OM = n$ رسم شده از نقطه $O(0, 0)$ میباشد و m عدد طبیعی است.

۴۳۱- تابع دو بار دیفرانسیل پذیر $u = u(x, y)$ را هارمونیک نامند اگر

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

است که

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

که در آن C دورگرد بسته دلخواه و $\frac{\partial u}{\partial n}$ مشتق نسبت به قائم خارجی بر این دورگرد است.

۴۳۲- ثابت کنید که

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \iint_S u \Delta u dx dy + \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

که در آن دورگرد هموار C حوزه متناهی S را محدود میکند.

۴۳۳- ثابت کنید تابعی که در درون حوزه متناهی S و در مرز C آن هارمونیک باشد بطور تک مقداری با مقادیر خود بر روی دورگرد C تعیین C میشود. (مساله ۴۳۲ را ببینید).

۴۳۴- مطلوبست اثبات دستور دوم گرین در صفحه

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds$$

که در آن دورگرد هموار C حوزه متناهی S را محدود میسازد و $\frac{\partial}{\partial n}$ مشتق نسبت به امتداد قائم خارجی بر C است.

۴۳۵- با استفاده از دستور دوم گرین ثابت کنید که اگر تابع $u = u(x, y)$ در حوزه متناهی بسته S هارمونیک باشد در آن صورت

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

که در آن C مرز حوزه S ، n امتداد قائم خارجی بر دورگرد C و (x, y) نقطه درونی حوزه S و $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ فاصله بین نقطه (x, y) و نقطه متغیر (ξ, η) از دورگرد C است.

راهنمایی - نقطه (x, y) را یکجا با همسایگی مدور بی نهایت کوچک آن از حوزه S ببرید و برای بخش باقی حوزه S دستور دوم گرین را بکار ببرید.

۴۳۶- قضیه میانگین را برای تابع هارمونیک $u(M) = u(x, y)$ ثابت کنید :

$$u(M) = \frac{1}{2\pi R} \oint_C u(\xi, \eta) ds$$

که در آن C دایره شعاع R و بمرکز نقطه M است.
 ۴۳۷- ثابت کنید که تابع $u(x, y)$ هارمونیک در حوزه محدود و بسته و ناآب در این حوزه نمیتواند به بیشترین و کمترین مقدار خود در نقطه درون این حوزه برسد (اصل ماگزیم)

۴۳۸- مطلوبست اثبات دستور ریمن

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C P dx + Q dy$$

که در آن

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

$$M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + cv$$

a, b, c ثابتند) ، P, Q توابع معینی هستند و دورگرد C حوزه متناهی S را محدود میسازد.

۴۳۹- فرض کنیم $u = u(x, y), v = v(x, y)$ مؤلفه‌های سرعت جریان پایای یک مایع باشند. مطلوبست تعیین مقدار مایع جاری شده در واحد زمان از حوزه S که با دورگرد C محدود شده است (یعنی تفاوت بین مقدار مایع وارده و مایع خارج شده). اگر مایع قابلیت تراکم نداشته و حوزه S فاقد سرچشمه آب و آبریز باشد توابع u, v درجه معادله‌ای صدق میکنند؟

۴۴۰- طبق قانون بیو-ساوار جریان برق i گذرنده از جزء ds هادی در نقطه $M(x, y, z)$ از فضا میدان مغناطیسی با شدت

$$dH = ki \frac{(r \times ds)}{r^3}$$

را ایجاد میکند که در آن بردار واصل جز ds به نقطه M و k ضریب تناسب است.

مطلوبست تعیین تساویر H_x, H_y, H_z شدت میدان مغناطیسی H در نقطه M برای حالت هادی بسته C .

بخش ۱۴ - انتگرال‌های روی سطح

بند ۱ - انتگرال روی سطح نوع اول. اگر S سطح هموار قطعه‌ای دو طرفه*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad ((u, v) \in \Omega) \quad (1)$$

و $f(x, y, z)$ تابع معین و پیوسته‌ای در نقاط سطح S باشد در آنصورت

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (2)$$

که در آن

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

در حالت خاص هرگاه سطح S دارای معادله‌ای بصورت

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \in \sigma)$$

باشد که در آن $z(x, y)$ تابع تک مقداری پیوسته* ديفرانسیل پذیر است آنگاه

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\sigma} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

این انتگرال مستقل از انتخاب طرف سطح S است.

اگر تابع $f(x, y, z)$ بعنوان چگالی سطح S در نقطه (x, y, z) در نظر

گرفته شود در آنصورت انتگرال (۲) معرف جرم این سطح خواهد بود.

بند ۲ - انتگرال روی سطح نوع دوم. اگر S سطح هموار دو طرفه و S^+

طرفی از آن باشد که با جهت قایم $n \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ مشخص میشود و

$P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ سه تابع معین پیوسته بر

سطح S باشند در آنصورت

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \\ &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \end{aligned} \quad (3)$$

اگر سطح S بشکل پارامتری (۱) داده شود در آنصورت کسینوس‌های هادی قائم n با دستورهای

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

تعیین میشوند که در آن

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

و علامت‌های جلو رادیکال‌ها بطور مناسب انتخاب میشوند. بازای گذر به طرف دیگر S^- سطح S ، انتگرال (۳) تغییر علامت میدهد.

۴۳۴۱ - انتگرالهای روی سطح

$$I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

و

$$I_2 = \iint_P (x^2 + y^2 + z^2) dP$$

که در آنها S سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و P سطح هشت وجهی $|x| + |y| + |z| = a$ محاط در این کره است با یکدیگر چه قدر اختلاف دارند؟

۴۳۴۲ - مطلوبست محاسبه

$$\iint_S z dS$$

که در آن S بخشی از سطح $x^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) است که توسط سطح $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ بریده شده است.

انتگرالهای روی سطح نوع اول زیر را حساب کنید:

$$- ۴۳۴۳ \quad \iint_S (x + y + z) dS \quad \text{که در آن } S \text{ سطح و زیر است:}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0.$$

۴۳۴۴ - $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ که در آن S رویه جسم زیر است :

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$$

۴۳۴۵ - $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$ که در آن S رویه چهار وجهی زیر است .

$$x + y + z \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

۴۳۴۶ - $\iint_S |xyz| dS$ که در آن S بخشی است از سطح $z = x^2 + y^2$

که توسط صفحه $z = 1$ جدا شده است .

۴۳۴۷ - $\iint_S \frac{dS}{h}$ که در آن S سطح بیضوی و h فاصله مرکز بیضوی

از صفحه مماس بر جز dS سطح بیضوی میباشد .

۴۳۴۸ - $\iint_S z dS$ که در آن S بخشی است از سطح هلیکویید

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v \quad (0 < u < a; \quad 0 < v < 2\pi)$$

۴۳۴۹ - $\iint_S z^2 dS$ که در آن S بخشی است از سطح مخروط

$$x = r \cos \varphi \sin \alpha, \quad y = r \sin \varphi \sin \alpha, \quad z = r \cos \alpha$$

و $(0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ و α ثابت است .

۴۳۵۰ - $\iint_S (xy + yz + zx) dS$ که در آن S بخشی است از سطح مخروطی

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ که توسط سطح زیر بریده شده است :

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

۴۳۵۱ - مطلوبست اثبات دستور بواسون

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du$$

که در آن S سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است .

۴۳۵۲ - مطلوبست تعیین جرم پوستهٔ سهموی

$$z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \quad (0 \leq z \leq 1)$$

که چگالی آن طبق قانون $\rho = z$ تغییر میکند.

۴۳۵۲،۱ - مطلوبست تعیین جرم نیمکرهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0)$$

که چگالی آن در هر نقطهٔ $M(x, y, z)$ آن برابر $\frac{z}{a}$ میباشد.

۴۳۵۲،۲ - مطلوبست محاسبهٔ لنگر ایستی پلاک همگن مثلثی شکل

$$x + y + z = a \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

نسبت به صفحات مختصات.

۴۳۵۳ - مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی پوستهٔ کروی همگن

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0)$$

نسبت به محور Oz در صورتیکه چگالی آن ρ باشد.

۴۳۵۴ - لنگر لختی پوستهٔ مخروطی همگن

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b)$$

به چگالی ρ را نسبت به خط

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

حساب کنید.

۴۳۵۵ - مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل بخشی از سطح همگن

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

که توسط سطح $x^2 + y^2 = ax$ بریده شده است.

۴۳۵۶ - مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل سطح همگن

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad (x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a)$$

۴۳۵۶،۱ - مطلوبست محاسبهٔ لنگر قطبی

$$I. = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

سطوح S زیر :

الف) سطح مکعب $\max\{|x|, |y|, |z|\} = a$ ؛
 ب) تمامی سطح استوانه $x^2 + y^2 \leq R^2; 0 \leq z \leq H$ ؛
 ۴۳۵۶،۲ - مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی پلاک مثلثی شکل
 $x + y + z = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$

نسبت به صفحات مختصات .

۴۳۵۷ - سطح مخروطی ناقص همگن

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < b \leq r \leq a)$$

به چگالی ρ . با چه نیروی نقطهٔ مادی به جرم m را که در رأس این سطح قرار گرفته است جذب میکند؟

۴۳۵۸ - مطلوبست پتانسیل سطح کروی همگن $(S) x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به چگالی ρ . روی نقطهٔ $M(x_0, y_0, z_0)$ یعنی محاسبهٔ انتگرال

$$u = \iint_S \frac{\rho \cdot dS}{r}$$

که در آن $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$
 ۴۳۵۹ - مطلوبست محاسبهٔ

$$F(t) = \iint_{x+y+z=t} f(x, y, z) dS$$

که در آن

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ \cdot, & x^2 + y^2 + z^2 > 1 \end{cases} \quad \text{اگر}$$

نمودار تابع $u = F(t)$ را رسم کنید .

۴۳۶۰ - مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z) dS$$

که در آن

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cdot, & z < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{اگر}$$

۴۳۶۱ - مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$F(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \zeta) dS$$

که در آن S کره متغیر

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = r^2$$

میشود و

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < a^2 \\ 0, & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{اگر} \\ \text{اگر} \end{array}$$

بفرض آنکه

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > a > 0.$$

انتگرالهای روی سطح نوع دوم زیر را حساب کنید :

$$\iint_S (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy) - 4362 \quad \text{که در آن } S \text{ طرف بیرونی کره}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ است.}$$

$$\iint_S f(x) \, dy \, dz + g(y) \, dz \, dx + h(z) \, dx \, dy - 4363$$

که در آن $f(x)$ ، $g(y)$ ، $h(z)$ توابعی پیوسته و S طرف بیرونی سطح مکعب مستطیل $0 \leq x \leq a$ ، $0 \leq y \leq b$ ، $0 \leq z \leq c$ میباشد.

$$\iint_S (y - z) \, dy \, dz + (z - x) \, dz \, dx + (x - y) \, dx \, dy - 4364$$

که در آن S طرف بیرونی سطح مخروطی $(0 \leq z \leq h)$ $x^2 + y^2 = z^2$ میباشد

$$\iint_S \left(\frac{dy \, dz}{x} + \frac{dz \, dx}{y} + \frac{dx \, dy}{z} \right) - 4365$$

که در آن S طرف بیرونی سطح بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ میباشد.

$$\iint_S x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy - 4366$$

که در آن S طرف بیرونی کره $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ میباشد.

بخش ۱۵ - دستور استوکس

اگر $P = P(x, y, z)$ ، $Q = Q(x, y, z)$ ، $R = R(x, y, z)$ دیفرانسیل پذیر و C دورگرد هموار قطعه‌ای بسته، ساده‌ای باشد که سطح هموار قطعه‌ای دوطرفه منتهای S را محدود میسازد در آنصورت دستور استوکس

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

بر قرار است که در آن $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ کسینوس‌های هادی قائم بر سطح S ممتد در آن جهت است که نسبت بان پیمایش دورگرد C در جهت خلاف گردش عقربه‌های ساعت انجام میپذیرد (برای دستگاه مختصات دست راستی).
 ۴۶۷- با بکاربردن دستور استوکس مطلوبست محاسبه انتگرال منحنی‌الحظ

$$\oint_C y dx + z dy + x dz$$

که در آن C دایره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$ است که در جهت خلاف گردش عقربه‌های ساعت پیموده میشود اگر از سمت مثبت محور Ox رؤیت شود.

نتیجه را با محاسبه مستقیم تحقیق کنید.

۴۶۸- مطلوبست محاسبه انتگرال

$$\int_{AmB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz$$

در قطعه‌ای از منحنی مارپیچی

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi} \varphi$$

از نقطه $A(a, 0, 0)$ تا نقطه $B(a, 0, h)$.

راهنمایی- به منحنی AmB پاره خط مستقیمی را افزوده و دستور استوکس را بکار برید.

۴۶۹- فرض کنیم C دورگرد بسته واقع در صفحه $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ کسینوس‌های هادی قائم بر صفحه است) و محدود کننده مساحت S باشد.
 مطلوبست محاسبه

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

که در آن دورگرد C در جهت مثبت پیموده میشود.

با کاربرد دستور استوکس مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر :

$$4370 - \oint_C (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz \quad \text{که در آن } C \text{ بیضی}$$

$x = a \sin^2 t, y = 2a \sin t \cos t, z = a \cos^2 t \quad (0 \leq t \leq \pi)$ است که در جهت صعود پارامتر t پیموده میشود.

$$4371 - \oint_C (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz \quad \text{که در آن } C \text{ بیضی}$$

در $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \quad (a > 0, h > 0)$ است که در

جهت خلاف گردش عقربه‌های ساعت پیموده میشود اگر از طرف مثبت محور Ox به آن نگاه کنیم.

$$4372 - \oint_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz \quad \text{که در آن } C \text{ منحنی}$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, x^2 + y^2 = 2rx \quad (0 < r < R, z > 0)$ است و طوری پیموده میشود که حوزه کوچکتری که در طرف خارجی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ بوسیله آن محدود میشود در سمت چپ قرار میگیرد.

$$4373 - \oint_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz \quad \text{که در آن } C \text{ مقطع}$$

سطح مکعب $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ با سطح $x + y + z = \frac{3}{2}a$ است که در جهت خلاف گردش عقربه‌های ساعت پیموده میشود اگر از طرف مثبت محور Ox بان نگاه کنیم.

$$4374 - \oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz \quad \text{که در آن } C \text{ منحنی بسته}$$

$x = a \cos t, y = a \cos 2t, z = a \cos 3t$ پارامتر t پیموده میشود.

4375 - ثابت کنید که تابع

$$W(x, y, z) = ki \iint_S \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS \quad (k = \text{const})$$

که در آن S مساحت محدود به دورگرد، C ، n قائم بر سطح S و r شعاع حاصل واصل نقطه فضائی $M(x, y, z)$ به نقطه متغیر $A(\xi, \eta, \zeta)$ از دورگرد C است مساویست با پتانسیل میدان مغناطیسی H حاصل از عبور جریان برق i از دورگرد C (مسئله 4340 را ببینید)

اگر S سطح هموار قطعه‌ای محدودکننده حجم V و $P = P(x, y, z)$ ،
 $Q = Q(x, y, z)$ ، $R = R(x, y, z)$ توابعی باشند که با مشتقات جزئی مرتبه
 اول خود در حوزه $V + S$ پیوسته‌اند در آنصورت دستور اوستروگرادسکی

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \\ = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

درست است که در آن $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ ، $\cos \gamma$ کسینوس‌های هادی قائم خارجی
 بر سطح S است.

با کاربرد دستور اوستروگرادسکی انتگرال‌های روی سطح زیر را در صورتیکه
 سطح هموار S حجم متناهی V را محدود سازد و $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ ، $\cos \gamma$ کسینوس‌های
 هادی قائم خارجی بر سطح S باشند تبدیل کنید:

$$\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy - \quad ۴۳۷۶$$

$$\iint_S yz dy dz + zx dz dx + xy dx dy - \quad ۴۳۷۷$$

$$\iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS - \quad ۴۳۷۸$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS - \quad ۴۳۷۹$$

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS$$

۴۳۸۱ - ثابت کنید که اگر S سطح بسته ساده و l امتداد ثابت دلخواهی
 باشد در آنصورت

$$\iint_S \cos(n, l) dS = 0$$

که در آن n قائم خارجی بر سطح S است.

۴۳۸۲ - ثابت کنید که حجم جسم محدود به سطح S برابر است با

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$$

که در آن $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ کسینوس‌های هادی قائم خارجی بر سطح S میباشند.

۴۳۸۳ - ثابت کنید که حجم مخروط محدود به سطح مخروطی هموار $F(x, y, z) = 0$ و صفحه $Ax + By + Cz + D = 0$ برابر است با

$$V = \frac{1}{3} SH$$

که در آن S مساحت قاعده مخروط واقع در صفحه مفروض و H ارتفاع آن است.

۴۳۸۴ - مطلوبست تعیین حجم جسم محدود به سطح $z = \pm c$ و

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos u \cos v + b \sin u \sin v \\ y &= a \cos u \sin v - b \sin u \cos v \\ z &= c \sin u \end{aligned} \right\}$$

۴۳۸۵ - مطلوبست تعیین حجم محدود به سطح

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = -u + a \cos v \quad (u \geq 0)$$

و صفحات $x = 0, z = 0$ ($a > 0$)

۴۳۸۵, ۱ - مطلوبست تعیین حجم جسم محدود به چتره

$$\left. \begin{aligned} x &= (b + a \cos \psi) \cos \varphi \\ y &= (b + a \cos \psi) \sin \varphi \\ z &= a \sin \psi \end{aligned} \right\}$$

($0 < a \leq b$)

۴۳۸۶ - دستور زیر را ثابت کنید:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} = \\ & = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t) dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0) \end{aligned}$$

بکمک دستور استروگرادسکی انتگرالهای روی سطح زیر را حساب کنید :

۴۳۸۷ - $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ که در آن S طرف بیرونی سطح مکعب $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ میباشد.

۴۳۸۸ - $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$ که در آن S طرف بیرونی سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ است.

۴۳۸۹ - $\iint_S (x - y + z) dy dz + (y - z + x) dz dx + (z - x + y) dx dy$ که در آن S طرف بیرونی سطح زیر است :

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$$

۴۳۹۰ - مطلوبیست محاسبه*

$\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$ که در آن S بخشی از سطح مخروطی $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) قائم خارجی بر این سطح هستند. $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ کسینوسهای هادی راهنمایی - بخش صفحه*

$$z = h, \quad x^2 + y^2 \leq h^2$$

را الحاق کنید.

۴۳۹۱ - مطلوبیست اثبات دستور

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{r} \iint_S \cos(r, n) dS$$

که در آن S سطح بسته* محدودکننده حجم V ، n قائم خارجی بر سطح S در نقطه* متغیر (ξ, η, ζ) از آن و $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ شعاع حامل رونده از نقطه* (x, y, z) به نقطه* (ξ, η, ζ) است.

۴۳۹۲ - مطلوبیست محاسبه* انتگرال گوس :

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS$$

که در آن S سطح هموار بسته* ساده* محدودکننده حجم V ، n قائم خارجی بر سطح S در نقطه* (ξ, η, ζ) از آن r شعاع حامل واصل نقطه* (x, y, z) به نقطه* (ξ, η, ζ) است و $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$

دو حالت زیر را در نظر بگیرید :
 الف) وقتی که سطح S نقطه (x, y, z) را در بر نمیگیرد ؛
 ب) وقتی که سطح S نقطه (x, y, z) را در بر میگیرد .
 ۴۹۳ - ثابت کنید که اگر

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

و S سطح هموار محدودکننده جسم متناهی V باشد در آنصورت دستورهایی زیر محققند :

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \Delta u dx dy dz \quad \text{الف)}$$

$$\iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \iiint_V u \Delta u dx dy dz \quad \text{ب)}$$

که در آن u تابعی است که خود و مشتقهای جزئی آن تا مرتبه دوم (بأنضمام مرتبه دوم) در حوزه $V + S$ پیوسته هستند و $\frac{\partial u}{\partial n}$ مشتق نسبت به قائم خارجی سطح S است .

۴۹۴ - مطلوبست اثبات دستور دوم گرین در فضا :

$$\iiint_V \left| \frac{\Delta u}{u} \quad \frac{\Delta v}{v} \right| dx dy dz = \iint_S \left| \frac{\frac{\partial u}{\partial n}}{u} \quad \frac{\frac{\partial v}{\partial n}}{v} \right| dS$$

که در آن حجم V محدود به سطح S ، \mathbf{n} امتداد قائم خارجی بر سطح S است و توابع $u = u(x, y, z)$ ، $v = v(x, y, z)$ در حوزه $V + S$ دو بار دیفرانسیل پذیر میباشند .

۴۹۵ - تابع $u = u(x, y, z)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبه دوم (بأنضمام مرتبه دوم) در یک حوزه ناشخص را در این حوزه وقتی هارمونیک نامند که

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ثابت کنید که اگر تابع u در یک حوزه متناهی بسته V محدود به سطح هموار S هارمونیک باشد در آنصورت دستورهایی زیر محققند :

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (\text{ب})$$

که در آن n قائم خارجی بر سطح S است .
 با استفاده از دستور ب) ثابت کنید که تابع هارمونیک در حوزه V ، بطور تک مقداری بوسیله مقادیرش روی مرز S آن تعیین میشود .
 ۴۹۶- ثابت کنید که اگر تابع $u = u(x, y, z)$ در حوزه متناهی بسته V محدود شده به سطح هموار S هارمونیک باشد در آنصورت

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{\cos(r, n)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS$$

که در آن r شعاع حاصل رونده از نقطه درونی (x, y, z) حوزه V به نقطه متغیر (ξ, η, ζ) سطح S است ، $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ ، n بردار قائم خارجی بر سطح S در نقطه (ξ, η, ζ) میباشد .
 ۴۹۷- ثابت کنید که اگر $u = u(x, y, z)$ تابع هارمونیک در درون کره S بشعاع R و بمرکز نقطه (x_0, y_0, z_0) باشد در آنصورت

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x, y, z) dS$$

(قضیه میانگین)

۴۹۸- ثابت کنید که تابع $u = u(x, y, z)$ پیوسته در حوزه محدود بسته V و هارمونیک در درون آن نمیتواند در نقاط درونی حوزه به بیشترین و کمترین مقادیر خویش برسد در صورتیکه این تابع بطور اتحادی برابر مقدار ثابت نباشد (اصل ماگزیمل) .

۴۹۹- جسم V پتمامی در مایعی غوطه‌ور است . از روی قانون پاسکال ثابت کنید که نیروی رانش مایع برابر وزن مایع هم‌حجم جسم و مستند بطور قائم در جهت بالاست (قانون ارشمیدس) .

۴۴۰۰ - فرض کنیم S_t کره متغیر t^2 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$ و تابع $f(\xi, \eta, \zeta)$ پیوسته باشد. ثابت کنید که تابع

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS_t$$

در معادله موجی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

و شرایط اولیه $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = f(x, y, z)$ ، $u|_{t=0} = 0$ صدق میکند.

راهنمایی - مشتق $\frac{\partial u}{\partial t}$ را با انتگرال سه گانه بیان کنید.

بخش ۱۷ - مبانی نظریه (نگره) میدان

بند ۱ - گرادیان (شیب). اگر $u(r) = u(x, y, z)$ که در آن $r = xi + yj + zk$ میدان عددی (اسکالر) پیوسته دیفرانسیل پذیر باشد در آن صورت بردار

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

و یا مختصراً $\text{grad } u = \nabla u$ را که در آن $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$

گرادیان یا شیب میدان u نامند. گرادیان میدان u در نقطه مفروض (x, y, z) در جهت قائم بر سطح تراز $u(x, y, z) = c$ گذرنده بر این نقطه است. این بردار در هر نقطه میدان از لحاظ مقدار:

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

و جهت بزرگترین سرعت تغییر تابع u را بیان میکند. مشتق میدان u در یک امتداد $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ برابر است با

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \times \mathbf{l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

بند ۲ - واگرایی (دیورژانس) میدان و گردش (روتاسیون) میدان. اگر

$$a(r) = a_x(x, y, z) i + a_y(x, y, z) j + a_z(x, y, z) k$$

میدان برداری پیوسته^۱ دیفرانسیل پذیر باشد در آنصورت اسکالر

$$\operatorname{div} a = \nabla a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

را دیورژانس یا واگرایی این میدان نامند.
بردار

$$\operatorname{rot} a = \nabla \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

بنام روتاسیون و یا طوفان میدان موسوم است.

بند ۳ - شار بردار از سطح. اگر بردار $a(r)$ میدان برداری در حوزه Ω تولید کند در آنصورت شار بردار از سطح مفروض S واقع در Ω در جهت معینی که با بردار یکان n قایم $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ مشخص شده است عبارتست از انتگرال

$$\iint_S a_n dS = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS$$

که در آن $a_n = an$ تصویر بردار روی قایم است. دستور استروگرادسکی به زبان برداری بشکل

$$\iint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} a \, dx \, dy \, dz$$

در میاید که در آن S سطح محدودکننده حجم V و n بردار یکان قائم خارجی بر سطح S است.

بند ۴ - سیرکولاسیون بردار. انتگرال خطی بردار $a(r)$ روی یک منحنی C (کار میدان) عبارتست از عدد

$$\int_C a \, dr = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

اگر دورگرد C بسته باشد در آنصورت انتگرال خطی را سیرکولاسیون بردار a در طول دورگرد C نامند.

بصورت دستور برداری استوکس چنین است :

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{a})_n \, dS$$

که در آن C دورگرد بستهٔ محدودکنندهٔ سطح S است، ضمناً جهت قائم n بر سطح S باید طوری انتخاب شود که برای ناظر ایستاده بر سطح S که سرش در جهت قائم است پیمایش دورگرد C در جهت خلاف گردش عقربهٔ ساعت انجام پذیرد (برای دستگاه مختصات دست راستی).

بند ۵ - میدان پتانسیلی. میدان برداری $\mathbf{a}(r)$ را که گرادیان اسکالر نامشخص u میباشد :

$$\text{grad } u = \mathbf{a}$$

پتانسیلی و مقدار n را پتانسیل میدان نامند.

اگر پتانسیل n تابع تک مقدار باشد در آنصورت

$$\int_{AB} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = u(B) - u(A)$$

بویژه در این حالت سیرکولاسیون بردار \mathbf{a} برابر صفر است. شرط لازم و کافی برای پتانسیلی بودن میدان \mathbf{a} مفروض در حوزهٔ یک ارتباطی اجرای شرط $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ میباشد، چنین میدانی باید بی‌طوفان باشد.

۴۴۰۱ - مطلوبست تعیین مقدار و جهت گرادیان میدان

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$

الف) $O(0, 0, 0)$ ؛ ب) $A(1, 1, 1)$ و پ) $B(2, 0, 1)$ در کدام نقطه گرادیان میدان برابر صفر است ؟

۴۴۰۱، ۱ - فرض کنیم

$$u = xy - z^2$$

مطلوبست تعیین مقدار و جهت $\text{grad } u$ در نقطهٔ $M(-9, 12, 10)$. مشتق

$\frac{\partial u}{\partial l}$ در امتداد نیمساز زاویهٔ مختصات xOy چقدر است ؟

۴۴۰۲ - در چه تقاطی از فضای $Oxyz$ گرادیان میدان

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

الف) عمود بر محور Oz است ؛

ب) موازی محور O است ؛

پ) برابر صفر است ؟

$$u = \ln \frac{1}{r}$$

مفروض است که در آن $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ ، در چه نقاطی از فضای $Oxyz$ تساوی زیر برقرار است :

$$|\text{grad } u| = 1$$

۴۴۰۴ - سطوح تراز میدان عددی

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$$

را بسازید. سطح تراز مار بر نقطه $M(9, 12, 28)$ را پیدا کنید. $\max u$ در حوزه $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ چقدر است ؟
 ۴۴۰۵ - مطلوبست تعیین زاویه φ بین گرادیان‌های میدان

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

در نقاط $A(1, 2, 2)$ و $B(-3, 1, 0)$.
 ۴۴۰۶ - میدان عددی

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

مفروض است. سطوح تراز و سطوح متساوی‌المdul گرادیان میدان را بسازید. مطلوبست تعیین $\sup |\text{grad } u|$, $\inf |\text{grad } u|$, $\sup u$, $\inf u$ در حوزه $1 < z < 2$

۴۴۰۷ - با تقریب تا بی‌نهایت کوچک‌های مراتب بالا مطلوبست تعیین فاصله بین دو سطح تراز بی‌نهایت نزدیک بهم

$$u(x, y, z) = c \quad \text{و} \quad u(x, y, z) = c + \Delta c$$

در نقطه $M(x_0, y_0, z_0)$ که در آن $u(x_0, y_0, z_0) = c$.
 ۴۴۰۸ - دستورهای زیر را ثابت کنید :

(الف) $\text{grad}(u+c) = \text{grad } u$ (c ثابت است)

(ب) $\text{grad } cu = c \text{ grad } u$ (c ثابت است)

(پ) $\text{grad}(u+v) = \text{grad } u + \text{grad } v$

(ت) $\text{grad } uv = v \text{ grad } u + u \text{ grad } v$

$$\text{grad}(u^2) = 2u \text{grad} u \quad (\text{ث})$$

$$\text{grad} f'(u) = f'(u) \text{grad} u \quad (\text{ج})$$

۴۴۰۹ - مطلوبست محاسبه

الف) $\text{grad} r$ ؛ ب) $\text{grad} r^2$ ؛ پ) $\text{grad} \frac{1}{r}$ که در آن $r = xi + yj + zk$

۴۴۱۰ - مطلوبست محاسبه $\text{grad} f(r)$ که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

۴۴۱۱ - مطلوبست محاسبه $\text{grad}(cr)$ که در آن c بردار ثابت و r شعاع حامل از مبدأ مختصات است.

۴۴۱۲ - مطلوبست محاسبه $\text{grad}\{|c \times r|^2\}$ (c بردار ثابت)

۴۴۱۳ - دستور زیر را ثابت کنید:

$$\text{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad} v$$

۴۴۱۴ - دستور زیر را ثابت کنید:

$$\nabla^2(uv) = u \nabla^2 v + v \nabla^2 u + 2 \nabla u \nabla v$$

که در آن

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \nabla \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

۴۴۱۵ - ثابت کنید که اگر تابع $u = u(x, y, z)$ در حوزه محدب Ω دیفرانسیل پذیر باشد و $|\text{grad} u| \leq M$ که در آن M ثابت است در آنصورت بازای نقاط دلخواه A, B از Ω داریم:

$$|u(A) - u(B)| \leq M \rho(A, B)$$

که در آن $\rho(A, B)$ فاصله بین نقاط A و B است.

۴۴۱۵،۱ - برای تابع $u = u(x, y, z)$ عبارت $\text{grad} u$ را: الف) در مختصات استوانه‌ای؛ ب) در مختصات کروی بیان کنید.

۴۴۱۶ - مطلوبست تعیین مشتق میدان $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ در نقطه

مفروض $M(x, y, z)$ در امتداد شعاع حامل r این نقطه.

در چه حالتی این مشتق برابر مقدار گرادیان میشود؟

۴۴۱۷ - مطلوبست تعیین مشتق میدان $u = \frac{1}{r}$ ، که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

در امتداد $I\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$.

در چه حالتی این مشتق برابر صفر میشود؟

۴۴۱۸ - مطلوبست تعیین مشتق میدان $u = u(x, y, z)$ در امتداد گرادیان

میدان $v = v(x, y, z)$

در چه حالتی این مشتق صفر میشود؟

۴۴۱۹ - میدان برداری

$$a = c \times \text{grad } u$$

را بزبان بردارهای یکان بنویسید اگر

$$u = \text{arc tg } \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{و} \quad c = i + j + k$$

۴۴۲۰ - خطوط نیروی میدان برداری

$$a = xi + yj + zck$$

را تعیین کنید.

۴۴۲۱ - با محاسبهٔ مستقیم ثابت کنید که دیورژانس بردار a مستقل از

انتخاب دستگاه مختصات قائم است.

۴۴۲۲ - ثابت کنید که

$$\text{div } a(M) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S a_n dS$$

که در آن S سطح بسته در برگیرندهٔ نقطهٔ M و محدودکنندهٔ حجم V ، n قائم خارجی بر سطح S و $d(S)$ قطر سطح S است.

۴۴۲۲، ۱ - مطلوبست تعیین دیورژانس میدان

$$a = \frac{-ix + jy + kz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

در نقطهٔ $M(r, \varphi, \theta)$ شار Π بردار a از کرهٔ بی‌نهایت کوچک

$$(x - r)^2 + (y - \varphi)^2 + (z - \theta)^2 = \varepsilon^2$$

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$

۴۴۴ - ثابت کنید که

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b} \quad (\text{الف})$$

ب) $\operatorname{div}(uc) = c \operatorname{grad} u$ ؛ c بردار ثابت و u اسکالر است) ؛

$$\operatorname{div}(ua) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} u \quad (\text{پ})$$

۴۴۵ - مطلوبست تعیین $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$

۴۴۶ - مطلوبست تعیین $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$ که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

در چه حالتی $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$ برابر صفر است ؟

۴۴۷ - مطلوبست محاسبه $\operatorname{div} \mathbf{r}$ (الف ؛ ب) $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r}$

۴۴۸ - مطلوبست محاسبه $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{c}]$ که در آن \mathbf{c} برداری ثابت است .

۴۴۹ - مطلوبست تعیین $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}]$. در چه حالتی دیورژانس این بردار

برابر صفر است ؟

۴۵۰ - مطلوبست تعیین الف) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$ ؛ ب) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$

۴۵۱ - مایعی که فضایی را پر کرده در جهت خلاف گردش عقربه ساعت

حول محور Oz با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران میکند . مطلوبست

تعیین دیورژانس بردار سرعت \mathbf{v} و بردار شتاب $\boldsymbol{\omega}$ در نقطه

$M(x, y, z)$ از فضا در لحظه مفروض از زمان .

۴۵۲ - دیورژانس میدان نیروی جاذبه حاصله از دستگاه متناهی مراکز جذب را

پیدا کنید .

۴۵۳ - مطلوبست عبارت دیورژانس بردار مستوی $\mathbf{a} = \mathbf{a}(r, \varphi)$ در مختصات

قطبی r, φ

۴۵۴ - عبارت $\operatorname{div} \mathbf{a}(x, y, z)$ را در مختصات منحنی‌الخط متعامد u, v, w

بیان کنید در صورتیکه

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w)$$

بعنوان حالت خاص ، $\operatorname{div} \mathbf{a}$ را در مختصات استوانه‌ای و کروی بیان کنید .

راهنمایی - شار بردار \mathbf{a} از متوازی‌السطوح بی‌نهایت کوچک محدود به

سطوح $u = \text{const}, v = \text{const}, w = \text{const}$ را در نظر بگیرید .

۴۴۳۵ - ثابت کنید که :

$$\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{rot} \mathbf{a} + \text{rot} \mathbf{b} \quad (\text{الف})$$

$$\text{rot}(u\mathbf{a}) = u \text{rot} \mathbf{a} + \text{grad}(u \times \mathbf{a}) \quad (\text{ب})$$

۴۴۳۶ - مطلوبست تعیین : الف) $\text{rot} \mathbf{r}$ ؛ ب) $\text{rot}[f(\mathbf{r})\mathbf{r}]$

۴۴۳۶, ۱ - مطلوبست تعیین مقدار و جهت $\text{rot} \mathbf{a}$ در نقطه $M(1, 2, -2)$ اگر

$$\mathbf{a} = \frac{y}{z} \mathbf{i} + \frac{z}{x} \mathbf{j} + \frac{x}{y} \mathbf{k}$$

۴۴۳۷ - مطلوبست تعیین :

الف) $\text{rot} cf(\mathbf{r})$ ؛ ب) $\text{rot}[\mathbf{c} \times f(\mathbf{r})\mathbf{r}]$ (c بردار است ثابت)

۴۴۳۸ - ثابت کنید که

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{h} \text{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{rot} \mathbf{b}$$

۴۴۳۹ - مطلوبست تعیین

الف) $\text{rot}(\text{grad} u)$ ؛ ب) $\text{div}(\text{rot} \mathbf{a})$

۴۴۴۰ - مایعی که فضایی را پر کرده با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول

محور $I\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ دوران میکند. مطلوبست تعیین روتاسیون

بردار سرعت خطی v در نقطه $M(x, y, z)$ در لحظه مفروض از

زمان.

۴۴۴۰, ۱ - مطلوبست تعیین عبارت روتاسیون بردار مستوی $\mathbf{a} = \mathbf{a}(r, \varphi)$ در

مختصات قطبی r و φ .

۴۴۴۰, ۲ - مطلوبست بیان $\text{rot} \mathbf{a}(x, y, z)$

الف) در مختصات استوانه‌ای؛

ب) در مختصات کروی.

۴۴۴۱ - مطلوبست تعیین شار بردار \mathbf{r} :

الف) از سطح جانبی مخروط $(0 \leq z \leq h)$ $x^2 + y^2 \leq z^2$ ؛

ب) از قاعده این مخروط.

۴۴۴۲ - مطلوبست تعیین شار بردار $\mathbf{a} = \mathbf{i}yz + \mathbf{j}xz + \mathbf{k}xy$:

الف) از سطح جانبی استوانه $(0 \leq z \leq h)$ $x^2 + y^2 \leq a^2$ ؛

ب) از سطح کل این استوانه.

۴۴۴۳ - مطلوبست تعیین شار شعاع حامل \mathbf{r} از سطح

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leq z \leq 1)$$

۴۴۴ - مطلوبست تعیین شار بردار $a = x^2i + y^2j + z^2k$ از ثمن مثبت کره
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

۴۴۵ - مطلوبست تعیین شار بردار $a = yi + zj + xk$ از سطح کل هرم
 محدود به صفحات $(a > 0)$ $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a$
 نتیجه را با کاربرد دستور اوستروگرادسکی امتحان کنید.

۴۴۵, ۱ - مطلوبست تعیین شار بردار $a = y^3i + y^3j + z^3k$ از کره
 $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

۴۴۶ - ثابت کنید که شار بردار a از سطح S که بصورت معادله
 $r = r(u, v)$ $((u, v) \in \Omega)$ داده شده است برابر است با

$$\iint_S a_n dS = \iint_{\Omega} \left(a \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial v} \right) du dv$$

که در آن $a_n = an$ و بردار n یکان قائم بر سطح S است.

۴۴۷ - مطلوبست تعیین شار بردار $a = m \frac{r}{r^3}$ (m مقدارست ثابت) از
 سطح بسته S که مبدأ مختصات را در بر میگیرد.

۴۴۸ - مطلوبست تعیین شار بردار

$$a(r) = \sum_{i=1}^n \text{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right)$$

که در آن e_i ثابت و r_i فواصل نقاط M_i (منابع) از نقطه $M(r)$ است، از سطح بسته S دربرگیرنده نقاط $M_i (i = 1, 2, \dots, n)$.
 ۴۴۹ - ثابت کنید که

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u dx dy dz$$

که در آن سطح S حجم V را محدود میکنند.

۴۵۰ - مقدار گرمای جاری در میدان حرارتی u در واحد زمان از جزء dS
 سطح برابر است با

$$dQ = -kn \text{ grad } u dS$$

که در آن k ضریب رسانایی درونی گرما و n بردار یکان قائم بر سطح S
 است. مطلوبست تعیین مقدار گرمای جمع شده در حجم V در واحد زمان. با
 استفاده از سرعت افزایش درجه حرارت، معادله‌ای را که گرمای جسم (معادله
 انتقال حرارت) در آن صدق میکند بدست آورید.

۴۴۵۱ - مایع تراکم ناپذیر در حال حرکت، حجم V را اشغال میکند. بفرض آنکه حوزه V فاقد منبع و انشعاب خروجی باشد معادله پیوستگی

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

را بدست آورید که در آن چگالی مایع $\rho = \rho(x, y, z)$ و بردار سرعت و t زمان است.

راهنمایی - شار مایع از حجم دلخواه ω واقع در V را در نظر بگیرید. ۴۴۵۲ - مطلوبست تعیین کار بردار $a = r$ در طول قطعه منحنی مارپیچی

$$r = ia \cos t + ja \sin t + kbt \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

۴۴۵۲،۱ - مطلوبست تعیین کار میدان

$$a = \frac{1}{y} i + \frac{1}{z} j + \frac{1}{x} k$$

در طول پاره خط واصل نقطه $M(1, 1, 1)$ به نقطه $N(2, 4, 8)$. ۴۴۵۲،۲ - مطلوبست تعیین کار میدان

$$a = ie^{y-z} + je^{z-x} + ke^{x-y}$$

در طول پاره خط واصل نقاط $O(0, 0, 0)$ و $M(1, 3, 0)$. ۴۴۵۲،۳ - مطلوبست تعیین کار میدان

$$a = (y+z)i + (z+x)j + (x+y)k$$

در طول کمان کوتاهتر دایره عظیمه کره $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ واصل نقاط $M(3, 4, 0)$ و $N(0, 0, 5)$.

۴۴۵۳ - مطلوبست تعیین کار بردار $a = f(r)r$ ، که در آن f تابعی پیوسته است، در طول کمان AB .

۴۴۵۴ - مطلوبست تعیین سیرکولاسیون بردار

$$a = -yi + xj + ck$$

(c ثابت است):

الف) در طول دایره $(z=0)$ $x^2 + y^2 = 1$ ؛

ب) در طول دایره $(z=0)$ $(x-2)^2 + y^2 = 1$ ؛

۴۴۵۵ - مطلوبست تعیین سیرکولاسیون Γ بردار $a = \operatorname{grad} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)$ در طول

دورگرد C در دو حالت: الف) محور Oz را در بر نمیگیرد؛

ب) محور Oz را در بر میگیرد.

$$a = \frac{y}{\sqrt{z}} i - \frac{x}{\sqrt{z}} j + \sqrt{xy} k$$

داده شده است. با محاسبه rota در نقطه $M(1, 1, 1)$ ، بطور تقریبی سیرکولاسیون Γ میدان را در طول دایره بی‌نهایت کوچک

$$\left. \begin{aligned} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 &= \varepsilon^2 \\ (x-1) \cos \alpha + (y-1) \cos \beta + (z-1) \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \right\}$$

که در آن $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ پیدا کنید.
۴۴۵۶ - جریان مستوی پایای مایع با بردار سرعت

$$w = u(x, y) i + v(x, y) j$$

مشخص می‌گردد. مطلوبست تعیین: ۱) مقدار مایع Q که از دورگرد بسته C ، که حوزه S را محدود کرده، میگذرد (مصرف مایع)؛ ۲) سیرکولاسیون Γ بردار سرعت در طول دورگرد C . اگر مایع غیر قابل تراکم و جریان بدون گرداب باشد توابع u و v در چه معادلاتی صدق میکنند؟
۴۴۵۷ - نشان دهید که میدان

$$a = yz(2x + y + z) i + xz(x + 2y + z) j + xy(x + y + 2z) k$$

پتانسیلی است و پتانسیل این میدان را پیدا کنید.
۴۴۵۷، ۱ - با حصول اطمینان به پتانسیلی بودن میدان

$$a = \frac{2}{(y+z)^{\frac{1}{2}}} i - \frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}} j - \frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}} k$$

مطلوبست تعیین کار میدان در طول مسیر واصل نقاط $M(1, 1, 2)$ و $N(2, 4, 5)$ در ثمن مثبت.
۴۴۵۸ - مطلوبست تعیین پتانسیل میدان جاذبه*

$$a = -\frac{m}{r^3} \Gamma$$

حاصل از جرم m واقع در مبدأ* مختصات.
۴۴۵۹ - مطلوبست تعیین پتانسیل میدان جاذبه حاصل از دستگاه اجرام $M_i (i = 1, 2, \dots, n)$ واقع در نقاط $M_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

۴۴۶۰ - ثابت کنید که میدان $a = f(r) \mathbf{r}$ که در آن $f(r)$ تابع تک مقداری پیوسته‌ای می‌باشد پتانسیلی است. پتانسیل این میدان را پیدا کنید.

۴۴۶۱ - مطلوبست اثبات دستور

$$\text{grad}_P \left\{ \iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r} \right\} = - \iint_S \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} + \iiint_V \text{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}$$

که در آن S سطح محدود کننده حجم V و \mathbf{n} قائم خارجی بر سطح S و r فاصله بین نقاط $P(x, y, z)$ و $Q(\xi, \eta, \zeta)$ است.

۴۴۶۲ - ثابت کنید که اگر $\mathbf{a} = \text{grad } u$ که در آن

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta$$

و

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

در آنصورت

$$\text{div } \mathbf{a} = \rho(x, y, z)$$

(بفرض آنکه انتگرالهای نظیر دارای معنا باشند).

جوابها

قسمت ۱

فصل ۱

$$-1,01 < x < -0,99 - 22 \sqrt{2} \quad ; \quad -\sqrt{2} - 17 \quad 14 \quad 0 - 16$$

$$|x| \leq 6 - 26 \quad 0 < x < \frac{2}{3} - 25 \quad x < -\frac{1}{2} - 24 \quad x \geq 12 \quad ; \quad x \leq -8 - 23$$

$$; \quad \frac{5 - \sqrt{30}}{10} < x < \frac{5 - \sqrt{20}}{10} - 29 \quad - \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} - 28 \quad x > -\frac{1}{2} - 27$$

$$0,41\% \quad 23 - \text{دو رقم} \quad 31 - \text{دومی} \quad 32 - \text{دو رقم} \quad 33 - \text{از } 1\%, 41\%$$

$$\frac{5 + \sqrt{20}}{10} < x < \frac{5 + \sqrt{30}}{10}$$

$$; \quad \Delta \leq 0,0902 \text{ cm}^2 \quad ; \quad 9,9102 \text{ cm}^2 \leq S \leq 10,0902 \text{ cm}^2 - 34 \quad \text{تجاوز نمیکند}$$

$$\delta \leq 3,05\% - 36 \quad \delta \leq 7,3\% \quad ; \quad 3,93 \text{ g/cm}^3 \pm 0,27 \text{ g/cm}^3 - 35 \quad \delta \leq 0,91\%$$

$$v = 192,660 \text{ m}^3 \pm 20,982 \text{ m}^3 \quad ; \quad 172,480 \text{ m}^3 \leq v \leq 213,642 \text{ m}^3 - 37$$

$$; \quad N \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{الف} - 42 \quad \Delta < 0,0005 \text{ m} - 39 \quad \Delta \leq 0,17 \text{ mm} - 38 \quad \delta = 12\%)$$

$$N \geq \frac{\lg \varepsilon}{\lg 0,999} \approx 233 \cdot \lg \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{ت} \quad ; \quad N \geq 1 + \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2} \quad (\text{پ} \quad ; \quad N \geq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \quad (\text{ب} \quad ; \quad N \geq \frac{1}{\varepsilon}))$$

$$0 - 46 \quad N \geq 1,01 \quad (\text{پ} \quad ; \quad N \geq \left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2 \quad (\text{ب} \quad ; \quad N \geq E \quad (\text{الف} - 43$$

$$\frac{1}{2} - 52 \quad \frac{1}{2} - 51 \quad \frac{1-b}{1-a} - 50 \quad \frac{1}{3} - 49 \quad 0 - 48 \quad 0 - 47$$

$$; \quad \frac{4}{3} - 54 \quad \frac{1}{3} - 53 \quad 2 - 57 \quad 1 - 56 \quad 3 - 55 \quad \text{دومی} \quad (\text{الف} - 67)$$

$$\text{ب} \quad (\text{اولی} \quad ; \quad \text{پ} \quad \text{دومی} \quad - 72 \quad \dots \quad e = 2,71828 \quad - 42 \quad \text{ساوی} \quad 1, \quad \text{اگر}$$

$$a \neq 0 \quad \text{و} \quad \text{متعلق به} \quad [-1, 1] \quad \text{باشد،} \quad \text{یا وجود ندارد،} \quad \text{اگر} \quad a = 0 \quad \frac{1}{a} - 46 \quad x_p = 1$$

$$x_{1\dots} = \frac{1 \dots 1 \dots}{1 \dots 1 \dots!} \approx 2,49 \times 10^{402} - 98 \quad x_{1\dots} = \frac{1}{\gamma} - 97$$

$$1 \leq 1 \leq 1 \leq 0 - 101 \quad x_1 = 20 - 100 \quad x_2 = x_3 = -120 - 99$$

$$1 \leq 0 \leq 1 \frac{1}{\gamma} \leq -1 - 102 \quad 2 \leq -2 \leq 0 \leq -3 \frac{1}{\gamma} - 101,1$$

$$\leq 1 \leq -\frac{1}{\gamma} - 100 \quad 6 \leq -4 \leq 6 \leq -4 - 104 \quad 2 \leq 0 \leq 2 \leq 0 - 103$$

$$\leq -\infty - 107 \quad +\infty \leq -\infty \leq +\infty \leq -\infty - 106 \quad 1 \leq -\frac{1}{\gamma}$$

$$+\infty \leq -\infty - 109 \quad +\infty \leq 0 \leq +\infty \leq 0 - 108 \quad -\infty \leq -\infty \leq -1$$

$$1 \leq -\frac{1}{\gamma} - 111 \quad 0 \leq 0 \leq 1,20 \leq -0 - 110 \quad +\infty \leq -\infty$$

$$1 \leq 0 - 110 \quad 2 \leq 1 - 114 \quad 1 \leq 0 - 113 \quad e + 1 \leq -\left(e + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) - 112$$

$$\text{جميع اعداد حقيقي} - 118 \quad 0 \leq \dots \leq \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\gamma} \leq 1 - 117 \quad 1 \leq 0 - 116$$

محصور بين 0 و 1 بانضمام دو عدد اخير الذكر - 119

الف) واكرا است ؟ ب) ممكن است همكرا يا واكرا باشد - 128 الف)

نميتوان ؟ ب) نميتوان - 129 خير - 130 خير - 144 الف) ؟ ب) 0

$$x \neq -1 \quad -\infty < x < +\infty - 151 \quad \frac{1}{\gamma}(a + 2b) - 148 \quad \ln 2 - 147$$

$$-1 \leq x < 1 - 153 \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3} \quad \text{و} \quad -\infty < x \leq -\sqrt{3} - 152$$

$$\leq k^2 \pi^2 \leq x \leq (\gamma k + 1)^2 \pi^2 - 155 \quad x > 2 \quad \text{ب) } |x| > 2 \quad \text{الف) } - 154$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}(\gamma k - 1)} \leq |x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} - 156 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{و} \quad \frac{1}{\gamma k + 1} < x < \frac{1}{\gamma k} - 157 \quad \leq \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}(\gamma k + 1)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$x \neq n \quad (x > 0 - 158) \quad -\frac{1}{\gamma k + 1} < x < -\frac{1}{\gamma k + 2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{\gamma} \quad (k = 0, \pm 1, -160) \quad -\frac{1}{\gamma} \leq x \leq 1 - 159 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$1 \cdot (\gamma k - \frac{1}{\gamma})^\pi < x < 1 \cdot (\gamma k + \frac{1}{\gamma})^\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) - 161 \quad \pm 2, \dots$$

$$x \neq -n \quad (x < 0 - 163) \quad x \geq 0 \quad \text{و} \quad x = -1, -2, -3, \dots - 162$$

$$x = \frac{1}{\gamma}, 1, \frac{\gamma}{\gamma}, 2, \dots - 165 \quad 1 < x \leq 2 - 164 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{\xi} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{\gamma} \quad (k = 0, \pm 1, \dots) - 165, 2 \quad x > \xi - 165, 1$$

$$\xi - 1 \leq x \leq 2 - 166 \quad \frac{\xi\pi}{\gamma} \leq x \leq \frac{\gamma\pi}{\gamma} \quad \text{و} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{\gamma} - 165, 3$$

$$\xi 2k\pi + \frac{\pi}{\gamma} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{\gamma} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) - 167 \quad 0 \leq y \leq 1 - \frac{1}{\gamma}$$

$$1 \leq -169 \quad 0 \leq y \leq \pi \quad ; \quad -\infty < x < +\infty - 168 \quad -\infty < y \leq \lg 2$$

$$q \text{ و } p \text{ در آن } x = \frac{p}{2q+1} - 170 \quad -\frac{\pi}{\gamma} \leq y \leq \frac{\pi}{\gamma} \quad ; \quad \leq x \leq 100$$

$$; P = 2b + 2\left(1 - \frac{b}{h}\right)x \quad (0 < x < h) - 171 \quad y = \pm 1 \text{ میباشند}$$

$$; a = \sqrt{100 - 96 \cos x} - 172 \quad S = bx \left(1 - \frac{x}{h}\right) \quad (0 < x < h)$$

$$; 0 \leq x \leq \frac{a-b}{\gamma} \text{ اگر } S = \frac{h}{a-b} x^2 - 173 \quad S = 2\xi \sin x \quad (0 < x < \pi)$$

$$S = h \left[\frac{a+b}{\gamma} - \frac{(a-x)^2}{a-b} \right] ; \frac{a-b}{\gamma} < x < \frac{a+b}{\gamma} \text{ اگر } S = h \left(x - \frac{a-b}{\xi} \right)$$

$$m(x) = 2x \quad ; \quad -\infty \leq x \leq 0 \text{ اگر } m(x) = 0 - 174 \quad \frac{a+b}{\gamma} \leq x \leq a \text{ اگر}$$

$$; 2 < x \leq 3 \text{ اگر } m(x) = 3 \quad ; 1 < x \leq 2 \text{ اگر } m(x) = 2 \quad ; 0 < x \leq 1 \text{ اگر}$$

$$E_y = -179 \quad E_y = \{0 \leq y \leq 4\} - 178 \quad 3 < x < +\infty \text{ اگر } m(x) = 4$$

$$E_y = \{1 \leq |y| < +\infty\} - 181 \quad E_y = \{0 < y < 1\} - 180 = \{1 < y < 3\}$$

$$b < y < a \text{ و } a < b \text{ برای } a < y < b - 182 \quad E_y = \{1 \leq y \leq 2\} - 182$$

$$+\infty > y > 1 \text{ و } 0 > y > -\infty - 185 \quad 1 < y < +\infty - 184 \quad a > b \text{ برای}$$

$$3 \quad 0 < y < \frac{1}{\gamma} - 188 \quad +\infty > y > -\infty - 187 \quad 0 < y \leq \frac{1}{\gamma} - 186$$

$$4 \quad ; \quad -6 \quad ; \quad 0 - 190 \quad 2 \xi \quad ; \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad ; \quad 0 - 189 \quad \frac{\gamma}{\gamma} \leq y < 2$$

$$; 1 - 193 \quad 4 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 0 \quad ; \quad -1 - 192 \quad 2 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 1 - 191$$

$$f(x) = 0 \quad (\text{الف} - 194 \quad \frac{1+x}{1-x}, \frac{x-1}{x+1}, \frac{\gamma}{1+x}, \frac{-x}{\gamma+x}, \frac{1+x}{1-x}$$

$$-\infty < x < -1 \text{ اگر } f(x) > 0 \quad ; \quad x = 1 \text{ و } x = 0, \quad x = -1 \text{ اگر}$$

و $0 < x < 1$ ؛ اگر $f(x) < 0$ ؛ $-1 < x < 0$ و $1 < x < +\infty$ ؛
 پ) اگر $f(x) = 0$ ؛ اگر $x = 1$ و $x \leq 0$ ؛ اگر $f(x) > 0$ ؛ $0 < x < 1$ ؛
 ؛ اگر $f(x) < 0$ ؛ اگر $1 < x < +\infty$ (الف - ۱۹۵) ؛ ب) $2x + h$ ؛

پ) $f(x) = \frac{v}{3} x - 2 - 197 a^x \times \frac{a^h - 1}{h}$ ؛ $f(1) = \frac{1}{3}$ ؛ $f(2) = 2 \frac{2}{3}$ ؛

۱۹۸ - $f(x) = \frac{v}{6} x^2 + \frac{1v}{6} x + 1$ ؛ $f(-1) = -\frac{2}{3}$ ؛ $f(0,5) = 2 \frac{1v}{24}$ ؛

۱۹۹ - $f(x) = \frac{10}{3} x^3 - \frac{v}{2} x^2 - \frac{29}{6} x + 2$ ؛ $f(x) = -200$ ؛ $10 + 0 \times 2^x$ ؛

۲۰۳ - الف) $[k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots]$ ؛ ب) $1 < x < e$ ؛ پ) $x > 0$ ؛ $x \neq k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) (الف - ۲۰۵)

ب) $z = x + y$ ؛ ب) $z = \frac{xy}{x+y}$ ؛ پ) $z = \frac{x+y}{1-xy}$ ؛ ت) $z = \frac{x+y}{1+xy}$ ؛

۲۰۶ - $\varphi(\varphi(x)) = x^2$ ؛ $\varphi(\psi(x)) = 2^{2x}$ ؛ $\psi(\psi(x)) = 2^{2x}$ ؛ $\varphi(\varphi(x)) = x^2$ ؛

۲۰۷ - $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = x$ ($x \neq 0$) ؛ $\psi(\psi(x)) = x$ ($x \neq 0$) ؛ $\varphi(\varphi(x)) = \text{sgn } x$ ؛

۲۰۸ - $\psi(\varphi(x)) = \psi(x)$ ؛ $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ ؛ $\text{sgn } x$ ($x \neq 0$) ؛

۲۰۹ - $\psi(\psi(x)) = \varphi(\psi(x)) = 0$ ؛ $-\frac{1-x}{x}$ ($x \neq 0, x \neq 1$) ؛

۲۱۰ - $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ ؛ $x^2 - 2(x \geq 2) - 212$ ؛ $x^2 - 0x + 6 - 211$ ؛

۲۱۳ - $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 - 213,1$ ؛ $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} - 213$ ؛ $a > 0$ ؛

صعودی و بازای $a < 0$ نزولی است ؛ ب) بازای $a > 0$ در فاصله

$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ نزولی و در فاصله $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ صعودی است ؛ پ) صعودی

است ؛ ت) بازای $ad - bc > 0$ در فواصل $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ و $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$ ؛

صعودی است ؛ ث) بازای $a > 1$ صعودی و بازای $0 < a < 1$ ؛

نزولی است ۲۲۲ - میتوان ، اگر مبنای لگاریتمم بزرگتر از ۱ باشد

۲۲۴ - $\frac{y-3}{y}$ ($-\infty < y < +\infty$) (الف - ۲۲۵) ؛ $-\sqrt{y}$ ($0 \leq y < +\infty$) ؛

$-V_{1-y^2}$ (الف - ۲۲۷ $\frac{1-y}{1+y}$ ($y \neq -1$) - ۲۲۶ V_y ($0 \leq y < +\infty$) (ب)
 $\text{Arsh } y = \ln(y + V_{1+y^2}) - ۲۲۸ V_{1-y^2}$ ($0 \leq y \leq 1$) (ب ؛ ($0 \leq y \leq 1$)
 $x = y - ۲۳۰ \text{ Arth } y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$ ($-1 < y < 1$) - ۲۲۹ ($-\infty < y < +\infty$)
 اگر $x = \log_y y$ ؛ $1 \leq y \leq ۱۶$ اگر $x = V_y$ ؛ $-\infty < y < ۱$ اگر
 $۱۶ < y < +\infty$ (الف - ۲۳۱) فرد ؛ زوج ؛ (ب) زوج ؛ (پ) زوج ؛ (ت) فرد ؛
 (ث) فرد (الف - ۲۳۳) $T = \frac{2\pi}{\lambda}$ دوره‌ای (ب) $T = \pi$ دوره‌ای (ت) $T = 6\pi$ دوره‌ای (پ) $T = \pi$ دوره‌ای (ج) $T = \pi$ نادره‌ای ؛ (ث) نادره‌ای ؛ (ج) دوره‌ای
 $x = -۳ \frac{1}{3} m$ ، $t = ۱ \frac{2}{3} \text{ sec}$ - ۲۴۱ (ح) نادره‌ای ؛ (ج) نادره‌ای
 ۹ km ؛ $y = x - \frac{x^2}{۳۶۰۰۰}$ - ۲۴۴ $y = \frac{ac - b^2}{ca}$ ، $x = -\frac{b}{2a}$ - ۲۴۳
 $p = \frac{۱۲}{v}$ ($v > ۰$) - ۲۵۲ $y = \frac{a}{c}$ ؛ $x = -\frac{d}{c}$ - ۲۵۱ ۳۶ km
 $n = \frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^2}$ ($a_1 b - ab_1$) ، $m = \frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2}$ ؛ $k = \frac{a}{a_1}$ - ۲۶۳
 $\sin x = -\frac{a}{A}$ ؛ $A = V_{a^2 + b^2}$ - ۲۸۷ $y = \frac{1}{x^2}$ - ۲۶۴ $x = -\frac{b_1}{a_1}$
 $y = (-1)^k$ و $|x - \pi k| \leq \frac{\pi}{7}$ اگر $y = 2 \sin x - ۳۵۶$ $\cos x = \frac{b}{A}$
 (الف - ۳۵۷) $\frac{\pi}{7} < |x - \pi k| < \frac{5\pi}{7}$ ($k = ۰, \pm 1, \pm 2, \dots$) اگر
 $x < ۰$ اگر $y = ۰$ ؛ $x \geq ۰$ اگر $y = x^2$ (ب) و (پ) $y = \frac{1}{x}(x + |x|)$
 $y = ۱$ (الف - ۳۵۸) $x \geq ۰$ اگر $y = x^4$ ؛ $x < ۰$ اگر $y = x$ (ت)
 (ب) $y = ۱$ اگر $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$ یا $|x| < ۱$ اگر $y = ۰$ ؛ $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$ اگر $y = ۱$ (پ)
 $y = ۱$ اگر $|x| \leq ۱$ ؛ $y = ۲$ اگر $|x| > ۱$ (ت) ؛ $y = -۲$ اگر
 $|x| > ۲$ ؛ $|x| \leq ۲$ اگر $y = ۲ - (2 - x^2)^2$ - ۳۵۹ بازای $x < ۰$ داریم :
 (الف) (۱) $f(x) = 1 + x$ (۲) $f(x) = -(1 + x)$ (ب) (۱) $f(x) = -2x - x^2$
 (۲) $f(x) = 2x + x^2$ (پ) (۱) $f(x) = \sqrt{-x}$ (۲) $f(x) = -\sqrt{-x}$
 (ت) (۱) $f(x) = -\sin x$ (۲) $f(x) = \sin x$ (ث) (۱) $f(x) = e^{-x}$

$f(x) = -\ln(-x)$ (ز) ، $f(x) = \ln(-x)$ (ح) ، $f(x) = -e^{-x}$ (ز)

$x = k\pi$ (ت) ؛ $x = \frac{b-a}{2}$ (پ) ؛ $x = \frac{1}{2}$ (ب) ؛ $x = -\frac{b}{2a}$ (الف) - ۳۶۰

آن $(x., ax. + b)$ (الف) - ۳۶۱ $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

اختیاری است ؛ (ب) $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ (پ) ؛ $(x., y.)$ که در آن $x. = -\frac{b}{2a}$

و $ay. = ax.^2 + bx.^2 + cx. + d$ (ت) ؛ $(2, 0)$ (ث) ؛ $(2, 1)$ - ۳۷۲ ریشه‌ها :

$40, 20 - 374$ $-1, 86$ $40, 20$ $42, 11 - 373$ $1, 02$ $40, 20$ $4 - 1, 88$

$40 - 378$ $-0, 04 - 377$ 10 $41, 27 - 376$ $0, 74 - 375$ $1, 49$

$4y_4 = 1, 19$ $x_4 = -0, 42$ $4y_1 = -1, 26$ $x_1 = -0, 07 - 379$ $4, 49$

$x_1 = -1, 30 - 380$ $y_2 = -0, 68$ $x_2 = 0, 04$ $4y_3 = 0, 74$ $x_3 = 0, 40$

$4y_3 = -9, 98$ $x_3 = -0, 62$ $4y_2 = 9, 73$ $x_2 = 2, 30$ $4y_1 = 9, 91$

$y_4 = 9, 87$ $x_4 = 1, 62$ (الف) - ۳۸۲ بطور کلی خیر ؛ (ب) بلی

- ۳۸۵ کراندار از بالا و نا کراندار از پائین است . $f(a) - 387$ و (b)

$+ \infty$ ؛ $2 - 391$ 1 ؛ $0 - 390$ 1 ؛ $0 - 389$ 20 ؛ $0 - 388$

$(\text{الف} - 390$ ؛ $\frac{1}{2} - 394$ $\sqrt{2}$ ؛ $-\sqrt{2} - 393$ 1 ؛ $-1 - 392$

$0, 8$ ؛ 1 ؛ 0 (ب) ؛ $0 - 396$ 1 ؛ $0 - 397$ (الف) - ۳۹۷ 8 ؛ 8 (ب) ؛ $0, 8$ ؛

π (پ) ؛ $0, 08$ ؛ $0, 08$ (ث) ؛ $0, 08$ (الف) - ۳۹۸ π ؛ π (ب) ؛ π (پ) ؛ π (ت) ؛ π

$10 - 413$ $6 - 412$ $\frac{1}{2}$ (پ) ؛ $\frac{2}{3}$ (ب) ؛ 1 (الف) - ۴۱۱

$n - \frac{n(n+1)}{2} - 417$ $\left(\frac{3}{2}\right)^{30} - 416$ $0^0 - 415$ $\frac{1}{2} nm(n-m) - 414$

$\frac{1}{3} - 422$ $\frac{1}{4} - 421$ $1 - 420$ $\frac{1}{2} - 419$ $-\frac{1}{2} - 418$

$\frac{m}{n} - 425$ $2\frac{1}{24} - 424, 1$ $\frac{n(n+1)}{2} - 423$ $\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 422$

$x + \frac{a}{2} - 429$ $\frac{m-n}{2} - 428$ $\frac{n(n+1)}{2} - 427$ $\frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} - 426$

$\frac{ab}{3} - 434$ $3 - 433$ $\frac{1}{2} - 432$ $1 - 431$ $x^2 + ax + \frac{a^2}{3} - 430$

$\frac{1}{\sqrt{2a}} - 439$ $-2 - 438$ $\frac{4}{3} - 437$ $\frac{1}{\sqrt{2}} - 436$ $1 - 435$

$$\frac{1}{n} - 444 \quad \frac{12}{0} - 443 \quad \frac{1}{2} - 442 \quad \frac{1}{144} - 441 \quad -\frac{1}{16} - 440$$

$$\frac{v}{36} - 440 \quad \frac{4}{27} - 439 \quad \frac{3}{2} - 438 \quad \frac{2}{27} - 437 \quad \frac{1}{2} - 436 \quad -2 - 435$$

$$\frac{n}{m} - 435 \quad \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} - 434 \quad \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n} - 433 \quad -\frac{1}{2} - 432$$

$$-\frac{1}{2} - 429 \quad \frac{1}{2} - 428 \quad \frac{1}{2}(a+b) - 427 \quad \frac{1}{n!} - 426 \quad \frac{1}{2} - 425, 1$$

$$-\frac{1}{2} - 424 \quad \frac{2}{3} - 423 \quad 2 - 422 \quad \frac{2}{3} - 421 \quad 1 - 420$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} x_1 = \infty - 428 \quad 2n - 427 \quad 2^n - 426 \quad \frac{1}{n} \times (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - 425$$

$$a_i = \pm 1 - 424 \quad b = -1 \quad a = 1 - 423 \quad \lim_{a \rightarrow \infty} x_2 = -\frac{c}{b}$$

$$(-1)^{m-n} \frac{m}{n} - 422 \quad \cdot - 421 \quad 0 - 420 \quad b_i = \mp \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2)$$

$$2 - 420 \quad 2 - 419 \quad \frac{1}{2} - 418 \quad \frac{1}{3} - 417, 2 \quad 1 \quad 416, 1 \quad \frac{1}{2} - 415$$

$$\sin a - 413 \quad \cos a - 412 \quad \frac{2}{\pi} - 411 \quad \frac{1}{2} - 410 \quad \frac{1}{p} - 409$$

$$-\frac{1}{\sin^2 a} - 410 \quad \sec^2 a \left((a(2k+1)) \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \right) - 409$$

$$a \neq (2k+1) \frac{\pi}{2} \quad \frac{\sin a}{\cos^2 a} - 408 \quad (\text{درست عددیست } k \text{ که در آن } a \neq k\pi)$$

$$-\cos a - 409 \quad -\sin a - 408 \quad (\text{که در آن } k \text{ عددیست درست})$$

$$\left(\text{درست عددیست } k \text{ که در آن } a \neq (2k+1) \frac{\pi}{2} \right) \frac{2 \sin a}{\cos^2 a} - 407$$

$$\frac{3}{2} \sin 2a - 408 \quad (\text{درست عددیست } k \text{ که در آن } a \neq k\pi) \quad \frac{2 \cos a}{\sin^2 a} - 409$$

$$-\frac{\cos 2a}{\cos^2 a} - 407 \quad -24 - 406 \quad \frac{1}{\sqrt{3}} - 405 \quad 14 - 404 \quad -2 - 403$$

$$\frac{3}{4} - 498 \quad \left(\text{در آن } k \text{ عددیست درست که } a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$$

$$0 - 503 \quad \sqrt{2} - 502 \quad -\frac{1}{12} - 501 \quad \frac{4}{3} - 500 \quad \frac{1}{4} - 499$$

$$1 \text{ (پ) ؛ } \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (ب) ؛ } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (الف) - 506} \quad 0 - 505 \quad 3 - 504$$

$$e^3 - 512 \quad 1 - 511 \quad 0 - 510 \quad 0 - 509 \quad 0 - 508 \quad 0 - 507$$

$$1 - 513 \quad e^{-2} - 514 \quad e^{2a} - 515 \quad 0 - 516 \quad \text{اگر } a_1 < a_2 \text{ ؛ } +\infty$$

$$1 - 519 \quad e^{-1} - 518 \quad e - 517 \quad a_1 = a_2 \text{ اگر } e^{\frac{b_1 - b_2}{a_1}} \text{ ؛ } a_1 > a_2$$

$$\left(\text{درست عددیست } k \text{ ، } a \neq k\pi \right) e^{ctga} - 520 \quad \sqrt{e} - 519, 1$$

$$e - 525 \quad e^{-2} - 524 \quad 1 - 523 \quad e^{-1} - 522 \quad .e^{\frac{3}{2}} - 521$$

$$1 - 530 \quad 1 - 529 \quad e^{-\frac{x^2}{2}} - 528 \quad e^{x+1} - 527 \quad \frac{1}{\sqrt{e}} - 526$$

$$\frac{3}{2} - 535 \quad -2 - 534 \quad \frac{1}{e} - 533 \quad 0 - 532 \quad \frac{1}{a} - 531$$

$$0 - 540 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 539 \quad \frac{2a}{b} - 538 \quad -\frac{\log e}{x^2} - 537 \quad \frac{3}{2} - 536$$

$$e^2 - 544 \quad a^2 \ln ea - 543 \quad a^2 \ln \frac{a}{e} - 542 \quad \ln a - 541 \quad n - 540, 1$$

$$e^2 - 546 \quad 2 - 545, 3 \quad \frac{\alpha}{\beta} - 544, 2 \quad e^{\beta^2 - \alpha^2} - 543, 1 \quad \frac{2}{3} - 542$$

$$e^{-(a+b)} - 551 \quad a^x \ln^y a - 550 \quad a^b \ln a - 549 \quad \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha - \beta} - 548 \quad 1 - 547$$

$$\sqrt[3]{abc} - 556 \quad \sqrt{ab} - 555 \quad \sqrt[3]{b} - 554 \quad \ln x - 553 \quad \ln x - 552$$

$$a^a \ln a - 560 \quad \left(\ln \frac{a}{b}\right)^{-1} - 559 \quad \frac{1}{\sqrt{ab}} - 558 \quad (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}} - 557$$

$$\left(\text{الف} - 566 \quad -\ln 2 - 563 \quad \ln 8 - 562 \quad \frac{\ln 3}{\ln 2} \text{ (ب) ؛ } 0 \text{ (الف) - 561} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} - 570 \quad \ln a^2 - 569 \quad 0 - 568 \quad 1 - 567 \quad \frac{1}{2} \text{ (ب) ؛ } \frac{1}{2}$$

$\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} - 050$ $e^{\frac{y}{x}} - 054$ $e^y - 053$ $-2 - 052$ $\frac{1}{y} - 051$
 $2 \operatorname{sh} \frac{1}{y} - 057$ $\frac{y}{a} - 056, 1$ 1 (ب ؛ $\frac{1}{y}$ (ب ؛ 1 (الف - 056
1 - 059 $\ln 2 - 058$ $-1 - 057, 2$ $\operatorname{sha} a$ (ب ؛ $\operatorname{cha} a$ (الف - 057, 1
 $\frac{3\pi}{4} - 084$ $-\frac{\pi}{2} - 083$ $\frac{\pi}{3} - 082$ $-\frac{\pi}{2} - 081$ $e^{\pi y} - 080$
1 - 089 $\frac{1}{y} - 088$ $\frac{e^x}{x^2 + 1} - 087$ 2 - 086 $\frac{1}{1 + x^2} - 085$
 $\frac{1}{y}$ (ب ؛ $+\infty$ (الف - 093 0 - 092 0 - 091 $e^{\frac{y}{x}} - 090$
 $-\frac{\pi}{2}$ (ب ؛ $\frac{\pi}{2}$ (الف - 095 $\ln \frac{b^y}{a^y} - 094, 1$ 1 (ب ؛ -1 (الف - 094
2 ؛ 1 ؛ 2 - 600 1 (ب ؛ 0 (الف - 097 0 (ب ؛ 1 (الف - 096
1 - 605 0 - 604 1 - 603 0 - 602 $(-1)^n$ ؛ $(-1)^{n-1}$ ؛ 0 - 601
 $|x| = 1$ اگر $y = 0$ ؛ $|x| < 1$ اگر $y = 1$ (ب - 613 0 - 606
1 (ب - 614 $0 \leq x < 1$ اگر $y = 0$ ؛ $\frac{1}{y}$ اگر $y = 1$ ؛ $x = 1$ اگر $y = 1$ ؛ $x = 1$ اگر $y = 1$
1 < x < +∞ اگر $y = -1$ - 615 $0 < |x| < 1$ اگر $y = -1$ - 615 $y = 0$ اگر $y = 0$
 $|x| = 1$ ؛ $|x| > 1$ اگر $y = 1$ ؛ $|x| > 1$ اگر $y = 1$ - 617 $y = |x| - 616$ $|x| > 1$ اگر $y = 1$ ؛ $|x| = 1$
1 (ب - 618 $0 \leq x \leq 1$ اگر $y = 1$ ؛ $x > 1$ اگر $y = x$ ؛ $0 \leq x \leq 1$ اگر $y = 1$ - 618
1 < x < 2 اگر $y = x$ ؛ $1 < x < 2$ اگر $y = \frac{x^2}{y}$ ؛ $x \geq 2$ اگر $y = \frac{x^2}{y}$ - 619 اگر $y = 0$ - 619
0 ≤ x < 2 اگر $y = 2\sqrt{x}$ ؛ $x = 2$ اگر $y = 2\sqrt{x}$ ؛ $x > 2$ اگر $y = x^2$ ؛ $x > 2$ اگر $y = x^2$
1 (ب - 620 اگر $y = 0$ اگر $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{y}$ ؛ $y = 1$ اگر $x = (2k+1)\frac{\pi}{y}$
1 (ب - 621 $0 \leq x \leq 2$ اگر $y = \ln 2 - 621$ $y = \ln x$ ؛ $0 \leq x \leq 2$ اگر $y = \ln 2 - 621$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$
1 (ب - 622 $x > 2$ اگر $y = 0$ اگر $-1 < x \leq 1$ ؛ $y = \frac{\pi}{y}(x-1)$ اگر $y = \frac{\pi}{y}(x-1)$ ؛ $-1 < x \leq 1$ اگر $y = 0$ - 622
1 (ب - 623 $x > 1$ اگر $y = 1$ اگر $x \leq -1$ ؛ $y = e^{x+1}$ اگر $x > -1$ ؛ $x > 1$ اگر $y = 1$ - 623
1 (ب - 624 $y = x - 624$ بازای $y = x$ ؛ $x < 0$ بازای $y = \frac{1}{y}$ ؛ $x = 0$ بازای $y = 1$ ؛ $x > 0$ بازای $y = 1$ - 624
1 (ب - 625 $y = \sqrt{x} - 625, 1$ بازای $y = \sqrt{x}$ ؛ $0 \leq x < 1$ و $k-1 < x < k+1$ ؛ $k-1 < x < k+1$ و $0 \leq x < 1$ بازای $y = \sqrt{x} - 625, 1$

؛ $\varepsilon k - 2 < x < \varepsilon k - 1$ و $\varepsilon k - 3 < x < \varepsilon k - 2$ بازای $y = x$

$y = 0 - 625, 2$ $x = 2k - 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) بازای $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} (\sqrt{x} + x)$

اگر x گویا باشد ؛ $y = x$ اگر x گنگ باشد $-625, 3$ دورگرد مربع
؛ $y = x - 1$ ، $x = -2$ ، $x = 1$ (الف - 627 $\max\{|x|, |y|\} = 1$)

؛ $x \rightarrow -\infty$ بازای $y = -x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ، $x \rightarrow +\infty$ بازای $y = x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (ب)

؛ $x \rightarrow -\infty$ بازای $y = 0$ ، $x \rightarrow +\infty$ بازای $y = x$ (ت ؛ $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x$ (پ)

$y = x + \frac{\pi}{\sqrt[3]{x}}$ (ج ؛ $x \rightarrow +\infty$ بازای $y = x$ ، $x \rightarrow -\infty$ بازای $y = 0$ (ث

$\frac{a}{\sqrt[3]{x}} - 623$ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 622$ $\frac{\sin x}{x} - 620$ $\frac{1}{1-x} - 629$ $0 - 628$

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} (1 + \sqrt{1 + \varepsilon a}) - 627$ $e^{-\frac{a^2}{\sqrt[3]{x}}} - 626$ $\sqrt{e} - 625$ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \ln a - 624$

$\sqrt{1+x} - 1 - 628$ $\frac{\sqrt{e-1}}{\sqrt[3]{x}} - 627, 3$ $\frac{b}{1-a} - 627, 2$ $\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 627, 1$

؛ 1 (ت ؛ 0 (پ ؛ $+\infty$ (ب ؛ 2 (الف - 641 $1 - \sqrt{1-x} - 629$

؛ $L = 2$ ، $l = -1$ (الف - 643 $2 \operatorname{sh} 1$ (ج ؛ 1 (ج ؛ 2 (ث

(ب ؛ $L = 2$ ، $l = -2$ (پ ؛ $L = e$ ، $l = 2$ (الف - 644

؛ $L = 1$ (ب ؛ $L = +\infty$ ، $l = 0$ (پ ؛ $L = 2$ ، $l = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (ت ؛ $l = 0$ (ت

؛ $L = +\infty$ (الف - 645 مرتبه^۱ یک ؛ (ب مرتبه^۲ دو ؛ (پ مرتبه^۳ یک ؛

(ت مرتبه^۴ سه ؛ (ث مرتبه^۵ سه ؛ (ج مرتبه^۶ سه - 653 (الف ؛ $2x$ (ب ؛ x

؛ $\frac{(1-x)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}{\sqrt[3]{x}}$ (ب ؛ $3(x-1)^2$ (الف - 655 $\frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$ (ت ؛ $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$ (پ

(پ ؛ $x-1$ (ت ؛ $e(x-1)$ (ث ؛ $x-1$ (الف - 656 x^2 (ب ؛ $2x^2$ (پ

؛ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$ (ب ؛ $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$ (الف - 657 $x^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$ (ت ؛ $x^{\frac{2}{\sqrt[3]{x}}}$ (پ

؛ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left(\frac{1}{1-x}\right)$ (الف - 658 $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ (ت ؛ $-\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{\sqrt[3]{x}}}$ (پ

$$\text{ب) } \sqrt[3]{\frac{1}{1-x}} \quad \text{پ) } \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{ت) } \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1-x}$$

$$\text{ث) } \frac{1}{x-1} \quad \text{الف) } 9,990 < x < 10,000 \quad \text{ب) } 9,995 < x < 10,005$$

$$\text{پ) } 9,9990 < x < 10,0000 \quad \text{ت) } \sqrt{100-\varepsilon} < x < \sqrt{100+\varepsilon}$$

$$664 - \frac{\varepsilon}{27} < \Delta < 664 + \frac{\varepsilon}{27} \quad \text{الف) } \Delta < 3,7 \text{ mm} \quad \text{ب) } \Delta < 0,37 \text{ mm} \quad \text{پ) } \Delta < 0,037 \text{ mm}$$

$$665 - 100 [1 + 10^{-(n+1)}]^2 < x < 100 [1 - 10^{-(n+1)}]^2 \quad \text{الف) } 99,8001 < x < 100,2001$$

$$121 < x < 81 \quad \text{ب) } 98,01 < x < 102,01 \quad \text{پ) } 99,8001 < x < 100,2001$$

$$\text{ت) } 99,980001 < x < 100,020001 \quad \delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{11}, 1\right) - 666$$

$$667 - x! \approx 0,001 \quad \delta = \frac{\varepsilon x!}{1 + \varepsilon x} \quad \text{الف) } \delta \approx 10^{-5} \quad \text{ب) } \delta \approx 10^{-7}$$

$$\text{پ) } \delta \approx 10^{-9} \quad \text{نمی‌توان} \quad \text{الف) } \text{نمی‌توان} \quad \text{ب) } \text{میتوان} \quad 671 - \text{خیر} \quad \text{کرناندار بودن در نقطه} \quad x = 672 - \text{خیر}$$

اگر تابع $f(x)$ در فاصله متناهی (a, b) معین باشد در آن صورت این نامساویها همیشه برقرار خواهند بود

اگر لااقل a یا b مساوی نماد ∞ باشند در آن صورت $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty$

673 - خیر ؛ تکمقداری و پیوستگی تابع معکوس 675 - پیوسته است

676 - پیوسته است اگر $A = 4$ و بازای $x = 2$ منفصل است اگر $A \neq 4$

677 - بازای $x = -1$ منفصل است 678 - الف) پیوسته است ؛ ب) بازای $x = 0$ مفصل است 679 - بازای $x = 0$ منفصل است 680 - پیوسته است

681 - پیوسته است 682 - بازای $x = 1$ منفصل است 683 - بازای $a = 0$ پیوسته و بازای $a \neq 0$ منفصل است 684 - بازای $x = 0$ منفصل است

685 - بازای $x = k$ (k درست است) منفصل است 686 - بازای $x = k^2$

687 - منفصل است 688 - $x = -1$ نقطه انفصال قابل حذف است 689 - $x = -2$ و $x = 1$ نقاط انفصال بی نهایت است 690 - $x = 0$ و $x = 1$ نقاط انفصال قابل حذف ؛ 691 - $x = 0$ نقطه انفصال بی نهایت است 692 - $x = \pm 2$ نقاط انفصال قابل حذف میباشدند 693 - $x = 0$ نقطه انفصال نوع دوم است 694 - $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) نقاط انفصال نوع

اول میباشند ؛ $x = 0$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است $x = 0 - 695$ و

$x = 0 - 696$ نقاط انفصال قابل حذف میباشند $x = \frac{2}{2k+1}$ ($k = 0, \pm 1, \dots$)

نقطهٔ انفصال نوع اول است $x = 0 - 697$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است

$x = 0 - 698$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است $x = 0 - 699$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است ؛ $x = 1$ نقطهٔ انفصال بی‌نهایت است $x = 0 - 700$ نقطهٔ انفصال بی‌نهایت است ؛ $x = 1$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است $x = k\pi - 701$

$x = k - 702$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$x = 0 - 703$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) تابع پیوسته است $x = \pm \sqrt{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) - 705

$x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) - 706 نقاط انفصال نوع اول میباشند ؛

$x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) - 707 نقطهٔ انفصال بی‌نهایت است

$x = 0$ نقطهٔ انفصال نوع اول میباشند ؛ $x = 0$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است

$x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) - 708 نقاط انفصال نوع اول میباشند ؛ $x = 0$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است $x = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$ - 709

$x = \pm \frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, \dots$) و $x = \pm \frac{1}{k}$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ، $x = 0$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) - 710

$x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ - 711 نقطهٔ انفصال نوع دوم است ؛ $x = 0$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است ؛ $x = 0$ نقطهٔ انفصال بی‌نهایت میباشند ؛ $x = 0$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است $x = \pm \sqrt{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) - 712

نوع اول میباشند $x = 2$ و $x = 1$ ، $x = 0 - 713$ نقاط انفصال نوع اول میباشند $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) - 714

نقاط انفصال بی‌نهایت میباشند $x = \pm \sqrt{k\pi}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) - 715

نقاط انفصال بی‌نهایت میباشند $x = 3$ و $x = -1 - 716$ نقاط انفصال بی‌نهایت میباشند

$x = 0 - 717$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است $x = 0 - 718$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است $x = \pm 1 - 719$ نقاط انفصال نوع اول میباشند $y = 1 - 720$

اگر $0 \leq x < 1$ ؛ $y = \frac{1}{y}$ اگر $x = 1$ ؛ $y = 0$ اگر $x > 1$ ؛ $x = 1$

نقطه انفصال نوع اول است $y = \operatorname{sgn} x - 721$ ؛ $x = 0$ نقطه انفصال نوع

اول است -722 ؛ $y = 1$ اگر $|x| \leq 1$ ؛ $y = x^2$ اگر $|x| > 1$. تابع

پیوسته است -723 . اگر $y = 0$ ؛ $x \neq k\pi$ اگر $y = 1$ ؛ اگر $x = k$

نقاط انفصال نوع اول می باشند $x = k\pi$ ؛ $\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

-724 ؛ اگر $y = x - \frac{\pi}{y}$ ؛ $|x - k\pi| < \frac{\pi}{y}$ ؛ اگر $y = \frac{x}{y}$ ؛ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{y}$

$y = 0$. اگر $(k = 0, \pm 1, \dots)$ ؛ $\frac{\pi}{y} < |x - k\pi| < \frac{0\pi}{y}$ ؛ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{y}$

نقاط انفصال نوع اول می باشند -725 ؛ $y = \frac{\pi}{y} x - \frac{\pi}{y}$ اگر $k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{y}$

$y = -\frac{\pi}{y} x$ اگر $k\pi + \frac{\pi}{y} < x < k\pi + \pi$ ؛ $y = 0$ ؛ اگر $x = k\pi + \frac{\pi}{y}$

-726 ؛ $x = \frac{k\pi}{y}$ نقاط انفصال نوع اول می باشند $y = x - \frac{k\pi}{y}$ ؛ $(k = 0, \pm 1, \dots)$

بازای $x \leq 0$ ؛ $y = x^2$ ؛ بازای $x > 0$. تابع پیوسته است -727 ؛ $y = 0$

بازای $x \leq 0$ و $y = x$ ؛ بازای $x > 0$. تابع پیوسته است -728 ؛ $y = -(1+x)$

بازای $x < 0$ ؛ $y = 0$ ؛ بازای $x = 0$ و $y = 1+x$ ؛ بازای $x > 0$ ؛ $x = 0$

نقطه انفصال نوع اول است -729 خیر -730 ؛ $a = 1 - 731$ (الف)

تابع پیوسته است ؛ ب) $x = -1$ نقطه انفصال نوع اول است ؛ پ) $x = -1$

نقطه انفصال نوع اول است ؛ ت) $x = k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) نقاط

انفصال بی نهایت است ؛ ث) $x \neq k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) نقاط انفصال

نوع دوم است -732 ؛ $d = -x$ ؛ بازای $-\infty < x < 0$ ؛ $d = 0$ ؛ بازای

$0 \leq x \leq 1$ ؛ $d = x - 1$ ؛ بازای $1 < x \leq \frac{3}{2}$ ؛ $d = 2 - x$ ؛ بازای

$\frac{3}{2} < x < 2$ ؛ $d = 0$ ؛ بازای $2 \leq x \leq 3$ ؛ $d = x - 3$ ؛ بازای $3 < x < +\infty$.

تابع پیوسته است -733 ؛ $S = 2y - \frac{y^2}{y}$ ؛ بازای $0 \leq y \leq 1$ ؛ $S = \frac{1}{y} + 2y$ ؛

بازای $1 < y \leq 2$ ؛ $S = \frac{0}{y} + y$ ؛ بازای $2 < y \leq 3$ ؛ $S = \frac{11}{y}$ ؛ بازای

$3 < y < +\infty$ ؛ تابع پیوسته است ، $b = 3 - y$ ؛ بازای $0 \leq y \leq 1$ ؛

$b = 2$ ؛ بازای $1 < y \leq 2$ ؛ $b = 1$ ؛ بازای $2 < y \leq 3$ ؛ $b = 0$ ؛ بازای

$3 < y < +\infty$ ؛ $x = 2$ و $x = 3$ نقاط انفصال نوع اول می باشند

۷۳۵ - بازای $x \neq 0$ متصل و بازای $x = 0$ پیوسته است ۷۳۷ - بازای تمام مقادیر منفی و مقادیر مثبت گویای آرگومان متصل است ۷۳۸ - $f(0) = 0, 0$

۷۴۰ - الف) $1, 0$ ؛ ب) 2 ؛ پ) 0 ؛ ت) 2 ؛ ث) 0 ؛ ج) 1 ؛ چ) 0

۷۴۱ - الف) بلی ؛ ب) خیر ۷۴۲ - الف) خیر ؛ ب) خیر ۷۴۳ - خیر

مثال : $f(x) = 1$ اگر x گویا و $f(x) = -1$ اگر x گنگ باشد

۷۴۴ - الف) $f(g(x))$ پیوسته ، $g(f(x))$ بازای $x = 0$ متصل است ؛ ب) $f(g(x))$ بازای $x = -1$ ، $x = 0$ و $x = 1$ متصل ، $g(f(x)) = 0$ پیوسته است ؛ پ) $f(g(x))$ و $g(f(x))$ پیوسته میباشند ۷۴۵ - $f(\varphi(x)) \equiv x$

۷۵۹ - $x = \frac{-dy + b}{cy - a}$ ؛ $a + d = 0$ ؛ $x = y - k - 1$ اگر $2k \leq y < 2k + 1$

۷۶۷ - $f(f(x)) \equiv x - 1$ ($0 \leq y < +\infty$) ؛ $x = -\sqrt{y}$

۷۶۸ - $x = \sqrt{y}$ ($0 \leq y < +\infty$) ؛ $x = 1 - \sqrt{1 - y}$ ($-\infty < y \leq 1$)

۷۶۹ - $x = 1 + \sqrt{1 - y}$ ($-\infty < y \leq 1$) ؛ $x = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}$ ($-1 \leq y \leq 1$)

۷۷۰ - $x = (-1)^k \arcsin y + k\pi$ ؛ $x = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$ ($0 < |y| \leq 1$)

۷۷۱ - $x = 2k\pi \pm \arccos y$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ($-1 \leq y \leq 1$)

۷۷۲ - $x = \arctg y + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ($-1 \leq y \leq 1$)

۷۷۶ - $\varepsilon = \operatorname{sgn} x$ ؛ اگر $xy < 1$ ؛ $\varepsilon = 0$ ؛ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ($-\infty < y < +\infty$)

۷۷۹ - الف) $xy > 1$ ؛ اگر $y = -\frac{\pi}{2}$ ؛ $-1 \leq x \leq 0$ ؛ $y = 2 \arcsin x - \frac{\pi}{2}$

اگر $0 \leq x \leq 1$ ؛ ب) $y = -(\pi + \varepsilon \arcsin x)$ ؛ اگر $-1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

اگر $y = 0$ ؛ اگر $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ $y = \pi - \varepsilon \arcsin x$ ؛ اگر $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1$

۷۸۱ - $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ؛ $y = \frac{\pi}{2} - x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) ۷۸۰

۷۸۲ - برای هر $y = -\sqrt{x^2 - 1}$ ($1 \leq x < +\infty$) ؛ $(1 \leq x < +\infty)$ هر t که بازای آن $x = \varphi(t)$ ، که در آن x مقدار دلخواه تابع $\varphi(t)$ است ، تابع $\psi(t)$ باید دارای همان مقدار باشد ۷۸۳ - مجموعه "مقادیر $\chi(t)$ بازای $\alpha < \tau < \beta$ باید فاصله" (a, b) باشد ۷۸۴ - برای هر مقدار x که بازای آن $\varphi(x) = u$ که در آن u عدد دلخواهی از فاصله" (A, B) میباشد ، تابع $\psi(x)$ باید همان مقدار را اختیار کند ۷۸۵ - $|\delta| \leq \frac{\varepsilon}{\gamma} \text{ cm}$

الف) $0,00005 \text{ mm}$ (ب) $0,005 \text{ mm}$ (پ) $0,00005 \text{ mm}$ (الف) $0,00005 \text{ mm}$

$\delta < \frac{1}{\varepsilon}$ (ب) $\delta < 2,5 \times 10^{-4}$ (پ) $\delta < \frac{0}{2} \times 10^{-7}$ (ث) $\delta < \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon}$

($\varepsilon \leq 1$) 793 - الف) بلی (ب) خیر 794 - پیوسته^۱ یکنواخت است

795 - پیوسته^۱ یکنواخت نمیباشد 796 - پیوسته^۱ یکنواخت است 797 - پیوسته^۱

یکنواخت نیست 798 - پیوسته^۱ یکنواخت است 799 - پیوسته^۱ یکنواخت است

800 - پیوسته^۱ یکنواخت نمیباشد 802 - الف) $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ (ب) $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$

(پ) $\delta = 0,01\varepsilon$ (ت) $\delta = \varepsilon^2 (\varepsilon \leq 1)$ (ث) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

(ج) $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right)$ 803 - $n \geq 1800000$ 808 - الف)

$\omega_f(\delta) \leq \delta \sqrt{2}$ (پ) $\omega_f(\delta) \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}a}$ (ب) $\omega_f(\delta) \leq \sqrt{\delta}$ (ب) $\omega_f(\delta) \leq 2\delta$

$f(x) = \cos ax$ 819 - $f(x) = \operatorname{ch} ax$ یا $f(x) = \cos ax$ 818

$g(x) = \pm \sin ax$ ($a = \text{const}$)

فصل ۲

$\Delta y = 990000$; $\Delta x = -0,009$ 822 - $\Delta y = 2$; $\Delta x = 999$ 821

823 - الف) $\Delta y = a \Delta x$ (ب) $\Delta y = (2ax + b) \Delta x + a(\Delta x)^2$

(پ) $\Delta y = a^x (a^{\Delta x} - 1)$ 825 - الف) 0 (ب) 1 (پ) $0,1$

(ت) $4 + \Delta x$ 826 - الف) $2 + 2h + h^2$ (ب) 3 (پ) $3,0301$

(ب) $v = 210 \text{ m/sec}$ 827 - الف) 3 (ب) $v = 210,5 \text{ m/sec}$

(پ) $v = 210/0,5 \text{ m/sec}$ 828 - الف) $2x$ (ب) $3x^2$

(پ) $-\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$) (ت) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$) (ث) $\frac{1}{3\sqrt{x^2}}$

(ج) $-\frac{1}{\sin^2 x}$ (ب) $\frac{1}{\cos^2 x} \left(x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots\right)$

(ح) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$) (ب) $(x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \dots)$

(خ) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$) (ب) $\frac{1}{1+x^2}$ 829 - 8 (ب) 0 (پ) 0 830

$$y' = 1 - 2x - 2x^2 \quad f'(a) = 1 - 2a - 2a^2 \quad 1 + \frac{\pi}{2} - 2a$$

$$y' = x^2 + x - 2 - 2x^3 \quad y' = 2x + 1 - 6x^2$$

$$\frac{a}{a+b} - 2x - (a+b) - 2x^2 - 2x^3 \quad 1 \cdot a^2 x - 0x^2 - 2x^3 \quad 2 - 2x^2$$

$$x \sin 2a + \cos 2a - 2x(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9) - 2x^2(1-x)^2(1-x)^2 \times -2x^2 mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}] - 2x^2(1-x)^2(1-x)^2 \times (1-x^2)^2(1+2x+10x^2+14x^3)$$

$$-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{9}{x^2}\right) (x \neq 0) - 2x^2(1-x)^2(1-x)^2$$

$$\frac{1-x+2x^2}{(1-x)^2(1+x)^2} - 2x^2 \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2} - 2x^2 \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} (|x| \neq 1) - 2x^2$$

$$\frac{1-2x-2x^2+2x^3+0x^4+2x^5}{(1-x^2)^2} (x \neq 1) - 2x^2 (|x| \neq 1)$$

$$\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2} \times -2x^2 \frac{(1-x)^{p-2}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}} (x \neq -1) - 2x^2$$

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - 2x^2 \times [p - (q+1)x - (p+q-1)x^2] (x \neq -1)$$

$$\frac{2}{2\sqrt{x}} + -2x^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} (x > 0) - 2x^2 (x > 0)$$

$$\frac{1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt{(2+x^2)^2}} - 2x^2 \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 2x^2 + \frac{1}{x\sqrt{x}} (x > 0)$$

$$\frac{(n-m) - (n+m)x}{(n+m)\sqrt{(1-x)^n(1+x)^m}} - 2x^2 \left(x \neq \sqrt{-2}\right)$$

$$\frac{2x^2}{1-x^2} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} (|x| \neq 1) - 2x^2 \frac{a^2}{(a^2-x^2)^2} (|x| < |a|) - 2x^2$$

$$\frac{1+2\sqrt{x}+2\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} (x > 0) - 2x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^2} - 2x^2$$

$$0 \ 5 \ 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \times \frac{1}{\sqrt{x^y (1 + \sqrt[y]{x})^y}} \times \frac{1}{\sqrt{(1 + \sqrt[y]{1 + \sqrt[y]{x}})^y}} \quad (x \neq 0, -1, \dots)$$

$$x^y \sin x - 173 \quad -y \cos x (1 + y \sin x) - 172 \quad x \neq -1, x \neq -1) \\ - 176 \quad n \sin^{n-1} x \times x \cos (n+1)x - 175 \quad - \sin y x \times \cos (\cos y x) - 174 \\ \frac{y \sin x (\cos x \sin x^y - x \sin x \cos x^y)}{\sin^y x^y} - 177 \quad \cos x \times \cos (\sin x) \times \cos [\sin (\sin x)]$$

$$- \frac{1 + \cos^y x}{y \sin^y x} \quad (x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) - 178 \quad (x^y \neq k\pi; k = 1, 2, \dots)$$

$$\frac{x^y}{(\cos x + x \sin x)^y} - 179 \quad \frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x} \left(\text{درست عددیست } k, x \neq \frac{2k-1}{y} \pi \right) - 174$$

$$1 + \operatorname{tg}^y x \quad \left(x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \dots \right) - 177 \quad \frac{y}{\sin^y x} \quad (x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) - 176$$

$$\frac{1}{y \sin^y x \sqrt{\operatorname{ctg} x}} \quad \left(\text{درست عددیست } k, x \neq k\pi - 173 + 1) \frac{\pi}{y}; k = 0, \pm 1, \dots \right)$$

$$- y \operatorname{tg}^y x - 175 \quad \frac{-17 \cos \frac{yx}{a}}{a \sin^y \frac{yx}{a}} \left(\text{درست عددیست } k, x \neq \frac{k\pi a}{y} \right) - 174$$

$$\times \sec^y x \times \sin (y \operatorname{tg}^y x) \times \cos [\cos^y (\operatorname{tg}^y x)] \left(\text{درست عددیست } k, x \neq \frac{\pi}{y} + k\pi \right)$$

$$x^y e^x - 178 \quad - \frac{1}{x^y} y \operatorname{tg}^y \frac{y}{x} \sec^y \frac{1}{x} \ln y - 177 \quad - y x e^{-x^y} - 176$$

$$\frac{e^x (\sin x - \cos x)}{y \sin^y \frac{x}{y}} \quad \left(\text{درست عددیست } k, x \neq 2k\pi \right) - 180 \quad x^y e^{-x} \sin x - 179$$

$$\sqrt{a^y + b^y} e^{ax} \sin bx - 182 \quad - \frac{1 + \ln^y y}{y^x} \sin x - 181$$

$$y \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a-b}{x} \right) \quad (x > 0) - 184 \quad e^x \left[1 + e^{e^x} \left(1 + e^{e^{e^x}} \right) \right] - 183$$

$$\frac{1}{x} \lg e \times \lg^y x^y - 186 \quad a^a \times x^{a-1} + x^{a-1} a^x \ln a + a^x \times a^x \ln^y a - 185$$

$$\frac{1}{x \ln x \ln (\ln^y x)} \quad (x > e - 188) \quad \frac{1}{x \ln x \ln (\ln x)} \quad (x > e) - 187 \quad (x \neq 0)$$

$$\frac{x}{x^2-1} (|x| > 1) - 890 \quad \frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} (x > -1) - 899$$

$$\frac{1}{3x^2-2} (|x| > \sqrt{\frac{2}{3}}) - 892 \quad \frac{1}{x(1+x^2)^2} (x \neq 0) - 893$$

$$\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})} (x > -1) - 894 \quad \frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)} (|x| < 1) - 895$$

$$\ln^2(x + \sqrt{x^2+1}) - 896 \quad \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - 897 \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 898$$

$$\frac{1}{a-bx^2} (|x| < \sqrt{\frac{a}{b}}) - 899 \quad \sqrt{x^2+a^2} - 898$$

$$0 < x - 2k\pi < \pi \quad \frac{1}{\sin x} - 901 \quad \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} (0 < x < 1) - 900$$

$$\left(\text{درست عددیست } k, |x - 2k\pi| < \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{\cos x} - 902 \quad \left(\text{درست عددیست } k \right)$$

$$-\frac{1}{\cos x} - 904 \quad \left(\text{درست عددیست } k, 0 < x - 2k\pi < \pi \right) - \operatorname{ctg}^2 x - 903$$

$$0 < x - 2k\pi < \pi \quad \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 905 \quad \left(\text{درست عددیست } k, x \neq \frac{2k-1}{2}\pi \right)$$

$$-\frac{\ln^2 x}{x^2} (x > 0) - 906 \quad \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b \cos x} - 907 \quad \left(\text{درست عددیست } k \right)$$

$$\frac{2x}{1+\sqrt{1+x^2}} - 909 \quad \frac{1}{x^2} \ln x (x > 0) - 908$$

$$2 \sin(\ln x) (x > 0) - 911 \quad \frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln \frac{1}{x}}{(1+x \ln \frac{1}{x}) \left[1+x \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right]} - 910$$

$$\left(\text{درست عددیست } k, 0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2} \right) \sin x \times \ln \operatorname{tg} x - 912$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} (|x-1| < \sqrt{2}) - 914 \quad \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} (|x| < \sqrt{2}) - 913$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} (x \geq 0) - 915 \quad \frac{1}{x^2+2} (x \neq 0) - 916 \quad \frac{2ax}{x^2+a^2} (a \neq 0) - 910$$

$$\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (x \geq 0) \quad 919 \quad - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \times \arccos x \quad (|x| < 1) \quad - 918$$

$$, x \neq \frac{\gamma k - 1}{\gamma} \Big) \operatorname{sgn}(\cos x) - 921 \quad \frac{1}{|x| \sqrt{x^\gamma - 1}} \quad (|x| > 1) - 920$$

$$(\text{درست عددیست } k, x \neq k\pi) \frac{\gamma \operatorname{sgn}(\sin x) \times \cos x}{\sqrt{1 + \cos^\gamma x}} - 922 \quad (\text{درست عددیست } k$$

$$- 924 \quad \left(\text{درست عددیست } k, 0 < x - k\pi < \frac{\pi}{\gamma} \right) \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin \gamma x}} - 923$$

$$, x \neq \frac{\pi}{\xi} + k\pi \Big) - 926 \quad \frac{1}{1+x^\gamma} \quad (x \neq 1) - 925 \quad \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^\gamma}} \quad (0 < |x| < 1)$$

$$- \frac{\gamma \operatorname{sgn} x}{1+x^\gamma} \quad (x \neq 0) - 928 \quad \frac{1}{a+b \cos x} - 927 \quad (\text{درست عددیست } k$$

$$- \gamma \cos x \times - 931 \quad \frac{1+x^\xi}{1+x^\gamma} - 930 \quad \frac{\xi x}{\sqrt{1-x^\xi} \arccos^\gamma(x^\gamma)} \quad (|x| < 1) - 929$$

$$\frac{a^\gamma + b^\gamma}{(x+a)(x^\gamma + b^\gamma)} - 933 \quad \frac{1}{\gamma x \sqrt{x-1} \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x > 1) - 932 \quad \times \arctg(\sin x)$$

$$\frac{1}{x^\gamma + 1} \quad (x \neq -1) - 935 \quad \sqrt{a^\gamma - x^\gamma} - 934 \quad (x > -a)$$

$$- \frac{\arccos x}{x^\gamma} - 938 \quad (\arcsin x)^\gamma \quad (|x| < 1) - 937 \quad \frac{1}{x^\xi + 1} \quad (|x| \neq 1) - 936$$

$$\frac{x \arcsin x}{(1-x^\gamma)^\gamma} \quad (|x| < 1) - 940 \quad \frac{x \ln x}{(x^\gamma - 1)^\gamma} \quad (x > 1) - 939 \quad (0 < |x| < 1)$$

$$- \frac{1}{(1-x)^\gamma \sqrt{x}} - 945 \quad \frac{1 \gamma x^0}{(1+x^{1\gamma})^\gamma} - 942 \quad \frac{x^\gamma}{x^{\gamma+1}} \quad \left(|x| \neq \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) - 941$$

$$\frac{1}{\sqrt{ax - x^\gamma}} \quad (0 < x < a) - 946 \quad \frac{1}{\gamma \sqrt{1-x^\gamma}} \quad (|x| < 1) - 944 \quad (x < 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^\xi}} - 947 \quad \frac{x^\gamma}{\sqrt{1-\gamma x - x^\gamma}} \quad (|x+1| < \sqrt{\gamma}) - 948$$

$$\left(\text{درست عددیست } k, x \neq \frac{\gamma k - 1}{\gamma} \pi \right) \frac{\sin \gamma x}{\sin^\xi x + \cos^\xi x} - 948$$

$$\frac{x^{\gamma}}{1+x^{\gamma}} \operatorname{arctg} x - 900 \cdot \frac{\sqrt{1-x^{\gamma}}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^{\gamma}}} \times \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (|x| < 1) - 909$$

$$\frac{\sin a \operatorname{sgn}(\cos x - \cos a)}{1 - \cos a \cos x} - 902 \quad \frac{1}{\gamma(1+x^{\gamma})} - 902 \quad \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{\gamma x}}} - 901$$

$$\frac{\sqrt{1+x^{\gamma}}}{1-x^{\gamma}} - 900 \quad \frac{1}{(x^{\gamma}-1)\sqrt{x^{\gamma}+\gamma}} \quad (0 < |x| < 1) - 904 \quad (\cos x \neq \cos a)$$

$$\frac{\gamma x (\cos x^{\gamma} + \sin x^{\gamma})}{\sqrt{\sin(\gamma x^{\gamma})}} - 905 \quad \frac{\varepsilon}{(1+x^{\gamma})^{\gamma} \sqrt{1-x^{\gamma}}} \quad (|x| < 1) - 906 \quad (|x| \neq 1)$$

$$\gamma x [\operatorname{sgn}(\cos x^{\gamma}) + -908 \quad (0 < |x| < \sqrt{(\frac{1}{\gamma})\pi}, k = 0, 1, \dots)$$

$$\frac{\gamma m}{\sqrt{1-x^{\gamma}}} \times -909 \quad + \operatorname{sgn}(\sin x^{\gamma}) \quad (|x| \neq \frac{k\pi}{\gamma}, k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\frac{e^x - 1}{e^{\gamma x} + 1} - 970 \quad \times e^{m(\operatorname{arcsin} x)} \cos m(\operatorname{arcsin} x) \quad (|x| < 1) - 909$$

$$\frac{x^{\gamma}}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x^{\gamma}}}}}} \times \sqrt{\left(1+\sqrt{1+x^{\gamma}}\right)} \times \sqrt{1+x^{\gamma}} - 970, 1$$

$$\frac{1}{x^{\gamma} \cos \frac{1}{x^{\gamma}} \left(\sin \frac{1}{x^{\gamma}} + \cos \frac{1}{x^{\gamma}} \right) \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{1}{x^{\gamma}}}} - 970, 2$$

$$1 + x^{\gamma} (1 + -971) \frac{\gamma \sqrt{1+x^{\gamma}} \ln \gamma \times \sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+x^{\gamma}}}\right) \times \ln\left(\sec \frac{\gamma}{\sqrt{1+x^{\gamma}}}\right)}{\gamma \sqrt{1+x^{\gamma}} \times \cos^{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+x^{\gamma}}}\right)} - 970, 3$$

$$-972 \quad + \ln x) + x^x x^{x^x} \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^{\gamma} x \right) (x > 0) - 971$$

$$x^{a-1} x^{x^a} (1 + a \ln x) + a^x x^{a^x} \left(\frac{1}{x} + \ln a \ln x \right) + x^x a^{x^x} \ln a (1 + \ln x) (x > 0)$$

$$(\sin x)^{1+\cos x} (\operatorname{ctg}^{\gamma} x - \ln \sin x) - 974 \quad x^{\frac{1}{x}-\gamma} (1 - \ln x) \quad (x > 0) - 973$$

$$\left(\text{درست} \right) k \text{ عددیست درست} \quad 0 < x - \gamma k \pi < \frac{\pi}{\gamma} - (\cos x)^{1+\sin x} (\operatorname{tg}^{\gamma} x - \ln \cos x)$$

$$\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x + 1}} [x - \gamma \ln^{\gamma} x + x \ln x \times \ln(\ln x)] \quad (x > 1 - 970)$$

$$y' = \gamma y \left\{ \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^{\gamma}} \ln \frac{\operatorname{arc\,sin}(\sin^{\gamma} x)}{\operatorname{arc\,cos}(\cos^{\gamma} x)} + \right. \quad - 970,1$$

$$\left. + \operatorname{arc\,tg}^{\gamma} x \left[\frac{\sin x \times \operatorname{sgn}(\cos x)}{\operatorname{arc\,sin}(\sin^{\gamma} x \sqrt{1+\sin^{\gamma} x})} - \frac{\cos x \times \operatorname{sgn}(\sin x)}{\operatorname{arc\,cos}(\cos^{\gamma} x \sqrt{1+\cos^{\gamma} x})} \right] \right\}$$

$$- \frac{1}{x} (\log_x e)^{\gamma} \quad (x > 0, x \neq 1) - 971 \quad \left(x \neq \frac{k\pi}{\gamma}, k = 0, \pm 1, \dots \right)$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \gamma x} - 972 \quad - \frac{\gamma}{\operatorname{sh}^{\gamma} x} \quad (x > 0) - 973 \quad \operatorname{th}^{\gamma} x - 974$$

$$- \frac{\sin \gamma x}{\sqrt{1+\cos^{\gamma} x}} - 975 \quad \frac{a+b \operatorname{ch} x}{b+a \operatorname{ch} x} - 976 \quad \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x} \quad (x \neq 0) - 977$$

$$- \frac{\gamma}{\sqrt{1-x^{\gamma}}} \times \operatorname{arc\,cos} x \times \ln(\operatorname{arc\,cos} x) \quad (|x| < 1) - 978$$

$$- \frac{\gamma x e^{-x^{\gamma}} \operatorname{arc\,sin}(e^{-x^{\gamma}})}{(1-e^{-\gamma x^{\gamma}})^{\frac{\gamma}{\gamma}}} \quad (x \neq 0) - 979 \quad - \frac{x^{-\gamma}}{\sqrt{(1+x^{\gamma})^{\gamma}}} - 980$$

$$\operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0) \quad \frac{\varepsilon a^{\gamma x} \ln a}{(1+a^{\gamma x})^{\gamma}} \operatorname{arc\,ctg} a^{-x} \quad (a > 0) - 981$$

$$(x-1)(x+1)^{\gamma} (0 < x < 1) \quad \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad \left(\text{پ} : \gamma |x| \right) \quad \left(\text{ب} \right)$$

$$\frac{1}{x \sqrt{x^{\gamma}-1}} \quad (|x| > 1) \quad \left(\text{پ} : \frac{\gamma}{\gamma} \sin \gamma x \times |\sin x| \right) \quad \left(\text{ب} : \operatorname{sgn}(x+1) \right)$$

$$y' = \gamma x - \gamma \quad ; \quad -\infty < x < 1 \quad \text{بازای} \quad y' = -1 - 982 \quad \pi [x] \sin \gamma \pi x \quad \left(\text{ت} \right)$$

$$y' = \gamma(x-a) - 983 \quad \gamma < x < +\infty \quad \text{بازای} \quad y' = 1 \quad ; \quad 1 \leq x \leq \gamma \quad \text{بازای}$$

$$x \in [a, b] \quad \text{بازای} \quad y' = 0 \quad ; \quad x \in [a, b] \quad \text{بازای} \quad (x-b)(\gamma x - a - b)$$

$$0 \leq x < +\infty \quad \text{بازای} \quad y' = \frac{1}{1+x} \quad ; \quad x < 0 \quad \text{بازای} \quad y' = 1 - 984$$

$$|x| > 1 \quad \text{بازای} \quad y' = \frac{1}{\gamma} \quad ; \quad -1 < x \leq 1 \quad \text{بازای} \quad y' = \frac{1}{1+x^{\gamma}} - 985$$

$$|x| > 1 \quad \text{بازای} \quad y' = 0 \quad ; \quad |x| \leq 1 \quad \text{بازای} \quad y' = \gamma x e^{-x^{\gamma}} (1-x^{\gamma}) - 986$$

$$\frac{0 \leq -\gamma \gamma x + \varepsilon x^{\gamma} + \gamma x^{\gamma}}{\gamma x(1-x)(\gamma - x^{\gamma})} \quad (x \neq 0, \text{ب}) \quad ; \quad \frac{1-x-x^{\gamma}}{x(1-x^{\gamma})} \quad \left(\text{الف} - 987 \right)$$

(الف - ۹۸۵) $\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$ (ت) $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x - a_i}$ (پ) $x \neq 1, x \neq \pm 2$

$\frac{\phi'(x)\psi(x) - \phi(x)\psi'(x)}{\phi^2(x) + \psi^2(x)}$ (ب) $\frac{\phi(x)\phi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\phi^2(x) + \psi^2(x)}}$ ($\phi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0$)

$\sqrt{\psi(x)} \left\{ \frac{1}{\phi(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{\phi'(x)}{\phi^2(x)} \ln \psi(x) \right\}$ (پ) $(\phi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0)$

$2xf'(x^2)$ (الف - ۹۸۶) $-\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \times \frac{1}{\ln \phi(x)} - \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} \times \frac{\ln \psi(x)}{\ln^2 \phi(x)}$ (ت)

$e^{f(x)} \times [e^{xf'}(e^x) + f'(x)f(e^x)]$ (پ) $\sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$ (ب)

$3x^2 + 10 - 988$ $1000! - 986, 1$ $f'(x) \times f'[f(x)] \times f'\{f[f(x)]\}$ (ت)

$n > 2$ (پ) $n > 1$ (ب) $n > 0$ (الف - ۹۹۲) $6x^2 - 989$

$\phi(a) - 994$ $1 < n < m + 1$ (ب) $n \geq m + 1$ (الف - ۹۹۳)

$x = 1$ بازای (الف - ۹۹۹) $f'_+(a) = \phi(a), f'_-(a) = -\phi(a) - 995$

دیفرانسیل ناپذیر است (ب) بازای $x = \frac{2k-1}{2} \pi$ که در آن k عددیست درست

دیفرانسیل ناپذیر است (پ) در همه جا دیفرانسیل پذیر است (ت) بازای

$x = k\pi$ که در آن k عددیست درست دیفرانسیل ناپذیر است (ث) بازای

$x \neq 0$ بازای $f'_-(x) = f'_+(x) = \operatorname{sgn} x - 1000$ است دیفرانسیل ناپذیر است

و $f'_-(x) = f'_+(x) = \pi [x] \cos \pi x - 1001$ $f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$ بازای

عدد درست $f'_+(k) = \pi k (-1)^k, f'_-(k) = \pi (k-1) (-1)^k; x \neq$ بازای $-k$

درست $f'_-(x) = f'_+(x) = \left(\cos \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x} \right) \times \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{\pi}{x} \right) - 1002$.

بازای $x \neq \frac{2}{2k+1}$ (k عددیست درست) $f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) = -(2k+1) \frac{\pi}{2}$

بازای $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} - 1003$ $f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) = (2k+1) \frac{\pi}{2}$

$f'_-(0) = -1; \sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{2k+1}\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$f'_\pm(\sqrt{2k\pi}) = \pm \infty$ ($k = 1, 2, \dots$), $f'_\mp(\sqrt{2k+1}\pi) = \mp \infty; f'_+(0) = 1$

$f'_-(0) = 1; x \neq 0$ بازای $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2} - 1004$

ε $x \neq 0$ بازای $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{xe^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} - 1005$ $f'_+(\cdot) = 0$

$\varepsilon = -1$ آن در آن $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{e}{x} - 1006$ $f'_+(\cdot) = 1$ ، $f'_-(\cdot) = -1$

بازای $0 < |x| < 1$ و $\varepsilon = 1$ بازای $1 < |x| < +\infty$ $f'_-(\mp 1) = -1$ ؛

بازای $x \neq \mp 1$ $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{\gamma \operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2} - 1007$ $f'_+(\mp 1) = 1$

$f'_-(x) = f'_+(x) = -1008$ $f'_+(\mp 1) = \pm 1$ ، $f'_-(\mp 1) = \mp 1$

$-1009, 1$ $f'_\mp(\gamma) = \mp \frac{\pi}{\gamma}$ ؛ $x \neq \gamma$ بازای $= \operatorname{arctg} \frac{1}{x-\gamma} - \frac{x-\gamma}{(x-\gamma)^2+1}$

؛ $f'_-(1) = f'_+(1) = \frac{1}{\gamma}$ (ب) ؛ $f'_+(\cdot) = \frac{1}{\gamma}$ ، $f'_-(\cdot) = -\frac{1}{\gamma}$ (الف)

؛ $a = f'_-(x) - 1011$ $b = -x^2$ ؛ $a = 2x - 1010$ $f'_-(\cdot) = f'_+(\cdot) = 0$ (پ)

$c = \frac{ak_\gamma + bk_\gamma}{k_\gamma + k_\gamma}$ ، $A = \frac{k_\gamma + k_\gamma}{(b-a)^2} - 1012$ $b = f(x) - x \cdot f'_-(x)$

نمی‌توان (ب) ؛ میتوان (الف) -1014 $b = -\frac{m^2}{2c^2}$ ، $a = \frac{2m^2}{2c} - 1013$

-1015 (الف) نمیتوان ؛ (ب) نمیتوان (الف) ، (ب) ، (پ) تابع

$F(x)$ میتواند دارای مشتق $F'(x)$ باشد و یا نباشد $x = k\pi - 1017$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) -1018 (الف) نمیتوان ؛ (ب) میتواند

-1019 (۱) حتمی نیست ؛ (۲) حتمی است -1020 حتمی نیست -1021

نتیجه نمیشود -1022 نتیجه نمیشود -1023 بطور کلی، نمیتوان -1024

$Q_n = \frac{1+x-(n+1)^2x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^2}$ ؛ $P_n = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

$T_n = \frac{n \sin \frac{x}{\gamma} \sin \frac{2n+1}{\gamma} x - \sin^2 \frac{nx}{\gamma}}{2 \sin^2 \frac{x}{\gamma}}$ ؛ $S_n = \frac{\sin \frac{nx}{\gamma} \sin \frac{n+1}{\gamma} x}{\sin \frac{x}{\gamma}} - 1025$

$S_n = -1026$ $S_n = \frac{n \operatorname{sh} \frac{x}{\gamma} \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{\gamma}\right) x - \operatorname{sh}^2 \frac{nx}{\gamma}}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{\gamma}} - 1025, 1$

؛ $20 \text{ m}^2/\text{sec} - 1030$ ؛ $\pi \text{ cm}^2/\text{sec} - 1029$ $= \frac{1}{\gamma^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{\gamma^n} - \operatorname{ctg} x$

اگر $0 \leq x \leq 2$ $S(x) = \frac{x^2}{2} - 1.032$ $0.0 \text{ km/h} - 1.031$ 0.4 m/sec

$S'(x) = 2x - 2$ اگر $0 \leq x \leq 2$ $S'(x) = x$ اگر $x > 2$ $S(x) = x^2 - 2x + 2$

اگر $x > 2$ $S(x) = \frac{|x|}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{|x|}{a} - 1.033$

$y'_x = \frac{1}{2(y^2+1)} - 1.034$ $S'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{sgn} x$ ($0 < |x| \leq a$)

$x'_y = \frac{x}{x+1}$ $-\infty < y < +\infty$ (الف - 1.036) $y'_x = \frac{1}{1-y^2 \cos y} - 1.035$

$-\infty < y < +\infty$ (ب) $x'_y = \frac{1}{1-x+y}$ $-\infty < y < +\infty$ (ب)

(الف - 1.037) $x'_y = \frac{1}{1-y^2}$ $-1 < y < 1$ (ت) $x'_y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

$x_1 = -\sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ ($0 \leq y \leq 1$) $x_2 = -\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ ($-\infty < y \leq 1$)

$x_3 = \sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ ($-\infty < y \leq 1$) $x_4 = \sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ ($0 \leq y \leq 1$)

$x_1 = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ ($0 \leq y < 1$) (ب) $x'_i = \frac{1}{x_i(1-x_i^2)}$ ($i=1, 2, 3, 4$)

$x_1 =$ (ب) $x'_i = \frac{x^2}{2y^2}$ ($i=1, 2$) $x_2 = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$ ($0 \leq y < 1$)

$x_3 = \ln \frac{1+\sqrt{1-y}}{y}$ ($0 < y \leq 1$) $x_4 = -\ln(1+\sqrt{1-y})$ ($-\infty < y \leq 1$)

-3 $y'_x = -\frac{3}{y}(1+t) - 1.038$ $x'_i = -\frac{1}{2(e^{-x} - e^{-2x})}$ ($i=1, 2$)

$\sqrt{\frac{(1-\sqrt{t})^2}{t(1-\sqrt{t})^2}}$ ($t > 0, t \neq 1$) - 1.039 $(-2, 2)$ $-\frac{9}{2}$ و $-\frac{3}{2}$

$y'_x = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t$ ($0 < |t| < \pi$) - 1.041 $y'_x = -1$ ($0 < x < 1$) - 1.040

$t \neq \frac{2k+1}{2} \pi$ $y'_x = -\operatorname{tg} t - 1.043$ $y'_x = \frac{b}{a} \operatorname{cth} t$ ($|t| > 0$) - 1.042

k عددیست درست $y'_x = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - 1.044$ (k عددیست درست)

$$y'_x = \operatorname{tg} t \times \operatorname{tg} \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \left(t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right) - 1.040$$

$$\frac{p}{y} - 1.049 \quad y' = \frac{1-x-y}{x-y}; \frac{0}{2}; -\frac{1}{2} - 1.048 \quad y'_x = \operatorname{sgn} t - 1.046$$

$$-\sqrt{\frac{y}{x}} - 1.052 \quad -\sqrt{\frac{y}{x}} - 1.051 \quad -\frac{b^2 x}{a^2 y} - 1.050$$

$$-\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \quad (\text{ب} \quad \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg}) \quad (\text{الف} - 1.054) \quad \frac{x+y}{x-y} - 1.053$$

$$(\text{الف} - 1.055) \quad \operatorname{tg} \left(\varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{m} \right) \quad \varphi \quad \left(\varphi \neq 0, \varphi \neq \pm \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\varepsilon \quad x=2, y=2 \quad (\text{ب} \quad y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1) \quad \varepsilon \quad y = \sqrt[3]{\varepsilon}(x+1)$$

$$(0, 2) \quad (\text{ب} \quad \left(\frac{1}{2}, 2 \frac{1}{2} \right) \quad (\text{الف} - 1.056) \quad y=0, x=2 \quad (\text{ب}$$

$$\max |y'_1 - y'_2| = -1.059 \quad \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \quad \text{و} \quad |x| < \frac{\pi}{2} - 1.058$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt[3]{2}}{\varepsilon} \approx \operatorname{arc} \sqrt[3]{2}^\circ; \frac{\pi}{2} - 1.061 \quad \frac{\pi}{\varepsilon} - 1.060 = 1.0\pi \approx 31,4 - 1.059$$

$$(\text{الف} - 1.064) \quad n > 0,7, 2 - 1.063 \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2\sqrt[3]{2} \approx \operatorname{arc} \sqrt[3]{2}^\circ - 1.062$$

$$\frac{y^2}{|a|} - 1.069 \quad \left| \frac{x}{n} \right| - 1.066 \quad \frac{\pi}{2} \quad (\text{ب} \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{|a|}$$

$$a = \frac{1}{2e} - 1.073 \quad \left(\frac{p}{2} \right)^2 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 = 0 - 1.072 \quad b^2 - \varepsilon ac = 0 - 1.071$$

$$\varepsilon, 2x - y - 1 = 0 \quad (\text{ب} \quad 2x + 2y = 0, \quad 2x - 2y = 0 \quad (\text{الف} - 1.077$$

$$\varepsilon, 2x - y - \varepsilon = 0 \quad (\text{ب} \quad y = -x, \quad y = x \quad (\text{الف} - 1.078) \quad x + 2y - 7 = 0$$

$$y - 2a = (x - at) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - 1.079 \quad y = x, \quad y = -x \quad (\text{ب} \quad x + 2y - 2 = 0$$

مسامس بر سیکوئید عمود بر پارہ خط واصل نقطہ تماس و نقطہ تماس دایرہ
 غلطان است . $0x - 2y - 10,8 = 0, 2x + 0y - 0 = 0 - 1.081$

$$\Delta f(1) = \Delta x + -1.083 \quad 2x - y - 1 = 0, \quad x + 2y - 2 = 0 - 1.082$$

$$\varepsilon, 0,1, 0,131 \quad (\text{ب} \quad 1, 0, 0 \quad (\text{الف} \quad df(1) = \Delta x + 2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\varepsilon dx = 2 \cdot \Delta t, \quad \Delta x = 2 \cdot \Delta t + 0(\Delta t)^2 - 1.084 \quad 0,01, 0,01, 0,01301 \quad (\text{ب}$$

(الف) $2.0, 2.0, 0.0$ m (پ) 2 m, $2.0, 0.0$ m (ب) 2.0 m, 2.0 m (الف)

$$\frac{dx}{x^2 - a^2} (|x| \neq |a|) - 1.087 \quad \frac{dx}{a^2 + x^2} - 1.086 \quad - \frac{dx}{x^2} (0 \neq x) - 1.085$$

$$(الف) - 1.090 \quad \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx (|x| < |a|) - 1.089 \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} - 1.088$$

$$\frac{2 - \ln x}{2x \sqrt{x}} dx \text{ (ث) } - \frac{2 dx}{x^2} (x \neq 0) \text{ (پ) } x \sin x dx \text{ (ب) } (1+x) e^x dx$$

$$- \frac{2x dx}{1-x^2} \text{ (ج) } - \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} (|x| < 1) \text{ (ح) } - \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} (x > 0)$$

$$(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \frac{dx}{\cos^3 x} \text{ (خ) } - \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} (|x| > 1) \text{ (ح) } - (|x| < 1)$$

$$- 1.092 \quad vw du + uv dv + uv dw - 1.091 \quad \left(\text{عددیست درست} \right) k$$

$$- \frac{u du - v dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}} (u^2 + v^2 > 0) - 1.093 \quad \frac{v du - 2u dv}{v^3} (v \neq 0)$$

$$\frac{u du + v dv}{u^2 + v^2} (u^2 + v^2 > 0) - 1.095 \quad \frac{v du - u dv}{u^2 + v^2} (u^2 + v^2 > 0) - 1.094$$

$$- \operatorname{ctg} x \text{ (پ) } - \frac{1}{2x^2} \left(\cos x - \frac{\sin x}{x} \right) \text{ (ب) } 1 - 4x^3 - 3x^6 \text{ (الف) } - 1.096$$

$$\text{عددیست } k, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (ت) } - \operatorname{tg}^2 x \text{ (ت) } \left(\text{عددیست درست} \right) k, x \neq k\pi$$

درست) (ث) $(|x| < 1)$ - 1.097 (الف) بمقدار 1.047 cm^2 افزایش

مییابد (ب) بمقدار 43.6 cm^2 کاهش مییابد - 1.098

باید افزایش داد $1.099 - 1.007$ (از روی جدول: 1.0066)

$11.00 - 0.8749$ (از روی جدول: 0.8748) $11.01 - 0.8747$ (از

روی جدول: 0.8746) $11.02 - 0.8745$ (از روی

جدول: $\operatorname{arc} 46^\circ 24'$) $11.03 - 1.043$ (از روی جدول: 1.041)

11.04 (الف) 2.25 (از روی جدول: 2.24) (ب) 0.833 (از روی

جدول: 0.831) (پ) 1.09546 (از روی جدول: 1.09545)

11.05 (الف) 2.083 (از روی جدول: 2.080) (ب) 2.9907 (از روی

جدول: 2.9907) (پ) 1.938 (از روی جدول: 1.931) (ت) 1.9954

$\delta_R \leq 0, 23\% - 110.7$ $\epsilon, 2\% \epsilon 0, 24 m^2 - 110.6$ (از روی جدول: $1, 9903$)

$$\frac{x(r + rx^r)}{(1+x^r)^{\frac{r}{r}} - 1111} \quad 0, \epsilon 28 - 110.9 \quad \delta_g = r\delta_r \text{ (ب)} \quad \delta_g = \delta_i \text{ (الف)} - 110.8$$

$$\frac{r \sin x}{\cos^r x} - 1114 \quad re^{-x^r} (rx^r - 1) - 1113 \quad \frac{rx}{(1-x^r)^{\frac{r}{r}}} - 1112$$

$$\frac{rx}{1+x^r} + r \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 1110 \quad \left(x \neq \frac{r k + 1}{r} \pi, k = 0, \pm 1, \dots \right)$$

$$\frac{1}{x} (x > 0) - 1117 \quad \frac{rx}{(1-x^r)^r} + \frac{(1+rx^r) \operatorname{arc} \sin x}{(1-x^r)^{\frac{r}{r}}} (|x| < 1) - 1116$$

$$-\frac{r}{x} \sin(\ln x) (x > 0) - 1119 \quad \frac{f(x) f''(x) - f'(x)^2}{f^r(x)} (f(x) > 0) - 1118$$

$$r(uu'' + u'^2) - 1121 \quad y''(\cdot) = \cdot, y'(\cdot) = 1, y(\cdot) = 1 - 1120$$

$$\frac{(u^r + v^r)(uu'' + vv'') + (u'v - uv')^2}{(u^r + v^r)^{\frac{r}{r}}} - 1122 \quad \frac{uu'' - u'^2}{u^r} - \frac{vv'' - v'^2}{v^r} (uv > 0) - 1123$$

$$y'' = u^r \left[\left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)^2 + v \frac{uu'' - u'^2}{u^r} + \right] - 1124 \quad (u^r + v^r > 0)$$

$$y''' = \epsilon y'' = \epsilon x^r f''(x^r) + r f'(x^r) - 1125 \quad \left[+ \frac{ru'v'}{u} + v'' \ln u \right]$$

$$\epsilon y'' = \frac{1}{x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{r}{x^r} f'\left(\frac{1}{x}\right) - 1126 = \epsilon x^r f'''(x^r) + r x^r f''(x^r)$$

$$y'' = -1127 \quad y''' = -\frac{1}{x^3} f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{r}{x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{r}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$-1128 \quad y''' = e^{rx} f'''(e^x) + r e^{rx} f''(e^x + e^x f'(e^x)) \quad \epsilon = e^{rx} f''(e^x) + e^x f'(e^x)$$

$$y''' = \frac{1}{x^r} [f'''(\ln x) - r f''(\ln x) + \epsilon y'' = \frac{1}{x^r} [f''(\ln x) - f'(\ln x)]$$

$$\epsilon y'' = \varphi'_r(x) f''(\varphi(x)) + \varphi''(x) f'(\varphi(x)) - 1129 \quad + r f'(\ln x)]$$

$$-1130 \quad y''' = \varphi'^r(x) f'''(\varphi(x)) + r \varphi'(x) \varphi''(x) f''(\varphi(x)) + \varphi''''(x) f'(\varphi(x))$$

$$\frac{r \ln x - r}{x^r} dx^r - 1132 \quad \frac{dx^r}{(1+x^r)^{\frac{r}{r}}} - 1131 \quad e^x(dx^r + d^r x) \text{ (ب)} \quad \epsilon e^x dx^r \text{ (الف)}$$

$$ud^r v + r du dv + -1134 \quad x^r \left[(1 + \ln x)^r + \frac{1}{x} \right] dx^r - 1133 \quad (x > 0)$$

$$- 1136 \quad \frac{(v d^2 u - u d^2 v) - 2 dv (v du - u dv)}{v^3} \quad (v > 0) - 1137 \quad + v d^2 u$$

$$u^m - 2 v^n - 2 \{ [m(m-1) v^2 du^2 + 2mn uv du dv + n(n-1) u^2 dv^2] +$$

$$- 1138 \quad a^u \ln a (du \ln a + d^2 u) - 1139 \quad + uv (mv d^2 u + nu d^2 v) \}$$

$$[(v^2 - u^2) du^2 - 2 uv dudv + (u^2 - v^2) dv^2 + (u^2 + v^2) (u d^2 u + v d^2 v)] \times$$

$$[-2uv du^2 + 2(u^2 - v^2) du dv + - 1140 \quad \times (u^2 + v^2)^{-2} (u^2 + v^2 > 0)$$

$$- 1140 \quad + 2uv dv^2 + (u^2 + v^2) (v d^2 u - u d^2 v)] (u^2 + v^2)^{-2} (u^2 + v^2 > 0)$$

$$y'' = -\frac{1}{a \sin^2 t} - 1141 \quad y''' = \frac{2}{\lambda (1-t)^2} \quad (t \neq 1) \quad y'' = \frac{2}{\xi (1-t)}$$

$$y'' = -\frac{1}{\xi a \sin^2 \frac{t}{\xi}} - 1142 \quad (k \text{ عددیست درجست } k, t \neq k\pi) y''' = -\frac{2 \cos t}{a^2 \sin^3 t}$$

$$y'' = -1143 \quad (k \text{ عددیست درجست } k, t \neq 2k\pi) y''' = \frac{\cos \frac{t}{\xi}}{\xi a^2 \sin^3 \frac{t}{\xi}}$$

$$y''' = \frac{e^{-2t} (\gamma \sin t + \cos t)}{\sqrt{\gamma \cos^2 \left(t + \frac{\pi}{\xi}\right)}} \quad \left(t \neq \frac{\pi}{\xi} + k\pi, \quad \xi = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\gamma \cos^2 \left(t + \frac{\pi}{\xi}\right)}}\right)$$

$$y''' = -\frac{f'''(t)}{f''(t)} (f''(t) \neq 0) \quad y'' = \frac{1}{f'(t)} - 1144 \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

$$x(\xi) = - \quad x''' = -\frac{y' y'''}{y'^2} \quad x'' = -\frac{y''}{y'^2} \quad x' = \frac{1}{y'} - 1145$$

$$c = -\frac{20}{y^2} > -\frac{x}{y} - 1146 \quad -\frac{y^2 y(\xi) - 10 y' y'' + 10 y'''}{y'^3} (y' \neq 0)$$

$$\frac{2p^2}{y^2} < -\frac{p^2}{y^2} < \frac{p}{y} - 1147 \quad -\frac{220}{1024} < -\frac{20}{64} < -\frac{2}{8} < -\frac{50x}{y^2}$$

$$y' = -1148 \quad y''' = \frac{0.4x}{(1-2y)^2} \quad y'' = \frac{7}{(x-2y)^2} \quad y' = \frac{2x-y}{x-2y} - 1149$$

$$y' = -1150 \quad y'' = \frac{2x^2 y}{(1+y^2)^2} [2(1+y^2)^2 + 2x^2(1-y^2)] \quad \xi = \frac{2x^2 y}{1+y^2}$$

$$c = f(x) \quad b = f'(x) \quad a = \frac{1}{\gamma} f''(x) - 1151 \quad y'' = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^2} \quad \xi = \frac{x+y}{x-y}$$

$$c = -\frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t - 1152 \quad -10 < 0 < -10 < 20 - 10t - 1153$$

$$y = v \cdot t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \quad x = v \cdot t \cos \alpha - 1104 \quad j = -\frac{\varepsilon \pi^2 a}{T^2} \cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} \quad j = g \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \sin \alpha + g^2 t^2}$$

$$\omega^2 \quad \omega \quad | \omega | \quad x^2 + y^2 = 20 - 1105 \quad \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$y''' = -\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}} (y \neq 0) - 1107 \quad y^{(n)} = 0 \quad y^{(7)} = \varepsilon \times 7! - 1108$$

$$n!! \text{ حاصل ضرب اعداد } n!! \text{ که در آن } y^{(10)} = -\frac{17!!}{2^{10} \cdot 9 \sqrt{x}} (x > 0) - 1108$$

طبیعی است که از عدد n تجاوز نمیکنند و از نظر زوج یا فرد بودن با آن

$$y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9} (x \neq 1) - 1109 \quad 17!! = 1 \times 3 \times 5 \dots 17 \text{ یکسان است یعنی}$$

$$y^{(100)} = \frac{197!! (299-x)}{2^{100} (1-x)^{100} \sqrt{1-x}} (x < 1) - 1160$$

$$y^{(20)} = 2^{20} e^{2x} (x^2 + 2 \cdot x + 9) - 1161$$

$$A_i^i = 10 \times 9 \times \dots (11-i) \text{ که در آن } y^{(10)} = e^x \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{A_i^i}{x^{i+1}} - 1162$$

$$y^{(6)} = \frac{27\varepsilon}{x^7} - \frac{120}{x^7} \ln x - 1164 \quad y^{(6)} = -\frac{7}{x^6} (x > 0) - 1163 \quad A_i^i = 1 \text{ و}$$

$$y^{(50)} = 2^{50} \left(-x^2 \sin 2x + 50 \cdot x \cos 2x + \frac{1220}{2} \sin 2x \right) - 1165 \quad (x > 0)$$

$$y''' = \frac{27(1-2x)^2 - 36}{(1-2x)^{\frac{7}{2}}} \sin 2x - \frac{27(1-2x)^2 - 28}{(1-2x)^{\frac{10}{2}}} \cos 2x \left(x \neq \frac{1}{2} \right) - 1166$$

$$y^{(100)} = -1168 \quad y^{(10)} = -2^8 \sin 2x - 2^{18} \sin 4x + 2^8 \times 3^{10} \sin 6x - 1167$$

$$y^{(7)} = -1170 \quad y^{(k)} = -\varepsilon e^x \cos x - 1169 \quad = x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x$$

$$= -\frac{70}{x^7} + \left(\frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^7} + \frac{96}{x} \right) \sin 2x + \left(\frac{70}{x^7} - \frac{180}{x^5} + \frac{120}{x^7} + \right.$$

$$\left. -\frac{10}{8x^3 \sqrt{x}} dx^7 (x > 0) - 1172 \quad 120 \cdot dx^5 - 1171 + 37 \ln x \right) \cos 2x$$

$$e^x \left(\ln x + \frac{3}{x} - -1174 \quad -102\varepsilon (x \cos 2x + 5 \sin 2x) dx^{10} - 1173 \right.$$

$$\begin{aligned} & \left(\gamma u d^3 x + -11176 \sin x \operatorname{sh} x dx^3 - 11170 - \frac{\gamma}{x^3} + \frac{\lambda}{x^2} - \frac{\gamma}{x^2} \right) dx^2 \\ & + \gamma \cdot du d^2 u + \gamma \cdot d^2 u d^2 u + \gamma \cdot d^2 u d^2 u + \gamma \cdot d^2 u d^2 u + \gamma \cdot d^2 u d^2 u + \gamma \cdot d^2 u d^2 u \\ & e^u (du^2 + \gamma du^2 d^2 u + \gamma du^2 d^2 u + \gamma du^2 d^2 u + \gamma du^2 d^2 u + \gamma du^2 d^2 u) - 11174 \\ & \gamma d^2 y = y'' dx^2 + y' d^2 x - 11174 \quad \frac{\gamma du^2}{u^2} - \frac{\gamma du d^2 u}{u^2} + \frac{d^2 u}{u} - 11178 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma d^2 y = y''' dx^2 + \gamma y'' dx d^2 x + y' d^2 x \\ & d^2 y + y^{(2)} dx^2 + \gamma y''' dx d^2 x + \gamma y'' dx d^2 x + \gamma y'' d^2 x^2 + y' d^2 x \\ & y''' = \frac{dx \left| \frac{dx}{d^2 x} \frac{dy}{d^2 y} \right| - \gamma d^2 x \left| \frac{dx}{d^2 x} \frac{dy}{d^2 y} \right|}{dx^2} \quad \gamma y' = \frac{\left| \frac{dx}{d^2 x} \frac{dy}{d^2 y} \right|}{d^2 x} - 11180 \end{aligned}$$

$$\frac{(-1)^{n-1} n! c^{n-1} (ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}} - 11181 \quad P^{(n)}(x) = a \cdot n! - 11187$$

$$\begin{aligned} & (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-\gamma)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right] - 11190 \quad n! \left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right] - 11189 \\ & \frac{1 \times 2 \times \dots \times (2n-1)}{(1-\gamma x)^n + \frac{1}{\gamma}} \left(x < \frac{1}{\gamma} \right) - 11191 \end{aligned}$$

$$\frac{(-1)^{n+1} \times 1 \times 2 \times \dots \times (2n-1) (2n+\gamma x)}{\gamma^n (1+x)^n + \frac{1}{\gamma}} \quad (n \geq 2; \quad x \neq -1) - 11192$$

$$\begin{aligned} & \gamma^{n-1} \times \cos \left(\gamma x + \frac{n\pi}{\gamma} \right) - 11193 \quad -\gamma^{n-1} \cos \left(\gamma x + \frac{n\pi}{\gamma} \right) - 11193 \\ & - 11196 \quad \frac{\gamma}{\xi} \sin \left(x + \frac{n\pi}{\gamma} \right) - \frac{\gamma^n}{\xi} \sin \left(\gamma x + \frac{n\pi}{\gamma} \right) - 11190 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(a-b)^n}{\gamma} \times - 11197 \quad \frac{\gamma}{\xi} \cos \left(x + \frac{n\pi}{\gamma} \right) + \frac{\gamma^n}{\xi} \cos \left(\gamma x + \frac{n\pi}{\gamma} \right) \\ & - 11198 \quad \times \cos \left[(a-b)x + \frac{n\pi}{\gamma} \right] - \frac{(a+b)^n}{\gamma} \cos \left[(a+b)x + \frac{n\pi}{\gamma} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(a-b)^n}{\gamma} \cos \left[(a-b)x + \frac{n\pi}{\gamma} \right] + \frac{(a+b)^n}{\gamma} \times \cos \left[(a+b)x + \frac{n\pi}{\gamma} \right] \\ & \frac{(a-b)^n}{\gamma} \times \sin \left[(a-b)x + \frac{n\pi}{\gamma} \right] + \frac{(a+b)^n}{\gamma} \sin \left[(a+b)x + \frac{n\pi}{\gamma} \right] - 11199 \end{aligned}$$

$$\frac{b^n}{\gamma} \cos \left(bx + \frac{n\pi}{\gamma} \right) - \frac{(\gamma a - b)^n}{\xi} \times \cos \left[(\gamma a - b)x + \frac{n\pi}{\gamma} \right] - 1200$$

$$\varepsilon^{n-1} \cos \left(\varepsilon x + \frac{n\pi}{\gamma} \right) - 1201 \quad - \frac{(\gamma a + b)^n}{\varepsilon} \cos \left[(\gamma a + b)x + \frac{n\pi}{\gamma} \right]$$

$$- 1202 \quad a^n x \cos \left(ax + \frac{n\pi}{\gamma} \right) + na^{n-1} \sin \left(ax + \frac{n\pi}{\gamma} \right) - 1202$$

$$a^n \left[x^\gamma - \frac{n(n-1)}{a^\gamma} \right] \sin \left(ax + \frac{n\pi}{\gamma} \right) - \gamma na^{n-1} x \times \cos \left(ax + \frac{n\pi}{\gamma} \right)$$

$$- 1203 \quad (-1)^n e^{-x} [x^\gamma - \gamma(n-1)x + (n-1)(n-\gamma)] - 1203$$

$$e^{x\gamma} \frac{n}{\gamma} \cos \left(x + \frac{n\pi}{\varepsilon} \right) - 1204 \quad e^x \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{k=\gamma}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{x^{k+1}} \right\}$$

$$\frac{(n-1)! b^n}{(a^\gamma - b^\gamma x^\gamma)^n} [a + bx]^n + - 1205 \quad e^{x\gamma} \frac{n}{\gamma} \sin \left(x + \frac{n\pi}{\varepsilon} \right) - 1205$$

$$e^{ax} [a^n P(x) + C_n \times - 1206 \quad + (-1)^{n-1} (a - bx)^n \left(|x| < \left| \frac{a}{b} \right| \right)]$$

$$\frac{1}{\gamma} \{ [(x+n) - (-1)^n (x - - 1207 \quad \times a^{n-1} P'(x) + \dots + P^{(n)}(x)]$$

$$d^n y = e^x \left[x^n + - 1208 \quad - n \right] \operatorname{ch} x + [(x+n) + (-1)^n (x-n)] \operatorname{sh} x \}$$

$$- 1209 \quad + n^\gamma x^{n-1} + \frac{n^\gamma (n-1)^\gamma}{\gamma!} \times x^{n-\gamma} + \dots + n! \int dx^n$$

$$(a^\gamma + b^\gamma) \frac{n}{\gamma} \times (الف - 1210 \quad \frac{(-1)^n n!}{x^{n+\gamma}} \left\{ \ln x - \sum_{i=\gamma}^n \frac{1}{i} \right\} dx^n \quad (x > 0)$$

$$\times \left[\cos \left(n\varphi - \frac{n\pi}{\gamma} \right) \operatorname{ch} ax \cos \left(bx + \frac{n\pi}{\gamma} \right) - \sin \left(n\varphi - \frac{n\pi}{\gamma} \right) \operatorname{sh} ax \sin \times$$

$$(a^\gamma + b^\gamma) \frac{n}{\gamma} \left[\cos \left(n\varphi - \frac{n\pi}{\gamma} \right) \operatorname{ch} ax \times (ب \quad \varepsilon \times \left(bx + \frac{n\pi}{\gamma} \right) \right]$$

$$ج د ه \times \sin \left(bx + \frac{n\pi}{\gamma} \right) + \sin \left(n\varphi - \frac{n\pi}{\gamma} \right) \operatorname{sh} ax \times \cos \left(bx + \frac{n\pi}{\gamma} \right) \right]$$

$$f^{(n)}(x) = - 1211 \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^\gamma + b^\gamma}} \quad \varepsilon \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^\gamma + b^\gamma}} \quad \hat{\omega}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-\gamma} (-1)^{\rho+k} \gamma^{n-\gamma\rho+1} (p-k)^n C_{\gamma\rho}^k \cos \left[(\gamma\rho - \gamma k)x + \frac{n\pi}{\gamma} \right]$$

$$\epsilon \sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} \frac{(\gamma p - \gamma k + 1)^n}{\gamma^{\gamma p}} C_{\gamma p+1}^k \times \sin \left[(\gamma p - \gamma k + 1)x + \frac{n\pi}{\gamma} \right] \quad (\text{الف} - 1216)$$

$$\epsilon \sum_{k=0}^{p-1} \gamma^n - \gamma p + 1 \times (p-k)^n C_{\gamma p}^k \cos \left[(\gamma p - \gamma k)x + \frac{n\pi}{\gamma} \right] \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{k=0}^p \left\{ \frac{(\gamma p - \gamma k + 1)^n}{\gamma^{\gamma p}} C_{\gamma p+1}^k \cos \left[(\gamma p - \gamma k + 1)x + \frac{n\pi}{\gamma} \right] \right\} \quad (\text{پ})$$

$$(\text{الف} - 1219) \quad \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x^\gamma)^{\frac{n}{\gamma}}} \sin(n \operatorname{arctg} x) \quad (x \neq 0) - 1218$$

$$(\text{الف} - 1220) \quad \frac{n(\gamma n - \gamma)!!}{\gamma^{n-1}} \quad (n > 1) \quad (\text{ب} \quad \epsilon \quad \frac{n!}{\gamma} [\gamma^n + 1 + (-1)^n])$$

$$\epsilon \quad f^{(\gamma k+1)}(0) = (-1)^k (\gamma k!) \quad \epsilon \quad f^{(\gamma k)}(0) = 0 \quad (\text{ب} \quad \epsilon \quad n(n-1)n^{\gamma-2})$$

$$f^{(\gamma k+1)}(0) = [1 \times \gamma \times \dots \times (\gamma k - 1)]^\gamma \quad \epsilon \quad f^{(\gamma k)}(0) = 0 \quad (\text{پ} \quad \epsilon \quad (k=0, 1, 2, \dots))$$

$$\epsilon \quad f^{(\gamma k)}(0) = (-1)^k m^\gamma (m^\gamma - \gamma^\gamma) \dots [m^\gamma - (\gamma k - \gamma)^\gamma] \quad (\text{الف} - 1221)$$

$$f^{(\gamma k+1)}(0) = (-1)^k \times \epsilon \quad f'(0) = m \quad \epsilon \quad f^{(\gamma k)}(0) = 0 \quad (\text{ب} \quad \epsilon \quad f^{(\gamma k-1)}(0) = 0)$$

$$(\text{الف} - 1222) \quad \times m(m^\gamma - 1^\gamma) \dots [m^\gamma - (\gamma k - 1)^\gamma] \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\epsilon \quad f^{(\gamma k)}(0) = (-1)^{k-1} \gamma (\gamma k - 1)! \times \left(1 + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{\gamma k - 1} \right)$$

$$\epsilon \quad f^{(\gamma k)}(0) = \gamma^{\gamma k - 1} [(k-1)!]^\gamma \quad (\text{ب} \quad \epsilon \quad f^{(\gamma k-1)}(0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots))$$

$$L_m(x) = (-1)^m - 1228 \quad n! \varphi(a) - 1223 \quad f^{(\gamma k-1)}(0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$- 1231 \quad \times \left[x^m - m^\gamma x^{m-1} + \frac{m^\gamma (m-1)^\gamma}{1 \times \gamma} \times x^{m-2} + \dots + (-1)^m m! \right]$$

$$H_m(x) = (\gamma x)^m - \frac{m(m-1)}{1!} (\gamma x)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (\gamma x)^{m-4} - \dots$$

$$\epsilon \quad A(-1, -1) - 1244 \quad \text{وجود ندارد} \quad f'(x) \text{ مشتق متناهی} \quad x=0 \text{ بازای} - 1236$$

$$\epsilon \quad \theta = \frac{1}{\gamma} \quad (\text{الف} - 1246) \quad \text{درست نیست} - 1245 \quad C(1, 1)$$

$$\theta = (\text{پ} \quad \epsilon \quad \theta = \frac{\sqrt{x^\gamma + x\Delta x + \frac{1}{\gamma} (\Delta x)^\gamma - x}}{\Delta x} \quad (x \geq 0, \Delta x > 0) \quad (\text{ب})$$

$$\theta = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{e^{\Delta x - 1}}{\Delta x} \quad (\text{ت} \quad \epsilon \quad = \frac{x}{\Delta x} \left(\sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}} - 1 \right) \quad (x(x + \Delta x) > 0)$$

$f(x) = -1261$ بطور کلی نه $c = \frac{1}{2} - 1248 \sqrt{2}$

$c_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ که در آن $= c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n - 1$

ثابت هستند -1268 بازای $-\infty < x < \frac{1}{2}$ صعودی، بازای $\frac{1}{2} < x < +\infty$

نزولی است -1269 بازای $-\infty < x < -1$ نزولی، بازای $-1 < x < 1$

صعودی، بازای $1 < x < +\infty$ نزولی است -1270 بازای $-\infty < x < -1$

نزولی، بازای $1 < x < 1$ صعودی، بازای $1 < x < +\infty$ نزولی است

-1271 بازای $0 < x < 100$ صعودی، بازای $100 < x < +\infty$ نزولی است

-1272 صعودی است -1273 در فاصله‌های $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ صعودی،

در فاصله‌های $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ نزولی است $(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

-1274 در فاصله‌های $\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k+1}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ صعودی،

در فاصله‌های $\left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ نزولی است

$0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ بازای $-\infty < x < 0$ بازای $(k=0, 1, 2, \dots)$ نزولی،

صعودی، بازای $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ نزولی است -1276 بازای $0 < x < n$

صعودی، بازای $n < x < +\infty$ نزولی است -1277 بازای $-\infty < x < -1$

و $0 < x < 1$ نزولی، بازای $-1 < x < 0$ و $1 < x < +\infty$ صعودی است

-1278 در فاصله‌های $\left(e^{-\frac{2k\pi}{12} + \frac{2k\pi}{12}}, e^{\frac{2k\pi}{12} + \frac{2k\pi}{12}}\right)$ صعودی، در فاصله‌های

$\left(e^{\frac{2k\pi}{12} + \frac{2k\pi}{12}}, e^{\frac{2k\pi}{12} + \frac{2k\pi}{12}}\right)$ نزولی است $(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ -1282 حتمی

نیست -1298 در نقطه A منحنی تقعرش بسمت بالا و در نقطه B تقعرش بسمت پائین است؛ C نقطه عطف است -1299 نمودار بازای

$-\infty < x < 1$ مقعر بسمت بالا، بازای $1 < x < +\infty$ مقعر بسمت پائین

است؛ $x=1$ نقطه عطف است -1300 بازای $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ مقعر بسمت

پائین، بازای $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ مقعر بسمت بالا است؛ $x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ نقاط عطف

میشاند ۱۳۰۱ - بازای $x < 0$ مقعر بستم پائین، بازای $x > 0$ مقعر بستم بالا است؛ $x = 0$ نقطه عطف است ۱۳۰۲ - - مقعر بستم بالا است

۱۳۰۳ - بازای $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ مقعر بستم پائین، بازای $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ مقعر بستم بالا است؛ $x = k\pi$ نقاط عطف

میشاند ۱۳۰۴ - بازای $|x| < \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

بستم پائین، بازای $|x| > \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$ مقعر بستم بالا است؛ $x = \pm \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$

نقاط عطف میشاند ۱۳۰۵ - بازای $|x| < 1$ مقعر بستم بالا، بازای $|x| > 1$ مقعر بستم پائین است؛ $x = \pm 1$ نقاط عطف میشاند ۱۳۰۶ - بازای

$e^{\gamma k\pi + \frac{\pi}{2}} < x < e^{\gamma k\pi + \frac{3\pi}{2}}$ مقعر بستم بالا، بازای $e^{\gamma k\pi - \frac{\pi}{2}} < x < e^{\gamma k\pi + \frac{\pi}{2}}$

مقعر بستم پائین است؛ $x = e^{k\pi + \frac{\pi}{2}}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

۱۳۰۷ - بازای $0 < x < +\infty$ مقعر بستم بالا است $h = \frac{1}{\sigma \sqrt{\gamma}}$ ۱۳۰۹ -

۱۳۱۰ - مقعر بستم پائین (بازای $a > 0$) است $\frac{a}{b}$ ۱۳۱۸ - $\frac{a}{b}$ ۱۳۱۹ -

$\frac{1}{\gamma} - 1320$ $2 - 1321$ $-2 - 1322$ $\frac{1}{\gamma} - 1323$ $-\frac{1}{\gamma} - 1324$ $\frac{1}{\gamma} - 1325$

$\frac{1}{\gamma} \ln a - 1329$ $\frac{a-b}{\gamma ab} - 1328$ $1 - 1327$ $\frac{1}{\gamma} - 1326$ $\frac{1}{\gamma} - 1325$

$\frac{\gamma}{\gamma} - 1334$ $\frac{1}{\gamma} - 1333$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma} - 1332$ $1 - 1331$ $-2 - 1330$

$0 - 1339$ $0 - 1338$ $0 - 1337$ $0 - 1336$ $1 - 1335$

$e^k - 1340$ $-1 - 1344$ $1 - 1343$ $1 - 1342$ $0 - 1341$ $0 - 1340$

$1 - 1350$ $1 - 1349$ $e^{-1} - 1348$ $e^{\frac{\gamma}{\pi}} - 1347$ $e^{-1} - 1346$

-1353 $\left(a \neq \frac{k\pi}{\gamma} \right) e^{\frac{\gamma}{\sin \gamma a}} - 1352$ $1 - 1351$

$-\frac{1}{\gamma} - 1357$ $0 - 1356$ $\frac{1}{\gamma} - 1355$ $\frac{1}{\gamma} - 1354$ $e^{\frac{1}{\gamma} (\ln^2 a - \ln^2 b)}$

$e^{-\frac{\gamma}{\pi}} - 1361$ $\frac{1}{a} - 1360$ $-\frac{e}{\gamma} - 1359$ $a^a (\ln a - 1) - 1358$

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{1}{2}} - 1363,2 & \quad e^{-\frac{1}{4}} - 1363,1 & \quad e^{\frac{1}{4}} - 1363 & \quad 1 - 1362 \\
 e^{-\frac{2}{\pi}} - 1365 & \quad e^{-\frac{1}{2}} - 1364 & \quad e^{-\frac{1}{4}} - 1363,4 & \quad e^{-\frac{1}{2}} - 1363,3 \\
 -\frac{1}{2} - 1369 & \quad 0 - 1368,1 & \quad \sqrt{e} - 1368 & \quad \frac{mn}{n-m} - 1367 & \quad e^{-1} - 1366 \\
 -1373,2 & \quad f'(0) = -\frac{1}{12} - 1373,1 & \quad \operatorname{tg} \alpha - 1371 & \quad a - 1370
 \end{aligned}$$

برابر $y = \frac{1}{e} \left(x + \frac{1}{2} \right)$ (الف - 1374) قاعده لوییتال کاربردناپذیر و حد برابر

صفر است ؛ ب) قاعده لوییتال کاربردناپذیر و حد برابر 1 است ؛ پ) کاربرد اسمی قاعده لوییتال نتیجه نادرست مساوی صفر میدهد ، حد وجود ندارد ؛ ت) کاربرد قاعده لوییتال فاقد اعتبار و به نتیجه نادرست مساوی صفر منجر میشود ،

حد وجود ندارد $\frac{4}{3} - 1375$ $5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 1376$

-1378 -48 $4 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4) - 1377$ $-2(x+1)^3$

$a + \frac{x}{ma^{m-1}} - \frac{(m-1)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2) - 1379$ $1 + 6x + 190x^2 + o(x^2)$

$1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - 1381$ $\frac{1}{4}x^2 + x^3 + o(x^3) - 1380$

$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{72} + o(x^3) - 1382$ $-\frac{1}{10}x^0 + o(x^0)$

$-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^7}{40} + o(x^7) - 1384$ $x - \frac{x^4}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{13}) - 1383$

$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) - 1386$ $x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - 1385$

$1 + \frac{1}{2}(x-1) - 1388$ $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^7}{2820} + o(x^7) - 1387$

$(x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + -1389$ $-\frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

$\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 1391$ $y = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2) - 1390$ $+ o((x-1)^2)$

(الف - 1394) $\ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{h^n}{nx^n} + o(h^n) - 1392$

کمتر از $\frac{3}{(n+1)!}$ (ب) از $\frac{1}{3840}$ تجاوز نمیکنند (پ) کمتر از

$$|x| < 0,222 = \text{arc} 12^\circ 20' - 1395 \quad \frac{1}{16} \quad \text{کمتر از (ت) } 2 \times 10^{-6}$$

$$1396 \text{ (الف) } 3,1072 \text{ (ب) } 3,0171 \text{ (پ) } 1,9961 \text{ (ت) } 1,64872$$

$$1397 \text{ (ث) } 0,309017 \text{ (ج) } 0,182321 \text{ (چ) } 0,67474 = \text{arc} 38^\circ 39' 30''$$

$$1398 \text{ (ح) } 0,46676 = \text{arc} 27^\circ 44' 37'' \quad 1,12117 \text{ (خ) } 1399 \text{ (الف) } 2,2361$$

$$1400 \text{ (ب) } 0,01745241 \text{ (پ) } 0,98769 \text{ (ت) } 2,2361$$

$$1401 \text{ (ث) } 1,04139 \quad \frac{1}{3} - 1399 \quad -\frac{1}{12} - 1398 \quad -\frac{1}{4} - 1400 \quad -\frac{1}{3} - 1401$$

$$1402 \text{ (ح) } \ln^2 a - 1403 \quad \frac{1}{2} - 1404 \quad 0 - 1405 \quad \frac{1}{3} - 1406$$

$$1407 \text{ (پ) } \frac{19}{90} - 1406,1 \quad \frac{1}{2} - 1406,2 \quad \frac{1}{2} - 1406,3 \quad \frac{1}{30} - 1407$$

$$A = -1410,1 \quad b = -\frac{1}{3} \quad a = \frac{4}{3} - 1410 \quad \frac{x}{2} - 1409 \quad x^2 - 1408$$

$$C = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{12} \quad A = \frac{1}{2} - 1410,2 \quad B = -\frac{1}{10} \quad = -\frac{2}{5}$$

$$D = \frac{1}{12} \quad \frac{2x}{R^2} \text{ (الف) } 1411 \text{ (ب) } \frac{4}{3} x \text{ (پ) } \frac{An}{100} \text{ (ت) } \frac{70}{x}$$

$$1412 \text{ (ح) } \alpha = \frac{2}{3} \quad \beta = \frac{1}{3} \quad \frac{\alpha^4}{180} - 1413 \quad \text{که در آن } \alpha \text{ نصف زاویه}$$

1414 - ماگزیم $y = 2 \frac{1}{4}$ بازای $x = \frac{1}{4}$ مرکزی قوس است

1415 - اکسترم ندارد 1416 - مینیم $y = 0$ بازای $x = 1$ مینیم

$y = 0$ بازای $x = 0$ اگر m زوج باشد، بازای $x = 0$ اکسترم ندارد اگر

m فرد باشد؛ ماگزیم $y = \frac{m^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$ بازای $x = \frac{m}{m+n}$ ؛ مینیم $y = 0$

بازای $x = 1$ اگر n زوج باشد، اگر n فرد باشد بازای $x = 1$ اکسترم

ندارد 1418 - مینیم $y = 2$ بازای $x = 0$ 1419 - مینیم $y = 0$ بازای

$x = -1$ ؛ ماگزیم $1234000 \approx 10^{10} e^{-9} \approx 10^{10} e^{-9}$ بازای $x = 9$ 1420 - ماگزیم

$y = 1$ بازای $x = 0$ اگر n فرد باشد، اگر n زوج باشد بازای $x = 0$

اکسترم ندارد 1421 - مینیم $y = 0$ بازای $x = 0$ 1422 - ماگزیم

$$; x=1 \text{ بازای } y=0 \text{ مینیمم} ; x=\frac{1}{3} \text{ بازای } y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{4} \approx 0,529$$

بازای $x=0$ اکسترم ندارد $f(x_0)=0$ مینیمم -1423 اگر $f(x_0) > 0$ اگر n زوج باشد ؛
 و n زوج باشد ؛ $f(x_0)=0$ اگر $f(x_0) < 0$ اگر n فرد باشد ؛ $f(x_0)$ اکسترم نیست -1425 - خیر -1427 - الف) مینیمم

$$f(0)=0 \text{ (ب) مینیمم} f(0)=0 \text{ مینیمم} -1428 \text{ مینیمم} f(0)=0 \text{ بازای} \\ x=1 \text{ ماکزیمم } y=0 ; \text{ بازای } x=3 \text{ مینیمم } y=-4 \text{ مینیمم} -1430$$

$$y=0 \text{ بازای } x=0 ; \text{ ماکزیمم } y=1 \text{ بازای } x=\pm 1 \text{ بازای} -1431$$

$$x=\frac{0-\sqrt{13}}{6} \approx 0,23 \text{ مینیمم } x=1 \text{ بازای } x=1 \text{ ماکزیمم } y=0 ;$$

$$\text{بازای } x=2 \text{ بازای } x=2 \text{ اکسترم} x=\frac{0+\sqrt{13}}{6} \approx 1,43 \text{ مینیمم } y \approx -0,05$$

$$\text{ندارد} -1432 \text{ بازای } x=-1 \text{ ماکزیمم } y=-2 ; \text{ بازای } x=1 \text{ مینیمم} \\ y=2 -1433 \text{ بازای } x=-1 \text{ مینیمم } y=-1 ; \text{ بازای } x=1 \text{ ماکزیمم}$$

$$y=1 -1434 \text{ بازای } x=\frac{7}{5} \text{ مینیمم } y=-\frac{1}{24} \text{ بازای } x=0$$

$$\text{و } x=2 \text{ مینیمم مرزی } y=0 ; \text{ بازای } x=1 \text{ ماکزیمم } y=1 -1436$$

$$\text{بازای } x=\frac{3}{4} \text{ مینیمم } x=\frac{3}{8} \sqrt[3]{2} \approx -0,46 \text{ مینیمم } y=-\frac{3}{8} \sqrt[3]{2} \approx -0,46 ; \text{ بازای } x=1 \text{ اکسترم}$$

$$\text{ندارد} -1437 \text{ بازای } x=1 \text{ ماکزیمم } y=e^{-1} \approx 0,368 \text{ بازای} \\ x=+0 \text{ ماکزیمم مرزی } y=0 ; \text{ بازای } x=e^{-2} \approx 0,135 \text{ مینیمم}$$

$$y=-\frac{2}{e} \approx -0,736 -1439 \text{ بازای } x=1 \text{ مینیمم } y=0 ; \text{ بازای}$$

$$x=e^2 \approx 7,389 \text{ ماکزیمم } y=\frac{4}{e^2} \approx 0,541 -1440 \text{ بازای } x=k\pi$$

$$y=(-1)^k + \frac{1}{y} \text{ ماکزیمم } (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ بازای } x=\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$y=-\frac{3}{4} \text{ مینیمم } (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) -1441 \text{ بازای } x=k\pi$$

$$y=10 \text{ ماکزیمم } (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ بازای } x=\pi \left(k + \frac{1}{y}\right)$$

$$y=0 \text{ مینیمم } (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) -1442 \text{ بازای } x=1 \text{ ماکزیمم}$$

$$y=\frac{\pi}{4} - \frac{1}{y} \ln 2 \approx 0,429 -1443 \text{ بازای } x=-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x=1 \text{ بازای } ; y = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \text{ مینیمم } (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi} \text{ ماگزیمم} = \frac{2\pi}{2} + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$1444 \text{ بازای } x=-1 \text{ ماگزیمم } ; y = e^{-2} \approx 0,135 \text{ مینیمم } x=0$$

$$y=0 \text{ (نقطه زاویه دار) بازای } x=1 \text{ ماگزیمم } ; \frac{1}{2} - 1445$$

$$1446 \text{ بازای } x=1 \text{ ماگزیمم } ; 100,01 - 1448 \quad 132 - 1447 \quad 66 - 1446$$

$$1450 \text{ بازای } x=1 \text{ ماگزیمم } ; 100 - 1452 \quad 1 - 1451 \quad \frac{100}{e} \approx 36,8 \quad 0 - 1450$$

$$1453 \text{ بازای } x=1 \text{ ماگزیمم } ; -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{2}} \approx -0,067 - 1453 \quad \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2}) \approx 1,2$$

$$\text{اگر } m(x) = \frac{1+x}{2+x^2} ; -\infty < x \leq -3 \text{ اگر } m(x) = -\frac{1}{2} - 1454$$

$$\text{اگر } M(x) = \frac{1}{2} ; -1 < x < +\infty \text{ اگر } m(x) = 0 ; -3 < x \leq -1$$

$$1455 \text{ (الف) } 1 < x < +\infty \text{ اگر } M(x) = \frac{1+x}{2+x^2} ; -\infty < x \leq 1$$

$$1457 \quad \sqrt[3]{3} \approx 1,44 \text{ (پ) } ; \frac{1}{200} \text{ (ب) } ; \frac{141}{214} \approx 1,77 \times 10^7$$

$$g(x) = -1460 \quad \frac{4}{27} - 1459 \quad q = -\frac{1}{2} - 1458 \quad \frac{9+6\sqrt{3}}{4} \approx 4,85$$

$$\frac{2}{3} - 1461 \quad \Delta = \frac{1}{8} (x_1 - x_2)^2 ; = (x_1 + x_2)x - \frac{1}{8} (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2)$$

$$-1462 \text{ بازای } x_1 < -1 \text{ یک ریشه: } (3, +\infty)$$

$$3 < x_2 < +\infty \text{ و } -1 < x_1 < 3 \text{ سه ریشه: } h > 27 \text{ اگر } -\infty < x_1 < -1$$

$$h < -5 \text{ اگر } 3 < x_2 < +\infty \text{ یک ریشه: } -5 < h < 27$$

$$-1463 \text{ بازای } x_1 < -1 \text{ دو ریشه: } -\infty < x_1 < -1 \text{ و } 1 < x_2 < +\infty$$

$$-1464 \text{ بازای } x_1 < -1 \text{ سه ریشه: } -\infty < a < -4 \text{ اگر } -\infty < x_1 < -1$$

$$-1 < x_2 < 1 \text{ و } 1 < x_3 < +\infty \text{ یک ریشه: } -4 < a < 4 \text{ اگر } 1 < x_2 < +\infty$$

$$-1465 \text{ بازای } x_1 < 1 \text{ یک ریشه: } 4 < a < +\infty \text{ اگر } 0 < x_1 < 1$$

$$0 < k < \frac{1}{e} \text{ بازای } 0 < x_1 < \frac{1}{k} \text{ و } \frac{1}{k} < x_2 < +\infty \text{ دو ریشه: } 0 < x_1 < \frac{1}{k}$$

$k > \frac{1}{e}$ ریشه ندارد ۱۴۶۷- اگر $a < 0$ ، ریشه ندارد؛ اگر $a < \frac{e^2}{4}$ ،

یک ریشه: $-\infty < x_1 < 0$ ؛ اگر $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$ ، سه ریشه:

$-\infty < x_1 < 0$ ، $0 < x_2 < 2$ و $2 < x_3 < +\infty$ ۱۴۶۸- بازای

$|a| < 3 \frac{\sqrt{3}}{16}$ دو ریشه؛ بازای $|a| > 3 \frac{\sqrt{3}}{16}$ ریشه ندارد ۱۴۶۹-

دو ریشه: $0 < |x_1| < \xi$ و $\xi < |x_2| < +\infty$ که در آن $\xi \approx 1, 2$ ریشه مثبت معادله $x = x \operatorname{cth} x$ میباشد در صورتیکه $\operatorname{sh} \xi \approx 1, 5$ ؛ اگر

$|k| < \operatorname{sh} \xi$ ، ریشه ندارد (الف-۱۴۷۰) $\frac{p^2}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$ ؛

(ب) $\frac{p^2}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$ - ۱۴۷۱* تابع نسبت به مبدا مختصات متقارن است.

صفرهای تابع: $x = 0$ و $x = \pm \sqrt{3} \approx \pm 1, 73$ ؛ مینیم $y = -2$ بازای

ماکزیم $x = -1$ ؛ $y = 2$ بازای $x = 1$ ؛ نقطه عطف: $x = 0, y = 0$.

۱۴۷۲- تابع نسبت به محور Oy متقارن است. صفرها: $x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}} \approx \pm 1, 65$ ؛

مینیم $y = 1$ بازای $x = 0$ ؛ ماکزیم $y = 1 \frac{1}{2}$ بازای $x = \pm 1$ ؛

نقاط عطف: $y = 1 \frac{0}{18}$ ؛ $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0, 58$ ؛ ۱۴۷۳- تابع نسبت به

نقطه $A(1, 2)$ متقارن است. صفرها: $x = -1$ و $x = 2$ ؛ مینیم $y = 0$ ؛

بازای $x = 2$ ؛ ماکزیم $y = 4$ بازای $x = 0$ ؛ نقطه عطف: $x = 1, y = 2$ ؛

۱۴۷۴- تابع نسبت به محور Oy متقارن است. صفرهای تابع: $x = \pm \sqrt{2} \approx \pm 1, 41$ ؛

ماکزیم $y = 2$ بازای $x = 0$ ؛ مینیم $y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0, 12$ ؛

نقاط عطف: $x = \pm \sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx \pm 2, 06$ ؛ بازای $y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ ؛

عطف: $x_{1,2} = \pm 0, 77$ ؛ $y_{1,2} = 1, 04$ ؛ $x_{3,4} \approx \pm 2, 67$ ؛ $y_{3,4} \approx -0, 10$ ؛ ۱۴۷۵- نقاط انفصال: $x = 2$ و $x = 3$ ؛ صفرها:

مجاذب $y = 0$ ؛ ۱۴۷۵- نقاط انفصال: $x = 2$ و $x = 3$ ؛ صفرها:

$x = \pm 1$ ؛ مینیم $x = -1, 20 \approx -(10 - \sqrt{96})$ ؛ بازای $y = -\frac{7 - \sqrt{24}}{0}$ ؛

$x \approx 0, 42$ ؛ ماکزیم $x = -19, 80 \approx -(10 + \sqrt{96})$ ؛ بازای $y = \frac{7 + \sqrt{24}}{0}$ ؛

* برای مسایل رسم نمودار، در همه جا جواب کامل داده نمیشود.

نقطهٔ عطف: $y \approx -0,07$, $x \approx -0,08$. بجانب‌ها: $x=2$, $x=3$.
 و $y=1$ - ۱۴۷۶ نقاط انفصال: $x_1 = -1$ و $x_2 = 1$. صفر تابع: $x=0$.
 نقاط اکسترم ندارد. نقطهٔ عطف: $y \approx -0,19$, $x \approx -0,22$. بجانب‌ها:
 $x=1$, $x=-1$ و $y=0$ - ۱۴۷۷ صفر تابع: $x=0$. نقطهٔ انفصال

$x=-1$. مینیم $y=0$ بازای $x=0$; ماگزیم $y = -9 \frac{13}{27}$ بازای

$x=-4$. نقاط عطف ندارد. بجانب‌ها: $x=-1$ و $y=x-3$

۱۴۷۸ - مینیم $y=0$ بازای $x=-1$; نقطهٔ عطف: $y = \frac{81}{220}$; $x=-4$

مجاوب‌ها: $x=1$ و $y=1$ - ۱۴۷۹ ماگزیم‌ها:

$y = -\frac{34\sqrt{17+142}}{22} \approx -8,82$ بازای $y = -\frac{3+2\sqrt{17}}{2} \approx -3,06$ و $x = -$

بازای $x=0$; مینیم $y = \frac{34\sqrt{17-142}}{22} \approx -0,06$ بازای $x = \frac{\sqrt{17-3}}{2} \approx$

$0,06$. نقطهٔ عطف: $y = -\frac{1}{40}$, $x = \frac{1}{0}$. بجانب‌ها: $x=-1$ و

$y=x-3$ - ۱۴۸۰ تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. نقاط اکسترم
 ندارد؛ نقطهٔ عطف: $y=0$, $x=0$. بجانب‌ها: $x=-1$, $x=1$ و $y=0$

۱۴۸۱ - مینیم $y = 13 \frac{1}{2}$ بازای $x=0$; نقاط عطف: $x=-1$, $y=0$

مجاوب‌ها: $x=1$ و $y=x+5$ - ۱۴۸۲ مینیم $y = 2 \frac{2}{3}$ بازای

$x=2$; ماگزیم $y \approx -3,2$ بازای $x \approx -2,4$; نقطهٔ عطف: $x=0$, $y=8$.
 مجاوب‌ها: $y=x$ و $x=-1$ - ۱۴۸۳ تابع نسبت به محور Oy متقارن است.

صفرهای تابع: $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{4} \approx \pm 0,79$. نقاط اکسترم ندارد. نقاط عطف:

$y = -2 \frac{2}{3}$, $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0,71$. مجاوب‌ها: $x=-1$,

$x=0$, $x=1$ و $y=0$. - ۱۴۸۴ حوزهٔ وجود: $0 \leq x < +\infty$; صفرها:
 $x=0$ و $x=3$. مینیم $y = -2$ بازای $x=1$; ماگزیم $y=0$ بازای

$x=0$. مقعر بسمت بالا است - ۱۴۸۵ حوزهٔ وجود: $2 \sqrt{2} \approx 2,83 \leq |x|$.
 تابع نسبت به مبدأ مختصات و محورهای مختصات متقارن است. صفرها:

$x=0$ و $x = \pm 2\sqrt{2}$. ماگزیم $|y|=4$ بازای $x = \pm 2$, مینیم

$|y| = 0$ بازای $x = 0$ ؛ مینیمم مرزی: $|y| = 0$ بازای $x = \pm 2\sqrt{2}$.
 نقطه عطف ندارد. $1485,1$ - صفر تابع: $x = 2$. مینیمم $y = -\sqrt{5} \approx -2,24$.

بازای $x = -0,5$. نقطه عطف: $y_1 \approx -2,06$, $x_1 = -\frac{3+\sqrt{41}}{8} \approx -1,18$.

و $y_2 \approx -1,46$, $x_2 = \frac{\sqrt{41-3}}{8} \approx 0,42$. مجانب‌ها: $y = -1$ بازای

$x \rightarrow -\infty$ و $y = 1$ بازای $x \rightarrow +\infty$. 1486 - حوزه وجود: $1 \leq x \leq 2$ و $3 \leq x < +\infty$. صفرها: $x = 1$ ، $x = 2$ و $x = 3$. ماگزیم

$|y| = 0$ بازای $x = \frac{1-\sqrt{3}}{3} \approx 1,42$ ؛ مینیمم‌های مرزی

$|y| = 0$ بازای $x = 1, 2, 3$ - مینیمم $y = 0$ بازای $x = 1$ ؛

ماگزیم $y = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4} \approx 1,06$ بازای $x = -\frac{1}{3}$ ؛ نقطه عطف $x = -1$,

$y = 0$. مجانب $y = x - \frac{1}{3}$. 1488 - نمودار نسبت به محور Oy متقارن

است. مینیمم: $y = -1$ بازای $x = 0$. مقعر بسمت پائین است. مجانب:

$y = 0$. 1489 - نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. صفر تابع:

$x = 0$. مینیم: $y = -\sqrt[3]{16} \approx -2,52$ بازای $x = -2$ ؛ ماگزیم

$y = \sqrt[3]{16}$ بازای $x = 2$. نقطه عطف: $x = 0$, $y = 0$. مجانب: $y = 0$.

1490 - نمودار نسبت به محور Oy متقارن است. مینیم: $y = \sqrt[3]{4} \approx 1,59$

بازای $x = \pm 1$ ؛ ماگزیم: $y = 2$ بازای $x = 0$. مقعر بسمت پائین است

1491 - نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. نقطه انفصال: $x = \pm 1$.

صفر تابع: $x = 0$. مینیم: $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ بازای $x = \sqrt{3}$ ؛

ماگزیم: $y = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ بازای $x = -\sqrt{3}$. نقاط عطف: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$.

و $y_{2,3} = \pm 1, x_{2,3} = \pm 3$. 1492 - حوزه وجود تابع: $|x| \geq 1$.

نمودار نسبت به محور Oy متقارن است. مینیم مرزی: $y = 0$ بازای

$x = \pm 1$. مقعر بسمت پائین است . مجانب‌ها : $y = \frac{x}{2}$ بازای $x \rightarrow +\infty$

و $y = -\frac{x}{2}$ بازای $x \rightarrow -\infty$ -۱۴۹۳ حوزة وجود تابع : $x > 0$. مینیم :

$y = \frac{3}{2} \sqrt{3} \approx 2,6$ بازای $x = \frac{1}{2}$. مقعر بسمت بالا است . مجانب‌ها :

$x = 0$ و $y = x + \frac{3}{2}$ -۱۴۹۴ حوزة وجود : $x \geq 0$ و $x < -3$. صفر

تابع : $x = \frac{0 + \sqrt{13}}{2} \approx 1,3$ مینیم : $y = 13$ بازای $x = -4$ ؛ ماگزیم

مرزی : $y = 1$ بازای $x = 0$. مقعر بسمت بالا است . مجانب‌ها :

$y = \frac{0}{2} - 2x$ بازای $x \rightarrow -\infty$ ؛ $y = -\frac{1}{2}$ بازای $x \rightarrow +\infty$ ؛ $x = -3$ ؛

بازای $x = 0$ -۱۴۹۵ مینیم $y = 0$ بازای $x = 0$ ؛ ماگزیم

$y = -\sqrt[3]{4} \approx -1,59$ بازای $x = -2$ نقاط عطف : $x_1 = -(2 - \sqrt{3}) \approx$

$x_2 = -(2 + \sqrt{3}) \approx -3,73$ ؛ $y_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{27}-0}{2}} \approx 0,46$ ، $-0,27$

$y_2 = -\sqrt{\frac{0 + \sqrt{27}}{2}} \approx -1,72$. مجانب $x = -1$ -۱۴۹۶ نمودار

نسبت به محور Oy متقارن است . تابع مثبت است . ماگزیم :

$y = \sqrt{3} \approx 1,73$ بازای $x = 0$ ، مینیم : $y = \sqrt{2} \approx 1,41$ بازای

$x = \pm 1$. نقاط عطف : $y_{1,2} \approx 1,14$ ، $x_{1,2} \approx \pm 0,47$ ، و $x_{3,4} = \pm 4,08$ ،

$y_{3,4} \approx 4,00$. مجانبها : $y = \pm x$ -۱۴۹۷ - دوره تابع : $T = 2\pi$ ؛

حوزة اصلی $0 \leq x \leq 2\pi$. صفرهای تابع : $x_1 = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{0-1}}{2} \approx 1,21\pi$

و $x_2 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{0-1}}{2} \approx 1,79\pi$. مینیم‌ها : $y = 1$ بازای

$x = \frac{\pi}{2}$ و $y = -1$ بازای $x = \frac{3\pi}{2}$ ؛ ماگزیم : $y = 1$ بازای

$x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$. نقاط عطف : $x_1 = \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \approx 0,32\pi$ ،

$$x_{\varphi} = \pi - \arcsin \frac{1 + \sqrt{22}}{8} \approx 0,68\pi \quad ; \quad y_1 = \frac{19 + 2\sqrt{22}}{22} \approx 1,13$$

$$x_{\varphi} = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{22} - 1}{8} \approx 1,20\pi \quad ; \quad y_2 = \frac{19 + 2\sqrt{22}}{22}$$

$$x_{\xi} = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{22} - 1}{8} \approx 1,80\pi \quad ; \quad y_3 = \frac{19 - 2\sqrt{22}}{22} \approx 0,055$$

$$-\pi \leq x \leq \pi : \text{حوزه اصلی} ; 2\pi : \text{دوره تابع} ; 1448 \quad y_4 = \frac{19 - 2\sqrt{22}}{22}$$

نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. صفرها: $x_1 = 0$ و $x_{\varphi, \psi} = \pm \pi$

$$\text{مینیم: } x = -\arcsin \frac{1}{4} \approx -0,25\pi \quad \text{بازای } y = -\frac{10}{8} \sqrt{15} \approx -3,7$$

$$\text{ماکزیم: } x = \arcsin \frac{1}{4} \approx 0,25\pi \quad \text{بازای } y = \frac{10}{8} \sqrt{15} \approx 3,7$$

$$\text{عطف: } x_{\varphi, \psi} = \pm \arcsin \left(-\frac{7}{8} \right) \approx \pm 0,84\pi \quad ; \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0$$

$$\text{دوره } 1449 \quad y_{\xi, \theta} = 0, \quad x_{\xi, \theta} = \pm \pi \quad ; \quad y_{\varphi, \psi} = \pm \frac{21}{22} \sqrt{15} \approx \pm 2,54$$

تابع: $T = 2\pi$; حوزه اصلی: $-\pi \leq x \leq \pi$. نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. صفرها: $x_1 = 0$ و $x_{\varphi, \psi} = \pm \pi$. مینیمها:

$$y = \frac{2}{3}, \quad x = -\frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad x = -\frac{3\pi}{4} \quad \text{بازای } y = -\frac{2}{3} \sqrt{2} \approx -0,94$$

$$\text{بازای } x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \text{ماکزیمها: } y = -\frac{2}{3} \quad \text{بازای } x = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{بازای } x = \frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{تقاطع عطف: } x_1 = 0, \quad y_1 = 0$$

$$y_{\varphi, \psi} = \pm \frac{4}{27} \sqrt{30} \approx \pm 0,81, \quad x_{\varphi, \psi} = \pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0,37\pi$$

$$; \quad y_{\xi, \theta} = \pm \frac{4}{27} \sqrt{30}, \quad x_{\xi, \theta} = \pm \left(\pi - \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \approx \pm 0,63\pi$$

$$; \quad y_{\eta, \nu} = 0, \quad x_{\eta, \nu} = \pm \pi$$

$[-\pi, \pi]$. نمودار نسبت به محور Oy . صفرهای تابع: $T = 2\pi$; حوزه اصلی:

؛ $x=0$ بازای $y = \frac{1}{2}$: مینیممها : $x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0,62\pi$

$x = \pm \frac{\pi}{3}$ بازای $y = \frac{3}{4}$: ماگزیممها : $x = \pm \pi$ بازای $y = -1$ $\frac{1}{2}$

نقاط عطف : $y_{1,2} \approx 0,63$ ، $x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx \pm 0,18\pi$ ؛

دوره -1001 $y_{3,4} \approx -0,44$ ، $x_{3,4} = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{33}}{8} \approx \pm 0,70\pi$

تابع : $T = \frac{\pi}{2}$ ؛ حوزه اصلی : $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. نمودار نسبت به محور Oy متقارن است . تابع مثبت است . ماگزیمم : $y = 1$ بازای $x = 0$ ؛ مینیمم :

$y_{1,2} = \frac{3}{4}$ ، $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{8}$: نقاط عطف : $x = \pm \frac{\pi}{4}$ بازای $y = \frac{1}{2}$

-1002 دوره تابع : $T = \pi$ ؛ حوزه اصلی : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. نمودار نسبت به

محور Oy متقارن است . صفرهای تابع : $x_1 = 0$ و $x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{3}$. مینیممها :

$y = 0$ بازای $x = 0$ و $y = -1$ بازای $x = \pm \frac{\pi}{2}$ ؛ ماگزیمم :

$y = \frac{9}{16}$ بازای $x = \pm \arccos \frac{1}{4} \approx \pm 0,21\pi$. نقاط عطف :

؛ $y_{1,2} \approx 0,29$ ، $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1+\sqrt{129}}{16} \approx \pm 0,11\pi$

$y_{3,4} \approx -0,24$ ، $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{129}}{16} \approx \pm 0,36\pi$

-1003 دوره تابع : $T = \pi$ ؛ حوزه اصلی : $0 \leq x \leq \pi$. نقطه انفصال : $x = \frac{2\pi}{3}$.

صفرها : $x_1 = 0$ ، $x_2 = \pi$. اکسترمم ندارد ، صعودی است . نقطه عطف :

$x = \frac{\pi}{4}$ ، $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛ $x = \frac{3\pi}{4}$ ، $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛ $T = 2\pi$ دوره تابع : -1004

حوزه اصلی : $[-\pi, \pi]$. نمودار نسبت به محور Oy متقارن است . صفرهای تابع :

$x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$. مینیمم : $y = 1$ بازای $x = 0$ ؛ ماگزیمم : $y = -1$ بازای

$x = \pm \pi$ ؛ نقاط عطف : $x_{1,2} = \frac{\pi}{2}$ ، $y_{1,2} = 0$. مجانب ها : $x = \pm \frac{\pi}{2}$ و

$x = \pm \frac{\pi}{2}$ ، $1 - 1004$ - دوره تابع : $T = 2\pi$ ؛ حوزه اصلی : $-\pi \leq x \leq \pi$.

تابع فرد است . مینیمم : $-0,58$ ، $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ بازای $x = -\frac{\pi}{3}$ ؛ ماگزیمم :

$-0,58$ ، $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ بازای $x = \frac{\pi}{3}$. نقطه عطف : $x_1 = 0$ ، $y_1 = 0$ ؛

$x_{2,3} = \mp \pi$ ، $y_{2,3} = 0$ - مراکز متقارن $(k\pi, 2k\pi)$. صفرهای

تابع : $x_{2,3} \approx \pm 0,27\pi, \dots$ ، $x_1 = 0$ ، ماگزیمم ها : $y = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$ ؛

بازای $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ؛ مینیمم ها : $y = -\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right)$ بازای

نقاط عطف : $x = k\pi$ ، $y = 2k\pi$. مجانب ها : $-\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

$x = \frac{2k+1}{2}\pi$ (k عددیست درست) - نمودار نسبت به خط $x = 1$ - 1006

متقارن است . تابع مثبت است . ماگزیمم $y = e$ بازای $x = 1$. نقاط عطف :

$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛ $y_{1,2} = \sqrt{e} \approx 1,65$. مجانب $y = 0$ - نمودار 1007

نسبت به محور Oy متقارن است . تابع مثبت است . ماگزیمم $y = 1$ بازای $x = 0$.

نقاط عطف : $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1,2$ ، $y_{1,2} = \frac{0}{2} e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,06$.

مجانب : $y = 0$ - 1008 تابع مثبت است . مینیمم $y = 1$ بازای $x = 0$.

مقعر به سمت بالا است . مجانب $y = x$ بازای $x \rightarrow +\infty$ - 1009 تابع

نامنفی است ؛ صفر : $x = 0$. مینیمم $y = 0$ بازای $x = 0$ ؛ ماگزیمم :

$x_1 = \frac{2 - \sqrt{6}}{3} \approx 0,39$ ، $y = \sqrt{\frac{4}{9}} e^{-\frac{2}{3}} \approx 0,39$ بازای $x = \frac{2}{3}$. نقاط عطف :

$y_1 \approx 0,20$ ، $x_2 = \frac{2 + \sqrt{6}}{3} \approx 1,48$ و $y_2 \approx 0,34$ ، $x_3 \approx -0,10$.

مجانب : $y = 0$ بازای $x \rightarrow +\infty$ - $1009,1$ تابع نامنفی است . مینیمم :

$y = 0$ بازای $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. $x = k\pi$ ؛ ماگزیمم :

$x_k = (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi$ ؛ نقاط عطف $y = \frac{1}{2} e^{-\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi}$ بازای $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

۱۵۱۰- تابع بازای $x > -1$ مثبت و بازای $y_k = \frac{1}{k} e^{-[2k + \frac{1}{4}(-1)^k]\pi}$

$x < -1$ منفی است. مینیم: $y = 1$ بازای $x = 0$. بازای $x > -1$ مقعر بسمت بالا و بازای $x < -1$ مقعر بسمت پائین است ۱۵۱۱- نمودار نسبت به محور Oy متقارن است. تابع نامنفی است؛ صفر: $x = 0$. مینیم: $y = 0$ (نقطهٔ زاویه‌دار) بازای $x = 0$. مقعر بسمت پائین است ۱۵۱۲- حوزهٔ وجود تابع: $x > 0$. صفر تابع: $x = 1$. ماگزیم: $x = e^{\frac{\lambda}{3}} \approx 14,33$ عطف: $x = e^2 \approx 7,39$ بازای $y = \frac{2}{e} \approx 0,74$

مجانب‌ها: $x = 0$ بازای $x \rightarrow +0$ و $y = \frac{\lambda}{3} e^{-\frac{\lambda}{3}} \approx 0,70$

بازای $x \rightarrow +\infty$ ۱۵۱۳- نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. صفر: $x = 0$. نقطهٔ اکسترمم ندارد؛ تابع صعودی است. نقطهٔ عطف: $x = 0$, $y = 0$. نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. صفر تابع: $x = 0$. تابع صعودی است. بازای $x > 0$ مقعر بسمت بالا و بازای $x < 0$ مقعر بسمت پائین است؛ $O(0, 0)$ نقطهٔ عطف است. ۱۵۱۵- حوزهٔ وجود تابع: $|x| < 1$. نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. تابع صعودی یکنوا است. بازای $x > 0$ مقعر به سمت بالا و بازای $x < 0$ مقعر بسمت پائین است؛ نقطهٔ عطف: $x = 0$, $y = 0$. مجانب‌ها: $x = \pm 1$. ۱۵۱۶- نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. صفر تابع: $x = 0$. نقطهٔ اکسترمم ندارد، تابع صعودی است. نقطهٔ عطف: $x = 0$, $y = 0$.

مجانب‌ها: $y = x - \frac{\pi}{4}$ بازای $x \rightarrow -\infty$ و $y = x + \frac{\pi}{4}$ بازای $x \rightarrow +\infty$

۱۵۱۷- صفر تابع: $x \approx -0,90$. مینیم: $x \approx 1,285$ بازای $y = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}$

$x = 1$ ؛ ماگزیم: $x \approx 1,806$ بازای $y = -\frac{1}{4} + \frac{3\pi}{4}$ بازای $x > 0$.

مقعر بسمت بالا و بازای $x < 0$ مقعر بسمت پائین است؛ نقطهٔ عطف:

$x = 0$, $y = \frac{\pi}{4}$. مجانب‌ها: $y = \frac{x}{4} + \pi$ بازای $x \rightarrow -\infty$ و $y = \frac{x}{4}$

بازای $x \rightarrow +\infty$ ۱۵۱۸- نمودار نسبت به محور Oy متقارن است. تابع نامنفی است؛ صفر: $x = 0$. مینیم: $y = 0$ بازای $x = 0$. نمودار مقعر به سمت

بالا است. مجانب‌ها: $y = \frac{\pi}{4}x - 1$ بازای $x \rightarrow +\infty$ ؛ $y = -\frac{\pi}{4}x - 1$

بازای $x \rightarrow -\infty$ - ۱۵۱۹ بازای نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. صفر

تابع: $x=0$. مینیمم: $y = -\frac{\pi}{4}$ (نقطهٔ زاویه‌دار) بازای $x=1$ ؛ ماگزیمم:

$y = \frac{\pi}{4}$ (نقطهٔ زاویه‌دار) بازای $x=1$. نقطهٔ عطف: $x=0, y=0$.

مجانب: $y=0$ - ۱۵۲۰ نمودار نسبت به محور Oy متقارن است. تابع نامنفی

است؛ صفر: $x=0$. مینیمم: $y=0$ بازای $x=0$ (نقطهٔ زاویه‌دار).

نمودار مقعر بسمت پائین است. مجانب: $y=\pi$ - ۱۵۲۱ نقطهٔ انفصال

تابع: $x=0$. صفر تابع: $x=-2$. مینیمم: $y = \sqrt{e} \approx 1,65$ ؛

بازای $x=2$ ؛ ماگزیمم: $y = \frac{1}{e} \approx 0,37$ بازای $x=-1$. نقطهٔ عطف:

$x = -\frac{2}{e}$ ، $y = \frac{1}{e} e^{-\frac{2}{e}} \approx 0,13$. مجانب‌ها: $x=0$ و $y=x+2$

۱۵۲۲ - حوزهٔ وجود تابع: $|x| \geq 1$. نمودار نسبت به محور Oy متقارن

است. ماگزیمم مرزی: $y = 2\sqrt{2} \approx 2,83$ بازای $x = \pm 1$. نمودار

مقعر بسمت بالا است. مجانب: $y=1$ - ۱۵۲۳ حوزهٔ وجود تابع: $x < 1$

و $x > 2$. نقاط برخورد با محورهای مختصات: $(0, \ln 2)$ و $(\frac{1}{3}, 0)$.

ماگزیمم: $y \approx 1,12$ بازای $x = \frac{1-\sqrt{10}}{3} \approx -0,72$. مجانب‌ها: $x=1$ ،

$x=2$ و $y=0$ - ۱۵۲۴ حوزهٔ وجود تابع: $|x| \leq a$. نقاط تقاطع با

محورهای مختصات: $(0, -a)$ و $(0, 6va)$ (تقریباً ۱). تابع صعودی یکتا

است. مینیمم مرزی: $y = -\frac{\pi}{4}a$ بازای $x=-a$ و ماگزیمم مرزی:

$y = \frac{\pi}{4}a$ بازای $x=a$. نمودار مقعر بسمت بالا است - ۱۵۲۵ حوزهٔ وجود

تابع: $x \leq 0$ و $x \geq \frac{2}{3}$. مینیمم مرزی: $y=0$ بازای $x=0$ ؛ ماگزیمم

مرزی: $y=\pi$ بازای $x = \frac{2}{3}$. بازای $x \leq 0$ مقعر بسمت پائین و بازای

$x \geq \frac{2}{3}$ مقعر بسمت بالا است. مجانب: $y = \frac{\pi}{4}$ - ۱۵۲۶ حوزهٔ وجود:

$x > 0$ تابع مثبت است. مینیمم: $x = 0,192$ ؛ $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0,368$ بازای $x = \frac{1}{e}$ ؛

ماکزیم مرزی: $y = 1$ بازای $x = +0$. مقرر بسمت بالا است 1027 - حوزه وجود تابع: $x > 0$. مینیمم مرزی: $y = 0$ بازای $x = +0$ ؛ ماکزیم

$1,44$ ؛ $y = e^{\frac{1}{e}}$ بازای $x = e$. مجانب: $y = 1$ ؛ 1028 - حوزه وجود: $x > -1$ ، $x \neq 0$. تابع مثبت است . نقطه انفصال قابل حذف: $x = 0$. نقطه اکسترم ندارد ، تابع نزولی است . مقرر بسمت بالا است . مجانبها: $x = -1$ و $y = 1$ ؛ 1029 - تابع بازای $x > 0$ یکنوا است . مینیمم مرزی:

$y = 0$ بازای $x = +0$. مجانب: $y = e\left(x - \frac{1}{y}\right)$ ؛ 1030 - تابع مثبت است . نسبت به محور Oy متقارن است . نقاط انفصال: $x = \pm 1$. مینیمم:

؛ $y = e$ بازای $x = 0$ ؛ ماکزیم: $x = 0,15$ ؛ $y = \frac{1}{\sqrt{e}}$ بازای $x = \pm \sqrt{3}$.

چهار نقطه عطف . مجانبها: $x = -1$ بازای $x \rightarrow -1 + 0$ ؛ $x = 1$ بازای $x \rightarrow 1 - 0$ و $y = 0$ بازای $x \rightarrow \infty$ ؛ 1031 - توابع x و y نامنفی هستند ؛

$x_{\min} = 0$ بازای $t = -1$ ؛ $y_{\min} = 0$ بازای $t = 1$. بازای $t > -1$ مقرر بسمت بالا و بازای $t < -1$ مقرر بسمت پائین است 1032 - نقاط تقاطع با محورهای مختصات: $(0, 0)$ بازای $t = 0$ ؛ $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ بازای

$t = \pm \sqrt{3}$ و $(0, -2)$ بازای $t = 2$ ؛ $x_{\max} = 1$ و $y_{\max} = 2$ بازای $t = 1$ (نقطه برگشت) ؛ $y_{\min} = -2$ بازای $t = -1$. بازای $t < 1$ مقرر بسمت بالا و بازای $t > 1$ مقرر بسمت پائین است 1033 - نقطه تقاطع

با محورهای مختصات: $(0, 0)$ بازای $t = 0$ ؛ $x_{\max} = 0$ بازای $t = 0$ ؛ $x_{\min} = 4$ بازای $t = 2$ ؛ با صعود t ، y نزول میکند . نقطه عطف: $(0, 3)$ ؛ $(-0, 0, 8)$

بازای $t \approx -0,32$ (تقریباً) . مجانبها: $y = 0$ ، $x = -\frac{1}{y}$ و $y = \frac{x}{y} - \frac{3}{4}$ ؛

1034 - نقطه تقاطع با محور Oy : $(0, 1)$ بازای $t = 0$ ؛ نقطه تقاطع با محور Ox : $(-1, 0)$ بازای $t = \infty$. اکسترمهای مرزی: $x_{\min} = 0$ و $y_{\max} = 0$ بازای $t = 0$ و $x_{\max} = -1$ و $y_{\min} = 0$ بازای $t = \infty$. نقطه عطف ندارد .

مجانب: $y = \frac{1}{y}$. بازای $|t| > 1$ مقرر بسمت بالا و بازای $|t| < 1$ مقرر

بسمت پائین است 1035 - توابع x و y مثبت هستند ؛ $x_{\min} = 1$ و $y_{\min} = 1$ بازای $t = 0$ (نقطه برگشت) . بازای $t < 0$ مقرر بسمت بالا است ؛ بازای $t > 0$ مقرر بسمت پائین است . مجانب: $y = 2x$ بازای $t \rightarrow +\infty$.

۱۵۳۶ - حوزه اصلی: $[0, \pi]$. نقاط تقاطع با محورهای مختصات: $(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0)$

بازای $t = \frac{\pi}{6}$ ؛ $(0, -\frac{a}{\sqrt{2}})$ بازای $t = \frac{\pi}{4}$ ؛ $(-a, 0)$ بازای

$t = \frac{\pi}{2}$ ؛ $(0, \frac{a}{\sqrt{2}})$ بازای $t = \frac{3\pi}{4}$ ؛ $(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0)$ بازای $t = \frac{5\pi}{6}$.

اکسترمم‌ها: $x_{\max} = a$ و $y_{\max} = a$ بازای $t = 0$ ؛ $y_{\min} = -a$ بازای

$t = \frac{\pi}{3}$ ؛ $x_{\min} = -a$ بازای $t = \frac{\pi}{2}$ ؛ $y_{\max} = a$ بازای $t = \frac{2\pi}{3}$ ؛

$x_{\max} = a$ و $y_{\min} = -a$ بازای $t = \pi$. بازای $0 < t < \frac{\pi}{4}$ مقعر بسمت

بالا، بازای $\frac{\pi}{4} < t < \pi$ مقعر بسمت پائین است. ۱۵۳۷ - توابع x و y

نامنفی و دوره‌ای میباشند؛ حوزه اصلی $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$. اکسترمم‌ها: $x_{\min} = 0$

و $y_{\max} = 1$ بازای $t = \frac{\pi}{4}$ و $x_{\max} = 1$ و $y_{\min} = 0$ بازای $t = 0$.

مقعر بسمت بالا است. ۱۵۳۸ - حوزه وجود: $t > 0$. نسبت به خط $x + y = 0$

مقارن است. اکسترمم‌ها: $x_{\min} = -\frac{1}{e} \approx -0,37$ ، $y = -e \approx -2,72$

بازای $t = \frac{1}{e}$ ؛ $y_{\max} = \frac{1}{e}$ ، $x = e$ بازای $t = e$. نقاط عطف:

$x_1 = -\sqrt{2} e^{-\sqrt{2}} \approx -0,34$ ، $y_1 = -\sqrt{2} e^{\sqrt{2}} \approx -5,82$ بازای

$t = e^{-\sqrt{2}} \approx 0,24$ و $x_2 = \sqrt{2} e^{\sqrt{2}}$ ، $y_2 = \sqrt{2} e^{-\sqrt{2}}$ بازای

$t = e^{\sqrt{2}} \approx 4,10$. بازای $t = \frac{1}{e}$ علامت تقعر عوض میشود. مجانب‌ها:

$x = 0$ و $y = 0$. ۱۵۳۹ - توابع x و y دوره‌ای با دوره $T = 2\pi$ ؛ حوزه

اصلی $-\pi \leq t \leq \pi$. منحنی نسبت به محورهای مختصات مقارن است. منحنی

دارای دو شاخه است. اکسترمم‌ها: $x_{\min} = a$ ، $y = 0$ بازای $t = 0$ ؛

$x_{\max} = -a$ ، $y = 0$ بازای $t = \pm \pi$. بازای $-\pi < t < -\frac{\pi}{2}$ و

$-\frac{\pi}{2} < t < \pi$ مقعر بسمت بالا است؛ بازای $0 < t < \frac{\pi}{2}$ و

$\frac{\pi}{2} < t < \pi$ مقعر بسمت پائین است. ۱۵۴۰ - نسبت به محور Oy مقارن است؛ $y_{\min} = 0$

$x = 0$ بازای $t = 0$. مقرر به سمت پائین است ۱۰۴۱ - معادلات پارامتری :

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad x = \frac{3at}{1+t^3} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

است . نقطه تقاطع با محورهای مختصات : $O(0, 0)$ (نقطه مضاعف) .

$$y_{\max} = a\sqrt[3]{4} \quad ; \quad y = a\sqrt[3]{2} \approx 1,2a \quad \text{بازای} \quad x_{\max} = a\sqrt[3]{4} \approx 1,09a$$

$x = a\sqrt[3]{2}$. مجانب : $x + y + a = 0$ - نسبت به مبدأ مختصات ،

محورهای مختصات و نیمسازهای زوایای مختصات متقارن است . $O(0, 0)$

نقطه منفرد است . نقاط تقاطع با محورهای مختصات : $(\pm 1, 0)$ و $(0, \pm 1)$.

$$|x|_{\min} = 1 \quad \text{بازای} \quad y = 0 \quad ; \quad |x|_{\max} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \approx 1,20$$

$$|y|_{\max} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \quad ; \quad x = 0 \quad \text{بازای} \quad |y|_{\min} = 1 \quad ; \quad |y| = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,71$$

$$x = \frac{1-t^3}{t^2}, \quad \text{۱۰۴۳ - معادلات پارامتری} \quad ; \quad |x| = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{بازای}$$

$y = \frac{1-t^3}{t}$ که در آن $t = \frac{y}{x}$ ($-\infty < t < +\infty$) . منحنی دارای دو شاخه و

نسبت به خط $x + y = 0$ متقارن است . اکستریم ها : $x_{\min} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 1,89$ ،

$$y_{\max} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx -2,38 \quad \text{بازای} \quad y = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx -1,26 \quad ; \quad t = -\sqrt[3]{2}$$

$$x = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx 2,38 \quad \text{بازای} \quad x = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx 0,79 \quad ; \quad t = -\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{نقاط عطف} :$$

$$x_1 \approx 2,18, \quad y_1 \approx -4,14 \quad \text{بازای} \quad t = -\sqrt{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})} \approx -1,90$$

$$x_2 \approx 4,14, \quad y_2 \approx -2,18 \quad \text{بازای} \quad t = -\sqrt{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})} \approx -0,53$$

بازای $t = -\sqrt[3]{2}$ علامت تقعر عوض میشود ۱۰۴۴ - منحنی متشکل از خط

$y = x$ و شاخه هذلولی گونه $x = (1+t)^{\frac{1}{2}}$ ، $y = (1+t)^{\frac{1}{4}}$

(e, e) نقطه مضاعف است . منحنی بازای $x \neq y$ ($-1 < t < +\infty$) میباشد .

مقعر بسمت بالا است. مجانب‌ها: $y = 1$ و $x = 1$ - ۱۵۴۵ - حوزه وجود: $|x| \geq \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,88$. منحنی نسبت به محورهای

مختصات متقارن است. مینیمم مرزی $|y| = 0$ بازای $x = \pm \ln(1 + \sqrt{2})$. بازای $y > 0$ مقعر به سمت پائین و بازای $y < 0$ مقعر بسمت بالا است. مجانب‌ها: $y = x$ و $y = -x$ - ۱۵۴۶ - حوزه وجود

تابع: $r \geq 0, |\varphi| \leq \alpha$ که در آن $\alpha = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$. منحنی بسته

است. نسبت به محور قطبی متقارن است. ماگزیمم: $r = a + b$ بازای $\varphi = 0$ ؛ مینیمم مرزی: $r = 0$ بازای $\varphi = \pm \alpha$ - ۱۵۴۷ - حوزه وجود:

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ ؛ $\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$ ؛ تابع r دوره‌ای با دوره $\frac{2\pi}{3}$ است. منحنی بسته و دارای سه برگ مساوی است. محورهای تقارن:

$\varphi = \frac{\pi}{6}$ ، $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ و $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ مبدأ مختصات $O(0, 0)$ نقطه سه‌گانه است.

بازای $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ داریم: ماگزیمم $r = a$ بازای $\varphi = \frac{\pi}{6}$ و مینیمم $r = 0$

بازای $\varphi = 0$ و $\varphi = \frac{\pi}{3}$ - ۱۵۴۸ - حوزه وجود تابع: $|\varphi| < \frac{\pi}{6}$ و

$\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5}{6}\pi$ ؛ دوره: $\frac{2\pi}{3}$. مینیمم: $r = a$ بازای $\varphi = 0$ و

$\varphi = \pm \frac{5\pi}{6}$. مجانب‌ها: $\varphi = \pm \frac{\pi}{6}$ ، $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ و $\varphi = \pm \frac{5\pi}{6}$

- ۱۵۴۹ - حلزونی، مبدأ مختصات نقطه مجانبی‌اش میباشد؛ r با صعود φ بطور یکنوا نزول میکند. مجانب: $\varphi = 1$ - ۱۵۵۰ - حوزه وجود:

$r \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62$. ماگزیمم مرزی: $\varphi = \pi$ بازای $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ؛

مینیمم: $\varphi = \arccos \frac{1}{4} \approx \arccos 0,25 \approx 1,107$ بازای $r = 2$. مجانب: $r \cos \varphi = 1$

بازای $r \rightarrow +\infty$ - ۱۵۵۱ - دسته سهمیها براس $(1, a-1)$ (مینیمم‌ها). نقاط تقاطع با محورهای مختصات: $(0, a)$ و $(1 \mp \sqrt{1-a}, 0)$ (بازای $a \leq 1$).

مقعر بسمت بالا است - ۱۵۵۲ - دسته هذلولی‌ها بازای $a \neq 0$ و خط $y = x$ بازای $a = 0$. مینیمم‌ها: $y = 2|a|$ بازای $x = |a|$ و ماگزیمم‌ها:

$y = -2|a|$ بازای $x = -|a|$ (بازای $a \neq 0$). مجانب‌ها: $y = x$ و $y = -x$

۱۵۵۳- دستهٔ بیضی‌ها بازای $0 < a < +\infty$ ؛ دستهٔ هذلولیها بازای $-\infty < a < 0$ ؛ خط $y = x$ بازای $a = 0$. تمام منحنی‌های دسته‌ها از نقاط $(-1, -1)$ و $(1, 1)$ میگذرانند . بازای $y \geq x$ داریم : (۱) ماگزیمم $y = \sqrt{1+a}$ بازای $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ اگر $a > 0$ ؛ ماگزیمم $y = -\sqrt{1+a}$

بازای $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ اگر $-1 < a < 0$ ؛ مینیمم‌های مرزی $y = \mp 1$

بازای $x = \mp 1$ (۲) $a \neq 0$) تقرر بسمت پائین . بازای $y \leq x$ داریم :

(۱) مینیمم $y = -\sqrt{1+a}$ بازای $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ اگر $a > 0$ ؛ مینیمم

$y = \sqrt{1+a}$ بازای $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ اگر $-1 < a < 0$ ؛ ماگزیمم‌های مرزی

$y = \mp 1$ بازای $x = \mp 1$ (۲) تقرر بسمت بالا . مجانب‌ها :

$y = (1 + \sqrt{-a})x$ و $y = (1 - \sqrt{-a})x$ بازای $a < 0$ ۱۵۵۴- دسته

منحنی‌های نمایی اگر $a \neq 0$ ؛ خط $y = 1 + \frac{x}{2}$ اگر $a = 0$. نقطهٔ مشترک

دسته : $(0, 1)$. مینیمم‌ها : $y = \frac{1}{2a}(1 + \ln 2a)$ بازای $x = \frac{1}{a} \ln 2a$ اگر

$a > 0$ ؛ صعودی یکنواست اگر $a \leq 0$. مجانب : $y = \frac{x}{2}$ ۱۵۵۵- دسته

منحنی‌های مار بر نقطهٔ $(0, 0)$ که مماس مشترک آنها در این نقطه خط

$y = x$ میباشد . ماگزیمم $y = ae^{-1} \approx 0,37a$ بازای $x = a$ اگر $a > 0$ ؛

مینیمم $y = ae^{-1}$ بازای $x = a$ اگر $a < 0$. نقطهٔ عطف : $x = 2a$ ،

$y = 2ae^{-2} \approx 0,27a$. مجانب $y = 0$ ۱۵۵۸- $\frac{a^{m+n} m^n n^m}{(m+n)^{m+n}}$

۱۵۵۹- $(m+n) \left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$ ۱۵۶۰- مبنای دستگاه لگاریتمی نیابستی از

$e^{\frac{1}{e}} \approx 1,445$ تجاوز کند . ۱۵۶۱- سریع بضلع \sqrt{S} ۱۵۶۲- زوایای

حادهٔ مثلث 30° و 60° میباشد ۱۵۶۳- ارتفاع ظرف $H = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

مسواوی قطر قاعدهٔ آن میباشد ؛ سطح کل $P = \sqrt[3]{0,54\pi V^2}$ ۱۵۶۴-

۵۸۱

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + \lambda}}{\epsilon} \quad \text{که در آن } 2\alpha \text{ قوس قطعه دایره و } 2\varphi \text{ قوس}$$

متکی بر ضلع مستطیل است ۱۵۶۵ - اضلاع مستطیل عبارتند از $a\sqrt{2}$ و $b\sqrt{2}$ - ۱۵۶۶ اگر $h > b$ در آنصورت محیط P مستطیل محاطی به پایه x و ارتفاع y دارای ماگزیم مرزی بازای $y = h$ است؛ اگر $h < b$ در آنصورت P دارای مینیم مرزی بازای $y = 0$ است. اگر $h = b$ در آنصورت

$$\text{محیط } P \text{ ثابت است } 1567 - a = \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad h = d \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ابعاد } 1568 -$$

$$\text{متوازی السطوح عبارتند از } \frac{2R}{\sqrt{3}}, \quad \frac{2R}{\sqrt{3}} \text{ و } \frac{2R}{\sqrt{3}}, \quad \frac{2R}{\sqrt{3}} \quad 1569 -$$

۱۵۷۰ - $\approx 81\%$ $\pi R^2 (1 + \sqrt{5})$ سطح کره ۱۵۷۱ - حجم مخروط مساوی

$$\text{دو برابر حجم کره است } 1572 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} R^3 \quad 1573 - \text{اگر } \frac{1}{2} < \text{tg} \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

در آنصورت ماگزیم سطح کل استوانه بازای $r = \frac{R}{2(1 - \text{tg} \alpha)}$ حاصل میشود

که در آن شعاع قاعده استوانه است. اگر $\text{tg} \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ در آنصورت بازای

$$r = R \quad \text{ماگزیم مرزی داریم } 1574 - \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$$

۱۵۷۵ - ۱؛ ۲؛ ۳ اگر $b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$ در آنصورت ماگزیم طول وتر

$MB = \frac{a^2}{c}$ که در آن $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ و نقطه M دارای مختصات

$$x = \pm \frac{a^2}{c^2} \sqrt{a^2 - 2b^2} \quad y = \frac{b^2}{c^2} \quad \text{حاصل میشود؛}$$

اگر $b > \frac{a}{\sqrt{2}}$ ماگزیم مرزی طول وتر $MB = 2b$ بازای $y = b, x = 0$

$$\text{حاصل میشود } 1577 - x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad ab \quad 1578 - \text{مینیم}$$

سطح بازای $r = h = \sqrt{\frac{3\gamma}{5\pi}}$ حاصل میشود که در آن شعاع قاعده استوانه

و ارتفاع آن است $\varphi = 1079 - 60^\circ = 1080$ - ذوزنقه محیط بر دایره .

ساقها : $AB = CD = a \sec^2 \frac{\alpha}{2}$ $\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{r}{p}} \approx \text{arc } 294^\circ - 1081$

که در آن α زاویه مرکزی قطاع باقی مانده میباشد $\varphi = \text{arc cos } \frac{q}{p} - 1082$

اگر $\text{arc cos } \frac{q}{p} \geq \text{arctg } \frac{a}{b}$; $\varphi = \text{arc tg } \frac{a}{b}$; اگر $\text{arc cos } \frac{q}{p} < \text{arc tg } \frac{a}{b}$

$AM = a \left(1 + \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \right)^{-1} - 1084$ $\frac{|av \mp bu| \sin \theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta}} - 1083$

۱۰۸۵ - فاصله نقطه نورانی از مرکز کره بزرگتر $x = \frac{a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}$

گر $a \geq r + R \sqrt{\frac{R}{r}}$ و $x = a - r$ اگر $r + R < a < r + R \sqrt{\frac{R}{r}}$

که در آن a فاصله مراکز دو کره است $\frac{a}{\sqrt{\frac{r}{R}}} - 1086$

$v = \sqrt{\frac{a}{\frac{r}{2k}}} - 1088$ $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} - 1087$

تناسب است . $\text{arc tg } k - 1089$ - بازای $a \leq \varepsilon$ زاویه شیب میله

از دستور $\cos \alpha = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}$ تعیین میشود ؛ بازای $a > \varepsilon$ تعادل

برقرار نمیشود $k = -2 - 1091$ ؛ $b = 3$ ؛ $y = 3(1-x)$ ؛ $a = \frac{1}{y} e^x - 1092$

$c = e^x \left(1 - x + \frac{x^2}{2} \right)$ ؛ $b = e^x (1 - x)$ (الف - ۱۰۹۳) یک ب) دو

(پ) دو (الف - ۱۰۹۵) $\sqrt{2}$ ، (ب) (۲، ۲) ، (ب) ۵۰۰۰۰۰۰ ، (الف) ۱۰۰، ۰۰۰۰۰۰۰

(تقریباً!) - ۱۰۹۶ $p \left(1 + \frac{2x}{p} \right)^{\frac{3}{2}}$ - ۱۰۹۷ $\frac{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$ که در آن

$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ خروج از مرکز بیضی است $\frac{(e^2 x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} - 1098$

که در آن $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ خروج از مرکز هذلولی است $1099 - 3|axy|^{\frac{1}{3}}$

$1600 - \frac{a^2}{b} (1 - \varepsilon^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$ که در آن ε خروج از مرکز بیضی است

$$\frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'r'' - r r''^2|} - 1604 \quad at - 1602 \quad 2\sqrt{2ay} - 1601$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{2ar} - 1607 \quad r\sqrt{1+m^2} - 1606 \quad \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2} - 1605$$

$$x_1 \approx 68.0m - 1610 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{y}}, -\frac{\ln y}{2}\right) - 1609 \quad \frac{a^2}{2r} - 1608$$

1611 - سهمی نیمه مکعب $27p\eta^2 = 8(\xi - p)^3$ 1612 - آستروئید

1613 - آستروئید $c^2 = a^2 - b^2$ که در آن $(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$

1614 - خط زنجیری $\eta = a \operatorname{ch} \frac{\xi}{a}$ $(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

1615 - حلزونی لگاریتمی $\rho = ma e^{m\left(\psi - \frac{\pi}{3}\right)}$ $\xi = \pi a + a(\tau - \sin \tau) - 1616$

$\xi x_1 = -2,602 - 1617$ $\tau = (t - \pi)$ که در آن $\eta = -2a + a(1 - \cos t)$

$x_2 = 1,221$ $\xi x_1 = -0,724 - 1618$ $x_2 = 2,262$ $\xi x_2 = 0,340$

$x_1 = -1621$ $\pm 0,824 - 1620$ $x = 2,087 = \operatorname{arc} 119^\circ 30' - 1619$

$\xi x_1 = 4,730 - 1623$ $x_1 = 2,062 - 1622$ $x_2 = 9,999$ $\xi = 0,472$

$x = \pm 1,199678 - 1625$ $x = -0,06710 - 1624$ $x_2 = 7,803$

$\xi x_1 = 2,081 - 1627$ $x_2 = 10,904$ $\xi x_2 = 7,725$ $\xi x_1 = 4,493 - 1626$

$x_2 = 0,940$

فصل ۳

در جوابهای این فصل محض اختصار ثابت اختیاری C اضافه نشده است

$$\frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + -1629 \quad 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{v}x^7 - 1628$$

$$x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 - 1630 \quad + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{v}x^7$$

$$a \ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} - 1632 \quad x - \frac{1}{x} - 2 \ln|x| - 1631$$

$$\frac{\xi}{\circ} x \sqrt[\xi]{x} - \frac{\gamma \xi}{1\gamma} x \sqrt[\gamma]{x^\circ} + -1\gamma\gamma\xi \quad \frac{\gamma}{\gamma} x \sqrt{x} + \gamma \sqrt{x} - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$-\frac{\gamma}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma} x - \frac{\gamma}{\circ} x^\gamma + \frac{1}{\lambda} x^\gamma \right) - 1\gamma\gamma\circ \quad + \frac{\xi}{\gamma} \sqrt[\xi]{x^\gamma}$$

$$\gamma x - \frac{1\gamma\gamma}{\circ} \sqrt[\gamma]{\gamma\gamma x^\circ} + \frac{\gamma}{\gamma} \sqrt[\gamma]{\gamma x^\gamma} - 1\gamma\gamma\gamma \quad \frac{\xi(x^\gamma + \gamma)}{\gamma \sqrt{x}} - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$-x + \frac{1}{\gamma} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 1\gamma\xi\circ \quad x - \text{arc tg } x - 1\gamma\gamma\gamma \quad \ln|x| - \frac{1}{\xi x^\xi} - 1\gamma\gamma\lambda$$

$$\text{arc sin } x + \ln(x + \sqrt{1+x^\gamma}) - 1\gamma\xi\gamma \quad x + \gamma \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - 1\gamma\xi\gamma$$

$$\frac{\xi^x}{\ln \xi} + \gamma \times \frac{\gamma^x}{\ln \gamma} + \frac{\gamma^x}{\ln \gamma} - 1\gamma\xi\xi \quad \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^\gamma - 1}}{x + \sqrt{x^\gamma + 1}} \right| - 1\gamma\xi\gamma$$

$$\frac{1}{\gamma} e^{\gamma x} - e^x + x - 1\gamma\xi\gamma \quad - \frac{\gamma}{\ln \circ} \left(\frac{1}{\circ} \right)^x + \frac{1}{\circ \ln \gamma} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^x - 1\gamma\xi\circ$$

$$(\cos x + \sin x) \times \text{sgn}(\cos x - \sin x) - 1\gamma\xi\lambda \quad x - \cos x + \sin x - 1\gamma\xi\gamma$$

$$a \text{ch } x + b \text{sh } x - 1\gamma\circ\gamma \quad -x + \text{tg } x - 1\gamma\circ\circ \quad -x - \text{ctg } x - 1\gamma\xi\gamma$$

$$\ln|x+a| - 1\gamma\circ\circ \quad x - \text{ctg } x - 1\gamma\circ\gamma \quad x - \text{th } x - 1\gamma\circ\gamma$$

$$-\frac{1}{\xi} (1 - \gamma x)^{\frac{\xi}{\gamma}} - 1\gamma\circ\gamma \quad \frac{1}{\gamma\gamma} (\gamma x - \gamma)^{\gamma\gamma} - 1\gamma\circ\gamma$$

$$-\frac{\circ}{\gamma} \sqrt[\circ]{(1-x)^\gamma} - 1\gamma\gamma\circ \quad - \frac{\gamma}{1\circ(\circ x - \gamma)^{\frac{\gamma}{\gamma}}} - 1\gamma\circ\gamma \quad - \frac{\gamma}{\circ} \sqrt[\gamma]{\gamma - \circ x} - 1\gamma\circ\lambda$$

$$\frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} \ln \left| \frac{\sqrt{\gamma} + x \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} - x \sqrt{\gamma}} \right| - 1\gamma\gamma\gamma \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{arc tg} \left(x \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma}} \right) - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln |x \sqrt{\gamma}| - 1\gamma\gamma\xi \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{arc sin} \left(x \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma}} \right) - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$-x \sin \circ\alpha - \frac{1}{\circ} \cos \circ x - 1\gamma\gamma\gamma \quad - \left(e^{-x} + \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x} \right) - 1\gamma\gamma\circ \quad + \sqrt{\gamma x^\gamma - \gamma}$$

$$-\text{ctg} \frac{x}{\gamma} - 1\gamma\gamma\gamma \quad \text{tg} \frac{x}{\gamma} - 1\gamma\gamma\lambda \quad - \frac{1}{\gamma} \text{ctg} \left(\gamma x + \frac{\pi}{\xi} \right) - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$\frac{1}{\gamma} [\text{ch}(\gamma x + \gamma) + \text{sh}(\gamma x - \gamma)] - 1\gamma\gamma\gamma \quad - \text{tg} \left(\frac{\pi}{\xi} - \frac{x}{\gamma} \right) - 1\gamma\gamma\circ$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{1-x^{\gamma}} - 1774 & -\gamma \operatorname{cth} \frac{x}{\gamma} - 1773 & \gamma \operatorname{th} \frac{x}{\gamma} - 1772 \\
& -\frac{1}{\gamma(1+x^{\gamma})} - 1777 & -\frac{1}{\xi} \ln|\gamma - \gamma x^{\gamma}| - 1776 & \frac{1}{\xi} (1+x^{\gamma})^{\frac{\xi}{\gamma}} - 1775 \\
& \frac{1}{\lambda \sqrt{\gamma}} \ln \left| \frac{x^{\xi} - \sqrt{\gamma}}{x^{\xi} + \sqrt{\gamma}} \right| - 1774 & & \frac{1}{\xi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^{\gamma}}{\gamma} - 1778 \\
& -\ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^{\gamma} + 1}}{x} \right| - 1782 & \cos \frac{1}{x} - 1781 & \gamma \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} - 1780 \\
& -\frac{1}{\sqrt{x^{\gamma} - 1}} - 1785 & \frac{x}{\sqrt{x^{\gamma} + 1}} - 1784 & -\operatorname{arc} \sin \frac{1}{|x|} - 1783 \\
& \gamma \operatorname{sgn} x \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|}) - 1787 & & \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda x^{\gamma} + \gamma} - 1786 \\
& -\frac{1}{\gamma} e^{-x^{\gamma}} - 1789 & \gamma \operatorname{arc} \sin \sqrt{x} - 1788 & (x(1+x) > 0) \\
& -\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-\gamma x}}) - 1792 & \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x - 1791 & \ln(\gamma + e^x) - 1790 \\
& \frac{1}{\gamma} \sin^{\gamma} x - 1795 & \ln|\ln(\ln x)| - 1794 & \frac{1}{\gamma} \ln^{\gamma} x - 1793 \\
& \ln|\sin x| - 1798 & -\ln|\cos x| - 1797 & \frac{\gamma}{\sqrt{\cos x}} - 1796 \\
& \frac{\sqrt{a^{\gamma} \sin^{\gamma} x + b^{\gamma} \cos^{\gamma} x}}{a^{\gamma} - b^{\gamma}} (a^{\gamma} \neq b^{\gamma}) - 1700 & & \frac{\gamma}{\gamma} \sqrt{1 - \sin^{\gamma} x} - 1799 \\
& -1700, 2 & -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln|\sqrt{\gamma} \cos x + \sqrt{\cos^{\gamma} x}| - 1700, 1 & \\
& \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln(\sqrt{\gamma} \operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch}^{\gamma} x}) - 1700, 3 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \sin(\sqrt{\gamma} \sin x) & \\
& & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\gamma}} \right) - 1702 & -\frac{\xi}{\gamma} \sqrt{\operatorname{ctg}^{\gamma} x} - 1701 \\
& \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{\gamma} \right| - 1705 & \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{\gamma} + \frac{\pi}{\xi} \right) \right| - 1704 & \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} \right| - 1703 \\
& \frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma x}{\sqrt{\gamma}} + \sqrt{\operatorname{sh}^{\xi} x + \operatorname{ch}^{\xi} x} \right) - 1707 & & \gamma \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x - 1706 \\
& -\frac{1}{\operatorname{arc} \sin x} - 1710 & \frac{1}{\gamma} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^{\gamma} - 1709 & \gamma \sqrt{\operatorname{th} x} - 1808
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^r - 1}{x \sqrt{r}} - 1712 \qquad \frac{r}{r} \ln \frac{r}{r} (x + \sqrt{1+x^r}) - 1711$$

$$-\frac{1}{10(x^0+1)^r} - 1713 \qquad \frac{1}{r \sqrt{r}} \ln \frac{x^r - x \sqrt{r+1}}{x^r + x \sqrt{r+1}} - 1714$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \ln |x| \quad ; n \neq -r \text{ بازي} \quad \frac{r}{n+r} \ln \left(x^{\frac{n+r}{r}} + \sqrt{1+x^{n+r}} \right) - 1715$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \operatorname{arc} \sin \left(\sqrt{\frac{r}{r}} \sin x \right) - 1716 \quad \frac{1}{r} \ln^r \frac{1+x}{1-x} - 1717 \quad n = -r \text{ بازي}$$

$$\frac{1}{r(\ln^r - \ln^r)} \times \ln \left| \frac{r^x - r^x}{r^x + r^x} \right| - 1718 \qquad \frac{1}{r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{tg}^r x) - 1719$$

$$\frac{r}{r} x^r - \frac{1r}{0} x^0 + \frac{9}{r} x^r - 1720 \qquad r \sqrt{1 + \sqrt{1+x^r}} - 1721$$

$$-x - r \ln |1-x| - 1722 \qquad -\frac{(1-x)^{11}}{11} + \frac{(1-x)^{12}}{12} - 1723,1$$

$$9x - \frac{r}{r} x^r + \frac{1}{r} x^r - r \sqrt{\ln |r+x|} - 1724 \quad \frac{1}{r} (1-x)^r + \ln |1+x| - 1725$$

$$\frac{r}{\sqrt{r}} \ln \left| \frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{r-x}} \right| + r \ln |r-x^r| - x - 1726 \quad x + \ln (1+x^r) - 1727$$

$$-1728 \quad \frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{99(1-x)^{99}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} - 1729$$

$$\frac{1}{r} \left[(x+1)^{\frac{r}{r}} - -1730 \quad \frac{x^r}{0} - \frac{x^r}{r} + \frac{x^r}{r} - \frac{x^r}{r} + x - \ln |x+1| \right]$$

$$-\frac{1+r}{10} \times -1731 \quad -\frac{\lambda+r \cdot x}{r \cdot 0} (r-0x)^{\frac{r}{r}} - 1732 \quad - (x-1)^{\frac{r}{r}} \left. \right]$$

$$\frac{1}{r} \ln \left| \frac{x-1}{x+r} \right| - 1733 \quad \frac{r}{1r} (1+x^r)^{\frac{r}{r}} - \frac{r}{\lambda} (1+x^r)^{\frac{r}{r}} - 1734 \times (1-rx)$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{r}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{r}} - 1735 \qquad \frac{1}{r} \ln \left| \frac{x-1}{x+r} \right| - 1736$$

$$\frac{1}{10 \sqrt{r}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{r}}{x + \sqrt{r}} \right| - \frac{1}{0 \sqrt{r}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{r}} - 1737$$

$$\frac{1}{r} \ln \frac{x^r+1}{x^r+r} - 1738 \quad \ln \frac{|x+r|^r}{(x+r)^r} - 1739$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\gamma x + a + b}{(a-b)^\gamma (x+a)(x+b)} + \frac{\gamma}{(a-b)^\gamma} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| - 1 \nu \gamma \delta \\
& \frac{1}{a^\gamma - b^\gamma} \left(\frac{1}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{b} - \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} \right) \quad (|a| \neq |b|) - 1 \nu \xi \bullet \\
& \frac{x}{\gamma} \cos \alpha - - 1 \nu \xi \gamma \quad \frac{x}{\gamma} + \frac{1}{\xi} \sin \gamma x - 1 \nu \xi \gamma \quad \frac{x}{\gamma} - \frac{1}{\xi} \sin \gamma x - 1 \nu \xi \gamma \\
& \gamma \sin \frac{x}{\gamma} + - 1 \nu \xi \bullet \quad \frac{1}{\xi} \sin \gamma x - \frac{1}{1 \gamma} \sin \lambda x - 1 \nu \xi \xi \quad - \frac{1}{\xi} \sin (\gamma x + \alpha) \\
& - \frac{1}{1 \bullet} \cos \left(\bullet x + \frac{\pi}{1 \gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} \cos \left(x + \frac{\bullet \pi}{1 \gamma} \right) - 1 \nu \xi \gamma \quad + \frac{\gamma}{\bullet} \sin \frac{\bullet x}{\gamma} \\
& - 1 \nu \xi \delta \quad \sin x - \frac{1}{\gamma} \sin^\gamma x - 1 \nu \xi \lambda \quad - \cos x + \frac{1}{\gamma} \cos^\gamma x - 1 \nu \xi \nu \\
& \frac{\gamma}{\lambda} x + \frac{1}{\xi} \sin \gamma x + \frac{1}{\gamma \gamma} \sin \xi x - 1 \lambda \bullet \bullet \quad \frac{\gamma}{\lambda} x - \frac{1}{\xi} \sin \gamma x + \frac{1}{\gamma \gamma} \sin \xi x \\
& - \frac{\gamma}{1 \gamma} \cos \gamma x - - 1 \nu \bullet \gamma \quad \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg}^\gamma x + \ln |\cos x| 1 \nu \bullet \gamma \quad - x - \operatorname{ctg} x - 1 \nu \bullet \gamma \\
& \quad - \frac{\gamma}{\gamma \xi} \cos \xi x + \frac{1}{\xi \lambda} \cos \gamma x + \frac{\gamma}{1 \gamma \lambda} \cos \lambda x + \frac{1}{1 \gamma \gamma} \cos 1 \gamma x \\
& - \frac{1}{\sin x} + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{\gamma} + \frac{\pi}{\xi} \right) \right| - 1 \nu \bullet \bullet \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 1 \nu \bullet \xi \\
& \ln |\sin x| - \frac{1}{\gamma} \sin^\gamma x - 1 \nu \bullet \nu \quad \frac{1}{\gamma \cos^\gamma x} + \ln |\operatorname{tg} x| - 1 \nu \bullet \gamma \\
& x + \gamma \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x - 1 \nu \gamma \bullet \quad x - \ln (1 + e^x) - 1 \nu \bullet \delta \quad \operatorname{tg} x + \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg}^\gamma x - 1 \nu \bullet \lambda \\
& \frac{\gamma}{\gamma} \operatorname{sh}^\gamma x - 1 \nu \gamma \gamma \quad \frac{x}{\gamma} + \frac{1}{\xi} \operatorname{sh} \gamma x - 1 \nu \gamma \gamma \quad - \frac{x}{\gamma} + \frac{1}{\xi} \operatorname{sh} \gamma x - 1 \nu \gamma \gamma \\
& - 1 \nu \gamma \gamma \quad - (\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x) - 1 \nu \gamma \bullet \quad \frac{1}{\xi} \operatorname{sh} \gamma x + \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} \xi x - 1 \nu \gamma \xi \\
& - \frac{1 + \bullet \bullet x^\gamma}{\gamma \gamma \bullet \bullet} (1 - \bullet x^\gamma)^{1 \gamma} - 1 \nu \gamma \nu \quad - \frac{\gamma}{1 \xi \bullet} (\bullet + 1 \gamma x + 1 \xi x^\gamma) (1 - x)^\frac{\xi}{\gamma} \\
& - \frac{1}{1 \bullet} (\lambda + \xi x^\gamma + \gamma x^\xi) \times - 1 \nu \gamma \delta \quad - \frac{\gamma}{1 \bullet} (\gamma \gamma + \lambda x + \gamma x^\gamma) \sqrt{\gamma - x} - 1 \nu \gamma \lambda \\
& \quad - \frac{\gamma + \gamma \bullet \bullet x^\gamma}{1 \bullet \bullet \bullet} (\gamma - \bullet x^\gamma)^\frac{\bullet}{\gamma} - 1 \nu \gamma \bullet \quad \times \sqrt{1 - x^\gamma}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\gamma} \cos^{\gamma} x + -1\gamma\gamma\gamma \quad \left(\frac{\gamma}{\gamma} - \frac{\xi}{\gamma} \sin^{\gamma} x + \frac{\gamma}{11} \sin^{\xi} x \right) \sqrt{\sin^{\gamma} x} - 1\gamma\gamma 1$$

$$-1\gamma\gamma\epsilon \quad \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg}^{\gamma} x + \frac{1}{0} \operatorname{tg}^{\circ} x - 1\gamma\gamma\gamma \quad + \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \cos^{\gamma} x)$$

$$-x - \gamma e^{-\frac{x}{\gamma}} + \gamma \ln(1 + e^{\frac{x}{\gamma}}) - 1\gamma\gamma\circ \quad \frac{\gamma}{\gamma} (-\gamma + \ln x) \sqrt{1 + \ln x}$$

$$(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x})^{\gamma} - 1\gamma\gamma\gamma \quad x - \gamma \ln(1 + \sqrt{1 + e^x}) - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$\frac{x}{\gamma} \sqrt{x^{\gamma} - \gamma} + \ln|x + \sqrt{x^{\gamma} - \gamma}| - 1\gamma\gamma\gamma \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^{\gamma}}} - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$\frac{x}{a^{\gamma} \sqrt{a^{\gamma} + x^{\gamma}}} - 1\gamma\gamma 1 \quad \frac{x}{\gamma} \sqrt{1-x^{\gamma}} + \frac{1}{\gamma} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} - 1\gamma\gamma \circ$$

$$-\frac{\gamma a + x}{\gamma} \sqrt{x(\gamma a - x)} + -1\gamma\gamma\gamma \quad -\sqrt{a^{\gamma} - x^{\gamma}} + a \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$\gamma \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} - 1\gamma\gamma\epsilon \quad + \gamma a^{\gamma} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x}{\gamma a}}$$

$$\frac{\gamma x - (a+b)}{\xi} \sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{(b-a)^{\gamma}}{\xi} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} - 1\gamma\gamma\circ$$

$$\frac{x}{\gamma} \sqrt{a^{\gamma} + x^{\gamma}} + \frac{a^{\gamma}}{\gamma} \ln(x + \sqrt{a^{\gamma} + x^{\gamma}}) - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$\frac{x}{\gamma} \sqrt{a^{\gamma} + x^{\gamma}} - \frac{a^{\gamma}}{\gamma} \ln(x + \sqrt{a^{\gamma} + x^{\gamma}}) - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$\xi \quad x > a \quad \text{اگر} \quad \sqrt{x^{\gamma} - a^{\gamma}} - \gamma a \ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a}) - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$x < -a \quad \text{اگر} \quad -\sqrt{x^{\gamma} - a^{\gamma}} + \gamma a \ln(\sqrt{-x+a} + \sqrt{-x-a})$$

$$\xi \quad x + b > \circ \quad \text{و} \quad x + a > \circ \quad \text{اگر} \quad \gamma \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$x + b < \circ \quad \text{و} \quad x + a < \circ \quad \text{اگر} \quad -\gamma \ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b})$$

$$\frac{\gamma x + a + b}{\xi} \sqrt{(x+a)(x+b)} - \frac{(b-a)^{\gamma}}{\xi} \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) - 1\gamma\gamma \circ$$

$$x(\ln x - 1) - 1\gamma\gamma 1 \quad x + b > \circ \quad \text{و} \quad x + a > \circ \quad \text{اگر}$$

$$-\frac{1}{x} (\ln^{\gamma} x + \gamma \ln x + \gamma) - 1\gamma\gamma\gamma \quad \frac{x^{\gamma+1}}{n+1} \times \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) (n \neq -1) - 1\gamma\gamma\gamma$$

$$-(x+1)e^{-x} - 1\gamma\gamma\circ \quad \frac{\gamma}{\gamma} x^{\frac{\gamma}{\gamma}} \left(\ln^{\gamma} x - \frac{\xi}{\gamma} \ln x + \frac{\Lambda}{\gamma} \right) - 1\gamma\gamma\epsilon$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{x^\gamma+1}{\gamma}e^{-x^\gamma}-1\gamma 9\gamma & -\frac{e^{-\gamma x}}{\gamma}\left(x^\gamma+x+\frac{1}{\gamma}\right)-1\gamma 9\gamma \\
& -\frac{\gamma x^\gamma-1}{\xi}\cos\gamma x+\frac{x}{\gamma}\sin\gamma x-1\gamma 9\gamma & x\sin x+\cos x-1\gamma 9\lambda \\
& \left(\frac{x^\gamma}{\gamma}+\frac{\gamma x}{\gamma}\right)\operatorname{sh}\gamma x-\left(\frac{x^\gamma}{\gamma}+\frac{\gamma}{\gamma\gamma}\right)\operatorname{ch}\gamma x-1\lambda 0\cdot 1 & x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x-1\lambda 0\cdot 0 \\
& x\operatorname{arc}\sin x+\sqrt{1-x^\gamma}-1\lambda 0\cdot 3 & x\operatorname{arc}\operatorname{tg}x-\frac{1}{\gamma}\ln(1+x^\gamma)-1\lambda 0\cdot 2 \\
& -\frac{\gamma+x^\gamma}{\gamma}\sqrt{1-x^\gamma}+\frac{x^\gamma}{\gamma}\operatorname{arc}\cos x-1\lambda 0\cdot 0 & -\frac{x}{\gamma}+\frac{1+x^\gamma}{\gamma}\operatorname{arc}\operatorname{tg}x-1\lambda 0\cdot 8 \\
& x\ln(x+\sqrt{1+x^\gamma})--1\lambda 0\cdot \gamma & -\frac{\operatorname{arc}\sin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^\gamma}}{x}\right|-1\lambda 0\cdot 6 \\
& -\sqrt{x}+(1+x)\times-1\lambda 0\cdot 9 & x-\frac{1-x^\gamma}{\gamma}\ln\frac{1+x}{1-x}-1\lambda 0\cdot \lambda & -\sqrt{1+x^\gamma} \\
& -1\lambda 1\cdot 1 & \ln\operatorname{tg}\frac{x}{\gamma}-\cos x\times\ln\operatorname{tg}x-1\lambda 1\cdot 0 & \times\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{x} \\
& x(\operatorname{arc}\sin x)^\gamma+\gamma\sqrt{1-x^\gamma}\operatorname{arc}\sin x-\gamma x-1\lambda 1\cdot 2 & \frac{1}{\gamma}(x^\gamma-1)e^{x^\gamma} \\
& & \frac{1+x^\gamma}{\gamma}(\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)^\gamma-x\operatorname{arc}\operatorname{tg}x+\frac{1}{\gamma}\ln(1+x^\gamma)-1\lambda 1\cdot 3 \\
& -1\lambda 1\cdot 0 & -\frac{1}{\gamma}x^\gamma-\frac{1}{\gamma}\ln|1-x^\gamma|+\frac{x^\gamma}{\gamma}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|-1\lambda 1\cdot 4 \\
& -\frac{x}{\gamma(1+x^\gamma)}+\frac{1}{\gamma}\operatorname{arc}\operatorname{tg}x-1\lambda 1\cdot 6 & \sqrt{1+x^\gamma}\ln(x+\sqrt{1+x^\gamma})-x \\
& \frac{x}{\gamma}\sqrt{a^\gamma-x^\gamma}+-1\lambda 1\cdot \lambda & \frac{x}{\gamma a^\gamma(a^\gamma+x^\gamma)}+\frac{1}{\gamma a^\gamma}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x}{a}(a\neq 0)-1\lambda 1\cdot \nu \\
& \frac{x}{\gamma}\sqrt{x^\gamma+a}+\frac{a}{\gamma}\ln|x+\sqrt{x^\gamma+a}|-1\lambda 1\cdot 9 & +\frac{a^\gamma}{\gamma}\operatorname{arc}\sin\frac{x}{|a|}(a\neq 0) \\
& & \frac{x(\gamma x^\gamma+a^\gamma)}{\lambda}\sqrt{a^\gamma+x^\gamma}-\frac{a^\xi}{\lambda}\ln(x+\sqrt{a^\gamma+x^\gamma})-1\lambda 2\cdot 0 \\
& \gamma(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}-1\lambda 2\cdot 2 & \frac{x^\gamma}{\xi}-\frac{x}{\xi}\sin\gamma x-\frac{\cos\gamma x}{\lambda}-1\lambda 2\cdot 1
\end{aligned}$$

$$\frac{2(1-x)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 2(1-x) \sin \sqrt{x}}{(1+x)e^{\arctg x}} - 1825 \qquad \frac{(1-x)e^{\arctg x}}{2\sqrt{1+x^2}} - 1828$$

$$\frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] - 1827 \qquad \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - 1826$$

$$\frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} - 1829 \qquad \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} - 1828$$

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x - 1831 \qquad \frac{e^{2x}}{\lambda} (2 - \sin 2x - \cos 2x) - 1830$$

$$-x + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) - e^{-x} \operatorname{arctg}(e^x) - 1832 \qquad -e^x(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| - 1834 \qquad -[x + \operatorname{ctg} x \times \ln(e \sin x)] - 1833$$

$$\text{اگر } ab > 0 \text{، } \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) - 1836 \qquad \frac{e^x}{x+1} - 1835$$

$$\frac{2}{\sqrt{y}} \times - 1837 \qquad ab < 0 \text{، } \frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{|a|} + x \sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x \sqrt{|b|}} \right|$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - (\sqrt{2} + 1)}{x^2 + (\sqrt{2} - 1)} \right| - 1839 \qquad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| - 1838 \qquad \times \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{y}}$$

$$- 1841 \qquad \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - 1840$$

$$\text{عددی } k \text{، } (a \neq k\pi) \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x \cos a + 1) + \operatorname{ctg} a \times \operatorname{arctg} \frac{x - \cos a}{\sin a}$$

$$\frac{1}{4} \ln(x^2 - x^2 + 2) + \frac{1}{2\sqrt{y}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{y}} - 1842 \qquad \text{است درست}$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 \sin x - \cos x}{\sin x - \cos x} \right| - 1844 \qquad \frac{1}{9} \ln \{ |x^2 + 1| (x^2 - 2)^2 \} - 1843$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \ln(x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}) - 1846 \qquad \operatorname{arctg} \frac{(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1)}{2} - 1845$$

$$b < 0 \text{ و } a > 0 \text{، } \frac{1}{\sqrt{-b}} \operatorname{arcsin} \left(x \sqrt{-\frac{b}{a}} \right) \text{ اگر } b > 0 \text{، } \text{اگر}$$

$$\ln \left| x + \frac{1}{\gamma} + \sqrt{x^\gamma + x} \right| - 1848 \qquad \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{\gamma}} - 1849$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(x - \frac{1}{\xi} + \sqrt{x^\gamma - \frac{1}{\gamma} x + 1} \right) - 1849$$

$$- \sqrt{0 + x - x^\gamma} + \frac{1}{\gamma} \arcsin \frac{\gamma x - 1}{\sqrt{\gamma}} - 1851$$

$$\sqrt{x^\gamma + x + 1} + \frac{1}{\gamma} \ln \left(x + \frac{1}{\gamma} + \sqrt{x^\gamma + x + 1} \right) - 1852$$

$$\arcsin \frac{\gamma \sin x - 1}{\gamma} - 1853, 1$$

$$\frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} \arcsin \frac{\xi x^\gamma + \gamma}{\sqrt{1 \gamma}} - 1853$$

$$\frac{1}{\gamma} \sqrt{x^\xi - \gamma x^\gamma - 1} + \frac{1}{\gamma} \ln \left| x^\gamma - 1 + \sqrt{x^\xi - \gamma x^\gamma - 1} \right| - 1854$$

$$- \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 + x^\gamma - x^\xi} + \frac{\gamma}{\xi} \arcsin \frac{\gamma x^\gamma - 1}{\sqrt{0}} - 1855$$

$$\left(\left| x + \frac{1}{\gamma} \right| > \frac{\sqrt{0}}{\gamma} \right) - 1856 \qquad - \ln \left| \frac{x + \gamma + \gamma \sqrt{x^\gamma + x + 1}}{x} \right| - 1857$$

$$\frac{-1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left| \frac{1 - x + \sqrt{\gamma(1 + x^\gamma)}}{1 + x} \right| - 1858 \qquad \frac{\sqrt{x^\gamma + x - 1}}{x} + \frac{1}{\gamma} \arcsin \frac{x - \gamma}{|x| \sqrt{0}}$$

$$- 1860 \qquad \arcsin \frac{x - \gamma}{|x - 1| \sqrt{\gamma}} \quad (|x| > \sqrt{\gamma}) - 1861$$

$$\frac{1}{0} \times \frac{\sqrt{x^\gamma + \gamma x - 0}}{x + \gamma} + \frac{1}{0 \sqrt{0}} \arcsin \frac{x + \gamma}{|x + \gamma| \sqrt{\gamma}} \quad (|x + 1| > \sqrt{\gamma})$$

$$\frac{\gamma x - 1}{\xi} \sqrt{\gamma + x - x^\gamma} + \frac{\gamma}{\lambda} \arcsin \frac{\gamma x - 1}{\gamma} - 1861$$

$$\frac{\gamma x + 1}{\xi} \sqrt{\gamma + x + x^\gamma} + \frac{\gamma}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{\gamma} + x + \sqrt{\gamma + x + x^\gamma} \right) - 1862$$

$$\frac{x^\gamma + 1}{\xi} \sqrt{x^\xi + \gamma x^\gamma - 1} - \frac{1}{\gamma} \ln \left| x^\gamma + 1 + \sqrt{x^\xi + \gamma x^\gamma - 1} \right| - 1863$$

$$- \sqrt{1 + x - x^\gamma} + \frac{1}{\gamma} \arcsin \frac{1 - \gamma x}{\sqrt{0}} - \ln \left| \frac{\gamma + x + \gamma \sqrt{1 + x - x^\gamma}}{x} \right| - 1864$$

$$\ln \left| \frac{x^\gamma - 1 + \sqrt{x^\xi + 1}}{x} \right| - 1865 \qquad \left(\left| x - \frac{1}{\gamma} \right| < \frac{\sqrt{0}}{\gamma} \right)$$

$$\frac{1}{r} \ln \left| \frac{(x+r)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)(x+r)^r} \right| - 1877 \quad \ln|x-r| + \ln|x+1| - 1878$$

$$\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{\lambda} + \frac{rx^2}{\nu} - \frac{ox^2}{\gamma} + \frac{11x^0}{\sigma} - \frac{r1x^2}{\xi} + \frac{\xi r x^r}{r} - \frac{\lambda ox^r}{r} + \dots - 1879$$

$$x + \frac{1}{r} \ln|x| - \frac{1}{r} \ln|x-r| + \dots - 1880 \quad + 1881 x + \frac{1}{r} \ln \left| \frac{x-1}{(x+r)^{1+r}} \right|$$

$$x + \frac{1}{r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{\lambda}{r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{r} - 1882 \quad + \frac{r\lambda}{r} \ln|x-r|$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{r} \ln|x^r-1| - 1883 \quad - \frac{1}{r(x-1)} + \frac{r}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+r} \right| - 1884$$

$$\frac{9x^r+ox+x+r\lambda}{\xi(x+r)(x+r)^r} + \dots - 1885 \quad - \frac{ox-r}{x^r-rx+r} + \xi \ln \left| \frac{x-1}{x-r} \right| - 1886$$

$$- \frac{rx^r+rx-r}{\lambda(x-1)(x+1)^r} + \frac{r}{1r} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1887 \quad + \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{(x+1)(x+r)^{1r}}{(x+r)^{1r}} \right|$$

$$\frac{1}{r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\xi} \ln \frac{(x+1)^r}{x^r+1} - 1888 \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{ox}{r} \ln \frac{x^r+1}{x^r+\xi} - 1889$$

$$- \frac{1}{o(x-1)} + \frac{1}{o} \ln \frac{(x-1)^r}{x^r+rx+r} - 1890 \quad - \frac{1}{x-r} - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x-r) - 1891$$

$$\ln \left| \frac{x}{1+x} \right| - \frac{r}{\sqrt{r}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+rx}{\sqrt{r}} - 1892 \quad - \frac{\lambda}{r} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1)$$

$$\frac{1}{r} \ln \frac{(x-1)^r}{x^r+x+1} + \dots - 1893 \quad \frac{1}{r} \ln \frac{(x+1)^r}{x^r-x+1} + \frac{1}{\sqrt{r}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{rx-1}{\sqrt{r}} - 1894$$

$$\frac{1}{\xi} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 1895 \quad + \frac{1}{\sqrt{r}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{rx+1}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{1}{\xi \sqrt{r}} \ln \frac{x^r+x\sqrt{r+1}}{x^r-x\sqrt{r+1}} + \frac{1}{r \sqrt{r}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{r}}{1-x^r} - 1896$$

$$\frac{1}{\xi} \ln \frac{x^r+x+1}{x^r-x+1} + \frac{1}{r \sqrt{r}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^r-1}{x\sqrt{r}} - 1897$$

$$- 1898 \quad \frac{1}{\xi \sqrt{r}} \ln \frac{1+x\sqrt{r+x^r}}{1-x\sqrt{r+x^r}} + \frac{1}{r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^r - 1899$$

$$- \frac{1}{r(1+x)} + \frac{1}{r} \ln \frac{(1+x)^r}{1-x+x^r} + \frac{1}{r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{r \sqrt{r}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{rx-1}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{(x-1)^\gamma}{x^\gamma+x+1} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\gamma x-1}{\sqrt{\gamma}} - 1888$$

$$\frac{\gamma}{\circ} \ln \frac{x^\gamma+\gamma x+\gamma}{x^\gamma+x+\frac{1}{\gamma}} + \frac{\lambda}{\circ} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x+1) - \frac{\gamma}{\circ} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\gamma x+1) - 1889$$

$$-\frac{x^\gamma+x+\gamma}{\lambda(x-1)(x+1)^\gamma} + \frac{1}{1\gamma} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1891 \quad a+\gamma b+\gamma c = \dots - 1890$$

$$\frac{x}{\gamma(x^\gamma+1)} + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{(x+1)^\gamma}{x^\gamma-x+1} + \frac{\gamma}{\gamma\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\gamma x-1}{\sqrt{\gamma}} - 1892$$

$$\frac{1}{x^\gamma+\gamma x+\gamma} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x+1) - 1893 \quad \frac{x(\gamma x^\gamma+1)}{\lambda(x^\gamma+1)^\gamma} + \frac{\gamma}{\lambda} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 1892$$

$$\frac{x}{\varepsilon(x^\varepsilon+1)} + \frac{\gamma}{1\gamma\sqrt{\gamma}} \ln \frac{x^\gamma+x\sqrt{\gamma+1}}{x^\gamma-x\sqrt{\gamma+1}} - \frac{\gamma}{\lambda\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{\gamma}}{x^\gamma-1} - 1890$$

$$\frac{\circ x+\gamma}{\gamma(x^\gamma+x+1)} + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{(x-1)^\gamma}{x^\gamma+x+1} + \frac{\lambda}{\gamma\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\gamma x+1}{\sqrt{\gamma}} - 1896$$

$$\frac{\gamma x^\circ-11x}{\gamma\gamma(x^\varepsilon-1)^\gamma} + \frac{\gamma 1}{1\gamma\lambda} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{\gamma 1}{\gamma\varepsilon} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 1897$$

$$-1900 \quad -\frac{\lambda x^\varepsilon+\lambda x^\gamma+\varepsilon x-1}{\gamma\lambda(x^\gamma+x+1)^\gamma} - 1899 \quad \frac{x^\gamma+\gamma x}{\gamma(x^\varepsilon+x^\gamma+1)} - 1898$$

$$\frac{\gamma x+1}{\gamma(x^\gamma+x+1)} + \frac{\varepsilon}{\gamma\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\gamma x+1}{\sqrt{\gamma}} - 1901 \quad (!\text{همه انتگرال!}) - \frac{x}{x^\circ+x+1}$$

$$-\frac{1}{\gamma\gamma(x-1)^{\gamma\gamma}} - \frac{\gamma}{\gamma\gamma(x-1)^{\gamma\gamma}} - 1902 \quad a\gamma+\circ\alpha = \gamma b\beta - 1902$$

$$\frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{x^\gamma-1}{x^\gamma+1} \right| - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^\gamma - 1903 \quad -\frac{\gamma}{\gamma\lambda(x-1)^{\gamma\lambda}} - \frac{1}{\gamma\gamma(x-1)^{\gamma\gamma}}$$

$$\frac{1}{1\gamma} \ln \frac{(x^\gamma+1)^\gamma}{x^\varepsilon-x^\gamma+1} + \dots - 1906 \quad -\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} - 1900$$

$$\frac{\circ}{\lambda} \ln \frac{x^\varepsilon}{x^\varepsilon+\gamma} - \ln \frac{x^\varepsilon}{x^\varepsilon+1} - 1907 \quad + \frac{1}{\gamma} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^\gamma + \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\gamma x^\gamma-1}{\sqrt{\gamma}}$$

$$-\frac{1}{100} \times \left(\frac{x^\circ}{x^{10}-10} + \frac{1}{\gamma\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x^\circ-\sqrt{10}}{x^\circ+\sqrt{10}} \right| \right) - 1908$$

$$-\frac{x^\circ+\gamma}{10(x^{10}+\gamma x^\circ+\gamma)} - 1910 \quad \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{x^\varepsilon+1}{(x^\varepsilon+\gamma)^\varepsilon} - 1909$$

$$\frac{1}{n} (x^n - \ln |x^n + 1|) \quad (n \neq 0) - 1411 \qquad - \frac{1}{1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x^0 + 1)$$

$$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{x^{\gamma}}{x^{\gamma} + \gamma} - 1413 \qquad \frac{1}{\gamma n} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x^n - \frac{x^n}{x^{\gamma n} + 1} \right) \quad (n \neq 0) - 1412$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \frac{|x^{\gamma}|}{(1+x^{\gamma})^{\gamma}} - 1410 \qquad \frac{1}{1 \cdot (x^{\gamma} + 1)} + \frac{1}{1 \cdot} \ln \frac{x^{\gamma}}{x^{\gamma} + 1} - 1414$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^{\gamma} - 1}{x \sqrt{\gamma}} - 1417 \qquad \frac{1}{0} \ln \left| \frac{x(x^{\gamma} - 0)}{x^0 - 0x + 1} \right| - 1416$$

$$\frac{1}{\varepsilon \sqrt{\gamma}} \ln \frac{x^{\varepsilon} - x^{\gamma} \sqrt{\gamma} + 1}{x^{\varepsilon} + x^{\gamma} \sqrt{\gamma} + 1} - 1419 \qquad \frac{1}{\sqrt{0}} \ln \frac{\gamma x^{\gamma} + (1 - \sqrt{0})x + \gamma}{\gamma x^{\gamma} + (1 + \sqrt{0})x + \gamma} - 1418$$

$$I_n = \frac{\gamma ax + b}{(n-1) \Delta (ax^{\gamma} + bx + c)^{n-1}} + - 1421 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\gamma} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^{\gamma} - 1420$$

$$\varepsilon \Delta = \varepsilon ac - b^{\gamma} \quad \text{که در آن} \quad + \frac{\gamma n - \gamma}{n-1} \times \frac{\gamma a}{\Delta} I_{n-1}$$

$$I_{\gamma} = \frac{\gamma x + 1}{\gamma (x^{\gamma} + x + 1)^{\gamma}} + \frac{\gamma x + 1}{\gamma (x^{\gamma} + x + 1)} + \frac{\varepsilon}{\gamma \sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\gamma x + 1}{\sqrt{\gamma}}$$

$$\varepsilon I = \frac{1}{(b-a)^{m+n-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-\gamma}}{t^m} dt - 1422$$

$$- 1423 \quad t = \frac{x-\gamma}{x+\gamma} \quad \text{که در آن} \quad \frac{1}{\gamma \gamma 0} \left(-\frac{1}{t} + \gamma t - \frac{t^{\gamma}}{\gamma} - \gamma \ln |t| \right)$$

$$R(x) = - 1424 \quad - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_{kn}^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}} + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} \ln |x-a|$$

$$\text{و} \quad P = P(x^{\gamma}) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{A_{ij}}{(a_i - x)^{a_j}} + \frac{A_{ij}}{(a_i + x)^{a_j}} \right]$$

ریشه‌های مخرج کسرها و ضرایب ثابت میباشند.

$$- \frac{1}{\gamma n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi(\gamma k - 1)}{\gamma n} \ln \left(1 - \gamma x \cos \frac{\gamma k - 1}{\gamma n} \pi + x^{\gamma} \right) + - 1425$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \sin \frac{\pi(\gamma k - 1)}{\gamma n} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x - \cos \frac{\gamma k - 1}{\gamma n} \pi}{\sin \frac{\gamma k - 1}{\gamma n} \pi} \right\}$$

$$\gamma \sqrt{x} - \gamma \ln(1 + \sqrt{x}) - 1426$$

$$\frac{\gamma}{\xi} \ln \frac{x \sqrt[\gamma]{x}}{(1+\sqrt[\gamma]{x})^{\gamma} (1-\sqrt[\gamma]{x} + \gamma \sqrt[\gamma]{x})^{\gamma}} - \frac{\gamma}{\gamma \sqrt[\gamma]{\gamma}} \operatorname{arc tg} \times -1927$$

$$\frac{\gamma}{\xi} t^{\xi} - \frac{\gamma}{\gamma} t^{\gamma} - \frac{\gamma}{\xi} \ln |t-1| + \frac{10}{\lambda} \times -1928 \quad \times \frac{\xi \sqrt[\gamma]{x-1}}{\sqrt[\gamma]{\gamma}}$$

$$t = \sqrt[\gamma]{\gamma+x} \quad \times \ln(t^{\gamma} + t + \gamma) - \frac{\gamma \gamma}{\lambda \sqrt[\gamma]{\gamma}} \operatorname{arc tg} \frac{\gamma t + 1}{\sqrt[\gamma]{\gamma}}$$

$$\gamma t - \gamma t^{\gamma} - \gamma t^{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma} t^{\xi} + \frac{\gamma}{0} t^0 - \frac{\gamma}{\gamma} t^{\gamma} + \gamma \ln(1+t^{\gamma}) - \gamma \operatorname{arc tg} t - 1929$$

$$\frac{\gamma}{(1+\sqrt[\gamma]{x})^{\gamma}} - \frac{\xi}{1+\sqrt[\gamma]{x}} - 1930 \quad t = \sqrt[\gamma]{x+1} \quad \text{که در آن}$$

$$-\frac{\gamma}{\gamma} \sqrt[\gamma]{\frac{x+1}{x-1}} - 1932 \quad \frac{x^{\gamma}}{\gamma} - \frac{x \sqrt{x^{\gamma}-1}}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \ln |x + \sqrt{x^{\gamma}-1}| - 1931$$

$$-\frac{a t^{\gamma}}{1+t^{\xi}} + \frac{a}{\xi \sqrt[\gamma]{\gamma}} \ln \frac{1+t \sqrt[\gamma]{\gamma+t^{\gamma}}}{1-t \sqrt[\gamma]{\gamma+t^{\gamma}}} + \frac{a}{\gamma \sqrt[\gamma]{\gamma}} \operatorname{arc tg} \frac{1-t^{\gamma}}{t \sqrt[\gamma]{\gamma}} - 1933$$

$$-\frac{n}{a-b} \sqrt[\gamma]{\frac{x-b}{x-a}} - 1934 \quad t = \sqrt[\gamma]{\frac{a-x}{x}} \quad \text{که در آن}$$

$$\frac{x}{\gamma} + \sqrt{x} - \frac{1}{\gamma} \sqrt{x(1+x)} - \frac{1}{\gamma} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) - 1935$$

$$-\frac{\gamma-2x}{\xi} \sqrt{1+x+x^{\gamma}} - \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{\gamma} + x + \sqrt{1+x+x^{\gamma}} \right) - 1937$$

$$\frac{\gamma-x}{\gamma(1-x)^{\gamma}} \sqrt{1-x^{\gamma}} - 1939 \quad -\ln \left| \frac{\gamma-x+\gamma \sqrt{x^{\gamma}+x+1}}{x+1} \right| - 1938$$

$$\text{که در آن } R + \ln(x+1+R) - \sqrt[\gamma]{\gamma} \ln \left| \frac{x+\gamma+\sqrt[\gamma]{\gamma} R}{x} \right| - 1940$$

$$\operatorname{arc sin} \frac{1+2x}{\sqrt{0}} + \ln \left| \frac{\gamma+x+\gamma \sqrt{1-x-x^{\gamma}}}{1+x} \right| - 1941 \quad R = \sqrt{x^{\gamma} + \gamma x + \gamma}$$

$$\frac{1-2x}{\xi} \sqrt{1+x-x^{\gamma}} - \frac{11}{\lambda} \operatorname{arc sin} \frac{1-2x}{\sqrt{0}} - 1942$$

$$\begin{aligned}
& -1944 \quad -\frac{19+ax+rx^2}{r} \sqrt{1+rx-x^2} - \varepsilon \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{r}} - 1947 \\
& \left(\frac{7r}{207} x - \frac{21}{128} x^2 + \frac{21}{16} x^3 - \frac{9}{8} x^4 + \frac{x^5}{10} \right) \sqrt{1+x^2} - \frac{7r}{207} \ln(x + \\
& \left(-\frac{a^2 x}{17} - \frac{a^2 x^2}{24} + \frac{x^3}{7} \right) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{17} \arcsin \frac{x}{|a|} - 1940 + \sqrt{1+x^2} \\
& \left(\frac{x^2}{r} - \frac{14x}{r} + 27 \right) \sqrt{x^2 + \varepsilon x + r} - 27 \ln|x+r+\sqrt{x^2 + \varepsilon x + r}| - 1947 \\
& \frac{rx^2+1}{rx^2} \sqrt{x^2-1} - 1948 \quad -\frac{1}{rx^2} \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{r} \ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|} - 1947 \\
& \frac{rx-0}{r \cdot (x-1)^2} \sqrt{x^2+rx+1} - \frac{11}{\varepsilon \cdot \sqrt{0}} \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{0+2} \sqrt{x^2+rx+1}}{x-1} \right| - 1949 \\
& x < -2 \quad \text{آن دو کس} \quad \frac{rx+0}{\Lambda(x+1)^2} \sqrt{x^2+rx} - \frac{r}{\Lambda} \arcsin \frac{1}{|x+1|} - 1900 \\
& \varepsilon a(ca_1 + bb_1) = \Lambda a^2 c_1 + r b^2 a_1 \quad (a \neq 0) \quad - 1901 \quad x > 0 \\
& -1902 \quad \frac{\sqrt{1+rx-x^2}}{r(1-x)} - \frac{1}{\sqrt{r}} \ln \left| \frac{\sqrt{r} + \sqrt{1+rx-x^2}}{1-x} \right| - 1902 \\
& -1904 \quad \frac{1}{r} \arcsin \frac{x-r}{|x-1|\sqrt{0}} - \frac{1}{r} \ln \left| \frac{rx+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1} \right| \\
& -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \ln \left(x + \frac{1}{r} + \sqrt{x^2+x+1} \right) + \frac{1}{r} \ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| \\
& -\frac{1+x}{r} \sqrt{1+rx-x^2} - r \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r}} \arcsin \frac{x\sqrt{r}}{|1+x|} - 1900 \\
& -1907 \quad -\frac{\sqrt{x^2-\varepsilon x+r}}{x-1} - r \arcsin \frac{1}{|x-r|} \quad (x < 1 \text{ یا } x > r) - 1907 \\
& \frac{1}{r\sqrt{r}} \ln \left| \frac{x\sqrt{r} + \sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{r} - \sqrt{x^2-1}} \right| - 1908 \quad \frac{1}{\sqrt{r}} \arcsin \frac{x\sqrt{r}}{\sqrt{1-x^2}} \\
& \frac{x}{r\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{r}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{r}}{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{r}} \right| - 1909 \\
& \ln(x + \sqrt{x^2+r}) - \arcsin \frac{\sqrt{x^2+r}}{x} - 1910
\end{aligned}$$

$$-1962 \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x-1)}} \right| - 1961$$

$$\text{arc sin } \frac{x-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ arc tg } \frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2+2x-x^2}}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ arc tg } \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}} + -1964 \quad \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2+x+1}} - 1963$$

$$-1965 \quad x+1 > 0 \text{ اگر } + \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}} \right|$$

$$\frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} - (x+1)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} + (x+1)} - \frac{1}{2} \text{ arc tg } \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}$$

$$z = x + \sqrt{x^2+x+1} \text{ آن در آن } \frac{2}{2(2z+1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{z^2}{|2z+1|^2} - 1966$$

$$z = \frac{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}{x} \text{ آن در آن } \ln \left| \frac{z-1}{z} \right| - 2 \text{ arc tg } z - 1967$$

$$\frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{1}{2} [(z-1)^2 + (z-1)^{-2}] + [(z-1)^2 - (z-1)^{-2}] + -1968$$

$$z = x + \sqrt{x^2-2x+2} \text{ آن در آن } + [(z-1) + (z-1)^{-1}] \left. \right\} + \frac{1}{2} \ln |z-1|$$

$$- \frac{0}{18(z+1)} - \frac{1}{6(z+1)^2} + \frac{2}{3} \ln |z-1| - \frac{17}{27} \ln |z-2| - -1969$$

$$\frac{2(2-\varepsilon z)}{0(1-z-z^2)} + -1970 \quad z = \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} \text{ آن در آن } - \frac{17}{108} \ln |z+1|$$

$$z = -x + \sqrt{x(1+x)} \text{ آن در آن } + \frac{2}{0\sqrt{0}} \ln \left| \frac{\sqrt{0+1+2z}}{\sqrt{0-1-2z}} \right|$$

$$-1972 \quad \frac{x}{\varepsilon} (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{\varepsilon} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \right| - 1971$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{z} - \frac{1}{2\sqrt{12}} \left(\ln \frac{z\sqrt{2} + \sqrt{12z^2+1}}{z\sqrt{2} - \sqrt{12z^2+1}} - 2 \text{ arc tg } \frac{\sqrt{12z^2}}{z\sqrt{2-1}} \right)$$

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ arc sin } x - 1973 \quad z = \frac{1+x}{1-x} \text{ آن در آن}$$

$$-1975 \quad \sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2} - 1976$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \times -1976 \quad \frac{2}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right] - \frac{2}{0} \left[(x+1)^{\frac{0}{2}} - x^{\frac{0}{2}} \right]$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^2+1}}{x^2-1} \right| - 1977 \quad \times \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}} \left(|x| > \sqrt{\sqrt{2}-1} \right) - 1978$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{x^2(2x^2+1+2\sqrt{x^2+x^2+1})}{x^2+2+2\sqrt{x^2+x^2+1}} - 1979$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{(x+x^2)^3} - \frac{1+2x}{8} \sqrt{x+x^2} + \frac{1}{8} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) - 1981$$

$$\frac{6}{0} x^{\frac{0}{6}} + 4x^{\frac{1}{6}} + 18x^{\frac{1}{6}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21 \arctg x^{\frac{1}{6}} - 1982 \quad x > 0 \text{ بازای}$$

$$z = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}} \quad \text{که در آن} \quad \frac{2}{0} z^0 - 2z^3 + 2z - 1983$$

$$-1985 \quad z = \sqrt{1-x^2} \quad \text{که در آن} \quad -z + \frac{2}{3} z^3 - \frac{z^0}{0} - 1984$$

$$z = \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x} \quad \text{که در آن} \quad \frac{1}{6} \ln \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{z^2+1}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{\sqrt[4]{1+x^2}}{x} \quad \text{که در آن} \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \frac{1}{2} \arctg z - 1986$$

$$\text{که در} \quad \frac{1}{6} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{12} \ln \frac{z^2+z+1}{z^2-z+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{z^2-1}{2\sqrt{3}} - 1987$$

$$z = \sqrt[0]{1 + \frac{1}{x}} \quad \text{که در آن} \quad \frac{0}{8} z^8 - \frac{0}{9} z^9 - 1988 \quad z = \sqrt[1]{1+x^2} \quad \text{آن}$$

$$\text{که در آن} \quad \frac{3z}{2(z^2+1)} - \frac{1}{4} \ln \frac{(z+1)^2}{z^2-z+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{z^2-1}{\sqrt{2}} - 1989$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ آن در } m = \frac{\gamma}{k} - 1990 \quad z = \frac{\sqrt{\gamma x - x^\gamma}}{x}$$

$$\frac{0}{17} x - \frac{1}{\xi} \sin \gamma x + -1992 \quad \sin x - \frac{\gamma}{\gamma} \sin^\gamma x + \frac{1}{0} \sin^0 x - 1991$$

$$\frac{0}{17} x + \frac{1}{\xi} \sin \gamma x + \frac{\gamma}{\gamma \xi} \sin \gamma x - -1992 \quad + \frac{\gamma}{\gamma \xi} \sin \xi x + \frac{1}{\xi \lambda} \sin^\gamma \gamma x$$

$$\frac{\sin^0 x}{0} - -1990 \quad \frac{x}{17} - \frac{\sin \xi x}{\gamma \xi} + \frac{\sin^\gamma \gamma x}{\xi \lambda} - 1994 \quad - \frac{1}{\xi \lambda} \sin^\gamma \gamma x$$

$$- \frac{\cos \gamma x}{\gamma \xi} + \frac{\cos^\gamma \gamma x}{\gamma \xi} - \frac{\cos^0 \gamma x}{\gamma \xi} - 1997 \quad - \frac{\gamma \sin^\gamma x}{\gamma} + \frac{\sin^0 x}{\gamma}$$

$$- \frac{\gamma}{\gamma} \cos x - \frac{\cos^\gamma x}{\gamma \sin^\gamma x} - \frac{\gamma}{\gamma} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} \right| - 1998 \quad \frac{1}{\gamma \cos^\gamma x} - \frac{1}{\cos x} - 1999$$

$$\frac{\sin x}{\gamma \cos^\gamma x} + \frac{1}{\gamma} \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{\gamma} + \frac{\pi}{\xi} \right) \right| - 2000 \quad - \frac{\cos x}{\gamma \sin^\gamma x} + \frac{1}{\gamma} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} \right| - 1999$$

$$\frac{\operatorname{tg}^\xi x}{\xi} + \frac{\gamma \operatorname{tg}^\gamma x}{\gamma} - \frac{\operatorname{ctg}^\gamma x}{\gamma} + -2002 \quad - \lambda \operatorname{ctg}^\gamma x - \frac{\lambda}{\gamma} \operatorname{ctg}^\gamma \gamma x - 2001$$

$$- 2004 \quad \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\gamma \cos^\gamma x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} \right| - 2003 \quad + \gamma \ln | \operatorname{tg} x |$$

$$- x - \frac{\operatorname{ctg}^0 x}{0} + \frac{\operatorname{ctg}^\gamma x}{\gamma} - \operatorname{ctg} x - 2005 \quad \frac{\operatorname{tg}^\xi x}{\xi} - \frac{\operatorname{tg}^\gamma x}{\gamma} - \ln | \cos x |$$

$$\text{آن در } \xi \quad \frac{1}{\xi} \ln \left| \frac{(1+t)^\gamma (1+t^\gamma)}{(1-t)^\gamma (1-t^\gamma)} \right| - \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1-t^\gamma}{t \sqrt{\gamma}} - 2008$$

$$\frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} \ln \frac{z^\gamma + z \sqrt{\gamma + 1}}{z^\gamma - z \sqrt{\gamma + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z \sqrt{\gamma}}{z^\gamma - 1} - 2009 \quad t = \sqrt[\gamma]{\sin x}$$

$$\frac{1}{\xi} \ln \frac{(z^\gamma + 1)^\gamma}{z^\xi - z^{\gamma+1}} + \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\gamma z^{\gamma-1}}{\sqrt{\gamma}} - 2010 \quad z = \sqrt{\operatorname{tg} x}$$

$$I_n = - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-\gamma} - 2011 \quad z = \sqrt[\gamma]{\operatorname{tg} x} \text{ آن در } \xi$$

$$I_\gamma = - \frac{1}{\gamma} \cos x \sin^0 x - \frac{\xi}{\gamma \xi} \times \quad K_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} K_{n-\gamma}$$

$$K_\lambda = \frac{1}{\lambda} \sin x \cos^\gamma x + \dots \times \cos x \sin^\gamma x - \frac{0}{17} \cos x \sin x + \frac{0}{17} x$$

$$+ \frac{\gamma}{\xi \lambda} \sin x \cos^{\circ} x + \frac{\gamma^{\circ}}{192} \sin x \cos^{\gamma} x + \frac{\gamma^{\circ}}{128} \sin x \cos x + \frac{\gamma^{\circ}}{128} x$$

$$K_n = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \quad ; I_n = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-\gamma}{n-1} I_{n-\gamma} - 2012$$

$$; I_0 = -\frac{\cos x}{\xi \sin^{\xi} x} - \frac{\gamma \cos x}{\lambda \sin^{\gamma} x} + \frac{\gamma}{\lambda} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} \right| \quad ; + \frac{n-\gamma}{n-1} K_{n-\gamma}$$

$$-2013 \quad K_{\gamma} = \frac{\sin x}{\gamma \cos^{\gamma} x} + \frac{\circ \sin x}{\gamma \xi \cos^{\xi} x} + \frac{\circ \sin x}{1 \gamma \cos^{\gamma} x} + \frac{\circ}{1 \gamma} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{\gamma} + \frac{\pi}{\xi} \right)$$

$$\frac{x}{\xi} + \frac{\sin \gamma x}{\lambda} + \frac{\sin \xi x}{1 \gamma} + \frac{\sin \gamma x}{\gamma \xi} - 2014 \quad -\frac{1}{\lambda} \cos \xi x - \frac{1}{1 \gamma} \cos \gamma x$$

$$\frac{\gamma}{\gamma} \cos \frac{x}{\gamma} - \frac{\gamma}{1 \circ} \cos \frac{\circ x}{\gamma} - \frac{\gamma}{1 \xi} \cos \frac{\gamma x}{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma \gamma} \cos \frac{1 \gamma x}{\gamma} - 2015$$

$$- \frac{1}{\gamma} \cos(a-b) \cos x - \frac{1}{\xi} \cos(x+a+b) + \frac{1}{1 \gamma} \cos(\gamma x+a+b) - 2016$$

$$\frac{x}{\xi} + \frac{\sin \gamma a x}{\lambda a} + \frac{\sin \gamma b x}{\lambda b} + \frac{\sin \gamma(a-b)x}{1 \gamma(a-b)} + \frac{\sin \gamma(a+b)x}{1 \gamma(a+b)} - 2017$$

$$- \frac{\gamma}{1 \gamma} \cos \gamma x + \frac{\gamma}{\gamma \xi} \cos \xi x + \frac{1}{\xi \lambda} \cos \gamma x - \frac{\gamma}{1 \gamma \lambda} \cos \lambda x + \frac{1}{1 \gamma \gamma} \cos 1 \gamma x - 2018$$

$$\sin(a-b) \neq \cdot \quad \text{اگر} \quad \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| - 2019$$

$$\cos(a-b) \neq \cdot \quad \text{اگر} \quad \frac{1}{\cos(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)} \right| - 2020$$

$$\sin(a-b) \neq \cdot \quad \text{اگر} \quad \frac{\gamma}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)} \right| - 2021$$

$$\frac{1}{\sin a} \ln \left| \frac{\cos \frac{x-a}{\gamma}}{\cos \frac{x+a}{\gamma}} \right| - 2022 \quad \frac{1}{\cos a} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a}{\gamma}}{\cos \frac{x+a}{\gamma}} \right| (\cos a \neq \cdot) - 2023$$

$$-x - \operatorname{ctg} a \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \right| (\sin a \neq \cdot) - 2024 \quad (\sin a \neq \cdot)$$

$$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{(1-\cos x)(\gamma+\cos x)^{\gamma}}{(1+\cos x)^{\gamma}} - 2025 \quad \frac{1}{\sqrt{\circ}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\gamma \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} + 1}{\sqrt{\circ}} - 2026$$

$$- \frac{1}{\circ} (\gamma \sin x + \cos x) + \frac{\xi}{\circ \sqrt{\circ}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{\gamma} + \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \gamma}{\gamma} \right) \right| - 2027$$

$$0 < \varepsilon < 1 \quad \text{اگر} \quad \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arc tg} \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{\varepsilon} \right) \quad (\text{آلف} - 2028)$$

$$\varepsilon > 1 \quad \text{اگر} \quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \frac{\varepsilon + \cos x + \sqrt{\varepsilon^2-1} \sin x}{1 + \varepsilon \cos x} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1}{ab} \operatorname{arc tg} \left(\frac{a \operatorname{tg} x}{b} \right) - 2030 \quad x - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc tg} (\sqrt{\gamma} \operatorname{tg} x) - 2029$$

$$z = \operatorname{tg} x \quad \text{آن در} \quad \frac{(\gamma b^2)^{-1/2} z}{(a^2 z^2 + b^2)} + \frac{1}{\gamma ab^2} \operatorname{arc tg} \frac{az}{b} \quad (ab \neq 0) - 2031$$

$$\frac{1}{\gamma} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{\gamma} + \frac{\pi}{\lambda} \right) \right| - 2032$$

$$-\frac{1}{\gamma} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} - 2033 \quad -\frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)} - 2032$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc tg} \left(\frac{\operatorname{tg} \gamma x}{\sqrt{\gamma}} \right) - 2035 \quad -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc tg} \left(\frac{\gamma \cos x - \sin x}{\sqrt{\gamma} \sin x} \right)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \sqrt{\gamma + \sqrt{\gamma}} \operatorname{arc tg} \frac{u}{\sqrt{\varepsilon + \gamma} \sqrt{\gamma}} - \sqrt{\gamma - \sqrt{\gamma}} \times - 2036 \right.$$

$$\left. \frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} \times - 2037 \quad u = \operatorname{tg} \gamma x \quad \text{آن در} \quad \times \operatorname{arc tg} \frac{u}{\sqrt{\varepsilon - \gamma} \sqrt{\gamma}} \right\}$$

$$\frac{1}{\gamma} \operatorname{arc tg} (\sin^2 x) - 2038 \quad \times \ln \frac{\sqrt{\gamma} - \sin \gamma x}{\sqrt{\gamma} + \sin \gamma x}$$

$$-\frac{z}{\varepsilon(z^2 + \gamma)} + \frac{\gamma}{\varepsilon \sqrt{\gamma}} \operatorname{arc tg} \frac{z}{\sqrt{\gamma}} - 2040 \quad \operatorname{arc tg} \left(\frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} \gamma x \right) - 2039$$

$$\text{آن در} \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right| - 2041 \quad z = \operatorname{tg} x \quad \text{آن در}$$

$$-\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\gamma}{\varepsilon} \times - 2042 \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{و} \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$0, 1x + 0, 3 \ln |\sin x - \gamma \cos x| - 2043, 1 \quad \times \ln |\sin x + \gamma \cos x|$$

$$\frac{\gamma x}{\gamma \varepsilon} + \frac{a}{\gamma \varepsilon} \ln |\sin x + \gamma \cos x| - 2044$$

$$-\frac{ab_1 + a_1 b}{a^2 + b^2} \times \frac{1}{a \sin x + b \cos x} + \frac{aa_1 + bb_1}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right| - 2045$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ و } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ که در آن}$$

$$-\frac{\gamma x}{\circ} + \frac{\xi}{\circ} \ln |\sin x - \gamma \cos x + \gamma| - \frac{\gamma}{\circ} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\circ \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} + 1}{\gamma} - \gamma \cdot \xi \gamma$$

$$\frac{x}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{\gamma} - \frac{\pi}{\lambda} \right) - \frac{1}{\gamma} \ln (\sqrt{\gamma} + \sin x + \cos x) - \gamma \cdot \xi \lambda$$

$$\frac{\gamma}{\circ} x - \frac{1}{\circ} \ln |\gamma \sin x + \xi \cos x - \gamma| + \frac{\xi}{\circ \sqrt{\gamma \lambda}} \times - \gamma \cdot \xi \lambda$$

$$\times \ln \left| \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma} \left(\gamma \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} - 1 \right)}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma} \left(\gamma \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} - 1 \right)} \right|$$

$$- \sin x + \gamma \cos x + \gamma \sqrt{\gamma} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{\gamma} + \frac{\pi}{\lambda} \right) \right| - \gamma \cdot \circ \circ 1$$

$$\frac{1}{\circ} (\sin x + \gamma \cos x) + \frac{\lambda}{\circ \sqrt{\circ}} \ln \left| \frac{\sqrt{\circ} - 1 + \gamma \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma}}{\sqrt{\circ} + 1 - \gamma \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma}} \right| - \gamma \cdot \circ \circ \gamma$$

$$- \gamma \cdot \circ \circ \circ - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\gamma}} \right) - \frac{1}{\xi} \ln \frac{\gamma + \sin x}{\gamma - \sin x} - \gamma \cdot \circ \circ \xi$$

$$- \gamma \cdot \circ \circ \gamma \quad \frac{\gamma}{\circ} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sin x - \gamma \cos x) + \frac{1}{\lambda \cdot \sqrt{\gamma}} \ln \frac{\sqrt{\gamma} + \gamma \sin x + \cos x}{\sqrt{\gamma} - \gamma \sin x - \cos x}$$

$$\frac{\gamma}{\xi \sqrt{\gamma}} \ln \left| \frac{\sqrt{\gamma} (\sin x + \cos x) + 1}{\sqrt{\gamma} (\sin x + \cos x) - 1} \right| - \frac{1}{\xi \sqrt{\gamma}} \ln \left| \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma} (\sin x - \cos x)}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma} (\sin x - \cos x)} \right|$$

$$\frac{\gamma \sin x - \cos x}{\lambda \cdot (\sin x + \gamma \cos x)^{\gamma}} + \frac{1}{\lambda \cdot \sqrt{\circ}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{\gamma} + \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \gamma}{\gamma} \right) \right| - \gamma \cdot \circ \circ \lambda$$

$$A = -\frac{b}{(n-1)(a^{\gamma} - b^{\gamma})}, B = \frac{(\gamma n - \gamma) a}{(n-1)(a^{\gamma} - b^{\gamma})}, C = -\frac{n - \gamma}{(n-1)(a^{\gamma} - b^{\gamma})} - \gamma \cdot \circ \circ \lambda$$

$$\gamma \sqrt{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} \times - \gamma \cdot \circ \circ \gamma \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{1 + \sin^{\gamma} x}}{|\cos x|} - \gamma \cdot \circ \circ \circ$$

$$\times \ln \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{\gamma \operatorname{tg} x + 1}}{\operatorname{tg} x - \sqrt{\gamma \operatorname{tg} x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\gamma \operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x - 1} \quad (\operatorname{tg} x > \circ)$$

$$\frac{1}{\gamma} \operatorname{arc} \operatorname{sin} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\gamma}} \right) - \frac{1}{\gamma} \ln (\sin x + \cos x + \sqrt{\gamma + \sin^{\gamma} x}) - \gamma \cdot \circ \circ \gamma$$

$$-\frac{\varepsilon \sin x}{(1-\varepsilon^{\gamma})(1+\varepsilon \cos x)} + \frac{\gamma}{(1-\varepsilon^{\gamma})^{\frac{\gamma}{\gamma}}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{\gamma} \right) \quad -\gamma \cdot \gamma \gamma$$

$$-\gamma \cdot \gamma \circ \quad -\frac{\gamma}{n \cos a} \left(\cos \frac{x+a}{\gamma} \right)^n \left(\sin \frac{x-a}{\gamma} \right)^{-n} \quad (\cos a \neq 0) \quad -\gamma \cdot \gamma \xi$$

$$t = \sin \frac{x-a}{\gamma} \times \text{و } n > \gamma \text{ نآ دآ كآ } I_n = \gamma I_{n-1} \cos a - I_{n-\gamma} + \frac{\gamma \sin a}{n-1} t^{n-1}$$

$$-e^{-x}(x^{\gamma} + \gamma) - \gamma \cdot \gamma \gamma e^{\gamma x} \left(\frac{x^{\gamma}}{\gamma} - \frac{x^{\gamma}}{\gamma} + \frac{\gamma x}{\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma \gamma} \right) - \gamma \cdot \gamma \lambda \times \left(\sin \frac{x+a}{\gamma} \right)^{-1}$$

$$-\left(\frac{x^{\circ}}{\circ} - \frac{\xi x^{\gamma}}{\gamma \circ} + \frac{\gamma \xi x}{\gamma \gamma \circ} \right) \cos \circ x + \left(\frac{x^{\xi}}{\circ} - \frac{\gamma x^{\gamma}}{\gamma \gamma \circ} + \frac{\gamma \xi}{\gamma \gamma \gamma \circ} \right) \sin \circ x \quad -\gamma \cdot \gamma \circ$$

$$-\frac{e^{-x^{\gamma}}}{\gamma} \times -\gamma \cdot \gamma \gamma \quad (\gamma \gamma - \gamma \cdot x^{\gamma} + x^{\xi}) \sin x - (\gamma \cdot x - \xi x^{\gamma}) \cos x \quad -\gamma \cdot \gamma \gamma$$

$$\gamma e^{\gamma} (t^{\circ} - \circ t^{\xi} + \gamma \cdot t^{\gamma} - \gamma \cdot t^{\gamma} + \gamma \cdot t - \gamma \cdot \circ) - \gamma \cdot \gamma \gamma \times (x^{\gamma} + \gamma x^{\xi} + \gamma x^{\gamma} + \gamma)$$

$$e^{ax} \left[\frac{1}{\gamma a} + \frac{a \cos \gamma bx + \gamma b \sin \gamma bx}{\gamma (a^{\gamma} + \xi b^{\gamma})} \right] - \gamma \cdot \gamma \xi \quad t = \sqrt{x} \text{ نآ دآ كآ}$$

$$\frac{e^{ax}}{\xi} \left[\frac{\gamma (a \sin bx - b \cos bx}{a^{\gamma} + b^{\gamma}} - \frac{a \sin \gamma bx - \gamma b \cos \gamma bx}{a^{\gamma} + \gamma b^{\gamma}} \right] - \gamma \cdot \gamma \circ$$

$$\frac{e^x}{\gamma} [x^{\gamma} (\sin x + \cos x) - \gamma \cdot \gamma \gamma] \quad \frac{e^x}{\gamma} [x (\sin x - \cos x) + \cos x] \quad -\gamma \cdot \gamma \gamma$$

$$e^x \left[\frac{x-1}{\gamma} - \frac{x}{\gamma} (\gamma \sin \gamma x + \cos \gamma x) + -\gamma \cdot \gamma \lambda - \gamma x \sin x + (\sin x - \cos x) \right]$$

$$\frac{1}{\xi} x^{\xi} + \frac{\gamma}{\xi} x^{\gamma} + \gamma x^{\gamma} \cos x - \gamma \cdot \gamma \gamma \quad + \frac{1}{\circ} (\xi \sin \gamma x - \gamma \cos \gamma x) \left[\right]$$

$$-x \left(\gamma \sin x + \frac{\gamma}{\xi} \sin \gamma x \right) - \left(\circ \cos x + \frac{\gamma}{\lambda} \cos \gamma x \right) - \frac{1}{\gamma} \cos^{\gamma} x$$

$$\frac{x}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \sqrt{x} \sin(\gamma \sqrt{x}) + \frac{1}{\xi} \cos(\gamma \sqrt{x}) - \gamma \cdot \lambda \circ$$

$$e^x - \ln(1 + e^x) - \gamma \cdot \lambda \gamma \quad x + \frac{1}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x) - \gamma \cdot \lambda \gamma$$

$$-\gamma \cdot \lambda \circ \quad -\frac{x}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \ln |e^x - 1| + \frac{1}{\gamma} \ln(e^x + \gamma) - \gamma \cdot \lambda \xi$$

$$x - \gamma \ln \left\{ \left(1 + e^{\frac{x}{\gamma}} \right) \sqrt{1 + e^{\frac{x}{\gamma}}} \right\} - \gamma \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\frac{x}{\gamma}}$$

$$-\gamma \arcsin\left(e^{-\frac{x}{\gamma}}\right) - \gamma \cdot 87 \qquad x + \frac{\lambda}{1 + e^{\frac{x}{\gamma}}} - \gamma \cdot 87$$

$$\sqrt{e^{\gamma x} + \xi e^x - 1} + -\gamma \cdot 89 \ln(e^x + \sqrt{e^{\gamma x} - 1}) + \arcsin(e^{-x}) - \gamma \cdot 88$$

$$-\gamma \cdot 90 \qquad + \gamma \ln(e^x + \gamma + \sqrt{e^{\gamma x} + \xi e^x - 1}) - \arcsin \frac{\gamma e^x - 1}{e^x \sqrt{\gamma}}$$

$$-\frac{1}{\gamma} e^{-x} (\sqrt{1 + e^x} - \sqrt{1 - e^x}) + \frac{1}{\xi} \ln \frac{(\sqrt{1 + e^x} - 1)(1 - \sqrt{1 - e^x})}{(\sqrt{1 + e^x} + 1)(1 + \sqrt{1 - e^x})}$$

$$e^x \left(1 - \frac{\xi}{x}\right) - \gamma \cdot 92 \quad a_1 + \frac{a_\gamma}{1!} + \frac{a_\gamma}{\gamma!} + \dots + \frac{a_n}{(n-1)!} = \dots - \gamma \cdot 92$$

$$e^{\xi} \operatorname{li}(e^{\gamma x - \xi}) - e^{\gamma} \operatorname{li}(e^{\gamma x - \gamma}) - \gamma \cdot 90 \qquad -e^{-x} - \operatorname{li}(e^{-x}) - \gamma \cdot 91$$

$$\frac{e^{\gamma x}}{\gamma} \left(x^\gamma + \gamma x + \frac{\gamma 1}{\gamma} - \frac{\gamma \gamma}{x - \gamma}\right) + \gamma \xi e^{\xi} \operatorname{li}(e^{\gamma x - \xi}) - \gamma \cdot 94 \quad \frac{e^x}{x+1} - \gamma \cdot 96$$

$$x [\ln^n x - n \ln^{n-1} x + n(n-1) \ln^{n-2} x + \dots + (-1)^{n-1} \times \dots - \gamma \cdot 98$$

$$\frac{x^\xi}{\xi} \left(\ln^\gamma x - \frac{\gamma}{\xi} \ln^\gamma x + -\gamma \cdot 99 \qquad \times n(n-1) \dots \gamma \ln x + (-1)^n n!\right)$$

$$-\frac{1}{\gamma x^\gamma} \left(\ln^\gamma x + \frac{\gamma}{\gamma} \ln^\gamma x + \frac{\gamma}{\gamma} \ln x + \frac{\gamma}{\xi}\right) - \gamma 100 \qquad + \frac{\gamma}{\lambda} \ln x - \frac{\gamma}{\gamma \gamma}$$

$$x \ln^\gamma(x + \sqrt{1 + x^\gamma} - \gamma \sqrt{1 + x^\gamma}) \times -\gamma 102 \quad \ln(x+a) \ln(x+b) - \gamma 101$$

$$-\frac{x}{\gamma} + x \ln(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}) + -\gamma 103 \quad \times \ln(x + \sqrt{1 + x^\gamma}) + \gamma x$$

$$-\gamma 100 \quad \frac{x \ln x}{\sqrt{1 + x^\gamma}} - \ln(x + \sqrt{1 + x^\gamma}) - \gamma 105 \qquad + \frac{1}{\gamma} \arcsin x$$

$$-\frac{x}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \times -\gamma 106 \quad -\frac{x}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \ln(x^\gamma + \gamma x + \gamma) + \frac{x^\gamma}{\gamma} \arctg(x + 1)$$

$$-\frac{\gamma + x}{\xi} \sqrt{\gamma x - x^\gamma} + -\gamma 107 \quad \times \ln(1 + x) + \frac{\gamma x \sqrt{x}}{\gamma} \arctg \sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\gamma} \sqrt{x - x^\gamma} + \left(x - \frac{1}{\gamma}\right) \arcsin \sqrt{x} - \gamma 108 + \frac{\gamma x^\gamma - \gamma}{\xi} \arcsin(1 - x)$$

$$-\gamma \operatorname{sgn}(1 - x) \times -\gamma 109 \quad -\frac{\operatorname{sgn} x}{\gamma} \sqrt{x^\gamma - 1} + \frac{x^\gamma}{\gamma} \arccos \frac{1}{x} - \gamma 109$$

$$\frac{x \arccos x}{\sqrt{1 - x^\gamma}} - \ln \sqrt{1 - x^\gamma} - \gamma 111 \quad \times \sqrt{x} + (1 + x) \arcsin \frac{\gamma \sqrt{x}}{1 + x}$$

$$x - \operatorname{arctg} x + \dots \frac{\operatorname{arc} \cos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \dots$$

$$x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \dots + \left(\frac{1+x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) [\ln(1+x^2) - 1]$$

$$- \ln \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \dots$$

$$\frac{2x}{\lambda} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{\xi} + \frac{\operatorname{sh} \xi x}{22} - \dots - \frac{x}{\lambda} + \frac{\operatorname{sh} \xi x}{22} - \dots$$

$$\ln \operatorname{ch} x - \dots \frac{\operatorname{ch} 2x}{2\xi} - \frac{\operatorname{ch} \xi x}{16} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{\lambda} - \dots \frac{\operatorname{ch}^2 x}{2} - \operatorname{ch} x - \dots$$

$$\dots [\ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}) + \operatorname{arc} \sin(e^{-2x})] - \dots x - \operatorname{cth} x - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{0}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{th} x - 2}{\sqrt{0}} - \dots \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} \operatorname{th} \frac{x}{2} + 1 \right) - \dots$$

$$- \frac{\xi}{\nu} x - \frac{2}{\nu} \times - \dots \frac{2 \cdot}{2 \sqrt{11}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{2} \operatorname{th} \frac{x}{2}}{\sqrt{11}} \right) - \dots$$

$$\frac{a \operatorname{ch} ax \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cos bx}{a^2 + b^2} - \dots \times \ln |2 \operatorname{sh} x - \xi \operatorname{ch} x|$$

$$- \frac{1}{0x^0} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \dots \frac{a \operatorname{ch} ax \cos bx + b \operatorname{sh} ax \sin bx}{a^2 + b^2} - \dots$$

$$\frac{1}{\lambda} \times \frac{x+x^2}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{16} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \dots$$

$$\frac{1}{\xi \sqrt{2}} \ln \frac{1+x\sqrt{2+x^2}}{1-x\sqrt{2+x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1-x^2}{x\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 2 \ln \left(\sqrt{x} + 1 \right) \quad (x \geq 0) - \dots$$

$$- \frac{1}{2\xi} (1 + 1 \cdot x + \lambda x^2) \sqrt{x(1-x)} + \frac{0}{\lambda} \operatorname{arc} \sin \sqrt{x} \quad (0 < x < 1) - \dots$$

$$- \frac{\xi}{2} \times - \dots - \frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} \quad (|x| < 1) - \dots$$

$$\frac{1}{10} (\lambda - \xi x^2 + 2x^2) \sqrt{1+x^2} - \dots \times \sqrt{1-x\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

$$z = \sqrt[r]{\frac{1-x}{x}} \quad \text{آن در آن} \quad \frac{1}{r} \ln \frac{(1+z)^r}{1-z+z^r} - \sqrt[r]{r} \operatorname{arc tg} \frac{rz-1}{\sqrt[r]{r}} - 2133$$

$$\frac{1}{r} \operatorname{arc cos} \frac{x^r+1}{x^r \sqrt[r]{r}} - 2134 \quad - \frac{1}{r} \ln \left| \frac{r+x^r+r \sqrt{1+x^r+x^r}}{x^r} \right| - 2135$$

$$- 2138 \quad - \frac{r+x^r}{x} - \frac{r}{x} \sqrt{1-x^r} - r \operatorname{arc sin} x \quad (|x| < 1) - 2139$$

$$- \frac{1}{r} (1+x)^r + \frac{0+r^2x}{r} \sqrt{x+x^r} + \frac{r}{r} \ln \left| x + \frac{1}{r} + \sqrt{x+x^r} \right|$$

($x > 0$; $x < -1$)

$$- \frac{\ln(1+x+x^r)}{1+x} - \frac{1}{r} \ln \frac{(1+x)^r}{1+x+x^r} + \sqrt[r]{r} \operatorname{arc tg} \frac{1+rx}{\sqrt[r]{r}} - 2144$$

$$- \frac{rx+r^2}{r} \sqrt{-x^r+rx-r} + \left(x^r+rx - \frac{00}{r} \right) \operatorname{arc cos} (rx-r) - 2145$$

$$- x^r + \frac{x^r}{r} \times \ln(\xi + x^\xi) + r \operatorname{arc tg} \frac{x^r}{r} - 2146 \quad (1 < x < r)$$

$$- \frac{\sqrt{1-x^r}}{x} \operatorname{arc sin} x + \frac{1}{r} (\operatorname{arc sin} x)^r + \ln|x| \quad (0 < |x| < 1) - 2147$$

$$- 2148 \quad (1 + \sqrt{1+x^r}) \ln(1 + \sqrt{1+x^r}) - \sqrt{1+x^r} - 2149$$

$$- \frac{x^r+r}{r} \sqrt{x^r+1} + \frac{(x^r+1)^{\frac{r}{r}}}{r} \ln \sqrt{x^r-1} - \frac{1}{r} \ln \frac{\sqrt{x^r+1}-1}{\sqrt{x^r+1+1}} \quad (|x| > 1)$$

$$\left(\frac{r-x}{1-x} - \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} \right) \sqrt{1-x^r} - \frac{1}{r} \operatorname{arc sin} x - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^r}}{x} - 2150$$

$$\frac{\cos x}{r(r+\sin x)} + \frac{\xi}{r \sqrt[r]{r}} \operatorname{arc tg} \frac{r \operatorname{tg} \frac{x}{r} + 1}{\sqrt[r]{r}} - 2151 \quad (0 < x < 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt[r]{r}} \ln \frac{r+\xi \sqrt[r]{r} + \cos \xi x}{r-\xi \sqrt[r]{r} - \cos \xi x} - 2152$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} - \frac{1}{r \sqrt[r]{r}} \ln \frac{\sqrt[r]{r} + \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt[r]{r} - \sqrt{1+\cos x}} - 2153$$

$$a \left[x \operatorname{arc tg} x - \frac{1}{r} \ln(x^r+1) \right] - \frac{a-b}{r} (\operatorname{arc tg} x)^r - 2154$$

$$-2151 \quad a \left(x \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \ln |x^{\frac{1}{2}} - 1| \right) + \frac{a+b}{\xi} \ln^{\frac{1}{2}} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - 2150$$

$$\sqrt{1+x^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 2152 \quad -\frac{\ln x}{\frac{1}{2}(1+x^{\frac{1}{2}})} + \frac{1}{\xi} \ln \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}} \quad (x > 0)$$

$$-\ln(\cos^{\frac{1}{2}} x + \sqrt{1+\cos^{\frac{1}{2}} x}) - 2153 \quad -\ln(x + \sqrt{1+x^{\frac{1}{2}}})$$

$$-\frac{\frac{1}{2}x+x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}+x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc} \cos (|x| < 1) - 2154$$

$$-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \left(x - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\frac{1}{2}} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \ln(1+x^{\frac{1}{2}}) - 2155$$

$$-\frac{x}{\xi(1+x^{\frac{1}{2}})} - \frac{1-x^{\frac{1}{2}}}{\xi(1+x^{\frac{1}{2}})} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x - 2156$$

$$\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^{\frac{1}{2}}})}{\frac{1}{2}(1-x^{\frac{1}{2}})} + \frac{1}{\xi \sqrt{\frac{1}{2}}} \ln \frac{\sqrt{1+x^{\frac{1}{2}} - x \sqrt{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{1+x^{\frac{1}{2}} + x \sqrt{\frac{1}{2}}}} \quad (|x| < 1) - 2157$$

$$-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\xi} + \frac{x}{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc} \sin x + \frac{1}{\xi} (\operatorname{arc} \sin x)^{\frac{1}{2}} \quad (|x| < 1) - 2158$$

$$x^{\frac{1}{2}} (x > 0) - 2159 \quad \frac{x}{\xi} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\xi} (1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x - 2160$$

$$x - e^{-x} \operatorname{arc} \sin(e^x) - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}}) \quad (x < 0) - 2161$$

$$x - \ln(1 + e^x) - \frac{x}{\xi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\frac{x}{\xi}} - \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\frac{x}{\xi}} \right)^{\frac{1}{2}} - 2162$$

$$-\frac{\operatorname{cth} \frac{1}{\xi}}{\xi} [x - \ln(1 + e^x \operatorname{ch} \frac{1}{\xi})] - \frac{e^{-x}}{\xi \operatorname{sh} \frac{1}{\xi}} - 2163$$

$$-\frac{1}{2} \ln(\operatorname{th} x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \ln \frac{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x} + \sqrt{\frac{1}{2}} \operatorname{th} x}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x} - \sqrt{\frac{1}{2}} \operatorname{th} x} - 2164$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} |x|}{\frac{1}{2}} - 2165 \quad \frac{x |x|}{\frac{1}{2}} - 2166 \quad e^x \operatorname{tg} \frac{x}{\frac{1}{2}} - 2167$$

$$\frac{(1+x)|1+x|}{\frac{1}{2}} + \frac{(1-x)|1-x|}{\frac{1}{2}} - 2168 \quad \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} (x + |x|) - 2169$$

$$x \geq 0 \quad \text{اگر} \quad 1 - e^{-x} \quad ; \quad x < 0 \quad \text{اگر} \quad e^x - 1 - 2170$$

$$|x| > 1 \quad \text{اگر} \quad \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x \quad ; \quad |x| \leq 1 \quad \text{اگر} \quad x - 2171$$

$$\text{آن در آن} \quad \frac{x}{\xi} + \frac{1}{\xi} \left((x) - \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left| (x) - \frac{1}{\frac{1}{2}} \right| \right\} - 2172$$

$$\frac{[x]}{\pi} \{ [x] - (-1)^{[x]} \cos \pi x \} - 2173 \quad (x) = x - [x]$$

$$|x| > 1 \text{ بازای } x - \frac{x}{2} |x| + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x \leq |x| \leq 1 \text{ بازای } x - \frac{x^2}{2} - 2174$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ اگر } \frac{x^2}{2} + x \leq -\infty < x \leq 0 \text{ اگر } x - 2175$$

$$\frac{1}{2} f(2x) - 2176 \quad x f'(x) - f(x) - 2176 \quad x > 1 \text{ اگر } x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{بازای } f(x) = x - 2180 \quad x - \frac{x^2}{2} - 2179 \quad f(x) = 2\sqrt{x} - 2178$$

$$-\infty < x < +\infty \text{ بازای } f(x) = e^x - 1 \leq -\infty < x \leq 0$$

فصل ۴

$$\underline{S}_n = 16 \frac{1}{4} - \frac{170}{2n} + \frac{120}{4n^2} \quad (\text{الف} - 2182 \quad 12 \frac{1}{2} - 2181)$$

$$\underline{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n}} \quad (\text{ب}) \quad \bar{S}_n = 16 \frac{1}{4} + \frac{170}{2n} + \frac{120}{4n^2}$$

$$\bar{S}_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2^n}{n \left(2^n - 1 \right)} \quad \underline{S}_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2^n}{n \left(2^n - 1 \right)} \quad (\text{پ}) \quad \bar{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}$$

$$u.T + \frac{1}{2} gT^2 - 2184 \quad \frac{31}{0} \quad \bar{S}_n = 31 \times \frac{\sqrt{2-1}}{n} - 2183$$

$$\sin x - 2188 \quad 1 - 2187 \quad \frac{a-1}{\ln a} - 2186 \quad 3 - 2185$$

$$\ln \frac{b}{a} - 2191 \quad \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} - 2190 \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - 2189$$

$$|\alpha| > 1 \text{ اگر } \pi \ln \alpha^2 \quad (\text{ب}) \quad |\alpha| < 1 \text{ اگر } 0 \quad (\text{الف} - 2192)$$

$$\text{حتمی نیست} - 2203 \quad \text{بطور کلی نه} - 2201 \quad \frac{b-a}{2} [f(a) - f(b)] - 2193, 4$$

$$1 - 2210 \quad \frac{\pi}{3} - 2209 \quad \frac{\pi}{6} - 2208 \quad 2 - 2207 \quad 11 \frac{1}{4} - 2206$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 2213 \quad \frac{\pi}{2 \sin \alpha} - 2212 \quad 1 - 2211$$

$$\frac{\pi}{2|ab|} - 2215 \quad \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}} - 2214$$

انتگرال $\frac{1}{x}$ و تابع اولیه آن $\ln|x|$ در فاصله انتگرال گیری $[-1, 1]$ منفصل اند؛

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{y}} \right) \text{ تابع بازگر نقشه تابع اولیه برای } 0 \leq x \leq 2\pi$$

منفصل است؛ (پ) تابع $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ برای $x=0$ منفصل است.

$$\ln 2 - 2220 \quad \frac{1}{y} - 2219 \quad 200\sqrt{2} - 2218 \quad \frac{2}{y} - 2217$$

$$\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) - 2224 \quad \frac{1}{p+1} - 2223 \quad \frac{2}{\pi} - 2222 \quad \frac{\pi}{4} - 2221$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2228 \quad \frac{0}{6}\pi - 2227 \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - 2226 \quad \frac{1}{e} - 2225$$

$$\sin b^2 ; -\sin a^2 ; 0 - 2231 \quad \frac{1}{\ln 2} - 2230 \quad x + \frac{1}{y} - 2229$$

$$\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ (ب)} ; 2x\sqrt{1+x^2} \text{ (الف)} - 2232$$

$$\frac{\pi^2}{4} \text{ (ب)} ; \frac{\pi^2}{4} \text{ (الف)} - 2233 \quad (\sin x - \cos x) \cos(\pi \sin^2 x) \text{ (پ)}$$

$$\frac{t}{y} \text{ (ب)} ; \frac{0}{6} \text{ (الف)} - 2237 \quad 1 - 2235 \quad A - 2233, 1$$

$$\frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3} ; \alpha < 0 \text{ اگر } \frac{1}{3} - \frac{a}{2} \text{ (الف)} - 2238$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ (ب)} ; \frac{\pi}{2} \text{ (الف)} - 2239 \quad \frac{a}{y} - \frac{1}{y} ; 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\frac{2}{|\alpha|} \text{ اگر } |\alpha| > 1 \text{ (ب)} ; \frac{2}{|\alpha|} \text{ اگر } |\alpha| \leq 1 \text{ (الف)} - 2240$$

$$2\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 2242 \quad \pi - 2241 \quad \pi - 2240 \quad \frac{1}{y} \ln \frac{e}{y} - 2239$$

$$\frac{\pi^2}{16} - 2246 \quad \frac{1}{6} - 2245 \quad \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2244 \quad 1 - 2243$$

$$\frac{\pi^2}{4} - 2244 \quad 2 - \frac{\pi}{2} - 2243 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} - 2242$$

الف - 2251 $\frac{\pi}{\sqrt{2}} - 2250$ تابع معکوس $x = \pm t^{\frac{3}{2}}$ دو مقداری است ؛

ب) تابع $x = \frac{1}{t}$ بازای $t = 0$ مفصل است ؛ پ) شاخه پیوسته تک مقداری

تابع $x = \text{Arc } \text{tg } t$ معین و پیماینده مقادیر قطعه منتهای از 0 تا π وجود ندارد.

2252 - خیر 2253 - میتوان 2254 $f(x+b) - f(x+a)$

2255 $\int [f(\text{arc } \sin t) - f(\pi - \text{arc } \sin t)] +$ 2256 $\frac{2}{\sqrt{2}} e^{\frac{0}{2}} - 2257$

2258 $+ \int_{-1}^1 [f(2\pi + \text{arc } \sin t) - f(\pi - \text{arc } \sin t)] dt$

2259 $\frac{1}{26} - 2260$ 2261 $\text{arc } \text{tg } \frac{22}{27} - 2\pi - 2262$ 2263 $\frac{\pi^2}{4}$

2264 $-\frac{6}{7} - 2265$ 2266 $e^{\frac{0}{27}} - \frac{2}{27} - 2267$ 2268 $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

2269 $\frac{4}{3} \pi - \sqrt{3} - 2270$ 2271 $\frac{29}{270} - 2272$ 2273 $-\frac{\pi}{3} - 2274$

2275 $\frac{1}{6} - 2276$ 2277 $2\pi \sqrt{2} - 2278$ 2279 $2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{2\sqrt{2}} \right) - 2280$

2281 $\frac{2}{8} \ln 2 - \frac{220}{1024} - 2282$ 2283 $\frac{2}{0} (e^n - 1) - 2284$ 2285 $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{4} - 2286$

$I_n = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$ ؛ $n = 2k$ اگر $I_n = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \times \frac{\pi}{2} - 2287$

2288 $n = 2k+1$ اگر شماره 2281 را ببینید . 2289

$2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} - 2290$ $(-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) \right]$

$I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} - 2291$ شماره 2281 را ببینید . 2292

$$I_n = (-1)^n \left\{ -\ln \sqrt{r} + \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{r} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right] \right\} \quad -2287$$

اگر π ، اگر n زوج ، -2291 $\frac{\pi(\gamma m)!(\gamma n)!}{\gamma^{\gamma m + \gamma n + 1} m! n! (m+n)!} - 2290$

$\frac{\pi}{r^n} \sin \frac{n\pi}{r} - 2294$ $\frac{\pi}{r^n} - 2293$ $(-1)^n \pi - 2292$ n فرد باشد . -2296 -2295

$$\frac{1}{r^{\gamma n a}} (1 - e^{-\gamma a m}) \left[C_{\gamma a}^n + r \sum_{k=0}^{n-1} C_{\gamma a}^k \frac{a^{\gamma}}{a^{\gamma} + (\gamma n - \gamma k)^{\gamma}} \right] - 2297$$

نقاط -2302 $\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} - 2299$ $\frac{\pi}{\xi n} (-1)^{n-1} - 2298$

انفصال تابع $f(x)$ مشتق $F'(x)$ ممکن است وجود داشته باشد و یا نداشته باشد.

$$x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{\gamma} + C - 2305 \quad \text{arc cos}(\cos x) + C - 2304 \quad |x| + C - 2303$$

$$C + \frac{1}{\pi} \text{arc cos}(\cos \pi x) - 2307 \quad \frac{x^{\gamma}[x]}{\gamma} - \frac{[x]([x]+1)(\gamma[x]+1)}{1\gamma} + C - 2306$$

$$1; -\ln 8! - 2310 \quad -1 - 2309 \quad \frac{1}{\gamma} (|l+x| - |l-x|) + C - 2308$$

$$-\text{th} \frac{\pi}{\gamma} - 2314 \quad \ln n! - 2313 \quad -\frac{\pi^{\gamma}}{\xi} - 2312 \quad \frac{\gamma^0}{\pi} - 2311$$

$$- (\text{ت} ; + \text{پ}) - 2316 \quad \frac{\lambda}{\gamma} - 2315$$

$$\frac{1}{\gamma} (\text{الف} - 2318) \quad \text{دومی} ; \text{ب} (\text{دومی} ; \text{پ}) \text{ اولی}$$

$$\frac{1}{\gamma} \cos \varphi \quad \text{ب} (\text{پ} ; \text{پ}) \quad \text{ب} (\text{پ} ; \text{پ}) \quad \text{ب} (\text{پ} ; \text{پ}) \quad \text{ب} (\text{پ} ; \text{پ}) \quad \text{ب} (\text{پ} ; \text{پ})$$

$$\text{متوسط } v = \frac{1}{\gamma} (v_0 + v_1) - 2320 \quad \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = b$$

$$\theta = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \quad \text{جسم است} \quad \frac{1}{\gamma} i^{\gamma} - 2321 \quad A - 2321, 1 \quad \text{الف} - 2322$$

$$\theta = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\gamma}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta = 1 \quad \text{ب} (\text{پ} ; \theta = \frac{1}{e})$$

$$۲۳۲۳ - \frac{\lambda\pi}{3} \pm \frac{\xi\pi}{3}\theta \quad (|\theta| < 1) \quad ۲۳۲۴ \quad \frac{1}{1.0} \text{ قرار دارد و } \frac{1}{1.0\sqrt{2}}$$

$$۲۳۲۵ - \frac{1}{a} \ln \frac{b}{a} \quad (الف : ۱) \quad ۲۳۲۶, ۱ \quad \dots, ۱, \dots, ۰, ۰, \dots, \theta \quad (0 < \theta < 1)$$

$$۲۳۲۸ - \frac{\theta}{0.0\pi} \quad (0 < \theta < 1) \quad ۲۳۲۹ - \frac{2}{a} \theta \quad (|\theta| < 1)$$

$$۲۳۳۰ - \frac{\theta}{a} \quad (|\theta| < 1) \quad ۲۳۳۱ - \frac{1}{a} \quad ۲۳۳۲ - \pi \quad ۲۳۳۳ - \pi \quad ۲۳۳۴ - ۱ \quad ۲۳۳۵ - ۱$$

$$۲۳۳۸ - \frac{2}{3} \ln 2 \quad ۲۳۳۹ - \frac{\xi\pi}{3\sqrt{2}} \quad ۲۳۴۰ - \frac{2\pi}{3\sqrt{2}} \quad ۲۳۴۱ - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$۲۳۴۲ - \frac{\pi}{2} \quad ۲۳۴۳ - \frac{1}{0} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \quad ۲۳۴۴ - \frac{\pi}{2}$$

$$۲۳۴۵ - \frac{\pi}{2} - ۱ \quad ۲۳۴۶ - \frac{a}{x^2 + b^2} \quad ۲۳۴۷ - \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$۲۳۴۸ - I_n = n! \quad ۲۳۴۹ - \frac{\pi a^{n-1} \operatorname{sgn} a}{(ac - b^2)^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \quad ۲۳۵۰ - I_n = n! \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} C_n^k \ln(k+1)$$

۲۳۵۱ - که در آن C_n^k تعداد ترکیبات

$$۲۳۵۲ - I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} \quad \text{اگر } n \text{ زوج و}$$

$$۲۳۵۳ - I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \pi \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد}$$

$$۲۳۵۴ - I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد}$$

$$۲۳۵۵ - \frac{\pi}{2} \ln 2 \quad (الف : ۱) \quad ۲۳۵۶ - \frac{2\sqrt{\lambda e} - \frac{\pi}{\lambda}}{1 - e^{-\pi}} \quad (ب : ۱)$$

$$۲۳۵۷ - \frac{1}{a} f(0) \quad (الف : ۱) \quad (ب : ۱) \quad (پ : ۱)$$

۲۳۵۸ - همگرا $p > 0$ - همگرا ۲۳۵۹ - همگرا ۲۳۶۰ - و اگر ۲۳۶۱ - بازای

همگرا ۲۳۶۲ - اگر $p > -1$ و $q > -1$ - همگرا ۲۳۶۳ - اگر $m > -1$ ،

همگرا ۲۳۶۴ - بازای $1 < n < 2$ - همگرا ۲۳۶۵ - بازای $1 < n < 2$ ،

همگرا ۲۳۶۶ - همگرا ۲۳۶۷ - بازای $n - m > 1$ ، $m > -2$ ،

$a \neq 0$ ، $n > 0$ همگرا 2368 - واگرا 2369 - همگرا اگر $p < 1$ ،
 $q < 1$ - بازای $n > -1$ همگرا 2370 ، 1 همگرا 2371 - همگرا اگر
 $\min(p, q) < 1$ ، $\max(p, q) > 1$ همگرا 2372 - همگرا 2373 - همگرا اگر
 $p > 1$ ، $q < 1$ ، $p > 1$ - بازای q ، دلخواه ، $r < 1$ و بازای
 $p = 1$ ، $q > 1$ ، $r < 1$ همگرا است . 2374 - همگرا اگر $p_i < 1$

$\alpha > -1$ ، $\beta > -1$ - بازای $\sum_{i=1}^n p_i > 1$ ، $(i = 1, 2, \dots, n)$ 2375 ،

$\alpha + \beta < -1$ همگرا 2376 - همگرا اگر $P_n(x)$ در فاصله $[0, +\infty]$ دارای ریشه نباشد و $n > m + 1$ 2377 - همگرای نامطلق 2378 همگرای

2379 نامطلق 2380 - همگرای مطلق اگر $0 < \frac{p+1}{q} < 1$ ؛ همگرای مشروط

اگر $0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$ ، 2381 - همگرا 2382 ، 2 همگرا 2383 - همگرا 2384 - همگرای

مطلق اگر $p > -2$ ، $q > p + 1$ ؛ همگرای مشروط اگر $p > -2$ ، 2385 - بازای $0 < n < 2$ همگرای مشروط 2386 - بازای

$n > m + 1$ همگرای مطلق ، بازای $m < n \leq m + 1$ همگرای مشروط

2387 - خیر 2388 - $\ln \frac{1}{\gamma} - 2389$ ، 2390 - $\pi - 2391$ ، 2392 - $\pi - 2393$ ، 2394 - $\pi - 2395$

2396 - $\frac{a^x}{x} - 2397$ ، $\frac{1}{x} - 2398$ ، $\frac{1}{x} - 2399$ ، $\frac{1}{x} - 2400$ ، 2401 - $\lg e \approx 6,28 - 2402$ ، $9,9 - 2403$ ، 1

2404 - $2 - \frac{1}{\ln \gamma} \approx 0,56 - 2405$ ، 2406 - $\frac{1}{x} + \frac{y}{\pi} \approx 0,97 - 2407$ ، 2408 - $\frac{x}{y} a^x - 2409$

2410 - $\frac{\pi}{x} - 2411$ ، 2412 - $\pi a^x - 2413$ ، 2414 - $\pi a b - 2415$ ، 2416 - $\frac{x}{y} a^x - 2417$

2418 - $\frac{\pi}{10} \sqrt{2} \rho^x - 2419$ ، 2420 - $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}} - 2421$ ، 2422 - $\frac{\pi}{3} \text{ch} \frac{\pi}{y} \approx 0,546 - 2423$

2424 - $\frac{\pi a^x}{x} - 2425$ ، 2426 - $\frac{2\pi}{n+2} - 2427$ ، 2428 - $3\pi a^x - 2429$ ، $y = \text{sh} S$ ، $x = \text{ch} S - 2430$ ، $(3\pi + 2) : (9\pi - 2) - 2431$

2432 - $\frac{\lambda}{10} - 2433$ ، 2434 - $\frac{a^x}{x} (\varepsilon \pi^x + 3\pi) - 2435$ ، 2436 - $7\pi a^x - 2437$

2438 - $\frac{3\pi}{\lambda} \times \frac{c^x}{ab} - 2439$ ، 2440 - $\pi a^x \left(\frac{16}{\sqrt{x}} - 9 \right) - 2441$ ، 2442 - $a^x - 2443$

$$\begin{aligned}
& \frac{p^{\gamma}}{\gamma} (\gamma + \varepsilon \sqrt{\gamma}) - \gamma \varepsilon \gamma \quad \frac{\pi a^{\gamma}}{\varepsilon} - \gamma \varepsilon \gamma \cdot \quad \frac{\gamma \pi a^{\gamma}}{\gamma} - \gamma \varepsilon \gamma \quad \\
& (\pi - 1) \frac{a^{\gamma}}{\varepsilon} - \gamma \varepsilon \gamma \quad \frac{1}{\pi} - \gamma \varepsilon \gamma \gamma, \gamma \quad 1 \quad \pi - \gamma \varepsilon \gamma \gamma, 1 \quad \frac{\pi p^{\gamma}}{(1 - \varepsilon^{\gamma})^{\gamma}} - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \\
& \frac{1}{\pi} - \gamma \varepsilon \gamma \varepsilon, \gamma \quad \frac{\gamma}{\gamma} - \gamma \varepsilon \gamma \varepsilon, 1 \quad \frac{1}{\gamma} \left(1 - \ln \gamma + \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} \right) - \gamma \varepsilon \gamma \varepsilon \\
& \pi \left(1 - \frac{\pi}{\varepsilon} \right) a^{\gamma} - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \pi \left(1 + \frac{\pi^{\gamma}}{\gamma} \right) - \gamma \varepsilon \gamma \varepsilon, \varepsilon \quad \varepsilon \frac{\varepsilon}{10} - \gamma \varepsilon \gamma \varepsilon, \gamma \\
& \frac{\gamma}{\lambda} \pi a^{\gamma} - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad a^{\gamma} - \gamma \varepsilon \gamma \lambda \quad \pi a^{\gamma} \sqrt{\gamma} - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \frac{\gamma}{\gamma} a^{\gamma} - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \\
& - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \frac{\lambda}{\gamma \gamma} (1 \cdot \sqrt{10} - 1) - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \frac{\pi a^{\gamma}}{\lambda \sqrt{\gamma}} - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \cdot \\
& \sqrt{h^{\gamma} - a^{\gamma}} - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \gamma \sqrt{x \cdot \left(x + \frac{p}{\gamma} \right)} + p \ln \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x + \frac{p}{\gamma}}}{\sqrt{\frac{p}{\gamma}}} \\
& \frac{e^{\gamma} + 1}{\varepsilon} - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad x - \sqrt{\gamma} + \sqrt{1 + e^{\gamma x}} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 + e^{\gamma x}}}{1 + \sqrt{\gamma}} - \gamma \varepsilon \gamma \varepsilon \\
& a \ln \frac{a}{b} - \gamma \varepsilon \gamma \lambda \quad \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \frac{a}{\gamma} \right) - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad a \ln \frac{a+b}{a-b} - b - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \\
& \frac{\varepsilon (a^{\gamma} - b^{\gamma})}{ab} - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \gamma a - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \cdot \quad \varepsilon a \left(1 + \sqrt{\gamma} \ln \frac{1 + \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}} \right) - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \\
& - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \gamma \pi^{\gamma} a - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \lambda a - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \frac{\ln(1 + \sqrt{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \\
& - \gamma \varepsilon \gamma \gamma, 1 \quad \gamma \left(\operatorname{ch} \frac{T}{\gamma} \sqrt{\operatorname{ch} T} - 1 \right) - \sqrt{\gamma} \ln \frac{\sqrt{\gamma} \operatorname{ch} \frac{T}{\gamma} + \sqrt{\operatorname{ch} T}}{1 + \sqrt{\gamma}} \\
& \pi a \sqrt{1 + \varepsilon \pi^{\gamma}} + \frac{a}{\gamma} \ln (\gamma \pi + \sqrt{1 + \varepsilon \pi^{\gamma}}) - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \frac{1}{\gamma} \left(\operatorname{ch}^{\frac{\gamma}{\gamma}} \gamma T - 1 \right) \\
& p [\sqrt{\gamma} + \ln(1 + \sqrt{\gamma})] - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \lambda a - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \frac{\sqrt{1 + m^{\gamma}}}{m} a - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \\
& \gamma + \frac{1}{\gamma} \ln \gamma - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad a (\gamma \pi - \operatorname{th} \pi) - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \quad \frac{\gamma \pi a}{\gamma} - \gamma \varepsilon \gamma \gamma \cdot
\end{aligned}$$

$$\frac{\gamma\pi}{\circ\sqrt{\gamma}} \approx \circ, \gamma\gamma - \gamma\epsilon\circ\circ \quad T - \gamma\epsilon\circ\gamma, \gamma \quad \text{sh } R - \gamma\epsilon\circ\gamma, \gamma \quad \gamma \frac{1}{\gamma} - \gamma\epsilon\circ\gamma, \gamma$$

$$\frac{h}{\gamma} [(\gamma A + a) B + (A + \gamma a) b] - \gamma\epsilon\circ\gamma \quad \frac{bh}{\gamma} (\gamma a + c) - \gamma\epsilon\circ\gamma$$

$$\frac{\gamma}{\gamma} abc - \gamma\epsilon\gamma\gamma \quad \frac{1}{\gamma} SH - \gamma\epsilon\circ\gamma \quad \frac{\pi h}{\gamma} [(\gamma A + a) B + (A + \gamma a) b] - \gamma\epsilon\circ\gamma$$

$$\frac{1\gamma}{\gamma} a^{\gamma} - \gamma\epsilon\gamma\circ \quad \frac{\lambda\pi abc}{\gamma} - \gamma\epsilon\gamma\epsilon \quad \frac{\epsilon}{\gamma} \pi abc - \gamma\epsilon\gamma\gamma$$

$$\frac{\pi a^{\gamma}}{\gamma} - \gamma\epsilon\gamma\lambda \quad \frac{1\gamma}{1\circ} a^{\gamma} \sqrt{ab} - \gamma\epsilon\gamma\gamma \quad \frac{\gamma}{\gamma} a^{\gamma} \left(\pi - \frac{\epsilon}{\gamma} \right) - \gamma\epsilon\gamma\gamma$$

$$\frac{\gamma}{\gamma} \pi ab^{\gamma} - \gamma\epsilon\gamma\gamma \quad \frac{\epsilon\pi\sqrt{\gamma}}{\gamma} a^{\gamma} - \gamma\epsilon\gamma\circ \quad \frac{\epsilon}{1\circ} - \gamma\epsilon\gamma\gamma$$

$$\gamma\pi^{\gamma} \left(\text{ب} : \frac{\pi^{\gamma}}{\gamma} \right) \left(\text{الف} - \gamma\epsilon\gamma\epsilon \right) \quad \frac{\lambda\pi}{\gamma} \left(\text{ب} : \frac{1\gamma\pi}{1\circ} \right) \left(\text{الف} - \gamma\epsilon\gamma\gamma \right)$$

$$\gamma\pi \left(\text{ب} : \frac{\pi}{\gamma} \right) \left(\text{الف} - \gamma\epsilon\gamma\gamma \right) \quad \frac{\pi a^{\gamma} b}{\gamma} \left(\text{ب} : \frac{\epsilon}{1\circ} \pi ab^{\gamma} \right) \left(\text{الف} - \gamma\epsilon\gamma\circ \right)$$

$$\left(\text{الف} - \gamma\epsilon\gamma\circ \right) \quad \frac{\pi}{\circ(1-e^{-\gamma\pi})} - \lambda\epsilon\gamma\gamma \quad \frac{\lambda\pi a^{\gamma}}{\gamma} - \gamma\epsilon\gamma\lambda \quad \gamma\pi^{\gamma} a^{\gamma} b - \gamma\epsilon\gamma\gamma$$

$$\epsilon : \frac{\gamma\gamma}{1\circ\circ} \pi ab^{\gamma} \left(\text{الف} - \gamma\epsilon\gamma\gamma \right) \quad \gamma\pi^{\gamma} a^{\gamma} \left(\text{ب} : \gamma\pi^{\gamma} a^{\gamma} \right) \left(\text{ب} : \circ\pi^{\gamma} a^{\gamma} \right)$$

$$\left(\text{الف} - \gamma\epsilon\gamma\gamma \right) \quad V_y = \frac{\gamma\epsilon}{1\circ\circ} \pi \quad \epsilon : V_x = \frac{\gamma\epsilon}{\gamma\circ} \pi - \gamma\epsilon\gamma\lambda, \gamma \quad \frac{\gamma\gamma}{1\circ\circ} \pi a^{\gamma} b \left(\text{ب} : \frac{\pi a^{\gamma}}{\epsilon} \left[\sqrt{\gamma} \ln(1 + \sqrt{\gamma}) - \frac{\gamma}{\gamma} \right] \right) \left(\text{الف} - \gamma\epsilon\gamma\epsilon \right) \quad \frac{1\gamma}{\gamma} \pi^{\gamma} a^{\gamma} \left(\text{ب} : \frac{\lambda}{\gamma} \pi a^{\gamma} \right)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma} \pi - \gamma\epsilon\gamma\epsilon, \gamma \quad \frac{\gamma}{\gamma} (\pi^{\epsilon} - \gamma\pi^{\gamma}) a^{\gamma} - \gamma\epsilon\gamma\epsilon, \gamma \quad \frac{\pi^{\gamma} a^{\gamma}}{\epsilon} \left(\text{ب} : \frac{\pi^{\gamma} a^{\gamma}}{\epsilon\sqrt{\gamma}} \right) \left(\text{ب} : \frac{\pi^{\gamma} a^{\gamma}}{\epsilon\sqrt{\gamma}} \right) - \gamma\epsilon\gamma\circ$$

$$\frac{\epsilon\pi a^{\gamma}}{\gamma\epsilon\gamma} \left(\gamma\sqrt{\gamma} + \gamma \ln \frac{\gamma + \sqrt{\gamma}}{\gamma} \right) - \gamma\epsilon\gamma\gamma \quad \frac{\pi^{\gamma} a^{\gamma}}{\gamma\sqrt{\gamma}} - \gamma\epsilon\gamma\circ$$

$$\gamma a \sqrt{\pi^{\gamma} a^{\gamma} + \epsilon b^{\gamma}} + \frac{\lambda b^{\gamma}}{\pi} \ln \frac{\pi a + \sqrt{\pi^{\gamma} a^{\gamma} + \epsilon b^{\gamma}}}{\gamma b} - \gamma\epsilon\gamma\gamma$$

$$\pi \left[(\sqrt{\circ} - \sqrt{\gamma}) + \ln \frac{(\sqrt{\gamma} + 1)(\sqrt{\circ} - 1)}{\gamma} \right] - \gamma\epsilon\gamma\lambda$$

$$\frac{2\pi}{r} [(rx. + p) \sqrt{2px. + p^2} - p^2] \quad (\text{الف} - 2489)$$

$$\frac{\pi}{\varepsilon} \left[(p + \varepsilon x.) \sqrt{2x. (p + 2x.)} - p^2 \ln \frac{\sqrt{2x. + p} + \sqrt{p + 2x.}}{\sqrt{p}} \right] \quad (\text{ب})$$

$$2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \ln \left[\frac{a}{b} (1 + \varepsilon) \right] \quad (\text{ب} : 2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\text{arc sin } \varepsilon}{\varepsilon}) \quad (\text{الف} - 2490)$$

که در آن $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ خروج از مرکز بیضی است $2\pi^2 ab - 2491$

$$\varepsilon \pi a \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a} \right) \quad (\text{الف} - 2492 \quad \frac{12}{0} \pi a^2 - 2492)$$

$$\frac{64}{r} \pi a^2 \quad (\text{الف} - 2495 \quad \varepsilon \pi a^2 - 2494 \quad 2\pi a \left(a + b \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a} \right)) \quad (\text{ب})$$

$$\frac{2\pi}{0} a^2 (\varepsilon \sqrt{2-1}) - 2496 \quad \frac{22}{r} \pi a^2 \quad (\text{ب} : 16\pi^2 a^2) \quad (\text{ب})$$

$$\varepsilon 2\pi a^2 \sqrt{2} \quad (\text{ب} : 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2})) \quad (\text{الف} - 2498 \quad \frac{22}{0} \pi a^2 - 2497)$$

$$\frac{0}{128 \sqrt{10}} [1 \varepsilon \sqrt{0} + 1 \sqrt{10} \ln (2 + \sqrt{0})] \approx 1,012 - 2499 \quad \varepsilon \pi a^2 \quad (\text{ب})$$

$$P = 2\pi r^2 [(2 + \sqrt{2}) + \ln(1 + \sqrt{2})] \quad \varepsilon V = \frac{2\pi}{r} \rho^2 - 2500$$

$$\frac{\rho^2}{\lambda} [\sqrt{2} + 0 \ln(1 + \sqrt{2})] - 2501,1 \quad M_V = \frac{\pi a^2}{r} \quad \varepsilon M_1 = 2a^2 - 2501$$

$$\varepsilon I_x = \frac{\lambda}{r_0} a^2 - 2502,1 \quad M_V = \frac{bh^2}{12} \quad \varepsilon M_1 = \frac{bh^2}{r} - 2502$$

$$r_y = a \sqrt{\frac{7}{0}} \quad r_x = a \sqrt{\frac{7}{r_0}} \quad \varepsilon I_y = \frac{\lambda}{0} a^2$$

$$\varepsilon M_1 = \frac{\pi r^2 h^2}{12} - 2503 \quad M_V^{(y)} = \frac{\pi a^2 b}{\varepsilon} \quad \varepsilon M_V^{(x)} = \frac{\pi ab^2}{\varepsilon} - 2503$$

$$\varepsilon x. = a \frac{\sin \alpha}{a} - 2504 \quad I = \frac{2}{0} MR^2 - 2504,1 \quad M_V = \frac{\pi}{r} r^2 h^2$$

$$\left(\frac{\varepsilon a}{r\pi}, \frac{\varepsilon b}{r\pi} \right) - 2504 \quad \left(\frac{9}{r} a, \frac{9}{r} a \right) - 2504 \quad y. = .$$

آن در $\varphi = \varphi - \alpha - 2511$ که $(0, 0, \frac{2}{\lambda} a) - 2510$

حلزونی لگاریتمی $r_0 = \frac{mr}{\sqrt{1+\epsilon m^2}}$ ؛ $\alpha = \text{arctg} \frac{1}{2m}$

$r_0 = \frac{0}{1} a$ ، $\varphi_0 = 0 - 2512$ یا $r_0 = \frac{am}{\sqrt{1+\epsilon m^2}} e^{m(\varphi_0 + \alpha)}$

$y_0 = 0$ ، $x_0 = \frac{2}{3} a - 2514$ $y_0 = \frac{0}{1} a$ ، $x_0 = \pi a - 2513$

$A_h = mg \frac{Rh}{R+h} - 2517$ $70 \text{ kg} - 2516$ $(0, 0, \frac{a}{2}) - 2515$

که در آن شعاع زمین است ؛ $A_{\infty} = mgR$ $0,5 \text{ kgm} - 2518$

$70,8 \frac{1}{3} T - 2521$ $\frac{2}{3} a^2 - 2520$ $1740 \text{ kgm} - 2519$

جاذبه $\frac{\epsilon}{10} \pi \delta \omega^2 R^0 - 2523$ $v.T + \frac{a}{2} T^2 - 2522$

روی محورهای مختصات : $Y = -\frac{2km\mu}{a}$ ، $X = 0$ که در آن k ثابت

جاذبه است $2\pi k m \delta \cdot \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) - 2525$

است 2526 - تقریباً سه ساعت 2527 - ظرف باید به سطح حاصل از دوران

منحنی $y = Cx^2$ حول محور قایم Oy محدود شود $Q = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1700}} - 2528$

$\frac{\gamma H^2}{6E} - 2530$ $99,92\% - 2529$

در جوابهای محاسبات تقریبی انتگرالهای معین مقادیر جدول داده شده

است $6,2822 - 2531$ $0,79310 - 2532$ $0,83066 - 2533$
 $1,27039 - 2534$ $0,4024 - 2535$ $17,222 - 2536$ $1,4670 - 2537$
 $1,462 - 2538$ $3,14159 - 2539$ $0,910966 - 2540$ $0,2288 - 2541$
 -2542 $0,104 - 2543$ $0,8862 - 2544$ $0,3179 - 2545$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0,99	1,60	1,80	1,72	1,02	1,42

فصل ۵

- $\frac{1}{3} - 2500$ $1 - 2549$ $2 - 2548$ $\frac{3}{2} - 2547$ $\frac{2}{3} - 2546$
- $1 - \sqrt{2} - 2552$ $\frac{q \cos \alpha - q^2}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}$ (ب) $\frac{q \sin \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}$ (الف) - 2551
- 2553 فقط بازای $x = k\pi$ (k عدد یست درست) همگرا - 2556 واگرا
- 2557 واگرا - 2558 همگرا - 2559 واگرا - 2560 واگرا - 2561 واگرا
- 2562 همگرا - 2563 همگرا - 2564 واگرا - 2566 میتواند همگرا یا
- واگرا باشد (الف) میتواند همگرا یا واگرا باشد ؛ (ب) واگرا
- 2578 همگرا - 2579 همگرا - 2580 همگرا - 2581 (الف) همگرا ؛
- (ب) واگرا - 2582 همگرا - 2583 همگرا - 2584 همگرا - 2585 همگرا
- 2585,1 همگرا - 2585,2 بازای α و x دلخواه همگرا - 2586 همگرا
- 2587 واگرا - 2588 واگرا - 2589 همگرا - 2589,1 همگرا
- 2589,2 همگرا - 2590 همگرا - 2591,2 $n \geq 12$ - 2595 همگرا
- 2596 همگرا - 2597 همگرا - 2597,1 همگرا 2598 بازای $p > 2$
- همگرا 2599 بازای $\frac{b-a}{a} > 1$ همگرا - 2600 بازای $p > \frac{2}{3}$ همگرا
- 2601 همگرا - 2602 بازای $p + q > 1$ همگرا - 2603 بازای $q > p$
- همگرا - 2604 بازای $1 + q > \frac{p}{2}$ همگرا - 2605 بازای $1 > \alpha(q-p)$
- همگرا - 2607 بازای $1 + q > p$ همگرا - 2608 بازای $p > 0$ همگرا
- 2609 بازای $p > 0$ همگرا - 2610 بازای $\frac{1}{p} > p$ همگرا - 2611 بازای
- 2612 همگرا - 2612 بازای $p > 1$ همگرا - 2613 واگر - 2614 واگرا
- 2614,2 بازای $1 + p > x$ همگرا - 2616 بازای $\frac{1}{e} < x$ همگرا
- 2617 همگرا - 2618 واگرا - 2619 بازای $p > 1$ همگرا - 2620 بازای
- $p > 1$ و q اختیاری و بازای $p = 1$ و $q > 1$ همگرا - 2620,1 واگرا
- 2620,2 همگرا - 2620,3 همگرا - 2621 واگرا - 2622,1,2
- 2626 بازای $\alpha > \frac{1}{p}$ همگرا - 2627 همگرا اگر $\frac{1}{p} = a$
- 2628 واگرا - 2629 همگرا - 2630 بازای $a > 2$ همگرا - 2631 همگرا

- $\frac{a}{d} < -1$ ، $c = 0$ همگرا اگر -2634 همگرا -2633 همگرا -2632
- واگرا -2635 همگرا اگر $\alpha \neq 0$ -2636 همگرا -2637 همگرا -2638 واگرا
- همگرا -2639 همگرا اگر $a = \sqrt{bc}$ -2640 همگرا -2641 همگرا اگر
- $\alpha < -1$ همگرا اگر $\alpha > \frac{1}{2}$ -2642 بازای $a^b > e$ ، $c = 0$ -2643
- و بازای $a^e > 1$ همگرا -2644 بازای $a + b > 1$ همگرا -2645 همگرا
- همگرا -2646 همگرا -2647 همگرا -2648 واگرا -2649 همگرا
- همگرا -2650 همگرا -2651 همگرا -2652 بازای $\alpha > 2$ همگرا 2653 همگرا
- همگرا -2654 همگرا (الف -2655 $N > 100000$ ؛ ب $N \geq 12$ ؛
- ب) $N > 4$ -2659 $\frac{2}{9}$ -2660 $\frac{3}{7}$ -2661 $\ln 2$ -2662 (الف)
- $\frac{3}{2} \ln 2$ ؛ ب) $\frac{1}{2} \ln 2$ همگرا -2664 همگرا -2665 همگرا -2666 همگرا
- $1, 2666$ - نتیجه نمیشود -2667 همگرا -2668 همگرا -2669 همگرا
- 2670 - واگرا -2671 همگرا -2672 همگرا -2673 واگرا $1, 2673$ - همگرا
- 2675 - بازای $p > 1$ همگرای مطلق ، بازای $0 < p \leq 1$ همگرای مشروط
- 2676 - بازای $p > 1$ همگرای مطلق ، بازای $0 < p \leq 1$ همگرای مشروط
- 2677 - بازای $p > 1$ همگرای مطلق ، بازای $\frac{1}{2} < p \leq 1$ همگرای مشروط
- 2678 - بازای $|x - \pi k| < \frac{\pi}{4}$ (عددیست درست) همگرای مطلق ؛ بازای
- $x = \pi k \pm \frac{\pi}{2}$ همگرای مشروط -2679 - بازای x دلخواه که عدد درست
- منفی نباشد. همگرای مشروط -2680 - بازای $p > 1$ همگرای مطلق ؛ بازای
- $0 < p \leq 1$ همگرای مشروط -2681 - بازای $p > 2$ همگرای مطلق ؛ بازای
- $1 < p \leq 2$ همگرای مشروط -2682 - بازای $p > 1$ همگرای مطلق ؛ بازای
- $\frac{1}{2} < p \leq 1$ همگرای مشروط -2683 - همگرای مشروط -2684 - همگرای
- مطلق -2685 - واگرا -2686 - همگرای مشروط -2687 - بازای $p > 1$
- همگرای مطلق ؛ بازای $\frac{1}{2} < p \leq 1$ همگرای مشروط -2688 - واگرا
- -2689 - بازای $p > 2$ همگرای مطلق ؛ بازای $0 < p \leq 2$ همگرای مشروط
- -2690 - همگرا -2691 - واگرا -2692 - بازای $q > p + 1$ همگرای مطلق ؛

بازای $p < q \leq p+1$ همگرای مشروط ۲۶۹۳- بازای $p > 1, q > 1$
 همگرای مطلق ؛ بازای $0 < p = q \leq 1$ همگرای مشروط ۲۶۹۴- بازای
 $p > 1$ همگرای مطلق ؛ بازای $p = 1$ همگرای مشروط ۲۶۹۵- بازای
 $p > 1$ همگرای مطلق ؛ بازای $p = 1$ همگرای مشروط ۲۶۹۶- بازای
 $p > 1, q > 1$ همگرای مطلق ؛ بازای $0 < p = q \leq 1$ همگرای مشروط
 ۲۶۹۸- الف) $p > 1$ ؛ ب) $0 < p \leq 1$ ۲۶۹۸- الف) همگرا ؛
 ب) همگرا ؛ پ) همگرا ۲۶۹۹- الف) $q > p+1$ ؛ ب) $p < q \leq p+1$
 ۲۷۰۰- بازای $m \geq 0$ همگرای مطلق ؛ بازای $-1 < m < 0$ همگرای مشروط
 ۲۷۰۳، ۱- الف) $n \geq 1000000$ ؛ ب) $n \geq 1, 32 \times 10^{11}$ ۲۷۰۶- الف)
 واگرا ؛ ب) میتواند همگرا یا واگرا باشد ۲۷۰۷- ۲ ۲۷۰۸- ۳

۲۷۰۹- ۳ ۲۷۱۰- $\frac{1+y}{1-xy}$ بازای $|x| > 1$ همگرای مطلق

۲۷۱۷- بازای $x > 0$ همگرای مطلق ؛ بازای $x = 0$ همگرای مشروط

۲۷۱۸- بازای $-\frac{1}{3} < x < 1$ و بازای $x < -1$ همگرای مطلق ۲۷۱۹- بازای

$|x| \neq 1$ همگرای مطلق و بازای $x = -1$ همگرای مشروط ۲۷۲۰- بازای

$\frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6}$ و $-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3}$ همگرای مطلق ۲۷۲۱- بازای

$|x - \pi k| \leq \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) همگرای مطلق ۲۷۲۲- بازای

$p > 1$ و $x \neq k$ ($k = -1, -2, \dots$) همگرای مطلق و بازای $0 < p \leq 1$

$x \neq k$ همگرای مشروط ۲۷۲۳- بازای $q > p+1$ همگرای مطلق و بازای

$p < q \leq p+1$ همگرای مشروط ۲۷۲۴- بازای $|x| < 1$ همگرای مطلق

$|x| \neq 1$ همگرای مطلق ۲۷۲۷- بازای $x \neq -1$ همگرای مطلق

$x > 0$ همگرای مطلق ۲۷۲۹- بازای $0 < |x| < +\infty$

همگرای مطلق اگر $|a| > 1$ ؛ واگرا اگر $|a| \leq 1$ یا $x = 0$

$x > e$ و $x = 2$ همگرای مطلق ۲۷۳۱- بازای $x > 1$

همگرای مطلق ۲۷۳۲- همگرا اگر $0 < \min(x, y) < 1$ ۲۷۳۳- بازای

$|x| < 1, y < +\infty, y \leq 0$ و بازای $|x| > 1, |x| > y > |x|$ همگرای مطلق ؛

بازای $x = -1, 0 \leq y \leq 1$ همگرای مشروط ۲۷۳۴- بازای

$\max(|x|, |y|) < 1$ همگرای مطلق ۲۷۳۵- همگرای مطلق بازای :

$0 \leq x < 1$ (۱) ، $-\infty < y < +\infty$ ؛ (۲) $x = 1, y > 1$ ؛

(۲) $x > 1, y > 2$ - ۲۷۳۶ بازای $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ که در آن k عددیست

درست ، همگرای مطلق $\frac{1}{4} < |x| < 2 - 2738$ ؛ $\frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}$

(الف - ۲۷۳۹) بازای $x \geq 0$ همگرای مطلق ، بازای $-1 < x < 0$ - همگرای
 (مشروط ؛ ب) بازای $p + x > 1$ و بازای $0, 1, 2, \dots$ $x = 0$ همگرای مطلق ،
 بازای $0 < p + x \leq 1$ همگرای مشروط ؛ پ) همگرای مطلق بازای :

(۱) $|x| < 1$ و y اختیاری ؛ (۲) $x = \pm 1, y > \frac{1}{4}$ ؛ (۳) x اختیاری

است ، $y = 0, 1, 2, \dots$ ؛ بازای $x = 1, -\frac{1}{4} < y < \frac{1}{4}$ همگرای

مشروط - ۲۷۴۳ بازای $\varepsilon = 0,001$ و $x = \sqrt[m]{0,1}$ ، $N \geq 3m$. خیر .

- ۲۷۴۴ $n > \frac{1}{\varepsilon}$ - ۲۷۴۵ $n \geq 26$ - ۲۷۴۶ (الف) همگرای یکنواخت ؛

(ب) همگرای نایکنواخت - ۲۷۴۷ همگرای یکنواخت - ۲۷۴۸ همگرای

نایکنواخت - ۲۷۴۹ همگرای یکنواخت - ۲۷۵۰ همگرای یکنواخت

(الف - ۲۷۵۱) همگرای یکنواخت ؛ (ب) همگرای نایکنواخت ؛ پ) همگرای
 یکنواخت - ۲۷۵۲ همگرای یکنواخت - ۲۷۵۳ همگرای یکنواخت - ۲۷۵۴ همگرای نایکنواخت

(الف - ۲۷۵۵) همگرای یکنواخت ؛ (ب) همگرای نایکنواخت - ۲۷۵۶ (الف)

همگرای نایکنواخت ؛ (ب) همگرای یکنواخت - ۲۷۵۷ همگرای نایکنواخت

(الف - ۲۷۵۸) همگرای یکنواخت ؛ (ب) همگرای نایکنواخت - ۲۷۵۹ همگرای

یکنواخت - ۲۷۶۰ (الف) همگرای یکنواخت ؛ (ب) همگرای نایکنواخت

- ۲۷۶۱ همگرای یکنواخت - ۲۷۶۲ همگرای یکنواخت - ۲۷۶۳ همگرای

نایکنواخت - ۲۷۶۴ (الف) همگرای یکنواخت ؛ (ب) همگرای نایکنواخت

- ۲۷۶۸ همگرای یکنواخت - ۲۷۶۸,۱ همگرای نایکنواخت - ۲۷۶۹ همگرای

نایکنواخت - ۲۷۷۰ همگرای یکنواخت - ۲۷۷۱ همگرای نایکنواخت

- ۲۷۷۲ همگرای یکنواخت - ۲۷۷۳ (الف) همگرای نایکنواخت ؛ (ب) همگرای

یکنواخت - ۲۷۷۴ (الف) همگرای یکنواخت ؛ (ب) همگرای نایکنواخت

- ۲۷۷۶ همگرای نایکنواخت - ۲۷۷۷ همگرای یکنواخت - ۲۷۷۸ همگرای

یکنواخت - ۲۷۷۹ همگرای یکنواخت - ۲۷۸۰ همگرای یکنواخت

- ۲۷۸۱ همگرای یکنواخت - ۲۷۸۲ همگرای یکنواخت - ۲۷۸۳ میتواند

- ۲۷۸۵ حتمی نیست - ۲۷۹۵ (الف) بازای $|x| < 1$ موجود و پیوسته است ؛

(ب) بازای $|x| < +\infty$ موجود و پیوسته است ؛ پ) بازای $|x| < +\infty$ وجود

دارد ، بازای $x = 0$ منفصل است $x \neq -k$ بازای (الف - ۲۷۹۹

$|x| < +\infty$ بازای (ب) موجود و دیفرانسیل پذیر است؛ $k = 1, 2, 3, \dots$)

وجود دارد ، در همه جا سوی $x = 0$ دیفرانسیل پذیر است (الف - ۲۸۰۲)

دلخواه ؛ (ب) $\alpha < 1$ ؛ (پ) $\alpha < 2$ $\alpha < 2$ - ۲۸۰۵ خیر $\frac{1}{4} \ln 2 - 2806$

۱ - ۲۸۰۸ $\frac{\pi^2}{6} - 2808,1$ - ۲۸۰۹ قابل اعتبار است

۲۸۱۰ - بیلی $R = 1 - 2812$ ؛ بازای $x = -1$ همگرای مطلق

است اگر $p > 1$ و همگرای مشروط است اگر $0 < p \leq 1$ ؛ بازای $x = 1$

همگرای مطلق است اگر $p > 1$ و واگراست اگر $p \leq 1$ $R = \frac{1}{3} - 2813$ ؛

$\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$. بازای $x = -\frac{4}{3}$ همگرای مشروط ؛ بازای $x = -\frac{2}{3}$ واگرا

؛ $R = 4 - 2814$ ؛ بازای $x = \pm 4$ واگرا $R = +\infty - 2815$

$(-\infty, +\infty)$ $R = \frac{1}{e} - 2816$ ؛ بازای $x = \pm \frac{1}{e}$ واگرا

$R = +\infty - 2817$ ؛ بازای $x = \pm 1$ همگرای مطلق است اگر $p > 2$ و واگراست اگر

$0 < p \leq 2$ ؛ بازای $x = 2$ همگرای مطلق است اگر $p > 2$ و واگراست اگر

$p \leq 2$ ؛ بازای $x = -2^p$ همگرای مطلق

است اگر $p > 2$ و واگراست اگر $p \leq 2$ ؛ بازای $x = 2^p$ همگرای مطلق

است اگر $p > 2$ و همگرای مشروط است اگر $0 < p \leq 2$ ؛ $R = 1 - 2820$ ؛

$(-1, 1)$. بازای $x = -1$ همگرای مطلق است اگر $m \geq 0$ و واگراست

اگر $m < 0$ ؛ بازای $x = 1$ [همگرای مطلق است اگر $m \geq 0$ و همگرای

مشروط است اگر $-1 < m < 0$ $R = \min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) - 2821$ ؛ $(-R, R)$

بازای $x = -R$ همگرای مشروط است اگر $a \geq b$ و همگرای مطلق است اگر

$a < b$ ؛ بازای $x = R$ واگراست اگر $a \geq b$ و همگرای مطلق است اگر

$a < b$ $R = \max(a, b) - 2822$ ؛ بازای $x = \pm R$ واگرا

$R = 1 - 2823$ ؛ بازای $x = \mp 1$ همگرای مطلق است اگر

$a > 1$ و واگراست اگر $a \leq 1$ ؛ بازای $x = -1$ همگرای مطلق

است اگر $0 < p \leq 2$ و همگرای مشروط است اگر $p > 2$ ؛ $R = 1 - 2824$ ؛

$(-1, 1)$ ؛ بازای $x = \pm 1$ همگرای مطلق

همگرای مشروط ؛ بازای $x = 1$ واگرا $R = 1 - 2825$ ؛

بازای $x = -1$ واگرا ؛ بازای $x = 1$ همگرای مشروط $R = 1 - 2826$ ؛

بازای $x = -1$ واگرا ؛ بازای $x = 1$ همگرای مشروط $R = 1 - 2827$ ؛

$(-1, 1)$. بازای $x = \pm 1$ واگرا $R = \frac{1}{4} - 2828$ ؛ $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

بازای $x = \pm \frac{1}{4}$ واگرا $R = \frac{1}{3} - 2829$ ؛ $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. بازای

$x = \pm \frac{1}{3}$ واگرا $R = 1 - 2830$ ؛ $(-1, 1)$. بازای $x = \pm 1$ همگرای

مطلق $R = 1 - 2831$ ؛ $(-1, 1)$ ؛ بازای $x = \pm 1$ همگرای مشروط

$0 < x < 2$ بازای $x = 2$ همگرای مطلق ؛ بازای $x = 2$ همگرای مشروط

$x = 0$ تنها بازای $x = 0$ همگراست $R = 1 - 2832$ ؛ $(-1, 1)$ ؛ بازای

$x = -1$ همگرای مطلق است اگر $\gamma - \alpha - \beta > 0$ و همگرای مشروط است

اگر $-1 < \gamma - \alpha - \beta \leq 0$ ؛ بازای $x = 1$ همگرای مطلق است اگر

$\gamma - \alpha - \beta > 0$ و واگراست اگر $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$. $x > 0 - 2833$

$|x| > \frac{1}{2} - 2834$ $0 < |x| < +\infty - 2835$ $x > -1 - 2836$

$|x - k\pi| < \frac{\pi}{4} - 2837$ که در آن k عددیست درست $- 2838$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}} (|x| < |a|)$ (الف - 2839 $-1 + 2(x+1) - 2(x+1)^2 + (x+1)^3$)

$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}} (|x| > |a|)$ (ب ؛ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}} (|x-b| < |a-b|)$ (ب

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\gamma n + 1}}{(\gamma n + 1)!} - 2841$ $\ln \gamma$ ؛ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} (0 < x \leq 2) - 2840$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\gamma n}}{[(\gamma n)!]} (|x| < +\infty) - 2842$ ($|x| < +\infty$) $- 2843$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n (|x| < +\infty) - 2844$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\gamma^{\gamma n - 1}}{(\gamma n)!} x^{\gamma n} (|x| < +\infty)$

$\mu x + \frac{\mu(1-\mu^\gamma)}{\gamma!} x^\gamma + \frac{\mu(1-\mu^\gamma)(\gamma^\gamma - \mu^\gamma)}{0!} x^0 + \dots (|x| < 1) - 2845$

$1 - \frac{\mu^\gamma}{\gamma!} x^\gamma - \frac{\mu^\gamma(\gamma^\gamma - \mu^\gamma)}{\epsilon!} x^\epsilon - \dots (|x| < 1) - 2846$

$$1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots \quad (0 < x < 2) - 2845$$

$$e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \dots\right) \quad (|x| < 1) - 2846$$

$$\sin(x+h) = \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \dots \quad - 2847$$

$$\cos(x+h) = \cos x - h \sin x - \frac{h^2}{2!} \cos x + \dots \quad (|h| < +\infty)$$

$$(r, v) \quad (b; (-2, 2)) \quad (الف - 2850) \quad + \frac{h^v}{r!} \sin x + \dots \quad (|h| < +\infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \quad (|x| < +\infty) - 2851 \quad \text{خبر - 2850, 1}$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{r^{2n-1}}{(rn)!} x^{2n} \quad (|x| < +\infty) - 2852$$

$$\frac{r}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r^{2n-1}}{(rn+1)!} x^{2n+1} \quad (|x| < +\infty) - 2853$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad (|x| < 1) - 2854 \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1) - 2855$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{2n+1} \quad \left(-\frac{1}{r} \leq x < \frac{1}{r}\right) - 2856$$

$$\frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-r)^n] x^n - 2857 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1) - 2858$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{r^n}\right] x^n \quad (|x| < 1) - 2859 \quad \left(|x| < \frac{1}{r}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 2861 \quad \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n + \frac{1 - (-1)^n}{r}\right] x^n \quad (|x| < 1) - 2860$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{0}} \left[\left(\frac{\sqrt{0}+1}{r}\right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{0}-1}{r}\right)^{n+1} \right] \quad \text{کے در آن}$$

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin \frac{\gamma \pi (n+1)}{\gamma} (|x| < 1) - 2862 \quad (\text{اعداد فیوناچی})$$

اگر $c_n = -1$ ؛ $n = \varepsilon k$ اگر $c_n = 1$ که در آن $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - 2863, 1$

$n = \gamma k + \gamma$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) یا $n = \gamma k + \gamma$ اگر $c_n = 0$ ؛ $n = \gamma k + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha (|x| < 1) - 2863 \quad f^{(1 \dots)}(\cdot) = 1 \dots 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sh} n\alpha (|x| < e^{-|\alpha|}) - 2865 \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\alpha (|x| < 1) - 2864$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma n + 1)!!}{(\gamma n)!!} x^{\gamma n} (|x| < 1) - 2866$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + [1 + (-1)^n] (-1)^{\frac{n}{\gamma} + 1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1) \quad - 2867$$

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{\gamma n + 1}}{\gamma n + 1} (|x| \leq 1) - 2868 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!} x^n (|x| < +\infty) - 2868$$

$$- 2869 \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma n - 1)!!}{(\gamma n)!!} \frac{x^{\gamma n + 1}}{\gamma n + 1} (|x| \leq 1) - 2870 \quad \frac{\pi}{\varepsilon}$$

$$- \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n - 2871 \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{(\gamma n - 1)!!}{(\gamma n)!!} \frac{x^{\gamma n + 1}}{\gamma n + 1} \right\} (|x| \leq 1)$$

$$\varepsilon x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (\text{الف}) - 2872 \quad (|x| \leq 1)$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma^{\gamma n - 1}}{\gamma n - 1} x^{\gamma n - 1} \quad (\text{ب}) \quad \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\varepsilon n + 1}}{\varepsilon n + 1} \quad (-1 < x < 1) \quad (\text{ب})$$

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{\lfloor \frac{n}{\gamma} \rfloor} \frac{x^{\gamma n + 1}}{\gamma^n (\gamma n + 1)} \right\} (|x| < \sqrt{\gamma}) \quad (\text{ت}) \quad \varepsilon \left(-\frac{1}{\varepsilon} < x \leq \frac{1}{\gamma} \right)$$

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{\gamma n}}{\gamma n (\gamma n - 1)} \quad (|x| \leq 1) \quad (\text{ث})$$

$$\{ -1 \leq x \leq 0 \text{ و } 0 \leq x \leq 1 \text{ بازي } r | x | \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(rn-1)!!}{(rn)!!} \times \frac{x^{rn}}{rn+1} \right\} \quad (ج)$$

$$\{ 1 + \frac{x^r}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(rn-1)!!}{(rn+r)!!} \times \frac{x^{rn+r}}{rn+1} \right\} \quad (|x| \leq 1) \quad (د)$$

$$\{ -1 + \frac{x^r}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(rn-1)!!}{(rn+r)!!} \times \frac{x^{rn+r}}{rn+1} \quad (|x| \leq 1) \quad (ح)$$

$$\{ e^{rx} \left[(rx)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (rx)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (rx)^{n-4} + \dots \right]$$

$$\{ \frac{(-1)^n}{x^{rn}} e^{\frac{a}{x}} \left[a^n + \frac{n(n-1)}{1!} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} a^{n-2} x^2 + \dots \right] \quad (ب)$$

$$\frac{(-1)^{n-1} n!}{(1+x^r)^n} \left[x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{r!} x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{o!} \times (ب)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^{rn} \quad (-r \leq x \leq 0) - 2870 \quad \times x^{n-o} - \dots \quad]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{rn+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{rn+1} \quad (x > 0) - 2877 \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \quad (|x| > 1) - 2876$$

$$\frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(rn-1)!!}{(rn)!!} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{n+1} \quad \left(x > -\frac{1}{r} \right) - 2878$$

$$1 - \frac{1}{r} x - \frac{1}{1r} x^2 - \frac{1}{r^2} x^3 - \dots \quad (|x| < 1) - 2881$$

$$1 + \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty) - 2882$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(rn)!} - \frac{r}{(rn-r)!} + \frac{1}{(rn-2)!} \right] x^n \quad (|x| < +\infty) - 2883$$

که در آن $0! = 1$ ، $(-1)! = \infty$ ، $(-2)! = \infty$ و الی آخر .

$$r \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 \leq x < 1) - 2884$$

- ۲۸۸۶ $x + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\xi n^{\gamma-1}} x^{\gamma n+1} \quad (|x| \leq 1) - ۲۸۸۵$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma \frac{n}{\gamma} \sin \frac{n\pi}{\xi}}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty) - ۲۸۸۷ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma \frac{n}{\gamma} \cos \frac{n\pi}{\xi}}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n \right\} \quad (-1 < x < 1) - ۲۸۸۸$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{\gamma n-1} \right) \frac{x^{\gamma n}}{n} \quad (|x| \leq 1) - ۲۸۸۹$

$x + \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} + \frac{\gamma}{10} x^{\circ} + \dots - ۲۸۹۱ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^{\gamma n+1} (n!)^{\gamma}}{(\gamma n + \gamma)!} x^{\gamma n} \quad (|x| \leq 1) - ۲۸۹۰$

$x - \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} + \frac{\gamma}{10} x^{\circ} + \dots \quad \left(|x| < \frac{\pi}{\gamma} \right) - ۲۸۹۲ \quad \left(|x| < \frac{\pi}{\gamma} \right)$

$E_n = 1 - ۲۸۹۴ \quad -\frac{1}{\gamma} x - \frac{1}{\xi_0} x^{\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma \xi_0} x^{\circ} - \dots \quad (|x| < \pi) - ۲۸۹۳$

$\epsilon P_n(x) = 1 - ۲۸۹۵ \quad \sum_{k=0}^n \left\{ (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(\gamma k)! (\gamma n - \gamma k)} \right\} = .$

$P_n(t) = \frac{(\gamma n - 1)!!}{n!} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{\gamma(\gamma n - 1)} x^{n-\gamma} + \right.$
 (چند جمله ای های لژاندر) $\left. + \frac{n(n-1)(n-\gamma)(n-\gamma)}{\gamma \times \xi \times (\gamma n - 1)(\gamma n - \gamma)} x^{n-\xi} - \dots \right] \quad (n \geq 1)$

$R \geq \min(\text{الف} - ۲۸۹۷ \quad s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{که در آن} \quad \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - ۲۸۹۶$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{\gamma n+1}}{n!(\gamma n+1)} \quad (|x| < +\infty) - ۲۹۰۱ \quad R \geq R_1 R_{\gamma} \quad (\text{ب} \quad \epsilon \quad (R_1, R_{\gamma}))$

- ۲۹۰۲ $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma n - 1)!!}{(\gamma n)!!} \times \frac{x^{\xi n+1}}{\xi n+1} \quad (|x| \leq 1) - ۲۹۰۲$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} - 29.05 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad (|x| < +\infty)$$

$$x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots \quad (|x| < 1) - 29.05 \quad (|x| \leq 1)$$

$$\text{arc tg } x \quad (|x| \leq 1) - 29.07 \quad \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1) - 29.07$$

$$1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x) \quad (|x| \leq 1) - 29.04 \quad \text{ch } x \quad (|x| < +\infty) - 29.08$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1) - 29.11 \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (-1 \leq x < 1) - 29.10$$

$$-29.16 \quad \frac{2x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1) - 29.13 \quad \frac{x(1-x)}{(1+x)^2} \quad (|x| < 1) - 29.12$$

$$x^2 + y^2 < \frac{1}{2} \quad ; R = \frac{1}{\sqrt{2}} - 29.17 \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 < 4 \quad ; R = 2$$

$$x^2 + y^2 < 1 \quad ; R = 1 - 29.18$$

$$(x - \cos \alpha)^2 + (y - \sin \alpha)^2 < \varepsilon \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad ; R = \left| 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right| - 29.20$$

$$; 0.87606 = \text{arc } 0.011'40'' \quad (\text{الف} - 29.22 \quad 2.080 - 29.21$$

$$0.30902 - 29.23 \quad 0.22314 \quad (\text{ث} ; 0.6052 \quad (\text{پ} ; 1.99527 \quad (\text{ب}$$

$$2.718282 - 29.26 \quad 0.108 - 29.25 \quad 0.9999848 - 29.24$$

$$3.142 - 29.29 \quad 3.1416 - 29.28 \quad 0.1823 - 29.27$$

$$\ln 2 = 1.09861 \quad ; \ln 2 = 0.69315 - 29.31 \quad 3.141592654 - 29.30$$

$$; 0.900 \quad (\text{ت} ; 1.600 \quad (\text{پ} ; 2.830 \quad (\text{ب} ; 0.748 \quad (\text{الف} - 29.32$$

$$; 8.041 \quad (\text{خ} ; 0.927 \quad (\text{ح} ; 0.327 \quad (\text{چ} ; 0.119 \quad (\text{ج} ; 1.057 \quad (\text{ث}$$

$$; 8.84 - 29.34 \quad 2.82 - 29.33 \quad 0.782 \quad (\text{ر} ; 0.507 \quad (\text{ذ} ; 0.488 \quad (\text{د}$$

$$\text{سری} - 29.37 \quad \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{\lambda} \cos 4x - 29.36 \quad 2.02m - 29.35$$

$$; \frac{\varepsilon}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} - 29.38 \quad \text{فوریه بر چند جمله‌ای } P_n(x) \text{ منطبق است}$$

$$\frac{A}{2} - \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi x}{l} - 29.39 \quad \frac{\pi}{\varepsilon}$$

$$- \gamma \gamma \gamma \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \gamma \gamma \gamma \gamma$$

$$\gamma \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} - \gamma \gamma \gamma \gamma$$

$$\frac{(a-b)\pi}{\xi} - \frac{\gamma(a-b)}{\pi} \times - \gamma \gamma \gamma \gamma$$

$$\frac{\pi}{\gamma} - \frac{\xi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\gamma k+1)x}{(\gamma k+1)^{\gamma}}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma} \pi^{\gamma} + - \gamma \gamma \gamma \gamma \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\gamma k+1)x}{(\gamma k+1)} + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

$$\frac{\gamma \sin \pi a}{\pi} \left[\frac{1}{\gamma a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a \cos nx}{n^{\gamma} - a^{\gamma}} \right] - \gamma \gamma \gamma \gamma + \xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\gamma}} \cos nx$$

$$\frac{\gamma \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^{\gamma} - a^{\gamma}} - \gamma \gamma \gamma \gamma$$

$$\frac{\gamma \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^{\gamma} + a^{\gamma}} - \gamma \gamma \gamma \gamma$$

$$\gamma \operatorname{sh} ah \left[\frac{1}{\gamma ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos \frac{nx}{h} - \pi n \sin \frac{nx}{h}}{(ah)^{\gamma} + (\pi n)^{\gamma}} \right] - \gamma \gamma \gamma \gamma$$

$$a+l + \frac{\gamma l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) - \gamma \gamma \gamma \gamma$$

$$1 - \frac{1}{\gamma} \cos x + \gamma \sum_{n=\gamma}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\gamma-1}} \cos nx - \gamma \gamma \gamma \gamma \quad (a < x < a + \gamma l)$$

$$\frac{\xi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (-1)^k \frac{\cos(\gamma k+1)x}{\gamma k+1} \right\} - \gamma \gamma \gamma \gamma \quad \frac{1\gamma}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(\xi n^{\gamma} - 1)^{\gamma}} \sin \gamma nx - \gamma \gamma \gamma \gamma$$

$$\frac{\xi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\gamma k+1)x}{(\gamma k+1)^{\gamma}} - \gamma \gamma \gamma \gamma \quad \frac{\xi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\gamma k+1)^{\gamma}} \sin(\gamma k+1)x - \gamma \gamma \gamma \gamma$$

$$- \gamma \gamma \gamma \gamma \quad \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma n x}{n} \quad (x \neq \text{عدد صحيح}) - \gamma \gamma \gamma \gamma$$

$$-240\lambda \quad \frac{\gamma}{\pi} - \frac{\xi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma k x}{\xi k^{\gamma-1}} - 240\gamma \quad \frac{1}{\xi} - \frac{\gamma}{\pi^{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \gamma \pi (\gamma n + 1) x}{(\gamma n + 1)^{\gamma}}$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha^{\gamma}} + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n+\gamma}}{1-\alpha} \cos nx - 240\gamma \quad \frac{\gamma}{\pi} + \frac{\xi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\xi k^{\gamma-1}} \cos \gamma k x$$

$$\frac{\xi}{\pi} \ln(1 + \sqrt{\gamma}) + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (-1)^k \left[\gamma + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m}{m} \sin \frac{m\pi}{\gamma} \right] \times -240\gamma \cdot \right.$$

$$\times \cos(\lambda k + \xi) x \left. \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-1)^k \left[\frac{\lambda}{\pi} \ln(1 + \sqrt{\gamma}) + \frac{1\gamma}{\pi} \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m}{\gamma m - 1} \times \right. \right.$$

$$\left. \frac{\pi^{\gamma}}{\gamma} + \xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\gamma}} \cos nx \right. \left. \left(\text{الف} - 240\gamma \right) \times \sin(\gamma m - 1) \frac{\pi}{\xi} \right] \cos \lambda k x \left. \right\}$$

$$\gamma \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\gamma k + 1) x}{(\gamma k + 1)^{\gamma}} \quad (\text{ب} \quad ; \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$; \quad \frac{\xi \pi^{\gamma}}{\gamma} + \xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\gamma}} - \xi \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi) \quad (\text{ج} \quad ; \quad (0 \leq x < \pi)$$

$$; \quad x^{\gamma} = \frac{\pi^{\gamma}}{\gamma} + \xi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^{\gamma}} - 240\gamma \gamma \quad \frac{\pi^{\gamma}}{\lambda} \quad ; \quad \frac{\pi^{\gamma}}{1\gamma} \quad ; \quad \frac{\pi^{\gamma}}{\gamma}$$

$$; \quad x^{\gamma} = \gamma \pi^{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 1\gamma \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^{\gamma}}$$

$$x^{\xi} = \frac{1}{\pi} \pi^{\xi} + \lambda \pi^{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^{\gamma}} + \xi \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\xi}} \cos nx$$

$$\frac{\gamma}{\gamma} - \frac{q}{\gamma \pi^{\gamma}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma}} \times -240\gamma \xi \quad \frac{\pi^{\gamma} - \gamma \pi \alpha + \gamma \alpha^{\gamma}}{\gamma} \quad ; \quad \frac{\alpha(\alpha - a)}{\gamma} - 240\gamma \gamma$$

$$-240\gamma \quad \times \cos \frac{\gamma \pi x}{\gamma} + \frac{1}{\gamma \pi^{\gamma}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma \pi x}{n^{\gamma}} \quad (0 \leq x \leq \gamma)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx \quad (|q| < 1) - 2477 \quad \frac{1}{\gamma^m} C_{\gamma^m}^m + \frac{1}{\gamma^{m-1}} \sum_{k=1}^m C_{\gamma^m}^{m-k} \cos \gamma kx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx - 2478 \quad 1 + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx \quad (|q| < 1) - 2479$$

$$-\ln \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} - 2479 \quad -\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx - 2479$$

$$-\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma k + 1)x}{\gamma k + 1} - 2479 \quad -\ln \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n} - 2479$$

$$x(s) = \frac{a}{\gamma} - \frac{\xi a}{\pi^{\gamma}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\gamma k + 1)^{\gamma}} \times -2479 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\gamma k + 1)x}{(\gamma k + 1)^{\gamma}} - 2479$$

$$y(s) = \frac{a}{\gamma} - \xi \times \cos \frac{(\gamma k + 1)\pi s}{\gamma a} + \frac{\xi a}{\pi^{\gamma}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\gamma k + 1)^{\gamma}} \sin \frac{(\gamma k + 1)\pi s}{\gamma a}$$

$$- \frac{\xi a}{\pi^{\gamma}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\gamma k + 1)^{\gamma}} \cos \frac{(\gamma k + 1)\pi s}{\gamma a} + \frac{\xi a}{\pi^{\gamma}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(\gamma k + 1)^{\gamma}} \sin \frac{(\gamma k + 1)\pi s}{\gamma a}$$

$$\xi f(-x) = -f(x) - 2479 \quad f(\pi - x) = -f(x) \quad \xi f(-x) = f(x) - 2480$$

$$\left(\text{الف } 2479 \right) \quad f(\pi - x) = f(x)$$

$$\xi - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\gamma}{(\gamma k + 1)^{\gamma}} - \frac{\lambda}{\pi} \frac{(-1)^k}{(\gamma k + 1)^{\gamma}} \right] \cos(\gamma k + 1)x \right\} \quad \left(\cdot \leq x \leq \frac{\pi}{\gamma} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\gamma(-1)^{k+1}}{(\gamma k + 1)^{\gamma}} + \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{(\gamma k + 1)^{\gamma}} \right] \sin(\gamma k + 1)x \right\} \quad \left(\cdot \leq x \leq \frac{\pi}{\gamma} \right) \quad (\text{ب})$$

$$a_{\gamma n - 1} = b_{\gamma n - 1} = \cdot - 2479 \quad a_{\gamma n} = b_{\gamma n} = \cdot \quad (n = \cdot, 1, 2, \dots) - 2479$$

$$b_{\gamma k} = \cdot, \quad a_n = \cdot \quad (\text{ب } \xi b_{\gamma k - 1} = \cdot, \quad a_n = \cdot \quad (\text{الف } - 2480 \quad (n = 1, 2, 3, \dots))$$

$$\beta_n = b_n, \quad \alpha_n = -a_n - 2481 \quad \beta_n = -b_n, \quad \alpha_n = a_n - 2481$$

$$\bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh \quad \bar{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh - 2482$$

$$(n = 1, 2, \dots) \quad B_n = b_n \frac{\sin nh}{nh} \quad A_n = a_n \frac{\sin nh}{nh} \quad A_n = a_n - 2483$$

$$(n = 1, 2, \dots) \quad B_n = \cdot \quad A_n = a_n^{\gamma} + b_n^{\gamma} \quad A_n = a_n^{\gamma} - 2480$$

$$\frac{1}{x} - 2989 \quad 2 \ln 2 - 1 - 2988 \quad \frac{1}{x} - 2987 \quad \frac{1}{y} - 2986$$

$$\frac{2}{x} - 2992 \quad \ln 2 - \frac{1}{y} - 2991 \quad \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{y} + \dots + \frac{1}{m} \right) - 2990$$

$$2e^2 - 2996 \quad 2e - 2995 \quad 2(1 - \ln 2) - 2994 \quad 1 - 2993$$

$$\frac{1}{y} (\cos 1 - \sin 1) - 2999 \quad \frac{\pi^2}{x} - \frac{29}{16} - 2998 \quad \frac{\pi^2}{y} - 2 - 2997$$

$$e^x (\alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_0 - 3001) \quad \frac{1}{y} (\xi \ln 2 - 1) - 3000$$

که در آن ضرایب α_k ($k = 0, 1, \dots, m$) از تساوی $P(n) = \alpha_m n(n-1) \dots (n-m+1) + \alpha_{m-1} n(n-1) \dots (n-m+2) + \dots + \alpha_1 n + \alpha_0$ تعیین

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) e^{-x} - \frac{1}{x} - 3002 \quad e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{y} + 1 \right) - 3002$$

$$\frac{1}{x} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right) - 3005 \quad \left(1 - \frac{x^2}{y} \right) \cos x - \frac{x}{y} \sin x - 3004$$

$$x < 0 \quad \text{اگر} \quad \frac{1}{x} \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right) \quad \text{اگر} \quad x \geq 0$$

$$2x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \ln(1+x^2) \quad (|x| \leq 1) - 3007 \quad \ln \frac{1}{1-x} - 3006$$

$$(1-x)^{-\frac{a}{2}} - 1 - 3009 \quad \frac{1}{y} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1) - 3008$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1) - 3011 \quad \left(1 - \frac{x}{y} \right)^{-\frac{1}{y}} - 1 - 3010 \quad (|x| < 1)$$

$$-3014 \quad (1+2x^2)e^{x^2} - 3013 \quad \frac{x(2-x)}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1) - 3012$$

$$\frac{\pi}{y} - 3017 \quad \frac{1}{\sqrt{y}} - 3016 \quad \frac{\pi}{x} - 3015 \quad \frac{\pi}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y} \ln y$$

$$-\ln \left| y \sin \frac{x}{y} \right| \quad (0 < x < 2\pi) - 3019 \quad \frac{\pi-x}{y} \quad (0 < x < 2\pi) - 3018$$

$$\text{اگر} \quad 0 < x < 2\alpha \quad \text{اگر} \quad \frac{\pi}{x} - 3021 \quad \frac{1}{y} \ln \left| \frac{\sin \frac{x+\alpha}{y}}{\sin \frac{x-\alpha}{y}} \right| - 3020$$

$$- ۳۰۲۲ \quad ۲\pi - ۲\alpha < x < ۲\pi \text{ اگر } -\frac{\pi}{\xi} \leq \alpha < x < ۲\pi - ۲\alpha$$

$$\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{\cos x}{\gamma} \right) - \frac{x}{\gamma} \sin x \quad (|x| < \pi) - ۳۰۲۳ \quad \frac{\pi}{\xi} \operatorname{sgn} x \quad (|x| < \pi)$$

$$\frac{x}{\gamma} (1 + \cos x) - \sin x \ln x - ۳۰۲۵ \quad \frac{\pi^\gamma}{\lambda} - \frac{\pi}{\xi} |x| \quad (|x| \leq \pi) - ۳۰۲۴$$

$$e^{\cos x} \cos(\sin x) \quad (|x| < +\infty) - ۳۰۲۶ \quad \times \left(\gamma \cos \frac{x}{\gamma} \right) \quad (|x| < \pi)$$

$$\gamma (\arcsin x)^\gamma - ۳۰۲۸ \quad x = i\pi, y = j\pi \quad (i, j = \cdot, \pm 1, \pm 2, \dots) - ۳۰۲۷$$

$$\leq x \geq 0 \text{ اگر } \frac{\xi}{\xi - x} + \frac{\xi \sqrt{x}}{(\xi - x)^\gamma} \arcsin \frac{\sqrt{x}}{\gamma} - ۳۰۲۹ \quad (|x| \leq 1)$$

$$\frac{1}{x-1} - ۳۰۳۰ \quad x < 0 \text{ اگر } \frac{\xi}{\xi - x} - \frac{\xi \sqrt{|x|}}{(\xi - x)^\gamma} \ln \frac{\sqrt{|x|} + \sqrt{\xi - x}}{\gamma}$$

$$\leq \frac{x^\gamma}{(1-x)^\gamma} \quad (\text{الف} - ۳۰۳۳ \quad \frac{1}{1-x} \quad (\text{ب} \leq \frac{x}{1-x} \quad (\text{الف} - ۳۰۳۴ \quad \frac{a_1}{x} - ۳۰۳۱$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\gamma n - 1)!!}{(\gamma n)!!} \frac{1}{(\gamma n + 1)^\gamma} - ۳۰۳۵ \quad 1 - ۳۰۳۴ \quad \frac{x}{(x-1)^\gamma} \quad (\text{ب}$$

$$\frac{1}{\gamma \xi} - ۳۰۳۹ \quad \gamma - \frac{\pi^\gamma}{\gamma} - ۳۰۳۸ \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\rho + nq)} - ۳۰۳۷ \quad \frac{\pi^\gamma}{1\gamma} - ۳۰۳۶$$

$$F(k) = \frac{\pi}{\gamma} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(\gamma n - 1)!!}{(\gamma n)!!} \right]^\gamma k^{\gamma n} \right\} - ۳۰۴۱ \quad \frac{\pi^\gamma}{1\gamma} - ۳۰۴۰$$

$$- ۳۰۴۲ \quad E(k) = \frac{\pi}{\gamma} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(\gamma n - 1)!!}{(\gamma n)!!} \right]^\gamma \frac{k^{\gamma n}}{\gamma n - 1} \right\} - ۳۰۴۲$$

$$\gamma \pi a \left[1 - \left(\frac{1}{\gamma} \right)^\gamma e^\gamma - \left(\frac{1 \times 2}{\gamma \times \xi} \right)^\gamma \frac{e^\xi}{\gamma} - \dots \right]$$

$$|\alpha| < 1 \text{ بازای } \ln(1 + \alpha) - ۳۰۴۸ \quad \frac{\gamma \pi a^n}{n!} - ۳۰۴۷ \text{ بیضی است}$$

$$\pi \ln a^\gamma \text{ و } |\alpha| \leq 1 \text{ بازای } 0 - ۳۰۴۹ \quad |\alpha| > 1 \text{ بازای } \frac{1}{\alpha^\gamma} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \text{ و}$$

بازای $|\alpha| > 1$ $2 \times 10^{-6} - 3050$ $\frac{1}{4} - 3061$ $2 - 3062$

۳۰۶۳ - $\frac{2}{V}$ $a^{-1n2} - 3064$ $(\text{الف} - 3065)$ خیر ؛ (ب) بلی ؛ (پ) بلی ؛

۳۰۶۶ - واگرا بسمت صفر ۳۰۶۷ - همگرا ۳۰۶۸ - بازای $p > 1$ (ت) بلی
 ۳۰۶۹ - واگرا بسمت صفر ۳۰۷۰ - به ازای تمام مقادیر p همگرا

۳۰۷۱ - بازای $a_1 = a$ همگرا ۳۰۷۲ - همگرا اگر $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^p b_i$

۳۰۷۳ - واگرا بسمت صفر ۳۰۷۴ - همگرا ۳۰۷۵ - همگرا ۳۰۷۶ - همگرا

۳۰۷۷ - به ازای تمام مقادیر x همگراست ۳۰۷۸ - به ازای تمام

مقادیر x همگراست ۳۰۷۹ - بازای $|x| < 1$ همگراست ۳۰۸۰ - بازای

$|x| < 2$ همگراست ۳۰۸۱ - بازای $|x| > e$ همگراست ۳۰۸۲ - بازای تمام

مقادیر x همگراست ۳۰۸۳ - به ازای $|x| < 1$ ، p دلخواه و بازای

$x = \pm 1$ ، $p > 1$ ، $q > \frac{1}{p}$ همگراست ۳۰۸۴ - بازای x و p دلخواه

همگراست ۳۰۸۵ - واگرا ۳۰۸۸ - همگرای مشروط ۳۰۸۹ - واگرا

۳۰۹۰ - بازای $p > 1$ همگرای مطلق و بازای $1 < p \leq \frac{1}{q}$ همگرای مشروط

۳۰۹۱ - واگرا ۳۰۹۲ - واگرا ۳۰۹۳ - واگرا ۳۰۹۴ - همگرای مشروط

۳۰۹۵ - همگرای مشروط ۳۰۹۶ - واگرا ۳۰۹۷ - بازای $\alpha > 1$ همگرای

مطلق و بازای $1 < \alpha \leq \frac{1}{p}$ همگرای مشروط $F'(x) = -3109$

$$|f'_n(x)| < c_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{1+f_n(x)}$$

که در آن $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$ $(0 < \theta < 1)$ - ۳۱۱۱

۳۱۱۲ - $(|\theta| < 1)$ $1.2866 \times 7.7 \times \left(1 + \frac{\theta}{12.000}\right)$ - ۳۱۱۳

$1.028 \times 1.378 \times \left(1 + \frac{\theta}{288}\right)$ - ۳۱۱۴ $0.0798 \left(1 + \frac{\theta}{3.0}\right)$ $(|\theta| < 1)$

$1.047 \times 4.792 \times \left(1 + \frac{\theta}{12.0}\right)$ $(|\theta| \leq 1)$ - ۳۱۱۵ $(|\theta| \leq 1)$

$0.300 \times \left(1 + \frac{\theta}{3.0}\right)$ - ۳۱۱۶ $0.124 \times \left(1 + \frac{\theta}{3.0}\right)$ $(|\theta| < 1)$ - ۳۱۱۶

$$(\gamma n - 1)!! = \sqrt{\gamma} (\gamma n)^n e^{-n} + \frac{\theta_n}{\sqrt{\gamma n}} \quad (|\theta_n| < 1) - 3118 \quad (|\theta| < 1)$$

$$\frac{e}{\gamma} \quad (\text{ب} \text{ } e \text{ (ب} \text{ } 1 \text{ (الف} - 3120 \quad \frac{\gamma \gamma n \theta_n}{\sqrt{\pi n}} e^{|\theta_n|} - 3119$$

$$P_{\gamma}(-1) \approx 3,43 \quad P_{\gamma}(x) = 1 - \frac{x}{\gamma} + \frac{x^2}{14} - \frac{x^3}{42} + \dots - 3121 \quad (ت)$$

$$y = b. + \frac{y_1 - y_{-1}}{\gamma h} (x - x.) + \dots - 3122 \quad P_{\gamma}(\gamma) \approx 8,43 \quad P_{\gamma}(1) = -1,07$$

$$y = 0,808 + 0,192x - 0,011x^2 + \dots - 3123 + \frac{y_1 - \gamma y. + y_{-1}}{\gamma h^2} (x - x.)^2$$

$$\sin \gamma.^\circ \approx 0,341 \quad \sin x^\circ \approx \frac{0x}{\gamma \Delta \Delta} \left[1 - \left(\frac{x}{100} \right)^2 \right] - 3124$$

$$P(x) = \frac{1}{\gamma} (\gamma x^2 - \varepsilon x^2) - 3125 \quad \sin 8.^\circ \approx 0,139 \quad \sin 4.^\circ \approx 0,069$$

$$B_n(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \quad B_n(x) = x - 3126 \quad \frac{1}{\gamma} - 3127$$

$$- 3128 \quad B_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right) x^2 + \frac{\gamma}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x + \frac{1}{n^2} x$$

$$\text{آن در } B_n(x) = \sum_{l=0}^n f\left(a + \frac{i}{n} l\right) C_n^{i, l} \frac{(x-a)^l (b-x)^{n-l}}{l^n} - 3129$$

$$B_n(x) = \frac{1}{\Delta} (1-x)(1+x)^n + \frac{1}{17} (1+x)^2 - 3130 \quad l = b - a$$

$$B_{\gamma n}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1-x^{\gamma}}{\varepsilon}\right)^n \sum_{i=1}^n i C_{\gamma n}^{n-i} \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^i + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^i \right] - 3131$$

$$l = b - a \quad \text{آن در } B_n(x) = e^{ka} \left[1 + \left(e^{\frac{kl}{n}} - 1 \right) \frac{x-a}{l} \right]^n - 3132$$

$$B_n(x) = \frac{1}{\gamma} \left[\left(\cos \frac{\pi}{\gamma n} + i \frac{\gamma x}{\pi} \sin \frac{\pi}{\gamma n} \right)^n + \left(\cos \frac{\pi}{\gamma n} - i \frac{\gamma x}{\pi} \right) \times \dots - 3133 \right]$$

$$\sigma_{\gamma n-1}(x) = \frac{\pi}{\gamma} - \dots - 3134 \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{آن در } \times \sin \frac{\pi}{\gamma n}$$

$$- \frac{\Delta}{\pi} \sum_{k=1}^{n-k} \frac{n-k}{\gamma n-1} \frac{\cos(\gamma k-1)x}{(\gamma k-1)^{\gamma}}$$

قسمت ۲

فصل ۶

- ۳۱۳۶- نیم صفحه $y \geq 0$ - ۳۱۳۷ $|x| \leq 1$ ؛ $|y| \geq 1$ - ۳۱۳۸ دایره $x^2 + y^2 \leq 1$ - ۳۱۳۹ خارج دایره $x^2 + y^2 > 1$ - ۳۱۴۰ حلقه " $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ - ۳۱۴۱ هلال $x \leq x^2 + y^2 < 2x$ - ۳۱۴۲ $x \leq x^2 + y^2 \leq 1$ - ۳۱۴۳ نیم صفحه $x + y < 0$ - ۳۱۴۴ جفت زاویه متقابل $|y| \leq |x|$ و $(x \neq 0)$ - ۳۱۴۵ جفت زاویه متفرجه متقابل محدود به خطوط $y = 0$ و $y = -2x$ بانضمام مرز آنها بدون رأس مشترک $O(0, 0)$ - ۳۱۴۶ مثلث متعنی الخط محدود به سهمی های $y^2 = x$ ، $y^2 = -x$ و خط $y = 2$ بدون رأس $O(0, 0)$ - ۳۱۴۷ دسته حلقه های متحدالمركز $\pi(2k+1) \leq x^2 + y^2 \leq 2\pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) - ۳۱۴۸ خارج مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ بانضمام مرز آن بدون رأس - ۳۱۴۹ چهار ثمن فضا با هم - ۳۱۵۰ داخل هذلولوی دویارچه $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ - ۳۱۵۱ خطوط موازی - ۳۱۵۲ دوایر متحدالمركز - ۳۱۵۳ دسته هذلولوی های متساوی الساقین با مجانب های مشترک $y = \pm x$ - ۳۱۵۴ خطوط موازی - ۳۱۵۵ دسته خط به رأس مبداء مختصات، بااستثنای رأس - ۳۱۵۶ دسته بیضی های مشابه - ۳۱۵۷ مجموعه هذلولوی های متساوی الساقین واقع در ربع اول و سوم که مجانب های آنها محورهای مختصات است - ۳۱۵۸ دسته خطوط منکسر دوتایی که رأس آنها روی محور Oy واقع است - ۳۱۵۹ ربع اول و سوم بازای $z = 0$ ؛ دسته خطوط منکسر دوتایی که قطعه های آنها موازی محورهای مختصات است و رأس آنها روی خط $x + y = 0$ بازای $z > 0$ واقع است - ۳۱۵۹,۱ خطوط تراز عبارتند از اضلاع زاویای موازی با امتداد مثبت محورهای مختصات Ox و Oy برئوس واقع روی خط $y = x$ - ۳۱۵۹,۲ دسته دورگردهای مربع های به مرکز مشترک $O(0, 0)$ و باضلاع موازی با محورهای مختصات Ox و Oy بازای $z > 0$ ؛ نقطه $O(0, 0)$ بازای $z = 0$ - ۳۱۵۹,۳ خطوط موازی با محور Ox بازای $z < 0$ ؛ اضلاع زاویای موازی با محور مختصات Ox و نیم محور مثبت Oy برئوس واقع بر سهمی $y = x^2$ بازای $z > 0$ ؛ نیم محور مثبت بازای $z = 0$ - ۳۱۶۰ دسته دوایر گذرنده از مبداء مختصات (بااستثنای این مبداء) و عمود بر محور Ox - ۳۱۶۱ منحنی های $y = \frac{C}{\ln x}$ - ۳۱۶۲ منحنی های $y = \frac{C+x}{\ln x}$ - ۳۱۶۳ دسته دوایر بمرکز واقع روی محور

Ox و عمود بر دایره $x^2 + y^2 = a^2$ - ۳۱۶۴ دسته دوایر عمود بر محور
 Oy و گذرنده از نقاط $(-a, 0)$ ، $(a, 0)$ باسنشای نقاط مذکور - ۳۱۶۵ - بازای
 $z = 0$ خطوط $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ $x = m\pi$ ، $y = n\pi$ ؛ بازای
 $z = 1$ یا $z = -1$ دستگه مربعات $m\pi < x < (m+1)\pi$ ، $n\pi < y < (n+1)\pi$ که در آن $z = (-1)^{m+n}$ - ۳۱۶۶ - دسته صفحات متوازی - ۳۱۶۷ - دسته
 کرات متحدالمرکز بمرکز مبدا' مختصات - ۳۱۶۸ - دسته هذلولوی های
 دویارچه بازای $u < 0$ ؛ دسته هذلولوی های یک پارچه بازای $u > 0$ ؛
 مخروط بازای $u = 0$ - ۳۱۶۹ - دسته استوانه های بیضی گونه که محور
 مشترک آنها خط $x + y = 0$ ، $z = 0$ میباشد - ۳۱۷۰ - دسته کرات متحدالمرکز
 $x^2 + y^2 + z^2 = \pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) بازای $u = 0$ ؛ دسته قشرهای کروی
 $\pi n < x^2 + y^2 + z^2 < \pi(n+1)$ ، که در آن $u = (-1)^n$ ، بازای $u = -1$
 یا $u = 1$ - ۳۱۷۱ - سطح استوانه به هادی $z = f(y)$ ، $x = 0$ که مولدهای
 آن موازی خط $y = ax$ ، $z = 0$ میباشد - ۳۱۷۲ - سطح دوار حاصل از دوران
 منحنی $z = f(x)$ ، $y = 0$ حول محور Oz - ۳۱۷۳ - سطح مخروطی برآس مبدا'
 مختصات و هادی $x = 1$ ، $z = f(y)$ - ۳۱۷۴ - شبه مخروط به هادی $x = 1$ ،
 $z = f(y)$ که مولدهای آن موازی صفحه Oxy است - ۳۱۷۶ - $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = -$
 $f(t) = 2t + t^2$ - ۳۱۷۸ - $\sqrt{1+x^2}$ - ۳۱۷۷ - $= f(x, y)$
 $f(x) = x^2 - x$ ؛ $z = 2y + (x-y)^2$ - ۳۱۷۹ - $z = x - 1 + \sqrt{y}$ ($x > 0$)
 $f(x, y) = x^2 \frac{1-y}{1+y}$ - ۳۱۸۰ - خیر - ۳۱۸۳، ۱ - خیر - ۳۱۸۳، ۲ - ۰ ؛
 (الف - ۳۱۸۴) (ب ؛ ۱ ، ۰) (پ ؛ ۱ ، ۰) (ت ؛ ۱ ، ۰) ؛
 (ث ؛ ۱ ، ۰) ∞ ، ۱ - ۳۱۸۵ - ۰ - ۳۱۸۶ - a - ۳۱۸۷ - ۰ - ۳۱۸۸
 (الف - ۳۱۹۳) $\ln 2$ - ۳۱۹۲ - e - ۳۱۹۱ - ۱ - ۳۱۹۰ - ۰ - ۳۱۸۹
 نقطه - ۳۱۹۴ - $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ (ب) و $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$ - ۳۱۹۴ - نقطه
 اتصال : $x = 0$ ، $y = 0$ - ۳۱۹۵ - تمام نقاط خط $x + y = 0$
 $O(0, 0)$ - ۳۱۹۶ - نقطه' انفصال بی نهایت است ؛ نقاط خط $x + y = 0$
 $(x \neq 0)$ نقاط انفصال قابل حذف است - ۳۱۹۷ - نقاط واقع روی محورهای
 مختصات - ۳۱۹۸ - مجموعه' نقاط خطوط $x = m\pi$ و $y = n\pi$
 $x^2 + y^2 = 1$ - ۳۱۹۹ - نقاط دایره' $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ - ۳۲۰۰ - نقاط
 صفحات مختصات : $z = 0$ ، $y = 0$ ، $x = 0$ - ۳۲۰۱ - (a, b, c)

۳۲۰۳،۱ پیوسته یکنواخت ۳۲۰۳،۲ - پیوسته یکنواخت ۳۲۰۳،۳ - پیوسته
 نایکنواخت ۳۲۰۳،۴ - تابع روی E پیوسته است ولی نایکنواخت ۳۲۱۲ -
 $f'_y(0,0) = 0$ ، $f'_x(0,0) = 0$ - ۳۲۱۲،۱ $f'_x(x,1) = 1$ ؛ تابع در
 نقطه $O(0,0)$ دیفرانسیل پذیر نیست ۳۲۱۲،۲ - تابع در نقطه $O(0,0)$ دیفرانسیل پذیر
 نیست ۳۲۱۲،۳ - تابع در نقطه $O(0,0)$ دیفرانسیل پذیر
 است

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -16xy \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{y} - 3114$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2} - 3210 \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} - 3216 \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{y^3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{y(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(x+y) + x \cos(x+y) - 3217 \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x(x^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \cos(x+y) - x \sin(x+y) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cos(x+y)$$

$$- 3218 \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x \sin(x+y) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos(x+y) - x \sin(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2 \sin x^2 + 2x^2 \cos x^2}{y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x \sin x^2}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y} - 3219 \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2 \cos x^2}{y^3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2x \sin x^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2} \sin \frac{x^2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y} - \frac{2x^2}{y^3} \sin \frac{x^2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y}$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1} - \text{??} \right\rangle \quad + \frac{yx^z}{y^z} \sin \frac{x^y}{y} \sec^r \frac{x^y}{y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1} (1 + y \ln x) \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y)^2} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2} - \text{??} \right\rangle \quad (x > 0)$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} - \text{??} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2} \right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} - \text{??} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2+y^2} - \text{??} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2} (xy \neq 1) \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dots \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2-y^2) \operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{y^2+y^2} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{r}{2}}} - \text{??} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2} (y \neq 0) \right\rangle$$

$$- \text{??} \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{r}{2}}} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{r}{2}}} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \ln \frac{x}{y} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \ln^2 \frac{x}{y} \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z(z+1)}{y^2} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z(z-1)}{x^2} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \dots \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(1 + z \ln \frac{x}{y}\right) \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{z^2}{xy} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yu}{xz} - \text{??} \right\rangle = -\frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(1 + z \ln \frac{x}{y}\right) \left(\frac{x}{y}\right)^2 >$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u \ln^2 x}{z^2} \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y(y-z)u}{x^2 z^2} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{yu}{z^2} \ln x \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u \ln x}{z} \right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -\frac{yu(z+y \ln x)}{xz^2} \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(z+y \ln x)u}{xz^2} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{yu \ln x}{z^2} (yz + y \ln x) \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{x} u - ۳۲۲۸ \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = - \frac{u \ln x (z + y \ln x)}{z^2} \quad (xz \neq 0) \right.$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2 (y^2 - 1)}{x^2} u \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y^2 u \ln x \ln y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-1} u \ln x \right.$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = y^2 u (1 + y^2 \ln x) \ln x \ln^2 y \quad \frac{\partial u}{\partial y^2} = zy^{z-2} u (z - 1 + zy^2 \ln x) \ln x \right.$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{y^2 u \ln y}{x} (1 + y^2 \ln x) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{zy^{z-1} u}{x} (1 + y^2 \ln x) \right.$$

$$- ۳۲۳۰, 1 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = y^{z-1} u \ln x [1 + z \ln y (1 + y^2 \ln x)] \quad (x > 0, y > 0)$$

$$\langle du = x^{m-1} y^{n-1} (my dx + nx dy) - ۳۲۳۰ \quad \text{وجود ندارد } f''_{xy}(0, 0)$$

$$d^2 u = x^{m-2} y^{n-2} [m(m-1)y^2 dx^2 + 2mnxy dx dy + n(n-1)x^2 dy^2]$$

$$- ۳۲۳۷ \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{y}{y^2} dy (y dx - x dy) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y dx - x dy}{y^2} - ۳۲۳۶$$

$$\langle du = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} - ۳۲۳۸ \quad d^2 u = \frac{(y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\langle du = e^{xy} (y dx + x dy) - ۳۲۳۹ \quad d^2 u = \frac{(y^2 - x^2)(dx^2 - dy^2) - 2xy dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$- ۳۲۴۰ \quad d^2 u = e^{xy} [y^2 dx^2 + 2(1 + xy) dx dy + x^2 dy^2]$$

$$d^2 u = 2(dx dy + dy dz + dz dx) \quad du = (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$$

$$d^2 u = \frac{2z[(2x^2 - y^2) dx^2 + (x^2 + y^2) dz - 2z(x dx + y dy)]}{(x^2 + y^2)^2} \dots \rightarrow du = \frac{(x^2 + y^2) dz - 2z(x dx + y dy)}{(x^2 + y^2)^2} - ۳۲۴۱$$

$$- ۳۲۴۲ \quad \rightarrow \dots \frac{+ 2xy dx dy + (2y^2 - x^2) dy^2 - 2z(x dx + y dy) dz}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\langle 1 + mx + ny \quad (الف ۳۲۴۴) \quad - 2(dx - dy)(dy + dz) \quad dx - dy$$

$$\langle 1, 0, 0 \quad (ب ۳۲۴۵) \quad x + y \quad (ب ۳۲۴۶) \quad xy \quad (ب ۳۲۴۷)$$

$$\langle 2, 90 \quad (ت ۳۲۴۸) \quad 0, 97 \quad (ث ۳۲۴۹) \quad ۰, ۹۷ \quad (ج ۳۲۵۰) \quad ۰, ۹۷ \quad (ح ۳۲۵۱)$$

$$\langle ۱, 7 \text{ mm} \quad (د ۳۲۵۲) \quad ۱, 7 \text{ mm} \quad (ذ ۳۲۵۳) \quad ۱, 7 \text{ mm} \quad (ر ۳۲۵۴) \quad ۱, 7 \text{ mm} \quad (ز ۳۲۵۵)$$

$$\langle f'_x(x, y) - ۳۲۵۱ \quad \Delta \approx 7, 1 \text{ m} - ۳۲۵۰ \quad \delta \approx 13\% \quad \Delta \approx 10, 2 \text{ m} - ۳۲۴۹$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 24 - ۳۲۵۶ \quad \text{در } f_y(x, y) \text{ در همسایگی نقطه } (0, 0) \text{ کراندار نیستند}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2 dy^2} = - ۳۲۵۸ \quad \frac{d^2 u}{dx^2 dy} = 0 - ۳۲۵۷ \quad \frac{d^2 u}{dx^2 dy^2} = - 16 \quad \frac{d^2 u}{dx^2 dy} = 0$$

$$\frac{d^r u}{dx dy dz} = e^{xyz} \times \dots \quad \frac{d^r u}{dx dy dz} = \dots = -\gamma (\cos x + \cos y)$$

$$\frac{d^k u}{dx dy d\xi d\eta} = -\frac{\gamma}{r^k} + \frac{\xi \wedge (x - \xi)^r (y - \eta)^r}{r^k} - \dots \times (1 + rxyz + x^r y^r z^r)$$

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^p \partial x^q} = p! q! - \dots \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad \text{که در آن}$$

$$e^{x+y} |x^r + y^r + \dots \quad \frac{\gamma (-1)^{m(m+n-1)!} (nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}} - \dots$$

$$(x+p)(y+q) \times \dots + r(mx+ny) + m(m-1) + n(n-1)$$

$$F(t) = f'(t) + r t f''(t) + \dots \quad \sin \frac{n\pi}{\gamma} - \dots \times (z+r) e^{x+y+z}$$

$$\frac{d^k u}{dx^k} = \gamma (dx^k - r dx^r dy - r dx dy^r + dy^k) - \dots + t^r f'''(t)$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k} = \gamma (\dots) \quad \frac{\partial^k u}{\partial x \partial y^r} = -\gamma \quad \frac{\partial^k u}{\partial x^r \partial y^r} = \dots \quad \frac{\partial^k u}{\partial x^r \partial y} = -\gamma \quad \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = \gamma$$

$$d^r u = \gamma (dx^r - r dx^r dy + r dx dy^r + dy^r) - \dots$$

$$d^r u = -\wedge (x dx + y dy)^r \cos(x^r + y^r) - \gamma (x dx + y dy) (dx^r + dy^r) \times$$

$$d^r u = -\dots \quad d^r u = -\frac{\gamma! (dx+dy)^{r-1}}{(x+y)^{r-1}} - \dots \times \sin(x^r + y^r)$$

$$= -(dx^r - \gamma dx^k dy^r + \gamma dx^r dy^k - dy^r) \cos x \operatorname{ch} y - r dx dy (r dx^k -$$

$$d^r u = \gamma dx dy dz - \dots - \gamma dx^r dy^r + r dy^k) \sin x \operatorname{sh} y$$

$$d^n u = e^{ax+by} (a dx + b dy)^n - \dots \quad d^k u = \gamma \left(\frac{dx^k}{x^r} + \frac{dy^k}{y^r} + \frac{dz^k}{z^r} \right) - \dots$$

$$d^n u = -\dots \quad d^n u = \sum_{k=0}^n C_n^k X^{(n-k)}(x) Y^{(k)}(y) dx^{n-k} dy^k - \dots$$

$$d^n u = e^{ax+by+cz} \times \dots = f^{(n)}(x+y+z) (dx+dy+dz)^n - \dots$$

$$\Delta^r u = u \quad \Delta u = -u \quad (\text{الف} - \dots) \quad \times (a dx + b dy + c dz)^n$$

$$\Delta u = \dots \quad \Delta^r u = \dots \quad \Delta u = \dots \quad (\text{ب})$$

$$\Delta_1 u = \gamma [(x^r - yz)^r + (y^r - xz)^r + (z^r - xy)^r] \quad (\text{الف} - \dots)$$

$$r = \sqrt{x^r + y^r + z^r} \quad \text{که در آن} \quad \Delta_1 u = \frac{1}{r^k} \quad (\text{ب} \quad \Delta_1 u = \gamma (x+y+z))$$

$$\frac{\partial^r u}{\partial x^r} = r f'(x^r + y^r + z^r) + \dots \quad \frac{\partial u}{\partial x} = r x f'(x^r + y^r + z^r) - \dots \quad \Delta_1 u = \dots$$

$$\frac{\partial^r u}{\partial x \partial y} = \dots \quad + \dots x^r f''(x^r + y^r + z^r)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f'_y \left(x, \frac{x}{y} \right) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \left(x, \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{y} f'_y \left(x, \frac{x}{y} \right) - \text{۳۲۸۳}$$

$$\quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} \left(x, \frac{x}{y} \right) + \frac{y}{y} f''_{1y} \left(x, \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{y^2} f''_{yy} \left(x, \frac{x}{y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2} f''_{1y} \left(x, \frac{x}{y} \right) - \frac{x}{y^2} f''_{yy} \left(x, \frac{x}{y} \right) - \frac{1}{y^2} f''_{yy} \left(x, \frac{x}{y} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + y f'_y + yz f'_z - \text{۳۲۸۵} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{y^4} f''_{yy} \left(x, \frac{x}{y} \right) + \frac{2x}{y^3} f''_{yz} \left(x, \frac{x}{y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + y^2 f''_{1y} + y^2 z^2 f''_{1z} + \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy f'_z \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x f'_y + xz f'_z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 f''_{yy} + 2x^2 z f''_{yz} + x^2 z^2 f''_{zz} + \quad + 2y f''_{1y} + 2yz f''_{1z} + 2y^2 z^2 f''_{1z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy f''_{1y} + xyz^2 f''_{1z} + x f''_{11} + xz f''_{1z} + 2xy z f''_{yz} + f'_y + z f'_z \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 y^2 f''_{zz}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^2 y f''_{yz} + x^2 yz f''_{yz} + x f'_z \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xy f''_{1z} + xy^2 f''_{yz} + xy^2 z f''_{yz} + y f'_z$$

$$\Delta u = 2 f''_{11} + - \text{۳۲۸۷} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{11} + (x+y) f''_{1y} + xy f''_{1y} + f'_y - \text{۳۲۸۷}$$

$$- \text{۳۲۸۸} \quad + \varepsilon (x+y+z) f''_{1y} + \varepsilon (x^2+y^2+z^2) f''_{yy} + \varepsilon f'_y$$

$$- \text{۳۲۸۹} \quad d^2 u = f''(t) (dx+dy)^2 \quad ; \quad du = f'(t) (dx+dy)$$

$$d^2 u = f''(t) \frac{(x dy - y dx)^2}{x^2} - \varepsilon f'(t) \frac{dx(x dy - y dx)}{x^2} \quad ; \quad du = f'(t) \frac{x dy - y dx}{x^2}$$

$$d^2 u = f'' \frac{(x dx + y dy)^2}{x^2 + y^2} + f' \frac{(y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad du = f' \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \text{۳۲۹۰}$$

$$\text{آ } \quad d^2 u = f''(t) dt^2 + f'(t) d^2 t \quad ; \quad du = f'(t) dt - \text{۳۲۹۱}$$

$$d^2 t = 2(z dx dy + y dx dz + x dy dz) \quad ; \quad dt = yz dx + zx dy + xy dz$$

$$- \text{۳۲۹۲} \quad ; \quad du = \varepsilon f'(x dx + y dy + z dz) + \varepsilon f'(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$d^2 u = a^2 f''_{11} dx^2 + 2ab f''_{1y} dx dy + b^2 f''_{yy} dy^2 \quad ; \quad du = a f'_1 dx + b f'_y dy$$

$$- \text{۳۲۹۵} \quad ; \quad du = f'_1 (dx + dy) + f'_y (dx - dy) - \text{۳۲۹۳}$$

$$d^2 u = f''_{11} (y dx + x dy)^2 + \quad du = f'_1 (y dx + x dy) + f'_y \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

$$+ 2 f''_{1y} \frac{y^2 dx^2 - x^2 dy^2}{y^2} + f''_{yy} \frac{(y dx - x dy)^2}{y^2} + 2 f'_1 dx dy - 2 f'_y \frac{(y dx - x dy) dy}{y^2}$$

$$\epsilon du = f'_x(dx + dy) + f'_y dz - ۳۲۹۷$$

$$-۳۲۹۷ \quad d^2u = f''_{xx}(dx + dy)^2 + ۲f''_{xy}(dx + dy) dz + f''_{yy} dz^2$$

$$d^2u = f''_{xx}(dx + dy + dz)^2 + ۲f'_y(x dx + y dy + z dz) + f''_{yy}(x dx +$$

$$+ dy + dz)^2 + \epsilon f''_{xy}(dx + dy + dz)(x dx + y dy + z dz) + \epsilon f''_{yy}(x dx +$$

$$-۳۲۹۸ \quad + y dy + z dz)^2 + ۲f'_y(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$d^2u = f''_{xx} \frac{(y dx - x dy)^2}{y^2} + ۲f''_{xy} \times \quad \epsilon du = f'_x \frac{y dx - x dy}{y^2} + f'_y \frac{z dy - y dz}{z^2}$$

$$\times \frac{(y dx - x dy)(z dy - y dz)}{y^2 z^2} + f''_{yy} \frac{(z dy - y dz)^2}{z^2} - ۲f'_y \frac{(y dx - x dy) dy}{y^2}$$

$$\epsilon du = (f'_x + ۲tf'_y + ۳t^2 f'_y) dt - ۳۲۹۹ \quad - ۲f'_y \frac{(z dy - y dz) dz}{z^2}$$

$$d^2u(f''_{xx} + \epsilon tf''_{xy} + \epsilon t^2 f''_{yy} + ۳t^2 f''_{xy} + ۱۲t^2 f''_{xy} + ۹t^2 f''_{yy} + ۲f'_y + ۳tf'_y) dt^2$$

$$d^2u = a^2 f''_{xx} dx^2 + b^2 f''_{yy} dy^2 + \quad \epsilon du = af'_x dx + bf'_y dy + cf'_z dz - ۳۳۰۰$$

$$-۳۳۰۱ \quad + c^2 f''_{zz} dz^2 + ۲ab f''_{xy} dx dy + ۲ac f''_{xz} dx dz + ۲bc f''_{yz} dy dz$$

$$\epsilon du = ۲f'_x(x dx + y dy) + ۲f'_y(x dx - y dy) + ۲f'_z(y dx + x dy)$$

$$d^2u = \epsilon f''_{xx}(x dx + y dy)^2 + \epsilon f''_{yy}(x dx - y dy)^2 + \epsilon f''_{zz}(y dx + x dy)^2 +$$

$$+ ۸ f''_{xy}(x^2 dx^2 - y^2 dy^2) + ۸ f''_{xz}(x dx + y dy)(y dx + x dy) + ۸ f''_{yz} \times$$

$$\times (x dx - y dy)(y dx + x dy) + ۲f'_x(dx^2 + dy^2)_y + ۲f'_y(dx^2 - dy^2)_x + \epsilon f'_z dx dy$$

$$-۳۳۰۲ \quad d^2u = f^{(n)}(ax + by + cz)(a dx + b dy + c dz)^n - ۳۳۰۲$$

$$\epsilon \xi = ax \quad \eta = by \quad \zeta = cz \quad d^2u = \left(a dx \frac{\partial}{\partial \xi} + b dy \frac{\partial}{\partial \eta} + c dz \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^n f(\xi, \eta, \zeta)$$

$$d^2u = \left[dx \left(a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + \quad \zeta = cz \quad \eta = by \right.$$

$$\left. + dy \left(b_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + b_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + dz \left(c_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + c_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right]^n$$

$$xyz - ۳۳۱۹ \quad ۱ - ۳۳۱۷ \quad F(r) = f''(r) + \frac{۲}{r} f'(r) - ۳۳۰۰ \quad f(\xi, \eta, \zeta)$$

$$۲x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = ۲z - ۳۳۲۲ \quad x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = x - ۳۳۲۱$$

$$- ۳۳۲۰ \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \dots - ۳۳۲۳ \quad y \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial x} = \dots - ۳۳۲۲$$

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - ۳۳۲۷ \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dots - ۳۳۲۶ \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = \dots$$

$$- ۳۳۲۵ \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z - ۳۳۲۹ \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dots - ۳۳۲۸$$

$$1 - \sqrt{r} - 3341 \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ (ب)} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ (الف)} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \cos \alpha + \sin \alpha - 3342$$

$$\frac{1}{ab} \sqrt{r(a^2 + b^2)} - 3343 \quad \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 3344 \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ (پ)}$$

$$- 3345 \quad |\text{grad } u| = \sqrt{r} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 3346$$

$$\cos(\widehat{\text{grad } u, y}) = -\frac{y}{r} \quad \cos(\widehat{\text{grad } u, x}) = -\frac{x}{r} \quad |\text{grad } u| = \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\pi}{2} - 3347 \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{آن در آن} \quad \cos(\widehat{\text{grad } u, z}) = -\frac{z}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cos^2 \gamma + 3348 \approx 3142 - 3348$$

$$- 3349 \quad + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \alpha \cos \beta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \cos \alpha \cos \gamma + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cos \beta \cos \gamma$$

$$u''_{xx}(x, y) = u''_{yy}(x, y) = -\frac{z}{r} x - 3350 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1, 0$$

$$z = \varphi(x) + \psi(y) - 3351 \quad z = x\varphi(y) + \psi(y) - 3352 \quad u''_{xy}(x, y) = \frac{0}{r} x$$

$$- 3353 \quad z = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + \dots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x) - 3354$$

$$u = 1 + x^2 y + y^2 - 2x^2 - 3355 \quad u = \varphi(x, y) + \psi(x, z) + \chi(y, z)$$

$$z = x + y^2 + 0, 0 xy(x + y) - 3356 \quad z = 1 + xy + y^2 - 3357$$

۳۳۶۲ - مجموعه صفرهای تابع $f(x)$ باید همه جای فاصله (a, b) نامتراکم باشند یعنی صفرهای تابع $f(x)$ نباید تماماً هیچ فاصله $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ را پر کنند ۳۳۶۳ - مجموعه صفرهای تابع $f(x)$ باید همه جای فاصله (a, b) نامتراکم باشند، ضمناً هر صفر $f(x)$ تابع $f(x)$ بطور همزمان صفر تابع $g(x)$ است و علاوه بر آن حد متناهی $\lim_{x \rightarrow \xi} [g(x)/f(x)]$ وجود دارد ۳۳۶۴

۱) مجموعه شمارش ناپذیر (ناشمارا) ؛ ۲) دو تا ؛ ۳) الف) یکتا ؛ ب) دو تا ۳۳۶۵ - مجموعه شمارش ناپذیر ؛ ۲) چهارتا ؛ $y = x$ ، $y = -x$ ، $y = |x|$ و $y = -|x|$ ؛ ۳) دو تا ؛ ۴) الف) دو تا ؛ ب) چهارتا ؛ ۵) یکتا

$$x = 0 \quad (3 \text{ } |x| = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} \text{ } 0 < |x| < 1 \text{ } (2 \text{ } \text{هیچ جا ؛ } 2) \text{ } (1 - 3366$$

شاخه‌های تک مقداری : $1 < x < \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ ($\varepsilon = 1$) ; $|x| = 1$,

ε ; $y = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}$ ($|x| \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$)

$y = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}$ ($1 \leq |x| \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$)

که در آن $\varepsilon = -1, 1$ - نقاط انشعاب : $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(-1, 0)$;

$\varepsilon(x) = -1$, که در آن $y = \varepsilon(x) \sqrt{\frac{\sqrt{2x^2+1} - (\sqrt{x^2+1})}{2}}$ ($|x| \leq 1$)

مجموعه 'مقادیر تابع $\varphi(y)$ باید با مجموعه' $1, \operatorname{sgn} x, -\operatorname{sgn} x$

مقادیر تابع $f(x)$ دارای نقاط مشترک باشد $y' = -\frac{x+y}{x-y}$ - ۳۳۷۱

$y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; $y' = \frac{x+y}{x-y}$ - ۳۳۷۲ $y'' = \frac{2x^2}{(x-y)^3}$

$y' = \frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$ - ۳۳۷۴ $y'' = \frac{-\varepsilon \sin y}{(1-\varepsilon \cos y)^3}$; $y' = \frac{1}{1-\varepsilon \cos y}$ - ۳۳۷۳

$y'' = \frac{y^2[y(1-\ln x)^2 - 2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y) - x(1-\ln y)^2]}{x^4(1-\ln y)^3}$

$y'_x(0) = 1$; $y'_y(0) = -1$ - ۳۳۷۸ $y'' = 0$; $y' = \frac{y}{x}$ - ۳۳۷۵

- ۳۳۸۰ $y'_x(0) = \sqrt{2}$; $y'_y(0) = -\sqrt{2}$; $y'_x(0) = 0$ - ۳۳۷۹

$y' = 0$ - ۳۳۸۱ $y''' = -\frac{162x}{(x+2y)^3}$; $y'' = -\frac{18}{(x+2y)^3}$; $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$ - ۳۳۸۳ $y''' = -\frac{2}{3}$; $y'' = -\frac{2}{3}$

- ۳۳۸۴ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2+z^2}{z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy^2z}{(z^2-xy)^3}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2-xy}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2-xy}$

- ۳۳۸۵ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z(z^2-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^2yz}{(z^2-xy)^3}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y+z-1}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2 z}{(x^2 - y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yz}{x^2 - y^2} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xz}{x^2 - y^2} - \text{۳۳۸۶}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = -1 - \text{۳۳۸۷} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2 z}{(x^2 - y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xyz}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$- \text{۳۳۸۹} \quad -1 \quad (\text{ب} \quad ; \quad -2 \quad (\text{الف} - \text{۳۳۸۸} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = .$$

$$dz = - \text{۳۳۹۰} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2 z}{1 - y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{y^2}$$

$$d^2 z = -\frac{c^2}{z^2} \left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2 b^2} dx dy + \frac{y^2}{b^2} dy^2 \right] + \frac{c^2}{z} \left(\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} \right)$$

$$; dz = -\frac{(1 - yz) dx + (1 - xz) dy}{1 - xy} - \text{۳۳۹۱} \quad + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{dy^2}{b^2}$$

$$d^2 z = -\frac{y \{ y(1 - yz) dx^2 + [x + y - z(1 + xy)] dx dy + x(1 - xz) dx^2 \}}{(1 - xy)^2}$$

$$- \text{۳۳۹۲} \quad d^2 z = -\frac{z^2 (y dx - x dy)^2}{y^2 (x + z)^2} \quad ; \quad dz = \frac{z (y dx + z dy)}{y (x + z)} - \text{۳۳۹۳}$$

$$d^2 z = \frac{y(x - z)(y + 1)[(x - z)^2 + y^2]}{[(x - z)^2 + y(y + 1)]^2} dy^2 \quad ; \quad dz = dx - \frac{(x - z) dy}{(x - z)^2 + y(y + 1)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{z(x - z)(y - z)}{(F_1' + yzF_2')^2} \times - \text{۳۳۹۰} \quad du = -\frac{u^2(dx + dy) - z^2 dz}{u[y(x + y) - u]} - \text{۳۳۹۴}$$

$$\times [F_1' F_2'' - y F_1' F_2' F_2'' + F_1' F_2'' F_2''] - \frac{y(F_1' + yx F_2')(F_1' + yz F_2') F_2'}{(F_1' + yz F_2')^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \text{۳۳۹۵} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_1' - F_2'}{F_1' - F_2'} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_1' - F_2'}{F_1' - F_2'} - \text{۳۳۹۶}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -F_2'^{-2} \times \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\left(1 + \frac{F_2'}{F_1'} \right) \quad ; \quad = -\left(1 + \frac{F_1' + F_2'}{F_1'} \right)$$

$$\times [F_1' F_2''(F_1'' + y F_2'' + F_2'') - y(F_1' + F_2') F_2' (F_1'' + F_2'') + (F_1' + F_2')^2 F_2'']$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(xF_1' + yF_2')^{-2} [y^2 z^2 (F_1' F_2'' - y F_1' F_2' F_2'' + F_1' F_2'') - - \text{۳۳۹۸}$$

$$d^2 z = -\frac{F_1' F_2'' - y F_1' F_2' F_2'' + F_1' F_2''}{(F_1' + F_2')^2} \times (\text{الف} - \text{۳۳۹۹} - yz (xF_1' + yF_2') F_1')$$

$$d^2 z = \frac{F_1' F_2'' - y F_1' F_2' F_2'' + F_1' F_2''}{(xF_1' + yF_2')^2} (y dx - x dy)^2 (\text{ب} \quad ; \quad \times (dx - dy)^2$$

$$d^2z = -\frac{z}{x^2+y^2} (x dx^2 - 2 dx dy + y dy^2) \quad ; \quad dz = \frac{1}{x} (x dx - dy) - 2xy, \dots$$

$$\frac{dx}{dz} = \dots - 2x + y \quad ; \quad \frac{dy}{dz} = \frac{z-y}{x-y} \quad ; \quad \frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y} - 2x + y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2} - 2x + y \quad ; \quad \frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{1}{z} \quad ; \quad \frac{dy}{dz} = -\dots$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2} (x^2+y^2 > 0) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv-yu}{x^2+y^2} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu-xv}{x^2+y^2}$$

$$-2x + y \quad ; \quad dv = -dx + \frac{1}{y} dy \quad ; \quad du = -\frac{1}{y} dy - 2x + y, \dots$$

$$dv = \frac{-(\sin v - y \cos u) dx}{x \cos v + y \cos u} + \dots \quad ; \quad du = \frac{(\sin v + x \cos v) dx - (\sin u - x \cos u) dy}{x \cos v + y \cos u}$$

$$d^2u = -d^2v = \frac{(x dx \cos v - x dv \sin v) dv}{x \cos v + y \cos u} - \dots \quad ; \quad + \frac{(\sin u + y \cos u) dy}{x \cos v + y \cos u}$$

$$\frac{1}{y} (dx + dy) - 2x + y \quad ; \quad -\frac{(x dy \cos u - y du \sin u) du}{x \cos v + y \cos u}$$

$$d^2v = \frac{1}{y} (dx - dy)^2 \quad ; \quad d^2u = dx^2 \quad ; \quad dv = \frac{\pi}{z} dy - \frac{1}{y} (dx - dy)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \quad ; \quad \frac{dz}{dx} = 2 \left(t + \frac{1}{t} + 1 \right) \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = 2 \left(t + \frac{1}{t} \right) - 2x + y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2uv \quad ; \quad y \geq \frac{x^2}{y} - 2x + y \quad ; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 2 \left(t + \frac{1}{t} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{y} - 2x + y, 1 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{y} (u + v) \quad (u \neq v)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \psi}{\sin^2 \phi} - 2x + y \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y}{121} - 2x + y, 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin^2 \psi}{u^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos^2 \psi}{u^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sin^2 \psi}{u^2} - 2x + y$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2(x^2 - y^2)}{x - y} - 2x + y \quad ; \quad d^2z = \frac{1}{y} (dx^2 - dy^2) \quad ; \quad dz = \dots - 2x + y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y+z} + \dots - 2x + y \quad ; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2x - y}{x - y} + \frac{yx}{(x - y)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2} e^{y-z} \quad ; \quad + \frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2} e^{x-z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{I} \times \dots \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{I} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial u} \right) - \text{۳۴۱۳}$$

$$I = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \text{که در آن} \quad \times \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{I^2} \times \dots \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \text{۳۴۱۴}$$

$$\times \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right) \times \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{I^2} \times \dots \quad ; \quad \times \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 \right\}$$

$$\times \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right) \times \right.$$

$$\left. ; \quad \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{I^2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right) \times \right.$$

$$\left. \text{که در آن} \quad ; \quad \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \right\}$$

$$; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos \frac{v}{u} \quad (\text{الف} - \text{۳۴۱۵}) \quad I = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \cos \frac{v}{u} + \dots \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} \right) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin \frac{v}{u}$$

$$; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u (\sin v - \cos v) + 1} \quad (\text{ب} \quad ; \quad + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u})$$

$$; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-(e^u - \cos v)}{u [e^u (\sin v - \cos v) + 1]} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^u (\sin v - \cos v) + 1}$$

$$; \quad \frac{du}{dx} = \frac{I}{I_1} - \text{۳۴۱۶} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u + \sin v}{u [e^u (\sin v - \cos v) + 1]}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{I_1^2} \left\{ \frac{\partial (g, h)}{\partial (y, z)} \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial (h, f)}{\partial (y, z)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g + \frac{\partial (f, g)}{\partial (y, z)} \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + \right. \right.$$

$$\left. \left. I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \right\} \quad , \quad I_2 = \frac{\partial (g, h)}{\partial (z, x)} \quad , \quad I_1 = \frac{\partial (g, h)}{\partial (y, z)} \quad \text{که در آن} \quad + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \left. \right\}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - ۳۴۱۷ \quad I = \frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)} \quad \text{و} \quad I_{\gamma} = \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)}$$

$$I_{\gamma} = \frac{\partial(h, f)}{\partial(z, t)} \quad \text{و} \quad I_{\delta} = \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} \quad \text{آن در آن} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{I_{\gamma} \partial g}{I_{\delta} \partial y}$$

$$\text{آن در آن} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{I_{\gamma}}{t} \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{I_{\gamma}}{I} \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{I_{\delta}}{I} - ۳۴۱۸$$

$$I = \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)} \quad \text{و} \quad I_{\gamma} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(v, w)} \quad \therefore \quad I_{\delta} = \frac{\partial(h, f)}{\partial(v, w)} \quad \therefore \quad I_{\delta} = \frac{\partial(g, h)}{\partial(v, w)}$$

$$\therefore I_{\gamma} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, t)} \quad \therefore \quad I_{\delta} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, t)} \quad \text{آن در آن} \quad dz = -\frac{I_{\delta} dx + I_{\gamma} dy}{I_{\gamma}} - ۳۴۱۹$$

$$x^{(4)} = \dots - ۳۴۲۲ \quad x''' + xx'' = \dots - ۳۴۲۱ \quad I_{\gamma} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, t)}$$

$$- ۳۴۲۰ \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + y = \dots - ۳۴۲۴ \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - t \left(\frac{dx}{dt} \right)^{\gamma} = \dots - ۳۴۲۳$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = \dots - ۳۴۲۶ \quad \frac{d^2 y}{dt^2} - ۲ \frac{d^2 y}{dt^2} + ۲ \frac{dy}{dt} - ۶y = \dots$$

$$u'' + \left[q(x) - \frac{1}{x} p'(x) - \frac{1}{x^2} p''(x) \right] u = \dots - ۳۴۲۸ \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + m^2 y = \dots - ۳۴۲۷$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \dots - ۳۴۴۱ \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = \dots - ۳۴۴۰ \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + (u + r) \frac{du}{dt} + ۲u = \dots - ۳۴۳۹$$

$$t^{\alpha} \frac{d^2 u}{dt^2} + (\gamma t^{\delta} + 1) \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = \dots - ۳۴۴۳ \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda u \left(\frac{du}{dt} \right)^{\gamma} = \dots - ۳۴۴۲$$

$$\Phi(1, u, u' + u^{\gamma}) = \dots - ۳۴۴۶ \quad u'' - u' = \frac{A}{(a-b)^{\gamma}} u - ۳۴۴۴$$

$$- ۳۴۵۱ \quad \frac{dr}{d\varphi} = r - ۳۴۵۰ \quad F(xu' + u^{\gamma} - u, u, 1) = \dots - ۳۴۴۷$$

$$\frac{r'}{r} - ۳۴۵۳ \quad r(r^{\gamma} + ۲r'^{\gamma} - rr'') = r'^{\gamma} - ۳۴۵۲ \quad r'^{\gamma} = \frac{1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} r^{\gamma}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -1 \quad \therefore \quad \frac{dr}{dt} = kr^{\gamma} - ۳۴۵۵ \quad K = \frac{|r^{\gamma} + ۲r'^{\gamma} - rr''|}{(r^{\gamma} + r'^{\gamma})^{\gamma}} - ۳۴۵۴$$

$$Y''' = -\frac{y'''}{y''^{\gamma}} \quad \therefore \quad Y'' = \frac{1}{y''} \quad \therefore \quad Y' = x - ۳۴۵۷ \quad \omega = \frac{d}{dt} \left(r^{\gamma} \frac{d\varphi}{dt} \right) - ۳۴۵۶$$

است $z = \varphi(x + y) - ۳۴۵۸$ تابع اختیاری دیفرانسیل پذیر است

$$z = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz) - ۳۴۶ \quad z = \varphi(x^\gamma + y^\gamma) - ۳۴۵۹$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v} - ۳۴۶۳ \quad \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = e^u \operatorname{sh} v - ۳۴۶۲ \quad z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - ۳۴۶۱$$

$$(ru + v - z) \times - ۳۴۶۶ \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{z}{v} \frac{z^\gamma + u}{z^\gamma - u} - ۳۴۶۵ \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{\gamma} - ۳۴۶۴$$

$$\frac{e^{x+y} - z^\gamma}{1 - e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta}} - ۳۴۶۷ \quad \times \frac{\partial z}{\partial u} + (u + rv - z) \frac{\partial z}{\partial v} = u + v - z$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x - z}{y} - ۳۴۶۵ \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = \dots - ۳۴۶۹ \quad \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^\gamma + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^\gamma}{a^\gamma + v^\gamma} - ۳۴۶۸$$

$$A = \frac{x^\gamma - \gamma xu + u^\gamma \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^\gamma + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^\gamma \right]}{x^\xi \left(u \frac{\partial x}{\partial u} + v \frac{\partial x}{\partial v} \right)^\gamma} - ۳۴۶۷ \quad \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v} - ۳۴۶۱$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \dots - ۳۴۶۴ \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} + ru + (e^\xi + e^\eta + e^\zeta) = \dots - ۳۴۶۳$$

$$u^\gamma \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^\gamma + v^\gamma \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^\gamma = - ۳۴۶۷ \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \dots - ۳۴۶۶ \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \dots - ۳۴۶۵$$

$$A = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v} - ۳۴۶۹ \quad \frac{e^{\gamma u} \left(1 - \frac{\partial w}{\partial v} \cos^\gamma v\right)}{\frac{\partial w}{\partial u}} - ۳۴۶۸ = w^\gamma \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$w = r \frac{\partial u}{\partial r} - ۳۴۸۲ \quad w = \frac{\partial u}{\partial \varphi} - ۳۴۸۱ \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\xi \eta}{\zeta} - ۳۴۸۰$$

$$w = \frac{\partial^\gamma u}{\partial r^\gamma} + \dots - ۳۴۸۴ \quad w = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^\gamma + \frac{1}{r^\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^\gamma - ۳۴۸۳$$

$$- ۳۴۸۷ \quad w = \frac{\partial^\gamma u}{\partial \varphi^\gamma} - ۳۴۸۶ \quad w = r^\gamma \frac{\partial^\gamma u}{\partial r^\gamma} - ۳۴۸۵ + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^\gamma} \frac{\partial^\gamma u}{\partial \varphi^\gamma}$$

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at) - ۳۴۸۸ \quad I = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

$$\gamma \frac{\partial^\gamma z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = \dots - ۳۴۸۹ \quad \text{که در آن } \varphi \text{ و } \psi \text{ توابع دلخواهی هستند}$$

$$a \left(\frac{\partial^\gamma z}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \gamma b \frac{\partial^\gamma z}{\partial u \partial v} = \dots - ۳۴۹۱ \quad \frac{\partial^\gamma z}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial^\gamma z}{\partial v^\gamma} = \dots - ۳۴۹۰$$

$$\frac{\partial^\gamma z}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial^\gamma z}{\partial v^\gamma} - ۳۴۹۳ \quad \frac{\partial^\gamma z}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial^\gamma z}{\partial v^\gamma} = \dots - ۳۴۹۲ \quad + b \left(\frac{\partial^\gamma z}{\partial v^\gamma} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \dots$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{ru} \frac{\partial z}{\partial v} - \gamma \epsilon \epsilon \epsilon \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \dots - \gamma \epsilon \epsilon \epsilon \quad + m^2 e^{\gamma u z} = .$$

$$(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = v \frac{\partial z}{\partial u} - \gamma \epsilon \epsilon \gamma \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\gamma}{u(\xi - uv)} \frac{\partial z}{\partial v} - \gamma \epsilon \epsilon \gamma$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{u^2 - v^2} \left(v \frac{\partial z}{\partial u} - u \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \dots - \gamma \epsilon \epsilon \gamma \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\gamma u}{u^2 + v^2} \frac{\partial z}{\partial u} - \gamma \epsilon \epsilon \lambda$$

$$u = \varphi(x + \lambda_1 y) + \dots - \gamma \epsilon \epsilon \gamma \quad \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 1 - \gamma \epsilon \epsilon \dots$$

$$A + \gamma B \lambda + C \lambda^2 = . \quad \text{که در آن } \lambda_1 \text{ و } \lambda_2 \text{ ریشه های معادله } + \psi(x + \lambda_1 y)$$

$$\Delta(\Delta u) = \frac{d^2 u}{dr^2} + \dots \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \quad (\text{الف} - \gamma \epsilon \epsilon \gamma \quad \text{میباشند})$$

$$u \frac{d^2 w}{du^2} + \frac{dw}{du} + cw = \dots - \gamma \epsilon \epsilon \epsilon \quad + \frac{\gamma}{r} \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr}$$

$$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \dots - \gamma \epsilon \epsilon \lambda \quad A = X \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - Y \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X} - \gamma \epsilon \epsilon \epsilon$$

$$+ \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \gamma \left(\xi \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \xi \xi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \eta \xi \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \dots - \gamma \epsilon \epsilon \epsilon \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dots - \gamma \epsilon \epsilon \epsilon$$

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right)^2 - \gamma \epsilon \epsilon \epsilon$$

$$\Delta_1 u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \dots - \gamma \epsilon \epsilon \gamma \quad w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \gamma \epsilon \epsilon \gamma$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \gamma w - \gamma \epsilon \epsilon \gamma \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{\gamma} - \gamma \epsilon \epsilon \epsilon \quad \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \dots - \gamma \epsilon \epsilon \epsilon$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + \dots - \gamma \epsilon \epsilon \lambda \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\frac{v}{u} - 1 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \dots - \gamma \epsilon \epsilon \gamma$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \dots - \gamma \epsilon \epsilon \gamma \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{w}{\xi \sin^2(\mu - v)} - \gamma \epsilon \epsilon \gamma \quad + \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 = .$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \dots - \gamma \epsilon \epsilon \epsilon \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \dots - \gamma \epsilon \epsilon \gamma$$

$$x = y\varphi(z) + \psi(z) - r_0 r_1 + (e^w - 1) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \right]$$

$$- r_0 r_2 \quad A(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - r B(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + C(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = - r_0 r_3$$

$$z - z_0 = (x - x_0) \cos \alpha \operatorname{tg} t + \frac{x - x_0}{-\cos \alpha \sin t} = \frac{y - y_0}{-\sin \alpha \sin t} = \frac{z - z_0}{\cos t}$$

$$y_0 = a \sin \alpha \cos t, \quad x_0 = a \cos \alpha \cos t, \quad \text{и } z_0 = (y - y_0) \sin \alpha \operatorname{tg} t.$$

$$ax - cz = \frac{1}{r} (a^2 - c^2) \quad ; \quad y = \frac{b}{r} \quad ; \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1 - r_0 r_4 \quad z = a \sin t.$$

$$- r_0 r_5 \quad x + y + rz = \xi \quad ; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{r} = - r_0 r_6$$

$$; \quad x + z = r - r_0 r_7 \quad rx + ry - z = r \quad ; \quad \frac{x-1}{r} = \frac{y-1}{r} = \frac{z-r}{-1}$$

$$M_Y \left(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, -\frac{1}{r} \right) ; M_1(-1, 1, -1) - r_0 r_8 \quad x - z = 0 \quad ; \quad y + r = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r \sin t} - r_0 r_9 \quad \operatorname{tg} \varphi = f'_x(x, y) \cos \alpha + f'_y(x, y) \sin \alpha - r_0 r_{10}$$

$$- r_0 r_{11} \quad \frac{x-1}{r} = \frac{y-1}{\xi} = \frac{z-0}{-1} \quad ; \quad rx + \xi y - z - 0 = 0 - r_0 r_{12}$$

$$; \quad z = \frac{\pi}{\xi} - \frac{1}{r} (x - y) - r_0 r_{13} \quad \frac{x}{r} = \frac{y}{\xi} = \frac{z}{1/r} \quad ; \quad rx + \xi y + rz = 1/r_4$$

$$ax + by + cz = 1 - r_0 r_{14} \quad \frac{x-1}{r} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\pi}{\xi}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{r} \quad ; \quad x + y - rz = 0 - r_0 r_{15} \quad \frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}$$

$$- r_0 r_{16} \quad \frac{x-r}{1} = \frac{y-r}{1} = \frac{z-1}{-r} \quad ; \quad x + y + rz = 0 - r_0 r_{17}$$

$$\frac{x \sec \psi \cdot \sec \varphi - a}{bc} = \xi \frac{x}{a} \cos \psi \cdot \cos \varphi + \frac{y}{b} \cos \psi \cdot \sin \varphi + \frac{z}{c} \sin \psi = 1$$

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - r_0 r_{18} = \frac{y \sec \psi \cdot \operatorname{cosec} \varphi - b}{ac} = \frac{z \operatorname{cosec} \psi - c}{ab}$$

$$\frac{x - r \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi} = \frac{y - r \cdot \sin \varphi}{\sin \varphi} = \frac{z - r \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{- \operatorname{tg} \alpha} \quad ; \quad -z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$\frac{x - u \cos v}{a \sin v} = \quad ; \quad ax \sin v - ay \cos v + uz = au \cdot v - 3047$$

$$\frac{rx}{u} - \frac{ry}{u^2} + \frac{z}{u^2} = 2 - 3048 \quad = \frac{y - u \sin v}{-a \cos v} = \frac{z - av}{u}$$

$$; B(\pm 2, \mp 4, \pm 2) \quad ; A(0, \pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2}) - 3049$$

$$z = \pm \frac{c^2}{d} \quad ; \quad y = \pm \frac{b^2}{d} \quad ; \quad x = \pm \frac{a^2}{d} - 3050 \quad C(\pm 4, \mp 2, 0)$$

$$x + 4y + 7z = \pm 21 - 3051 \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ آن در آن که}$$

$$; x = 0 \quad ; \quad 2y^2 + 4z^2 = 4 \quad ; \quad z = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 - xy = 1 - 3052$$

$$\cos \varphi = \frac{2bz}{a \sqrt{a^2 + b^2}} - 3053 \quad \delta < 0, 02 - 3054 \quad y = 0 \quad ; \quad 3x^2 + 4z^2 = 4$$

$$; x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (الف)} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = x + y + z - 3055$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0 \text{ روی دایره } (ب) \quad ; \quad x = y = z = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (ب)}$$

$$x^2 + y^2 = p^2 - 3056 \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} - 3057$$

$$- 3058 \quad 3059 \text{ پوش ندارد} \quad y^2 = 4ax - 3060 \quad y = \pm x - 3061$$

$$y = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2} - 3062 \quad |xy| = \frac{S}{2\pi} - 3063 \quad x \frac{y}{x^2} + y \frac{x}{y^2} = l \frac{y}{x^2}$$

$$y = 0 \text{ (الف)} \quad ; \quad y = 0 \text{ (مکان هندسی نقاط عطف)} \quad ; \quad (ب)$$

$$; \text{ پوش است } ; \quad (ب) \quad ; \quad \vec{y} = 0 \text{ مکان هندسی نقاط خاص (نقاط برگشت) است ;}$$

$$(ت) \quad x = 0 \text{ مکان هندسی نقاط مضاعف است، } x = a \text{ پوش است} \quad - 3064$$

$$x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta + z^2 \sin^2 \gamma - 3065 \quad (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$$

$$- 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma = 1$$

$$|z \pm \sqrt{x^2 + y^2}| = \rho \sqrt{2} - 3066 \quad |xyz| = \frac{V}{\varepsilon \pi \sqrt{2}} - 3067$$

$$- 3068 \quad \left| \frac{x}{x} \frac{y}{y} \right|^2 + \left| \frac{y}{y} \frac{z}{z} \right|^2 + \left| \frac{z}{z} \frac{x}{x} \right|^2 \leq R^2 (x^2 + y^2 + z^2) - 3069$$

$$f(x, y) = 0 + 2(x-1)^2 - 3070 \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (z-z_0)^2$$

$$f(x, y, z) = 2[(x-1)^2 + 3071 \quad - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$$

$$+ (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1) \times$$

$$\times (z-1) + (x-1)^r + (y-1)^r + (z-1)^r - r(x-1)(y-1)(z-1)$$

$$\Delta f(1, -1) = h - rk + (-h^r - r h k + k^r) + (h^r k + h k^r) \quad - ۳۵۸۳$$

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + r[h(Ax + Dy + E) + \quad - ۳۵۸۴$$

$$- ۳۵۸۵ \quad + k(Dx + By + F) + l(Ex + Fy + Cz)] + f(h, k, l)$$

$$1 + \theta(y-1) \quad ; \quad x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_r(1 + \theta(x-1))$$

$$R_r(x, y) = \frac{1}{r} x^y \left[\left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy \right)^r + \quad \text{آن در } (\cdot < \theta < 1)$$

$$+ r \left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy \right) \left(-\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{r}{x} dx dy \right) + \left(\frac{r y}{x^2} dx^2 - \frac{r}{x^2} dx^2 dy \right) \right]$$

$$1 - \frac{1}{r} (x^r + y^r) - \frac{1}{\lambda} (x^r + y^r)^r - ۳۵۸۶ \quad dy = y-1 \quad , \quad dx = x-1 \quad و$$

$$- ۳۵۸۸ \quad \frac{\pi}{2} + x - xy \quad (ب \quad ; \quad 1 - \frac{1}{r} (x^r - y^r)) \quad (الف - ۳۵۸۷$$

$$F(x, y) = \frac{h^r}{r} (f''_{xx} + f''_{yy}) + \quad - ۳۵۸۹ \quad - (xy + xz + yz)$$

$$+ \frac{h^2}{r^2} (f''_{xxx} + f''_{yyy}) + \dots$$

$$- ۳۵۹۱ \quad F(\rho) = f(x, y) + \frac{\rho^r}{r} [f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y)] - ۳۵۹۰$$

$$\Delta_{xy} f(x, y) = hk \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sum_{n=r}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^{m-1} k^{n-m-1}}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right]$$

$$\text{آن در } \quad F(\rho) = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^r} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{rn} \Delta^n f(x, y) - ۳۵۹۲$$

$$1 + mx + ny + \frac{m(m-1)}{r!} x^r + - ۳۵۹۳ \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$+ mnxy + \frac{n(n-1)}{r!} y^r + \dots \quad (|x| < 1, |y| < 1)$$

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} (m+n-1)!}{m!n!} x^m y^n \quad (|x| + |y| < 1) - ۳۵۹۴$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{rn+1}}{m!(rn+1)!} \quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty) - ۳۵۹۵$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^n}{m!(n)!} \quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty) - ۳۵۹۶$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{m+1} y^{n+1}}{(m+1)!(n+1)!} \quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty) - ۳۵۹۷$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^m y^n}{(m)!(n)!} \quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty) - ۳۵۹۸$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2 + y^2)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (x^2 + y^2 < +\infty) - ۳۵۹۹$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{x^m y^n}{m!n!} \quad (|x| < 1, |y| < 1) - ۳۶۰۰$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) y - ۳۶۰۱$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^m (y+1)^n}{m!n!} \quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty) - ۳۶۰۲$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1 + (x-1)] (y-1)^n \quad (-\infty < x < +\infty, 0 < y < 2) - ۳۶۰۳$$

$$z = 1 + [2(x-1) - (y-1)] - [\lambda(x-1)^2 - 1 \cdot (x-1) \times (y-1) + 2(y-1)^2] + \dots - ۳۶۰۴$$

اگر نقطه منفرد است $(0, 0) - ۳۶۰۵$

$a < 0$ ؛ نقطه برگشت است اگر $a = 0$ ؛ نقطه مضاعف است اگر

$a > 0$ $(0, 0) - ۳۶۰۶$ نقطه مضاعف است $(0, 0) - ۳۶۰۷$ نقطه منفرد

است $(0, 0) - ۳۶۰۸$ نقطه منفرد است $(0, 0) - ۳۶۰۹$ نقطه مضاعف

است $(0, 0) - ۳۶۱۰$ نقطه برگشت (نوع دوم) است $(0, 0) - ۳۶۱۱$

نقطه مضاعف است $- ۳۶۱۲$ اگر $a < b < c$ در آنصورت منحنی از یک

بیضی و شاخه بی‌نهایت تشکیل میشود ؛ اگر $a = b < c$ در آنصورت

$A(a, 0)$ نقطه منفرد است ؛ اگر $a < b = c$ در آنصورت $B(b, 0)$

نقطه مضاعف است ؛ اگر $a = b = c$ در آنصورت $A(a, 0)$ نقطه برگشت

است $(0, 0) - ۳۶۱۳$ نقطه مضاعف است $(0, 0) - ۳۶۱۴$ نقطه برگشت

است $(0, 0) - ۳۶۱۵$ نقطه انقطاع است $(0, 0) - ۳۶۱۶$ نقطه زاویه‌دار

است $x + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) - ۳۶۱۷
 $x = 0$ - ۳۶۱۸ نقطهٔ انفصال نوع دوم است $x = 0$ - ۳۶۱۹ نقطهٔ مضاعف
 است $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) - ۳۶۲۰ نقاط برگشت میباشند
 $z_{\min} = 0$ - ۳۶۲۱ بازای $x = 0$ و $y = 1$ نقطهٔ اکسترم ندارد
 - ۳۶۲۳ مینیمم ناآکاید $z = 0$ در نقطه‌های خط $x - y + 1 = 0$
 $z_{\min} = -1$ - ۳۶۲۴ بازای $x = 1$ و $y = 0$ $z_{\max} = 1.08$ بازای
 $x = 2$ ، $y = 3$ مینیمم ناآکاید $z = 0$ بازای $x = 0$ ، $0 < y < 6$ ؛
 ماگزیمم ناآکاید $z = 0$ بازای $x = 0$ ، $-\infty < y < 0$ و $6 < y < +\infty$ ؛
 $z_{\min} = -1$ - ۳۶۲۶ بازای $x = 1$ و $y = 1$ $z_{\min} = -2$ - ۳۶۲۷ بازای
 $x_1 = -1$ ، $y_1 = -1$ و $x_2 = 1$ ، $y_2 = 1$ بازای $x = 0$ ، $y = 0$ ؛
 اکسترم ندارد - ۳۶۲۷ ، ۱ ماگزیمم $z = 0$ بازای $x = 0$ ، $y = 0$ ؛
 مینیمم $z = -1$ بازای $x = \pm \frac{1}{2}$ ، $y = \pm 1$ ؛ زین $z = -1$ بازای
 $x = 0$ ، $y = \pm 1$ و زین $z = -\frac{1}{8}$ بازای $x = \pm \frac{1}{2}$ ، $y = 0$ - ۳۶۲۸
 مینیمم $z = 30$ بازای $x = 0$ ، $y = 2$ - ۳۶۲۹ $z_{\min} = -\frac{ab}{2\sqrt{3}}$
 بازای $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ $z_{\max} = \frac{ab}{2\sqrt{3}}$ ؛ بازای $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $z_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ - ۳۶۳۰ بازای $x = \frac{a}{c}$ ، $y = \frac{b}{c}$ اگر $c > 0$ ؛
 $z_{\min} = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ بازای $x = \frac{a}{c}$ ، $y = \frac{b}{c}$ اگر $c < 0$ ؛ اگر $c = 0$ ؛
 $a^2 + b^2 \neq 0$ اکسترم ندارد $z_{\max} = 1$ - ۳۶۳۱ بازای $x = 0$ و $y = 0$ ؛
 مینیمم $z = 0$ بازای $x = 0$ ، $y = 0$ ؛ زین $z = \frac{1}{2}e^{-2}$ - ۳۶۳۲
 بازای $x = -\frac{1}{4}$ ، $y = -\frac{1}{2}$ - ۳۶۳۳ زین $z = e^3$ بازای $x = 1$ ، $y = -2$ ؛
 ماگزیمم - ۳۶۳۴ $z = e^{-13} \approx 2.26 \times 10^{-6}$ بازای $x = 1$ ، $y = 3$ ؛
 مینیمم $z = -25.01 \approx -25e^{-\frac{1}{52}}$ بازای $x = -\frac{1}{26}$ ، $y = -\frac{3}{26}$ - ۳۶۳۵
 مینیمم $z = 7 - 1.0 \ln 2 \approx 0.385$ ، بازای $x = 1$ ، $y = 2$ - ۳۶۳۶

$$z_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{8} - 3637 \quad y = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi}{3} \text{ بازای } z_{\max} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

$$\text{زین } -3638 \quad x = y = \frac{\pi}{3} \text{ بازای } z_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad ; \quad x = y = \frac{2\pi}{3} \text{ بازای}$$

$$-3639 \quad y = 1, \quad x = 1 \text{ بازای } z = -1 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3}{4} \pi \approx 1,70$$

$$\text{ماکزیمم } ; \quad x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2e}} \approx \pm 0,43 \text{ بازای } z = -\frac{1}{2e} \approx -0,184$$

$$y = \pm 1, \quad x = 0 \text{ سکون } ; \quad x = -y = \pm \frac{1}{\sqrt{2e}} \text{ بازای } z = \frac{1}{2e}$$

$$-3640 \text{ نقاط سکون: } \quad y = 0, \quad x = \pm 1 \text{ و اکستریم ندارد}$$

$$y = \frac{\pi}{12} (-1)^{m+1} + (m-n) \frac{\pi}{2} \quad ; \quad x = \frac{\pi}{12} (-1)^{m+1} + (m+n) \frac{\pi}{2}$$

$$z = m\pi + \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \right) \text{ اکستریم } . \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

اگر m و n از نظر زوج یا فرد بودن متفاوت باشند $(-1)^{m+1} + 2(-1)^n$ (ماکزیمم بازای m فرد و n زوج، مینیمم بازای m زوج و n فرد)؛ اگر m و n از نظر زوج یا فرد بودن یکسان باشند اکستریم ندارد -3641

$$z_{\min} = 0 \text{ بازای } x = 0 \text{ و } y = 0 ; \text{ ماکزیمم ناآکاید } z = e^{-1} \text{ بازای}$$

$$z = 2, \quad y = -2, \quad x = -1 \text{ بازای } u_{\min} = -14 - 3642 \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$z = -1, \quad y = -144, \quad x = 24 \text{ بازای } u = -6913 \text{ مینیمم } -3643$$

$$u_{\max} = \frac{a^y}{\sqrt{y}} - 3645 \quad z = 1, \quad y = 1, \quad x = \frac{1}{y} \text{ بازای } u = 4 \text{ مینیمم } -3644$$

$$\text{بازای } x = y = z = \frac{a}{y} \text{ اکستریم ناآکاید } ; \quad x \neq 0, \quad y = 0$$

$$u = \frac{10a}{4} \sqrt{\frac{a}{16b}} \text{ مینیمم } -3646 \quad x + 2y + 3z \neq a, \quad z \neq 0$$

$$z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 b^y}{4}} \text{ بازای } y = \frac{1}{4} \sqrt[5]{16a^2 b}, \quad x = \frac{1}{2} \sqrt[5]{16a^2 b}$$

$$-3647 \text{ ماکزیمم } u = 4 \text{ بازای } x = y = z = \frac{\pi}{4} ; \text{ مینیمم سرزی } u = 0 \text{ بازای}$$

$$u_{\max} = \left(\frac{2}{n^2 + n + 2} \right)^{\frac{n^2 + n + 2}{2}} \text{ مینیمم } -3648 \quad x = y = z = \pi \text{ و } x = y = z = 0$$

بازای $u = (n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$ - ۳۶۴۹ - مینیمم $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{2}{n^2 + n + 2}$

اعداد -۳۶۵۰ بازای $x_1 = 2^{\frac{1}{n+1}}, x_2 = x_1^2, \dots, x_n = x_1^{n^2}$

$q = \sqrt{\frac{b}{a}}$ بایستی تصاعد هندسی بقدر نسبت $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$

را تشکیل دهند -۳۶۵۱ - مینیمم $z_1 = -2$ و ماگزیم $z_2 = 6$ بازای $x = 1$

$x = y = -(2 + \sqrt{6})$ بازای $z_{\min} = -(4 + 2\sqrt{6}) - 3 \cdot 102$ $y = -1$

$x = y = -(2 - \sqrt{6})$ بازای $z_{\max} = 2\sqrt{6} - 4$ - ۳۶۵۲ - مینیمم ناکید

ماگزیم ناکید $z < 0$ ، $x^2 + y^2 = \frac{2a^2}{\lambda}$ بازای $z = -\frac{a}{2\sqrt{2}}$

$z > 0$ ، $x^2 + y^2 = \frac{2a^2}{\lambda}$ بازای $z = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ $z_{\max} = \frac{1}{4} - 3604$

بازای $z_{\min} = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|ab|} - 3600$ $y = \frac{1}{2}$ ، $x = \frac{1}{2}$

بازای $z_{\max} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|ab|}$ ؛ $y = -\frac{ae}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ، $x = -\frac{be}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

-3606 $e = \text{sgn} ab \neq 0$ که در آن $y = \frac{ae}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ، $x = \frac{be}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

، $z_{\min} = \lambda_1 - 3607$ $y = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$ ، $x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$ بازای $z_{\max} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$

که در آن λ_1 و λ_2 عبارتند از ریشه‌های معادله

$z = 1.06 \frac{1}{4}$ - ۳۶۵۷، ۱ - ماگزیم $\lambda_1 < \lambda_2$ و $(A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = 0$

بازای $z = -0$ ، $x = \pm 1$ ، $y = \pm 4$ ؛ مینیمم $y = \pm 2$ ، $x = \pm 2$

-3608 - اکسترم $z = 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$ بازای $y = -\frac{\pi}{\lambda} + \frac{\pi k}{2}$ ، $x = \frac{\pi}{\lambda} + \frac{\pi k}{2}$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (ماگزیم اگر k زوج باشد و مینیمم اگر k فرد)

(باشد) $u_{\min} = -3 - 3609$ بازای $x = -\frac{1}{3}$ ، $y = \frac{2}{3}$ ، $z = -\frac{2}{3}$

بازای $u_{\max} = 3$ $x = \frac{1}{3}$ ، $y = -\frac{2}{3}$ ، $z = \frac{2}{3}$

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{a}{m+n+p} \quad \text{بازای } u_{\max} = \frac{a^{m+n+p} m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}} - ۳۶۶۰$$

$$u_{\max} = a^{\gamma} \quad ; \quad z = \pm c \quad , \quad y = 0 \quad , \quad x = 0 \quad \text{بازای } u_{\min} = c^{\gamma} - ۳۶۶۱$$

$$\text{بازای } u_{\max} = \left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\gamma} - ۳۶۶۲ \quad z = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad x = \pm a \quad \text{بازای}$$

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{بازای } u_{\min} = -\frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} - ۳۶۶۳ \quad x = y = z = \frac{a}{\gamma}$$

$$y = z = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad , \quad y = -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{و} \quad x = z = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad , \quad z = -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{و}$$

$$z = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{و} \quad x = y = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{بازای } a_{\max} = \frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} \quad ; \quad x = -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{و}$$

$$x = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{و} \quad y = z = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad , \quad y = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{و} \quad x = z = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

$$z = 1 \quad , \quad y = 1 \quad , \quad x = 1 \quad \text{بازاری } u = \gamma \quad \text{مشروط } -۳۶۶۳, ۱$$

$$u_{\min} = \lambda_1 - ۳۶۶۵ \quad x = y = z = \frac{\pi}{\gamma} \quad \text{بازای } u_{\max} = \frac{1}{\lambda} - ۳۶۶۴$$

و $u_{\max} = \lambda_{\gamma}$ که در آن λ_1 و λ_{γ} ریشه‌های معادله

$$\lambda^{\gamma} - \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{c^2} \right) \lambda + \left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2 c^2} + \frac{\cos^2 \beta}{a^2 c^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{a^2 b^2} \right) = 0$$

$$; \quad u_{\min} = \frac{R^{\gamma} (A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)^{\gamma}}{A^{\gamma} + B^{\gamma} + C^{\gamma}} - ۳۶۶۶ \quad \text{میباشند } (\lambda_1 < \lambda_{\gamma})$$

$$\text{بازای } u_{\min} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^{\gamma}} \right)^{-1} - ۳۶۶۷ \quad u_{\max} = R^{\gamma}$$

$$u_{\min} = \frac{a^p}{n^{p-1}} - ۳۶۶۸ \quad x_i = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^{\gamma}} \right)^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$u_{\min} = \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j} \right)^{\gamma} - ۳۶۶۹ \quad x_i = \frac{\alpha}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{بازای}$$

$$x_i = \sqrt{\frac{\alpha_j}{\beta_j}} \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j} \right)^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{بازای}$$

$$u_{\max} = \left(\frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \dots \alpha_n^{\alpha_n} - 3770$$

یازای $\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{x_n}{\alpha_n} = \frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$ - 3771 اکسترمم

$u = \lambda$ از معادله $|a_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$ که در آن $\delta_{ij} = 0$ برای $i \neq j$ و

$\delta_{ii} = 1$ تعیین میشود $\sup z = -2$ ، $\inf z = -0.3775$ - 3776

$\sup z = 1$ ، $\inf z = 0.3777$ $\sup z = 120$ ، $\inf z = -70$ - 3778

$\sup u = 1 + \sqrt{2}$ ؛ $\inf u = -\frac{1}{2} - 3779$ $\sup u = 3.0$ ؛ $\inf u = 0$

$\sup u = e^{-1} \approx 0.37$ ؛ $\inf u = 0.3780$ - 3782 خیر - 3783

مساوی با $\frac{n}{\sqrt{a}}$ است - 3784 اجزا حاصل جمع برابند - 3785 عوامل

$$x_i = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_2} \dots \frac{1}{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}}{\left(\alpha_i \right)^{\frac{1}{\alpha_i}}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ضرب برابر

میباشند که در آن $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ نماهای نظیر توانهاست؛ کمترین مقدار

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \right) \left(\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}} \dots \alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}$$

مجموع

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad \text{که در آن } y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad , \quad x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i - 3786$$

- 3788 $\frac{1}{2} \sqrt[3]{2V}$ ؛ $\sqrt[3]{2V}$ ؛ $\sqrt[3]{2V}$ اندازه‌های وان

که در آن $H = 2R = 2 \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ شعاع سطح استوانه‌ای و H مولد آنست

$$z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n z_i \quad , \quad y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i \quad , \quad x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i - 3789$$

$$N = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i \right)^2}$$

کمترین مجموع مربعات فواصل

برابر است با $n - 2N + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ - ۳۶۹۰ زاویه میل مولد

مخروط نسبت به قاعده آن مساویست با $\arcsin \frac{2}{3}$ - ۳۶۹۱ زاویه میل یال

جانبی هرمها نسبت بقاعدهها مساویست با $\arcsin \frac{2}{3}$ - ۳۶۹۲ اضلاع

مستطیل: $\frac{2p}{3}$ و $\frac{p}{3}$ - ۳۶۹۳ اضلاع مثلث: $\frac{p}{2}$ ، $\frac{2p}{3}$ و $\frac{2p}{3}$

اندازه‌های متوازی السطوح: $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ و $\frac{R}{\sqrt{3}}$ - ۳۶۹۵ ارتفاع

متوازی السطوح مساوی $\frac{1}{3}$ ارتفاع مخروط است - ۳۶۹۶ اندازه‌های متوازی

السطوح: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ و $\frac{2c}{\sqrt{3}}$ - ۳۶۹۸ ارتفاع متوازی السطوح

اگر $h = l \sin \alpha$ اگر $\alpha \geq \arctg \sqrt{2}$ و $h = 0$ اگر

$0 < \alpha < \arctg \sqrt{2}$ - ۳۶۹۸ اندازه‌های متوازی السطوح: a ، b و $\frac{c}{2}$

$$d = \frac{1}{\pm \Delta} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} - ۳۷۰۰ \quad \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} - ۳۶۹۹$$

$$\Delta = \sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2} \quad \text{که در آن} - ۳۷۰۱$$

مجنور نیم محورها $a^2 = \lambda_1$ و $b^2 = \lambda_2$ ریشه‌های معادله $\frac{y}{\epsilon \sqrt{2}}$ - ۳۷۰۲

مجنور نیم محورها $(1 - \lambda A)(1 - \lambda C) - \lambda^2 B^2 = 0$ - ۳۷۰۳

$$\begin{vmatrix} A\lambda - 1 & D\lambda & F\lambda \\ D\lambda & B\lambda - 1 & E\lambda \\ F\lambda & E\lambda & C\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ریشه‌های معادله} \quad a^2 = \lambda_1, b^2 = \lambda_2, c^2 = \lambda_3 - ۳۷۰۴$$

$$\frac{abc}{|C|} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} - ۳۷۰۵ \quad \text{میشاند}$$

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}} - ۳۷۰۷ \quad \text{زاویه تابش برابر است با}$$

$\gamma \arcsin \left(n \sin \frac{a}{\gamma} \right) - \alpha$ زاویه انحراف شعاع برابر است با $\arcsin \left(n \sin \frac{\pi}{\gamma} \right)$

۳۷۰۸ - ضرایب مطلوب a و b از دستگاه معادلات $a[xx] + b[x_1] = [xy]$

مسئله $a[x_1] + bn = [y_1]$ معین میشوند که در آن $[xy] = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ و غیره. مساله

دارای جواب معین است اگر $\sum_{i=1}^n (x_i - x_j)^2 \neq 0$. ۳۷۰۹ -

که در آن $p = \bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha$ ، $\operatorname{tg} \gamma x = \frac{\gamma(\bar{x} \times \bar{y} - \bar{xy})}{[x^2 - (\bar{x})^2] - [y^2 - (\bar{y})^2]}$

غیره مقادیر میانگین میباشد $\bar{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ، $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\Delta_{\min} = \frac{1}{\gamma} ; \quad \epsilon x - \frac{\gamma}{\gamma} - 3710$$

فصل ۷

اگر $F(y) = 1 - 2y$ ؛ $-\infty < y < 0$ اگر $F(y) = 1 - 3711$

بازای $F(y) - 3712$ ؛ $1 < y < +\infty$ اگر $F(y) = -1$ ؛ $0 \leq y \leq 1$

؛ $\frac{\lambda}{3}$ (پ) ؛ 1 (ب) ؛ $\frac{\pi}{2}$ (الف) - 3713 است $y = 0$ منفصل است

۳۷۱۳، ۱ - ۳۷۱۵ - نمیتوان ۳۷۱۶ - نمیتوان $\ln \frac{\gamma e}{1+e}$ (ت)

(الف) - 3818 $F'(x) = 2xe^{-x^2} - e^{-x^2} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy - 3717$

$$; - (e^{\alpha |\sin \alpha|} \sin \alpha + e^{\alpha |\cos \alpha|} \cos \alpha) + \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$; \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b+\alpha} \right) \sin \alpha (b+\alpha) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a+\alpha} \right) \sin \alpha (a+\alpha) \quad (ب)$$

که در آن $f(\alpha, -\alpha) + 2 \int_{\alpha}^{\alpha} f_u(u, v) dx$ (ت) ؛ $\frac{\gamma}{\alpha} \ln(1+\alpha^2)$ (پ)

$$; v = x - \alpha \text{ و } u = x + \alpha$$

$$2\alpha \int_{\alpha^{\gamma}-\alpha}^{\alpha^{\gamma}+\alpha} \sin(y^{\gamma} + \alpha^{\xi} - \alpha^{\gamma}) dy + 2 \int_{\alpha^{\gamma}}^{\alpha^{\gamma}} \sin 2x^{\gamma} \times \cos 2\alpha x dx - \quad (ث)$$

$$F''(x) = 2f(x) + 2xf'(x) - 2\sqrt{1-\alpha} - 2\alpha \int_{\alpha^{\gamma}}^{\alpha^{\gamma}} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^{\gamma} + y^{\gamma} - \alpha^{\gamma}) dy$$

$$x \in (a, b) \text{ اگر } F''(x) = 0 \text{ و } x \in (a, b) \text{ اگر } F''(x) = 2f(x) - 2\sqrt{1-\alpha}$$

$$\Delta^{\gamma} f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + \text{آن در آن } F''(x) = \frac{\Delta^{\gamma} f(x)}{h^{\gamma}} - 2\sqrt{1-\alpha}$$

$$-2\sqrt{1-\alpha} \quad \xi x - \frac{11}{\gamma} - 2\sqrt{1-\alpha} \quad F^{(n)}(x) = (n-1)! f(x) - 2\sqrt{1-\alpha} + f(x)$$

$$\frac{dF}{dk} = \frac{E}{k(1-k^{\gamma})} - \frac{F}{k} \quad ; \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E-F}{k} - 2\sqrt{1-\alpha} \quad (تقریباً) \quad 0,924 + 0,428x$$

$$F''_{xy}(xy) = x(2-2y^{\gamma})f(xy) + \frac{x}{y^{\gamma}} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^{\gamma}y(1-y^{\gamma})f'(xy) - 2\sqrt{1-\alpha}$$

$$|a| > 1 \text{ اگر } \pi \ln a^{\gamma} \quad ; \quad |a| \leq 1 \text{ اگر } 0 - 2\sqrt{1-\alpha} \quad \pi \ln \frac{|a|+|b|}{\gamma} - 2\sqrt{1-\alpha}$$

$$-2\sqrt{1-\alpha} \quad \pi \arcsin a - 2\sqrt{1-\alpha} \quad \frac{\pi}{\gamma} \operatorname{sgn} a \ln(1+|a|) - 2\sqrt{1-\alpha}$$

$$; \arcsin \operatorname{tg} \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)} \quad (\text{الف} - 2\sqrt{1-\alpha}) \quad \ln \frac{b+1}{a+1} - 2\sqrt{1-\alpha} \quad \frac{\pi}{\gamma} \ln(1+\sqrt{2})$$

$$\max(p, q) > 1 - 2\sqrt{1-\alpha} \quad a \geq 0 - 2\sqrt{1-\alpha} \quad \frac{1}{\gamma} \ln \frac{b^{\gamma}+2b+2}{a^{\gamma}+2a+2} \quad (\text{ب})$$

$$n > \frac{1}{\gamma} \text{ و } n < 0 - 2\sqrt{1-\alpha} \quad p < 1 - 2\sqrt{1-\alpha} \quad \left| \frac{p-1}{q} \right| < 1 - 2\sqrt{1-\alpha}$$

$$a = -\frac{2n-1}{\gamma} \pi \text{ بازای } a > 0 \text{ بازای } - 2\sqrt{1-\alpha} \quad p > \frac{1}{\gamma} - 2\sqrt{1-\alpha}$$

بازای همگراست $(n=1, 2, \dots)$ بازای $n > 4$ همگراست $-2\sqrt{1-\alpha}$ بازای $n < 2$ همگراست $-2\sqrt{1-\alpha}$

$p > 1$ همگراست $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت؛ ب) همگرای نایکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$

همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای نایکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$

همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$

همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$

همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$

همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$

همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$

همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$ همگرای یکنواخت $-2\sqrt{1-\alpha}$

۳۷۶۶- الف) همگرای یکنواخت؛ ب) همگرای نایکنواخت ۳۷۶۷- همگرای یکنواخت ۳۷۶۸- همگرای نایکنواخت ۳۷۶۹- همگرای یکنواخت

۳۷۷۰- همگرای یکنواخت ۳۷۷۲- خیر $\frac{\sqrt{\pi}}{2} - ۳۷۷۶$ ۳۷۷۶, ۲- ۱

۳۷۷۸- $a = \pm 1$ ۳۷۷۹- پیوسته ۳۷۸۰- پیوسته ۳۷۸۱- پیوسته

۳۷۸۲- پیوسته ۳۷۸۳- بازای $\alpha = 0$ منفصل است ۳۷۸۴- $\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}} - ۳۷۸۴$

۳۷۸۵- $\frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{-(n+\frac{1}{2})} - ۳۷۸۸$ $\ln \frac{b}{a} - ۳۷۹۰$ $\ln \frac{b}{a} - ۳۷۹۲$

۳۷۹۱- $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{a} - ۳۷۹۳$ $\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b} - ۳۷۹۴$

۳۷۹۴- $\ln \frac{(2\alpha)^{2\alpha} (2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}} - ۳۷۹۵$ $\text{arc tg } \frac{\beta}{m} - \text{arc tg } \frac{\alpha}{m} (m \neq 0) - ۳۷۹۵$

۳۷۹۶- $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2 + m^2}{\alpha^2 + m^2} - ۳۷۹۶$ $-\pi (1 - \sqrt{1-a^2}) - ۳۷۹۷$

۳۷۹۸- $\pi \ln \frac{1 + \sqrt{1-a^2}}{2} - ۳۷۹۸$ $\frac{\pi}{2} \text{sgn } \alpha (1 + |\alpha| - \sqrt{1+\alpha^2}) - ۳۷۹۹$

۳۸۰۰- $\frac{\pi}{|\beta|} \ln (|\alpha| + |\beta|) (\beta \neq 0) - ۳۸۰۰$ $\frac{\pi}{2} \ln \frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta} (\alpha > 0, \beta > 0) - ۳۸۰۱$

۳۸۰۲- $\frac{\gamma \pi}{\gamma} [\alpha \beta (\alpha + \beta) + \alpha^\gamma \ln \alpha + \beta^\gamma \ln \beta - (\alpha^\gamma + \beta^\gamma) \ln (\alpha + \beta)] - ۳۸۰۲$

۳۸۰۳- $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{ac-b^2}{a}} - ۳۸۰۳$ $\frac{\sqrt{\pi}}{2} - ۳۸۰۴$ ($\alpha > 0, \beta > 0$)

۳۸۰۵- $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{2a}} - ۳۸۰۶$ $\frac{(a+2b^2)a_1 - 2abb_1 + 2a^2c_1}{2a^2}$ $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}} - ۳۸۰۵$

۳۸۰۷- $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\gamma a} - ۳۸۰۷$ $\sqrt{\pi} (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}) - ۳۸۰۸$ $- ۳۸۰۹$

۳۸۱۰- $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{2a}} - ۳۸۱۰$ $\frac{b\sqrt{\pi}}{\xi a \sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{2a}} - ۳۸۱۱$ $(-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma^{n+1}} \times \frac{d^{\gamma n}}{db^{\gamma n}} (e^{-b^2}) - ۳۸۱۱$

۳۸۱۲- $\frac{\pi}{2} \text{sgn } \beta - ۳۸۱۲$ $۲k\pi$ در نقاط $x > 0$. بازای تابع فرد است. ۳۸۱۲, ۱

مینیم و در نقاط $(2k-1)\pi$ ماگزیمم است که در آن $k=1, 2, 3, \dots$

سجانب‌ها: $y = \frac{\pi}{\gamma}$ برای $x \rightarrow +\infty$ و $y = -\frac{\pi}{\gamma}$ برای $x \rightarrow -\infty$

$$\frac{1}{\gamma} \ln \left| \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right| - \frac{\pi}{\gamma} \frac{|\beta|}{\alpha} - \sqrt{\pi a} - \frac{\pi}{\gamma} \text{sgn } \alpha$$

$$\frac{\pi}{\gamma} \text{sgn } \alpha \quad \text{اگر } |\alpha| > |\beta| \quad \frac{\pi}{\gamma} \text{sgn } \alpha \quad \text{اگر } |\alpha| = |\beta| \quad \frac{\pi}{\gamma} \text{sgn } \alpha$$

$$\frac{\pi}{\gamma} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| - \frac{\pi}{\gamma} - \frac{\gamma \pi}{\alpha} |\alpha| - \frac{\pi}{\gamma} |\alpha|$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma} \text{arc tg } \frac{\alpha + \beta}{k} - \frac{\alpha - \beta}{\gamma} \text{arc tg } \frac{\alpha - \beta}{k} + \frac{k}{\gamma} \times \frac{\pi}{\gamma}$$

$$D(x) = \frac{1}{\gamma} \quad \text{اگر } |x| < 1 \quad D(x) = 1 - \frac{\pi}{\gamma} \times \ln \frac{k^\gamma + (\alpha - \beta)^\gamma}{k^\gamma + (\alpha + \beta)^\gamma}$$

$$\frac{\pi}{\gamma} \text{sgn } a \cos ab \quad \text{اگر } |x| > 1 \quad D(x) = 0 \quad \text{اگر } x = \pm 1$$

$$\frac{\pi}{\gamma} \text{sgn } \alpha e^{-|\alpha|} - \frac{\pi}{\gamma} e^{-|\alpha|} \quad \pi \text{sgn } a \sin ab$$

$$\frac{\pi(1+|\alpha|)}{\gamma} e^{-|\alpha|} - \frac{\pi}{\gamma} (1 - e^{-\gamma})$$

$$\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \quad \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} - \frac{\pi}{\sqrt{ac - b^\gamma}} \cos \frac{b\alpha}{a} e^{-\frac{|\alpha|}{a} \sqrt{ac - b^\gamma}}$$

$$\sqrt{\pi} \cos \left(a^\gamma + \frac{\pi}{\gamma} \right) - \sqrt{\frac{\pi}{|\alpha|}} \sin \left(\frac{ac - b^\gamma}{a} + \frac{\pi}{\gamma} \text{sgn } a \right)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma \rho \sqrt{\rho}} \quad \left(\text{ب} : \frac{n!}{\rho^{n+1}} \right) \quad \sqrt{\pi} \sin \left(a^\gamma + \frac{\pi}{\gamma} \right)$$

$$\frac{p}{\rho^{\gamma+1}} \quad \left(\text{ث} : \frac{1}{(\rho + a)^\gamma} \right) \quad \text{اگر } p > \alpha \quad \frac{1}{\rho - \alpha}$$

$$\frac{a \sqrt{\pi}}{\gamma \rho \sqrt{\rho}} e^{-\frac{a^\gamma}{\rho}} \quad \left(\text{ج} : \ln \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \right)$$

$$\frac{1}{\gamma} e^{-\frac{a^\gamma}{\rho}} \cos ax \quad \left(\text{ت} : e^{\gamma ax + a^\gamma} \right) \quad \left(\text{ب} : x^\gamma + \frac{1}{\gamma} \right)$$

$$\frac{\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{\sigma \sqrt{\gamma \pi}} e^{-\frac{x^\gamma}{\gamma \sigma^\gamma}} \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^\gamma + \sigma_2^\gamma} \quad \text{که در آن } \varphi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\gamma \pi}} e^{-\frac{x^\gamma}{\gamma \sigma^\gamma}}$$

$$\frac{\gamma \pi}{\gamma \sqrt{\gamma}} - \frac{\pi}{\gamma \sqrt{\gamma}} - \frac{\pi a^\gamma}{\gamma}$$

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} - \text{ЭЛЭГ} \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma \sqrt{\pi}} - \text{ЭЛЭЛ} \qquad \frac{\pi}{\sqrt{\pi} \sqrt{\pi}} - \text{ЭЛЭВ}$$

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} (\cdot < m < n) - \text{ЭЛОГ} \qquad \frac{(\sqrt{n-1})!! \sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}} - \text{ЭЛО} \cdot$$

$$B(n-m, m) (\cdot < m < n) - \text{ЭЛОУ}$$

$$\frac{a^{-p}}{n} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} B\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right) (\cdot < \frac{m+1}{n} < p) - \text{ЭЛОУ}$$

$$\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1} (b+c)^{m+1}} B(m+1, n+1) (m > -1, n > -1) - \text{ЭЛОЭ}$$

$$- \text{ЭЛОГ} \qquad \frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{n}\right) (n < \cdot \leq n > 1) - \text{ЭЛЛО}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{\pi} \cos \frac{m\pi}{\sqrt{\pi}}} (|n| < 1) - \text{ЭЛОУ} \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} B\left(\frac{m+1}{\sqrt{\pi}}, \frac{n+1}{\sqrt{\pi}}\right) (m > -1, n > -1)$$

$$\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) (n > \cdot) - \text{ЭЛОУ} \qquad \frac{\sqrt{\pi}^{-1}}{(1-k\sqrt{\pi})^{\frac{n}{\sqrt{\pi}}}} B\left(\frac{n}{\sqrt{\pi}}, \frac{n}{\sqrt{\pi}}\right) (n > \cdot) - \text{ЭЛОЛ}$$

$$\Gamma(p+1) (p > -1) - \text{ЭЛГГ} \qquad \frac{1}{|n|} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \left(\frac{m+1}{n} > \cdot\right) - \text{ЭЛГ} \cdot$$

$$- \frac{\pi^{\sqrt{\pi}} \cos p\pi}{\sin^{\sqrt{\pi}} p\pi} (\cdot < p < 1) - \text{ЭЛГУ} \qquad \frac{d}{dp} \left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}} \right] (p > -1) - \text{ЭЛГУ}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \pi^{\sqrt{\pi}} - \text{ЭЛГЭ, Г} \qquad \pi^{\sqrt{\pi}} \frac{1 + \cos^{\sqrt{\pi}} p\pi}{\sin^{\sqrt{\pi}} p\pi} (\cdot < p < 1) - \text{ЭЛГЭ}$$

$$\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{p\pi}{\sqrt{\pi}}}{\operatorname{tg} \frac{q\pi}{\sqrt{\pi}}} \right| (\cdot < p < 1, q < 1) - \text{ЭЛГ} \cdot \qquad \frac{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\pi}} - \text{ЭЛГЭ, У}$$

$$\ln \sqrt{\sqrt{\pi}} - \text{ЭЛГА} \qquad \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{\sqrt{\beta}} - \text{ЭЛГВ} \qquad \pi \operatorname{ctg} p\pi - \text{ЭЛГГ}$$

$$\frac{1}{\xi n} - \text{ЭЛГД} \qquad \frac{1}{\pi} \left(1 + \ln \frac{\pi}{\sqrt{\pi}}\right) - \text{ЭЛГУ} \cdot \qquad \ln \sqrt{\sqrt{\pi}} + a (\ln a - 1) - \text{ЭЛГД}$$

$$\frac{\pi a^{m-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(m) \sin \frac{m\pi}{\sqrt{\pi}}} (a > \cdot) - \text{ЭЛГВ} \qquad \frac{\pi a^{m-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{\sqrt{\pi}}} (a > \cdot) - \text{ЭЛГВ}$$

$$\frac{\gamma a^\gamma}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{n}\right)} - \text{F. 11. 1.} \quad aB\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma n}\right) - \text{F. 9. 1. 1.}$$

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda - \text{F. 11. 1.}$$

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} \sin \lambda x d\lambda - \text{F. 11. 1. 1.}$$

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda (x-a) - \sin \lambda (x-b)}{\lambda} d\lambda - \text{F. 11. 1. 1.}$$

$$f(x) = \frac{\gamma h}{\pi a} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos a\lambda}{\lambda^\gamma} \cos \lambda x d\lambda - \text{F. 11. 1. 1.}$$

$$\frac{1}{a^\gamma + x^\gamma} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \cos \lambda x d\lambda - \text{F. 11. 1. 1.}$$

$$\frac{x}{a^\gamma + x^\gamma} = \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \sin \lambda x d\lambda - \text{F. 11. 1. 1.}$$

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \pi}{1 - \lambda^\gamma} \sin \lambda x d\lambda - \text{F. 11. 1. 1.}$$

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\lambda \pi}{\gamma}}{1 - \lambda^\gamma} \cos \lambda x d\lambda - \text{F. 11. 1. 1.}$$

$$f(t) = \frac{\gamma A \omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{\gamma \pi n \lambda}{\omega}}{\lambda^\gamma - \omega^\gamma} \sin \lambda t d\lambda - \text{F. 11. 1. 1.}$$

$$f(x) = \frac{\gamma \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^\gamma + \alpha^\gamma} d\lambda - \text{F. 11. 1. 1.}$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(\lambda - \beta)^\gamma + \alpha^\gamma} + \frac{1}{(\lambda + \beta)^\gamma + \alpha^\gamma} \right] \cos \lambda x d\lambda - \text{F. 11. 1. 1.}$$

$$f(x) = \frac{\alpha\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{[(\lambda - \beta)^\gamma + \alpha^\gamma][(\lambda + \beta)^\gamma + \alpha^\gamma]} d\lambda \quad - ٣٨٩٢$$

$$e^{-x^\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^\gamma}{x}} \cos \lambda x d\lambda \quad - ٣٨٩٣$$

$$xe^{-x^\gamma} = \frac{1}{\gamma \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\frac{\lambda^\gamma}{x}} \sin \lambda x d\lambda \quad - ٣٨٩٤$$

$$e^{-x} = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1 + \lambda^\gamma} d\lambda \quad (0 \leq x < +\infty) \quad (\text{الف} - ٣٨٩٥)$$

$$e^{-x} = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{1 + \lambda^\gamma} d\lambda \quad (0 < x < +\infty) \quad (\text{ب})$$

$$F(x) = -i \sqrt{\frac{\Lambda}{\pi}} \frac{\alpha x}{(x^\gamma + \alpha^\gamma)^\gamma} \quad - ٣٨٩٧ \quad F(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{\alpha}{x^\gamma + \alpha^\gamma} \quad - ٣٨٩٦$$

$$F(x) = e^{-\frac{x^\gamma + \alpha^\gamma}{\gamma}} \operatorname{ch} \alpha x \quad - ٣٨٩٩ \quad F(x) = e^{-\frac{x^\gamma}{\gamma}} \quad - ٣٨٩٨$$

$$\psi(y) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{y}{1 + y^\gamma} \quad (y \geq 0) \quad (\text{ب} ; \varphi(y) = e^{-y} \quad (y \geq 0) \quad (\text{الف} - ٣٩٠٠)$$

فصل ٨

$$\bar{S} = \frac{\xi_0}{\gamma} + \frac{11}{n} + \frac{0}{\gamma n^\gamma} ; \underline{S} = \frac{\xi_0}{\gamma} - \frac{11}{n} + \frac{0}{\gamma n^\gamma} \quad - ٣٩٠٢ \quad \frac{1}{\xi} - ٣٩٠١$$

$$2\pi(\gamma - \sqrt{\gamma\xi}) \approx 13,20 \quad \text{مقدار دقيق} : 9,88 - ٣٩٠٣ \quad 13 \frac{1}{3}$$

$$1 - ٣٩٠٦ \quad \delta < 0,00022 - ٣٩٠٥ \quad 0, \xi \quad \text{مقدار دقيق} : 0, \xi - ٣٩٠٤$$

$$I = F(A, B) - F(A, b) \quad - ٣٩١٠ \quad \frac{\pi a^\gamma}{\gamma} - ٣٩٠٨ \quad \frac{1}{\xi_0} - ٣٩٠٧$$

$$-F(a, B) + F(a, b) \quad (\text{الف} - ٣٩١٢) \quad (\text{ب} \text{ منفي} ; \text{ب} \text{ منفي} ; \text{ب} \text{ مثبت})$$

$$a^\gamma + b^\gamma + \frac{R^\gamma}{\gamma} \quad - ٣٩١٥ \quad 1,96 < I < 2 - ٣٩١٤ \quad \frac{1}{\xi} - ٣٩١٣$$

$$\int dx \int_x^x f(x, y) dy = \int dy \int_y^y f(x, y) dx - 2917$$

$$\int_{-y}^y dx \int_{\frac{1}{x}}^1 f(x, y) dy = \int_{-y}^y dy \int_{-y}^y f(x, y) dx - 2918$$

$$\int dx \int_x^{x+1} f(x, y) dy = \int dy \int_y^y f(x, y) dx + \int dy \int_{y-1}^y f(x, y) dx - 2919$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-V_{1-x^2}}^{V_{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-V_{1-y^2}}^{V_{1-y^2}} f(x, y) dx - 2920$$

$$\int_{-\frac{1}{y}}^{\frac{1}{y}} dx \int_{-\sqrt{\frac{1}{x}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{x}-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-y}^y dx \int_{-V_{y-y^2}}^{V_{y-y^2}} f(x, y) dx - 2921$$

$$- 2922 \quad \int_{-1}^1 x \int_y^y f(x, y) dy = \int_{-y}^y dy \int_{-y}^y f(x, y) dx - 2923$$

$$\int_{-y}^{-1} dx \int_{-V_{\xi-x^2}}^{V_{\xi-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \left\{ \int_{-V_{\xi-x^2}}^{-V_{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{V_{1-x^2}}^{V_{\xi-x^2}} f(x, y) dy \right\} + \int_y^y x \int_{-V_{\xi-x^2}}^{V_{\xi-x^2}} f(x, y) dy$$

$$\int dy \int_{\frac{y}{y}}^y f(x, y) dx + \int dy \int_{\frac{y}{y}}^y f(x, y) dx - 2924$$

$$\int_{-1}^1 dy \int_{-y\sqrt{1+y}}^{y\sqrt{1+y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-y\sqrt{1+y}}^{-y} f(x, y) dx - 2925$$

$$\int dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx - 2926$$

$$\int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx - 2927$$

$$\int dy \int_{y-1}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx - 2928$$

$$\int dy \left\{ \int_{\frac{y}{\sqrt{a}}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{ya} f(x, y) dx \right\} + - 2929$$

$$\int dy \int_y^e f(x, y) dx - 2930 \quad + \int_a^{ya} dy \int_{\frac{y}{\sqrt{a}}}^{ya} f(x, y) dx$$

$$\int dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx - 2931$$

$$\frac{a^2}{r} - 2932 \quad \left(r \sqrt{r} - \frac{\Lambda}{r} \right) a \sqrt{a} - 2933 \quad \frac{p^0}{r1} - 2934$$

$$\int d\varphi \int_0^a r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr - 2935 \quad \frac{r \circ \pi a^2}{12} - 2936 \quad 1 \varepsilon a^2 - 2937$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr - 2938$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{|a|}^{|b|} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr - 2939$$

$$- ۳۹۴۱ \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\frac{1}{\sqrt{r}}} \operatorname{cosec}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr - ۳۹۴۰$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\frac{a}{\sin \varphi}} rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr +$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr$$

- ۳۹۴۲ در صورتیکه حوزه انتگرال

گیری به دو دایره متحد المركز بمركز مبدا مختصات و دو شعاع دارای ابتدا

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\frac{1}{\cos \varphi}} rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr + - ۳۹۴۳$$

در مبدا مختصات محدود باشد

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\frac{1}{\sin \varphi}} rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\frac{1}{\sqrt{r}}} r dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi +$$

$$+ \int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\frac{1}{\sqrt{r}}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\frac{1}{\sqrt{r}}} \operatorname{cosec}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) rf(\cos \varphi, r \sin \varphi) dr = - ۳۹۴۴$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\frac{1}{\sqrt{r}}} r dr \int_{\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{r\sqrt{r}}}^{\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{r\sqrt{r}}} t(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$$

$$\int_{\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{\frac{r}{\gamma}} rf(r) dr = \frac{\pi}{\gamma} \int_{\frac{r}{\gamma}}^{\frac{r}{\gamma}} rf(r) dr + -\gamma\epsilon\epsilon\epsilon$$

-\gamma\epsilon\epsilon\epsilon

$$+ \int_{\frac{r}{\gamma}}^{\frac{r}{\gamma}} \left(\frac{\pi}{\gamma} - \arccos \frac{r}{r} \right) rf(r) dr$$

$$\int_{\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} d\varphi \int_{\frac{\sin \varphi}{\cos \gamma \varphi}}^{\frac{1}{\cos \varphi}} rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_{\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} r dr \times$$

$$\times \int_{\arcsin \frac{\sqrt{1+\epsilon r^{\gamma}-1}}{\gamma r}}^{\arcsin \frac{\sqrt{1+\epsilon r^{\gamma}-1}}{\gamma r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_{\frac{r}{\gamma}}^{\frac{r}{\gamma}} r dr \times$$

$$\times \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{\sqrt{1+\epsilon r^{\gamma}-1}}{\gamma r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} d\varphi \int_{\frac{a}{\sqrt{\cos \gamma \varphi}}}^{a \sqrt{\cos \gamma \varphi}} rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_{-\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} r dr \times -\gamma\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(\varphi, r) d\varphi - \gamma\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon \times \int_{-\frac{1}{\gamma} \arccos \frac{r^{\gamma}}{a^{\gamma}}}^{\frac{1}{\gamma} \arccos \frac{r^{\gamma}}{a^{\gamma}}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} dr \int_{\frac{1}{\gamma} \arcsin \frac{r^{\gamma}}{a^{\gamma}}}^{\frac{\pi}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \arcsin \frac{r^{\gamma}}{a^{\gamma}}} f(\varphi, r) d\varphi - \gamma\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon$$

$$\pi \int_0^1 r f(r) dr - 2901 \qquad \int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r) d\varphi - 2900$$

$$\pi \int_0^1 r f(r) dr + \int_0^{\sqrt{y}} \left(\pi - \varepsilon \arccos \frac{1}{r} \right) r f(r) dr - 2902$$

$$-2903 \quad -\pi y - 2900 \quad \frac{\pi a^{\sqrt{y}}}{r} - 2904 \quad \frac{1}{y} \int_{-\frac{\pi}{y}}^{\frac{\pi}{y}} f(\operatorname{tg} \varphi) \cos^{\sqrt{y}} \varphi d\varphi - 2902$$

$$\frac{r}{r} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{r}{y}} \quad \varepsilon \frac{r}{0} \times \frac{b^{\sqrt{y}} + b(b+h) + (b+h)^{\sqrt{y}} + (r b+h) \sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)} (\sqrt{a} + \sqrt{a+h}) (\sqrt{b} + \sqrt{b+h})}$$

$$\frac{1}{r} \int_0^{\sqrt{y}} du \int_{-u}^{\varepsilon-u} f\left(\frac{u+v}{r}, \frac{u-v}{r}\right) dv - 2908 \quad \int_a^b u du \int_a^{\beta} f(u, uv) dv - 2905$$

$$\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{y}} \sin^{\sqrt{y}} v \cos^{\varepsilon} v dv \quad \int_0^a u f(u \cos^{\varepsilon} v, u \sin^{\varepsilon} v) du - 2909$$

$$u = xy, \quad v = x - y - 2961$$

$$r \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^{\sqrt{y}}} f(u \sqrt{a^{\sqrt{y}} + b^{\sqrt{y}} + c}) du - 2962 \quad \int_{-1}^1 f(u) du - 2962$$

$$\frac{r}{r} \pi ab - 2963 \quad \frac{\varepsilon}{r} - 2964 \quad \frac{\pi}{r} - 2965 \quad \ln r \int_0^{\sqrt{y}} f(u) du - 2966$$

$$1 \frac{r y}{128} - \ln r - 2967 \quad 0 \varepsilon r \frac{11}{10} - 2968 \quad \frac{\pi}{\sqrt{r}} - 2969$$

$$\frac{0}{r} + \frac{\pi}{\varepsilon} - 2970 \quad \frac{9}{17} \pi - 2971 \quad 2\pi - 2972$$

$$r - 2973 \quad \frac{\varepsilon}{r} \pi + \ln \frac{1+\sqrt{r}}{\sqrt{r}} - 2974$$

$$\frac{r}{\varepsilon} F(t) - 2975 \quad f(\cdot, \cdot) - 2976 \quad \frac{\varepsilon}{r} (\varepsilon - r \sqrt{r} + \varepsilon \sqrt{r}) - 2977$$

$$\iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy - 398. \quad t > 0 \text{ گز}$$

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \gamma \ln \gamma\right) a^\gamma - 399 \quad F'(t) = \int_0^\pi t f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) d\varphi - 398.1$$

$$\frac{\gamma \sqrt{\gamma - \pi}}{\gamma} a^\gamma - 398.1 \quad \pi a^\gamma - 398.1 \quad \frac{\gamma}{\gamma} (p+q) \sqrt{pq} - 398.0$$

$$- 399. \quad \frac{\pi a^\gamma}{\xi} - 398.9 \quad \frac{\pi}{\gamma} + \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \ln(1 + \sqrt{\gamma}) - 398.1$$

$$- 399. \quad \frac{\pi ab}{\xi} \left(\frac{a^\gamma}{h^\gamma} + \frac{b^\gamma}{k^\gamma}\right) - 399.1 \quad a^\gamma \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} + \arcsin \frac{\sqrt{1-\xi}}{\lambda}\right)$$

$$\frac{ab}{\gamma} \left(\frac{a^\gamma}{h^\gamma} + \frac{b^\gamma}{k^\gamma}\right) - 399. \quad \frac{ab}{\gamma} \left[\frac{\gamma \pi}{\gamma \sqrt{\gamma}} \left(\frac{a^\xi}{h^\xi} + \frac{b^\xi}{k^\xi}\right) + \frac{a^\gamma b^\gamma}{h^\gamma k^\gamma} \right]$$

$$\frac{ab}{\gamma} - 399.0 \quad \frac{1}{127.0} \frac{(ab)^\alpha}{c^\lambda} - 399.1 \quad \frac{a^\xi b^\xi (ak + \gamma bh)}{\gamma h^\gamma (ak + bh)^\gamma} - 399.1$$

$$\frac{\xi}{\gamma} (q-p)(s-r) - 399.1 \quad \frac{a^\gamma}{\gamma} \ln \gamma - 399. \quad \frac{(\beta-a)(b^\gamma - a^\gamma)}{\gamma(\alpha+1)(\beta+1)} - 399.1$$

$$\frac{q-p}{(p+1)(q+1)} \times - 399.1, \gamma \quad \frac{1}{10} (b^\alpha - a^\alpha)(c^{-\gamma} - d^{-\gamma}) - 399.1, 1$$

$$\frac{10}{10.1} ab - 399. \quad \times \left(\frac{q+1}{b^{q-p}} - \frac{q+1}{a^{q-p}}\right) \left(c^{-\frac{p+1}{q-1}} - d^{-\frac{p+1}{q-1}}\right)$$

$$\frac{c^\gamma}{\gamma} (\sqrt{1-\gamma}) \arcsin \frac{1}{\gamma} - \xi \dots \quad \frac{189}{17} \left(\arcsin \frac{1}{\gamma} + \frac{12}{20}\right) ab - 399.1$$

$$\frac{c^\gamma}{\xi} [(v_\gamma - v_1)(\operatorname{sh} \gamma u_\gamma - \operatorname{sh} \gamma u_1)] - \xi \dots \gamma \quad \frac{\pi}{|\delta|} - \xi \dots 1$$

$$\frac{\gamma \pi}{\gamma \sqrt{\gamma}} - \xi \dots \xi \quad \frac{\gamma}{\gamma} \pi a^\gamma - \xi \dots \gamma \quad - (u_\gamma - u_1)(\sin \gamma v_\gamma - \sin \gamma v_1)]$$

$$\pi - \xi \dots 1. \quad \frac{11}{10} - \dots 9 \quad \frac{\pi R^\gamma a}{\xi} - \frac{\gamma}{\gamma} R^\gamma - \xi \dots 11 \quad \frac{0}{\gamma} - \xi \dots \gamma$$

$$\frac{\xi}{\gamma - \sqrt{\pi}} \Gamma^\gamma \left(\frac{\gamma}{\xi}\right) a^\gamma - \xi \dots 13 \quad \frac{17}{17} - \gamma \ln \gamma - \xi \dots 17 \quad \pi - \xi \dots 11$$

$$\frac{\pi a^\gamma}{\lambda} - \xi \dots 17 \quad \frac{17}{9} a^\gamma - \xi \dots 17 \quad \frac{\xi 0}{22} \pi - \xi \dots 10 \quad \frac{\pi}{\lambda} - \xi \dots 11$$

$$\frac{\pi}{\lambda} - \xi \cdot \gamma \cdot \quad \gamma a^{\gamma} c \frac{(\beta - a)(\pi - \gamma)}{\pi^{\gamma}} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \pi(1 - e^{-R^{\gamma}}) - \xi \cdot \gamma \cdot \lambda$$

$$\frac{\xi}{\gamma} \pi abc (\gamma \sqrt{\gamma} - 1) - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \frac{1}{\gamma} \pi abc (\gamma - \sqrt{\gamma}) - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma$$

$$- \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \frac{abc}{\gamma} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \frac{\gamma}{\gamma} \pi abc - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \frac{\gamma \pi abc}{\lambda} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma$$

$$\frac{\gamma}{\gamma} a^{\xi} - \xi \cdot \gamma \cdot \lambda \quad \frac{\pi(b^{\gamma} - a^{\gamma})}{\gamma} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \frac{\gamma}{\gamma} abc (\gamma \pi + \gamma \cdot - \gamma \sqrt{\gamma})$$

$$\frac{\lambda \circ}{\gamma \circ \gamma} \pi abc - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \frac{\lambda}{\gamma \circ} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \frac{a^{\gamma} c}{\pi} \ln \frac{\beta}{a} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \frac{\gamma}{\xi} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma$$

$$(n - m)(e^{-1} - e^{-\gamma}) a^{\gamma} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma, 1 \quad \frac{\pi^{\xi} a^{\gamma} c}{\gamma \lambda} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma$$

$$\frac{abc}{\gamma m + n} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{\gamma}{n}\right)} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \frac{abc}{\gamma n^{\gamma}} \times \frac{\Gamma^{\gamma}\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{n}\right)} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma$$

$$\lambda a^{\gamma} \arcsin \frac{b}{a} - \xi \cdot \gamma \cdot \lambda \quad \gamma a^{\gamma} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \frac{\gamma}{\gamma} \pi a^{\gamma} (\gamma \sqrt{\gamma} - 1) - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma$$

$$\frac{\pi a^{\gamma}}{\gamma} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \pi \sqrt{\gamma} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \lambda a^{\gamma} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma$$

$$- \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad - \frac{\gamma \pi}{\gamma} + \frac{\gamma \sqrt{\gamma}}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma}{\xi} \ln \gamma\right) + \frac{\lambda}{\gamma} \arctg \frac{1}{\sqrt{\gamma}} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma$$

$$\frac{\pi}{\gamma} [\gamma \sqrt{\gamma} + \ln(\gamma + \sqrt{\gamma})] - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma, 1 \quad \gamma a^{\gamma} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \frac{a^{\gamma}}{\gamma} (\gamma \cdot - \gamma \pi)$$

$$\frac{1}{\gamma} abc \left(\frac{1}{a^{\gamma}} + \frac{1}{b^{\gamma}}\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{a^{\gamma}} + \frac{1}{b^{\gamma}} + \frac{1}{c^{\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma}} - \frac{1}{c^{\gamma}}\right] - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma, \gamma$$

$$\frac{\pi}{\gamma} \ln(e + e^{-1}) - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma, \xi \quad \frac{\xi}{\gamma} ab (\gamma \sqrt{\gamma} - 1) \arctg \sqrt{\frac{a}{b}} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma, \gamma$$

$$V = \frac{\lambda \pi}{\sqrt{\gamma}} a^{\gamma} \quad ; S = \xi \pi (\gamma + \gamma \sqrt{\gamma}) a^{\gamma} - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma$$

النهارات و ψ_1 و ψ_2 عرض مدارات و R شعاع کره است .
 که در آن φ_1 و φ_2 طول نصف

$$S = a(\varphi_2 - \varphi_1) \times - \xi \cdot \gamma \cdot \gamma \quad \pi \left\{ a \sqrt{a^{\gamma} + h^{\gamma}} + h^{\gamma} \ln \frac{a + \sqrt{a^{\gamma} + h^{\gamma}}}{h} \right\}$$

$$- \xi 000 \quad \xi \pi^2 ab \quad \xi \times [b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin \psi_2 - \sin \psi_1)]$$

$$- \xi 001 \quad \omega \approx \frac{bc}{a^2} \quad \xi \quad \omega = \arcsin \frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} - \xi 002$$

$$y_1 = \frac{\lambda}{\sigma} a \quad \xi \quad x_1 = -\frac{a}{\gamma} - \xi 003 \quad \frac{\rho_1 a^2}{\gamma} [\gamma + \sqrt{\gamma} \ln(1 + \sqrt{\gamma})]$$

$$- \xi 000 \quad x_1 = y_1 = \frac{206}{310\pi} a - \xi 004 \quad x_1 = y_1 = \frac{a}{\sigma} - \xi 003$$

$$\xi \quad x_1 = \frac{\sigma}{\gamma} a - \xi 005 \quad x_1 = y_1 = \frac{\pi a}{\lambda} - \xi 006 \quad y_1 = \frac{ab^2}{14c^2} \quad \xi \quad x_1 = \frac{a^2 b}{14c^2}$$

$$\xi \quad x_1 = -\frac{a}{\sigma} - \xi 004 \quad y_1 = \frac{\sigma}{\gamma} a \quad \xi \quad x_1 = \pi a - \xi 008 \quad y_1 = \frac{16}{9\pi} a$$

$$\xi \quad I_x = \frac{bh^2}{12} - \xi 009 \quad y_1 = \frac{1}{\lambda} \sqrt{2 \cdot \rho x} \quad \xi \quad y_1 = 0$$

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{16} (16 - 0\pi) - \xi 010 \quad I_y = \frac{h |b_1^2 - b_2^2|}{12} \quad (b = |b_1 - b_2|)$$

$$I_x = I_y = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}} - \xi 011 \quad I_y = \frac{49\pi a^4}{32} \quad \xi \quad I_x = \frac{21\pi a^4}{32} - \xi 012$$

$$\frac{a^4}{12} - \xi 013, 1 \quad I_x = \frac{\pi a^4}{\lambda} - \xi 014 \quad I_x = I_y = \frac{9}{\lambda} a^4 - \xi 015$$

$$Y \text{ و } X \text{ آن در } Y = 0 \quad \xi \quad X = ah^2 - \xi 016 \quad I_a = \frac{a^4}{32\sqrt{2}} - \xi 017$$

بترتیب تصاویر نیروی فشار بر محورهای مختصات Ox و Oy می باشند

$$- \xi 018 \quad P_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{2}{3} a \right) \quad \xi \quad P_1 = \pi a^2 \delta \left(h - \frac{2}{3} a \right) - \xi 019$$

تصاویر نیروی فشار بر محورهای Ox و Oz واقع در صفحه قائم مار بر محور استوانه و ضمناً محور Ox افقی و محور Oz عمودی میباشند، بترتیب برابرند با:

$$Z_1 = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \cos \alpha \quad \xi \quad X_1 = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha$$

$$Z_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \cos \alpha \quad \xi \quad X_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha$$

- $\xi 020$ تصاویر نیروی جاذبه بر محورهای Ox ، Oy ، Oz بترتیب برابرند با:

$$Z = -\frac{2kmM}{a^2 h} \{ |b| - |b-h| + \sqrt{a^2 + (b-h)^2} \} \quad \xi \quad Y = 0 \quad \xi \quad X = 0$$

$$p_{\text{متوسط}} = \frac{1}{r} p. - 4.074 \quad \text{که در آن } k \text{ ثابت جاذبه است} \quad -\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$A = \frac{kp}{12} \left\{ r ab \sqrt{a^2 + b^2} + a^2 \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} + b^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right\} - 4.070$$

$$\frac{\xi}{0} \pi abc - 4.074 \quad \frac{1}{\xi \lambda} - 4.078 \quad \frac{1}{r} \ln r - \frac{0}{16} - 4.077 \quad \frac{1}{r^2 \xi} - 4.076$$

$$\int_0^1 dx \left\{ \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy + \int_0^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f(x, y, z) dy \right\} = \int_0^1 dz \left\{ \int_0^1 dy \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_0^1 dy \times \right.$$

$$\left. \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^1 dz \int_{-\sqrt{z^2 - x^2}}^{\sqrt{z^2 - x^2}} f(x, y, z) dy = -4.081 \quad \times \int_0^1 f(x, y, z) dx \right\}$$

$$-4.082 \quad = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2 - y^2}}^{\sqrt{z^2 - y^2}} f(x, y, z) dx$$

$$\int_0^1 dx \left\{ \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \right\} =$$

$$= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx = \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx \right\} +$$

$$\frac{1}{r} \int_0^x (x-\zeta)^2 f(\zeta) d\zeta - 4.084 \quad + \int_1^y dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx$$

$$-4.086 \quad \frac{1}{r} \int_0^1 (r-z)^2 f(z) dz + \frac{1}{r} \int_0^1 (r-z)^2 f(z) dz - 4.080$$

$$F(A, B, C) - F(A, B, c) - F(A, b, C) - F(a, B, C) + F(A, b, c) +$$

$$\frac{\pi}{10} - 4.087 \quad + F(a, B, c) + F(a, b, C) - F(a, b, c)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} \frac{1}{\cos \psi} d\psi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi \cos \psi}} r^\gamma f(r) dr - \xi \cdot 89 \quad \frac{\pi}{10} (\gamma \sqrt{\gamma} - 1) - \xi \cdot 88$$

$$\frac{\gamma}{\gamma\gamma} \left(\frac{1}{a^\gamma} - \frac{1}{b^\gamma} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^2 \sqrt{h} - \xi \cdot 92 \quad \frac{16\pi}{3} - \xi \cdot 91 \quad \frac{\pi^2 abc}{\xi} - \xi \cdot 90$$

$$\frac{1}{\gamma\gamma} \left(\frac{1}{m^\gamma} - \frac{1}{n^\gamma} \right) (b_\lambda - a^\lambda) \left[(\beta^\gamma - \alpha^\gamma) \left(1 + \frac{1}{\alpha^\gamma \beta^\gamma} \right) + \xi \ln \frac{\beta}{\alpha} \right] - \xi \cdot 93$$

$$u = \frac{\xi \pi}{\gamma} \frac{R^\gamma}{\sqrt{a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma + \theta R}} - \xi \cdot 96 \quad \gamma (e - \gamma) - \xi \cdot 95 \quad \frac{\gamma}{0} - \xi \cdot 94$$

$$\xi F'(t) = \xi \pi t^\gamma f(t^\gamma) \quad (\text{الف} - \xi \cdot 98) \quad | \theta | < 1 \quad \text{که در آن}$$

$$F'(t) = \frac{\gamma}{t} \left[F(t) + \iiint_V xyz f'(xyz) dx dy dz \right] \quad (\text{ب})$$

$$V = \{ 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t, 0 \leq z \leq t \}$$

$$\frac{\xi \pi}{m+n+p+\gamma} \times \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!} \quad \text{از اعداد } m, n, p \text{ فرد باشد؛}$$

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+\xi)} - \xi 100 \quad \text{اگر اعداد } m, n, p \text{ زوج باشند}$$

$$\frac{\pi a^\gamma}{\gamma} - \xi 104 \quad \frac{\gamma}{\gamma} a^{\xi} (\gamma \pi - \xi) - \xi 103 \quad \frac{\gamma}{\gamma \xi} - \xi 102 \quad \frac{\gamma}{\gamma 0} - \xi 101$$

$$\frac{\pi^\gamma a^\gamma}{\xi \sqrt{\gamma}} - \xi 108 \quad \pi a^\gamma - \xi 107 \quad \frac{\gamma\gamma}{\gamma} \pi - \xi 106 \quad \frac{a^\gamma}{\gamma \xi} (\gamma \pi - \xi) - \xi 105$$

$$\frac{\pi}{\gamma} \times \frac{a^\gamma bc}{h} - \xi 111 \quad \frac{\pi}{\gamma} (\gamma - \sqrt{\gamma}) (b^\gamma - a^\gamma) - \xi 110 \quad \frac{1}{\gamma} - \xi 109$$

$$\frac{0 \pi abc}{1\gamma} (\gamma - \sqrt{0}) - \xi 113 \quad \frac{\pi^\gamma abc}{\xi \sqrt{\gamma}} - \xi 112, 1 \quad \frac{\pi^\gamma}{\xi} abc - \xi 112$$

$$\frac{abc}{\gamma} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \Gamma^\gamma \left(\frac{1}{\xi} \right) - \xi 115 \quad \frac{\lambda \pi}{0} abc - \xi 114$$

$$\frac{abc}{\gamma 0} \times \frac{\left(\frac{a}{h} \right)^\xi}{\frac{a}{h} + \frac{b}{k}} - \xi 116, 1 \quad \frac{abc}{\gamma 0} \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right) \times \left(\frac{a^\gamma}{h^\gamma} + \frac{b^\gamma}{k^\gamma} \right) - \xi 116$$

$$\frac{abc}{1\gamma 80} - \xi 118, 2 \quad \frac{abc}{90} - \xi 118, 1 \quad \frac{abc}{\gamma} - \xi 118 \quad \frac{abc}{00\xi\xi 00} - \xi 117$$

$$\frac{1}{r}(b^2 - a^2) \sqrt{\frac{r}{\pi} \Gamma\left(\frac{r}{\xi}\right) - \xi 120} \quad \frac{a}{\xi} a^r - \xi 119 \quad \frac{\xi \pi}{r} abc - \xi 118, r$$

$$\frac{r}{r} abc - \xi 122 \quad \frac{\pi abc^r}{r h} (1 - e^{-1}) - \xi 122 \quad \frac{\xi \pi}{r} a^r - \xi 121$$

$$\xi V = \frac{\pi a^r}{r} - \xi 126 \quad \frac{r^2}{r^2} - \xi 120 \quad \circ abc \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{r} \right) - \xi 123$$

$$\frac{\xi \pi h^r}{r |\Delta|} - \xi 128 \quad \frac{\lambda h_1 h_2 h_3}{|\Delta|} - \xi 127 \quad S = \frac{\pi a^r}{r} (r \sqrt{r} + \circ \sqrt{\circ} - 1)$$

$$\frac{abc}{mn + mp + np} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)} - \xi 129 \quad \frac{\pi^r}{r n \sin \frac{\pi}{n}} \times \frac{abc^r}{h} - \xi 129$$

$$\xi \pi r \left(\frac{1}{k} + \frac{r}{k^r} + \frac{r}{k^r} \right) e^{-k} - \xi 132 \quad \frac{r}{r} - \xi 131$$

$$z = \frac{v}{r} a^r \quad \xi x = y = \frac{r}{\circ} a - \xi 133 \quad \left(\cdot, \cdot, \frac{r}{\xi} c \right) - \xi 132$$

$$\xi x = \frac{r}{\lambda} a - \xi 136 \quad z = \frac{v}{1 v \gamma} p \quad \xi y = \cdot \quad \xi x = \frac{v}{1 \lambda} p - \xi 130$$

$$z = \frac{r a}{\lambda} \quad \xi x = y = \cdot - \xi 137 \quad z = \frac{r}{\lambda} c \quad \xi y = \frac{r}{\lambda} b$$

$$\xi y = \frac{9\pi}{\xi \xi \lambda} b \quad \xi x = \frac{9\pi}{\xi \xi \lambda} a - \xi 139 \quad z = \frac{\circ}{r} \quad \xi x = y = 1 - \xi 138$$

$$z = \frac{v}{r} \quad \xi x = y = \cdot - \xi 140 \quad z = \frac{9\pi}{\xi \xi \lambda} c$$

$$\xi x = \alpha - \xi 142 \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{r}{\xi} + \frac{\Gamma\left(\frac{r}{n}\right) \Gamma\left(\frac{r}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{\xi}{n}\right)} - \xi 141$$

$$I_{zx} = \frac{ab^r c}{r} \quad \xi I_{yz} = \frac{a^r bc}{r} \quad \xi I_{xy} = \frac{abc^r}{r} - \xi 143 \quad z = \gamma \quad \xi y = \beta$$

$$- \xi 140 \quad I_{zx} = \frac{\xi}{10} \pi ab^r c \quad \xi I_{yz} = \frac{\xi}{10} \pi a^r bc \quad \xi I_{xy} = \frac{\xi}{10} \pi abc^r - \xi 144$$

$$- \xi 146 \quad I_{xz} = \frac{\pi ab^r c}{r} \quad \xi I_{yz} = \frac{\pi a^r bc}{r} \quad \xi I_{xy} = \frac{\pi abc^r}{\circ}$$

$$\xi I_{xz} = \frac{r ab^r c}{1050} (100\pi - 222) \quad \xi I_{xy} = \frac{r abc^r}{r 20} (100\pi - 17)$$

$$\epsilon I_{xz} = \frac{\xi}{\gamma} \pi a b^{\gamma} c \quad \epsilon I_{xy} = \frac{\gamma}{\gamma} \pi a b c^{\gamma} - \epsilon 14 \nu \quad I_{yz} = \frac{\gamma a^{\gamma} b c}{10 \gamma 0} (10.0 \pi - 9 \nu)$$

$$\epsilon I_{yz} = \frac{10 \pi^{\gamma}}{206 \sqrt{\gamma}} a^{\gamma} b c - \epsilon 14 \nu, 1 \quad I_{yz} = \frac{\xi}{\gamma} \pi a^{\gamma} b c$$

$$- \epsilon 14 \nu, 2 \quad I_{xy} = \frac{\pi^{\gamma}}{128 \sqrt{\gamma}} a b c^{\gamma} \quad \epsilon I_{zx} = \frac{10 \pi^{\gamma}}{206 \sqrt{\gamma}} a b^{\gamma} c$$

$$\epsilon I_{zx} = \frac{1}{\alpha n^{\gamma}} \times \frac{\Gamma^{\gamma} \left(\frac{1}{n} \right) \Gamma \left(\frac{\gamma}{n} \right)}{\Gamma \left(\frac{\alpha}{n} \right)} a b^{\gamma} c \quad \epsilon I_{yz} = \frac{1}{\alpha n^{\gamma}} \times \frac{\Gamma^{\gamma} \left(\frac{1}{n} \right) \Gamma \left(\frac{\gamma}{n} \right)}{\Gamma \left(\frac{\alpha}{n} \right)} a^{\gamma} b c$$

$$- \epsilon 14 \nu \quad I_z = \frac{1 \xi}{10} - \epsilon 14 \nu \quad I_{xy} = \frac{1}{\alpha n^{\gamma}} \times \frac{\Gamma^{\gamma} \left(\frac{1}{n} \right) \Gamma \left(\frac{\gamma}{n} \right)}{\Gamma \left(\frac{\alpha}{n} \right)} a b c^{\gamma}$$

$$\frac{\xi}{9} M R^{\gamma} - \epsilon 100 \quad \frac{\pi}{0} a^{\alpha} - \epsilon 14 \nu, 1 \quad I_z = \frac{\xi \pi}{10} (\xi \sqrt{\gamma} - 0)$$

جرم استوانه است. $I = \frac{M}{\gamma} \left(a^{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma} h^{\gamma} \right) - \epsilon 10 \nu$ که در آن $M = 2 \pi \rho a^{\gamma} h$

$$\epsilon r \leq R \quad u = 2 \pi \rho \cdot \left(R^{\gamma} - \frac{r^{\gamma}}{\gamma} \right) - \epsilon 100 \quad I_z = \frac{\pi^{\gamma} a^{\alpha} \rho}{\lambda} - \epsilon 10 \xi$$

$$- \epsilon 10 \nu \quad r = \sqrt{x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma}} \quad \text{در آن که } r > R \quad u = \frac{\xi \pi R^{\gamma} \rho}{\gamma r}$$

$$r = \sqrt{x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma}} \quad \text{که در آن } u = \xi \pi \int_{R}^{R_{\gamma}} f(\rho) \min \left(\frac{\rho^{\gamma}}{r}, \rho \right) d\rho - \epsilon 10 \nu$$

$$u = \pi \rho \cdot \left\{ (h-z) \sqrt{a^{\gamma} + (h-z)^{\gamma}} + z \sqrt{a^{\gamma} + z^{\gamma}} - [(h-z) \times - \epsilon 10 \nu \right.$$

$$\left. \times |h-z| + z |z| \right] + a^{\gamma} \ln \left| \frac{h-z + \sqrt{a^{\gamma} + (h-z)^{\gamma}}}{\sqrt{a^{\gamma} + z^{\gamma}} - z} \right| \quad \epsilon X = 0 - \epsilon 10 \nu$$

$$|a| < R \quad \text{اگر } Z = - \frac{k M m}{R^{\gamma}} a \quad ; \quad |a| \geq R \quad \text{اگر } Z = - \frac{k M m}{a |a|} \quad ; \quad Y = 0$$

$$Z = - 2 \pi \rho \cdot k \left\{ \sqrt{a^{\gamma} + z^{\gamma}} - \sqrt{a^{\gamma} + (h-z)^{\gamma}} \right. \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad X = 0 - \epsilon 10 \nu$$

$$\left. Z = - \pi k \rho \cdot R \sin^{\gamma} \alpha \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad X = 0 - \epsilon 10 \nu \quad - (|z| - |h-z|) \right\}$$

همگرا $p > 1$ بازای $p > 1$ است همگرا $q > 1$ و $p > 1$ بازای $q > 1$ است

است $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ بازای $p > \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$ همگرا است ϵ -۱۶۳

همگرا است ϵ -۱۶۵ - واگرا است ϵ -۱۶۹ $(p > q > 1)$

$\frac{\pi}{p-1} (p > 1)$ - ϵ ۱۷۰ 2π - ϵ ۱۷۱ $\frac{1}{p-1} (p > 1)$ - ϵ ۱۷۲

$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ - ϵ ۱۷۳ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ - ϵ ۱۷۴ π - ϵ ۱۷۵ $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ - ϵ ۱۷۶

$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ - ϵ ۱۷۷ $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\Delta}{\delta}}$ - ϵ ۱۷۸ $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ که در آن

$\frac{\pi}{e} ab$ - ϵ ۱۷۹ $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$ و $-\frac{\pi \epsilon a^2 b^2}{2(1-\epsilon^2)^2}$ - ϵ ۱۸۰

همگرا است ϵ -۱۸۱ $p < 1$ بازای ϵ -۱۸۲ $p < 1$ همگرا است ϵ -۱۸۳

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ همگرا است ϵ -۱۸۴ $p < 1$ بازای ϵ -۱۸۵

$p < 1$ همگرا است ϵ -۱۸۷ $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ - ϵ ۱۸۸ $-\frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \ln 2$ - ϵ ۱۸۹

$p > \frac{3}{2}$ بازای ϵ -۱۹۱ 2 - ϵ ۱۹۰ $p > \frac{3}{2}$ همگرا است ϵ -۱۹۲

$p < \frac{3}{2}$ همگرا است ϵ -۱۹۳ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ بازای ϵ -۱۹۴

$p < 1$ همگرا است ϵ -۱۹۵ $p < 1$ بازای ϵ -۱۹۶

$(1-p)^{-1} (1-q)^{-1} (1-r)^{-1} (p < 1, q < 1, r < 1)$ - ϵ ۱۹۷

$\frac{\epsilon \pi}{3}$ $2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right) (p < 1)$ - ϵ ۱۹۸ $\frac{3}{2}$ - ϵ ۱۹۹

$\sqrt{\frac{\pi^2}{\Delta}}$ - ϵ ۲۰۰ که در آن $\Delta = |a_{ij}|$ $\frac{n}{3}$ (الف) - ϵ ۲۰۴

(ب) $\frac{n(n+1)}{12}$ - ϵ ۲۰۰ $\frac{a^n}{n!}$ - ϵ ۲۰۶ $\frac{1}{\sqrt{n}!}$ - ϵ ۲۰۷ $\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}$ - ϵ ۲۰۸

$\frac{2^n h_1 h_2 \dots h_n}{|\Delta|}$ - ϵ ۲۰۸ $\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{n!}$ - ϵ ۲۰۹

$$\frac{\pi^{\frac{n}{\gamma}} a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\gamma} + 1\right)} - \text{۴۲۱۱}$$

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{\gamma}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)} a_1 a_\gamma \dots a_n - \text{۴۲۱۰}$$

$$\frac{\pi^{\frac{n+1}{\gamma}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)} - \text{۴۲۱۳}$$

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{\gamma}} a^{n-1} h^\gamma}{\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)} - \text{۴۲۱۲}$$

$$u = \frac{1}{\gamma} \pi^\gamma \rho^\gamma R^\circ - \text{۴۲۱۹} \quad R^n \frac{\pi^{\frac{n}{\gamma}}}{\Gamma\left(\frac{n}{\gamma}\right)} \int_0^1 f(\sqrt{\gamma} u) u^{\frac{n}{\gamma}-1} du - \text{۴۲۱۸}$$

$$\Delta = \left| \begin{array}{cc} a_{ij} & b_l \\ b_j & c \end{array} \right| \quad \text{و} \quad \delta = |a_{ij}| \quad \text{که در آن} \quad \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta}} e^{-\frac{\Delta}{\delta}} - \text{۴۲۲۰}$$

$$\frac{1}{10} a^\gamma - \text{۴۲۲۲} \quad 1 + \sqrt{\gamma} - \text{۴۲۲۱} \quad \text{دترمینان کتاره دار است}$$

$$\varepsilon a^{\frac{\gamma}{\gamma}} - \text{۴۲۲۰} \quad \frac{a^\gamma}{\gamma} (\text{ch}^{\frac{\gamma}{\gamma}} \gamma t, -1) - \text{۴۲۲۴} \quad \gamma \pi^\gamma a^\gamma (1 + \gamma \pi^\gamma) - \text{۴۲۲۳}$$

$$\gamma a^\gamma (\gamma - \sqrt{\gamma}) - \text{۴۲۲۷} \quad \gamma (e^a - 1) + \frac{\pi}{\varepsilon} a e^a - \text{۴۲۲۷}$$

$$0 - \text{۴۲۳۱} \quad \frac{\pi}{a} - \text{۴۲۳۰} \quad \gamma a^\gamma - \text{۴۲۲۹} \quad \frac{\gamma k a^\gamma \sqrt{1+k^\gamma}}{1+\varepsilon k^\gamma} - \text{۴۲۲۸}$$

$$|x| < a \quad \text{آن در} \quad |x| + |z| - \text{۴۲۳۳} \quad \sqrt{\gamma} - \text{۴۲۳۲}$$

$$\left(1 + \frac{\gamma z}{\gamma c}\right) \sqrt{cz} - \text{۴۲۳۰} \quad \frac{\gamma}{\varepsilon \sqrt{\gamma}} \left(\sqrt{\frac{\gamma z^\varepsilon}{a}} + \gamma \sqrt{\frac{a z^\varepsilon}{\gamma}} \right) - \text{۴۲۳۴}$$

$$\frac{\gamma \pi}{\gamma} (\gamma a^\gamma + \varepsilon \pi^\gamma b^\gamma) \sqrt{a^\gamma + b^\gamma} - \text{۴۲۳۷} \quad a \sqrt{\gamma} \text{ arc tg} \frac{|z|}{\sqrt{a^\gamma - z^\gamma}} - \text{۴۲۳۶}$$

$$\frac{1}{\gamma} \left[(\gamma + t^\gamma)^{\frac{\gamma}{\gamma}} + \gamma^{\frac{\gamma}{\gamma}} \right] - \text{۴۲۳۹} \quad \frac{\gamma}{\gamma} \pi a^\gamma - \text{۴۲۳۸}$$

$$- \text{۴۲۴۱} \quad \frac{a^\gamma}{\gamma \sqrt{\gamma}} \left[100 \sqrt{\gamma} - \gamma - \gamma \ln \frac{\gamma + \varepsilon \sqrt{\gamma}}{\gamma} \right] - \text{۴۲۴۰}$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^\gamma - b^\gamma}}{a} \quad \text{که در آن} \quad \gamma b \left(b + a \frac{\text{arc sin } \varepsilon}{\varepsilon} \right)$$

$$\frac{a}{\lambda} \left[(\gamma \sqrt{\gamma} - 1) + \frac{\gamma}{\gamma} \ln \frac{\gamma + \gamma \sqrt{\gamma}}{\gamma} \right] - \text{۴۲۴۲} \quad \frac{\gamma}{\gamma} \rho^\gamma (\gamma \sqrt{\gamma} - 1) - \text{۴۲۴۱,۱}$$

$$- \text{٤٢٤٤} \quad y. = \frac{h}{\gamma} + \frac{ab}{\gamma \sqrt{h^{\gamma} - a^{\gamma}}} \quad ; \quad x. = b - a \sqrt{\frac{h-a}{h+a}} - \text{٤٢٤٣}$$

$$\pi a^{\gamma} - \text{٤٢٤٤, ٢} \quad S_x = S_y = \frac{\gamma}{0} a^{\gamma} - \text{٤٢٤٤, ١} \quad x. = y. = \frac{\xi}{\gamma} a$$

$$r. = \frac{a}{\sqrt{\gamma}} - \text{٤٢٤٤, ٤} \quad \frac{\gamma \sqrt{\gamma}}{\gamma} a^{\gamma} \quad (\text{ب} : \frac{\gamma \gamma}{\gamma} a^{\gamma} \quad (\text{الف} - \text{٤٢٤٤, ٣})$$

$$; y. = -\frac{1}{0} \quad ; x. = \frac{\gamma}{0} - \text{٤٢٤٦} \quad x. = y. = z. = \frac{\xi a}{\gamma \pi} - \text{٤٢٤٥}$$

$$; I_x = I_y = \left(\frac{a^{\gamma}}{\gamma} + \frac{h^{\gamma}}{\gamma} \right) \sqrt{\xi \pi^{\gamma} a^{\gamma} + h^{\gamma}} - \text{٤٢٤٧} \quad z. = \frac{1}{\gamma}$$

$$\gamma \quad (\text{ب} : \frac{\gamma}{\gamma} \quad (\text{ب} : \cdot \quad (\text{الف} - \text{٤٢٤٨}) \quad I_z = a^{\gamma} \sqrt{\xi \pi^{\gamma} a^{\gamma} + h^{\gamma}}$$

$$\frac{\xi}{\gamma} - \text{٤٢٥١} \quad -\frac{1}{10} - \text{٤٢٥٠} \quad \gamma \quad (\text{ب} : \gamma \quad (\text{ب} : \gamma \quad (\text{الف} - \text{٤٢٤٩})$$

$$\cdot - \text{٤٢٥٦} \quad \cdot - \text{٤٢٥٥} \quad -\gamma \pi - \text{٤٢٥٤} \quad -\gamma \pi a^{\gamma} - \text{٤٢٥٣} \quad ; \cdot - \text{٤٢٥٢}$$

$$-\gamma - \text{٤٢٦١} \quad \xi - \text{٤٢٦٠} \quad 1\gamma - \text{٤٢٥٩} \quad \wedge - \text{٤٢٥٨} \quad \frac{\pi}{\xi} - 1 - \text{٤٢٥٧}$$

$$9 - \text{٤٢٦٤} \quad -\frac{\gamma}{\gamma} - \text{٤٢٦٣} \quad \int_{\cdot}^{a+b} f(u) du - \text{٤٢٦٢}$$

$$- \text{٤٢٦٨} \quad 1 - \gamma \gamma \gamma \quad \gamma \gamma - \text{٤٢٦٦} \quad \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy - \text{٤٢٦٥}$$

$$z = \frac{x^{\gamma}}{\gamma} + x^{\gamma} y - x y^{\gamma} - \frac{y^{\gamma}}{\gamma} + C - \text{٤٢٧١} \quad e^a \cos b - 1 - \text{٤٢٦٩} \quad \pi + 1$$

$$- \text{٤٢٧٣} \quad \frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} \arctg \frac{\gamma x - y}{\gamma y \sqrt{\gamma}} + C - \text{٤٢٧٢}$$

$$z = e^{x+y} (x - y + 1) + y e^x + C - \text{٤٢٧٤} \quad z = -\frac{\gamma y^{\gamma}}{(x+y)^{\gamma}} + \ln |x+y| + C$$

$$z = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left(\arctg \frac{x}{y} \right) + C - \text{٤٢٧٦} \quad z = \frac{\partial^{n+m} u}{\partial x^n \partial y^m} + C - \text{٤٢٧٥}$$

$$-\pi a^{\gamma} - \text{٤٢٨٠} \quad \frac{1}{\gamma 0} - \text{٤٢٧٩} \quad |I_R| \leq \frac{\wedge \pi}{R^{\gamma}} - \text{٤٢٧٨}$$

$$-\varepsilon - \varepsilon 282 \quad -\frac{\pi a^{\sqrt{r}}}{\varepsilon} - \varepsilon 282 \quad \pi \sqrt{r} a^{\sqrt{r}} \sin\left(\frac{\pi}{\varepsilon} - \alpha\right) - \varepsilon 281$$

$$b - a - \varepsilon 286 \quad \cdot - \varepsilon 280 \quad -\varepsilon 2 \frac{\sqrt{r}}{1 \sqrt{r}} - \varepsilon 284$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy + \int_{z_1}^{z_2} \chi(z) dz - \varepsilon 287$$

$$u = -\varepsilon 290 \quad \int \frac{\sqrt{x^{\sqrt{r}} + y^{\sqrt{r}} + z^{\sqrt{r}}}}{\sqrt{x^{\sqrt{r}} + y^{\sqrt{r}} + z^{\sqrt{r}}}} u f(u) du - \varepsilon 289 \quad \int_{x_1 + y_1 + z_1}^{x_2 - y_2 + z_2} f(u) da - \varepsilon 288$$

$$-\varepsilon 292 \quad u = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C - \varepsilon 291 \quad = \frac{1}{\sqrt{r}} (x^{\sqrt{r}} + y^{\sqrt{r}} + z^{\sqrt{r}}) - rxyz + C$$

$$A = -mg(z_2 - z_1) - \varepsilon 293 \quad u = \ln \sqrt{(x+y)^{\sqrt{r}} + z^{\sqrt{r}}} + \arctg \frac{z}{x+y} + C$$

$$\text{آن که در } A = k \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \varepsilon 290 \quad A = -\frac{k}{\sqrt{r}} (a^{\sqrt{r}} - b^{\sqrt{r}}) - \varepsilon 294$$

$$I = \iint_S y^{\sqrt{r}} dx dy - \varepsilon 296 \quad r_i = \sqrt{x_i^{\sqrt{r}} + y_i^{\sqrt{r}} + z_i^{\sqrt{r}}} \quad (i = 1, 2)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} (e^{\pi} - 1) - \varepsilon 300 \quad -2\pi ab - \varepsilon 299 \quad \frac{\pi a^{\varepsilon}}{\sqrt{r}} - \varepsilon 298 \quad -\varepsilon 6 \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}} - \varepsilon 297$$

$$\frac{\pi m a^{\sqrt{r}}}{\Lambda} - \varepsilon 302 \quad I_1 - I_2 = 2 - \varepsilon 302 \quad \cdot - \varepsilon 301$$

$$mS + e^{x_2} \varphi(y_2) - e^{x_1} \varphi(y_1) - m(y_2 - y_1) - \frac{m}{\sqrt{r}} (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - \varepsilon 304$$

$$\text{بار دو تابع } u \text{ که در آن } Q = kx + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon 300$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [xF(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y} [yF(x, y)] - \varepsilon 306 \quad \text{دیفرانسیل پذیر و مقدار ثابتی است}$$

$$\frac{\sqrt{r}}{\Lambda} \pi ab - \varepsilon 309 \quad \pi ab - \varepsilon 308 \quad I = 2\pi \quad (2 \text{ ; } I = 0 \quad (1 - \varepsilon 307$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{\varepsilon \pi}{9 \sqrt{r}} - \varepsilon 312 \quad a^{\sqrt{r}} - \varepsilon 312 \quad \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}} a^{\sqrt{r}} - \varepsilon 311 \quad \frac{a^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} - \varepsilon 310$$

$$\frac{ab \Gamma^2 \left(\frac{1}{n} \right)}{\Gamma n \Gamma \left(\frac{\gamma}{n} \right)} - 4310$$

$$\frac{a^2}{\gamma} B(\gamma m + 1, \gamma n + 1) - 4314$$

$$\frac{abc^{\gamma}}{\gamma(\gamma n + 1)} - 4317$$

$$\frac{ab}{n} \left[1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \right] - 4316$$

$$\gamma \pi r^{\gamma} \pm \pi(n-1)(n-\gamma) r^{\gamma} - 4319$$

$$\gamma \pi r^{\gamma} \pm \pi(y+1)(n+\gamma) r^{\gamma} - 4318$$

$$I = \sum \operatorname{sgn} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} - 4322 \quad \operatorname{sgn}(ad - bc) - 4321 \quad \pm a^{\gamma} - 4320$$

که در آن ، مجموع به همه نقاط تقاطع منحنی های $\varphi(x, y) = 0$ و $\psi(x, y) = 0$

$I = 2S - 4324$ در درون دورگرد C گسترده شده است

که در آن S مساحت محدود به دورگرد C است $- 4325$

4326 - تساوی نیرو بر محورهای مختصات $X'_x(x, y) + Y'_y(x, y)$

برابرند با: $X = 0$ ؛ $Y = \frac{\gamma kmM}{\pi a^{\gamma}}$ که در آن k ثابت ثقل است

$u = \gamma \pi k R \ln \frac{1}{\rho}$ ؛ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$ اگر $u = \gamma \pi k R \ln \frac{1}{R} - 4327$

اگر $I_{\gamma} = \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi$ ، $I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi - 4328$ $\rho > R$

$0 \leq \rho \leq 1$ ؛ $I_{\gamma} = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi$ ، $I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi$ اگر $\rho > 1$

$u = \pi$ - 4329 اگر نقطه $A(x, y)$ در درون دورگرد C واقع باشد ؛

اگر نقطه $A(x, y)$ بر روی دورگرد C واقع باشد ؛ $u = 0$ اگر نقطه

$A(x, y)$ در بیرون دورگرد C واقع باشد $K_1 = \pi \rho^m \cos m\varphi - 4330$ ،

$K_{\gamma} = \pi \rho^m \sin m\varphi$ اگر $0 \leq \rho < 1$ ؛ $K_1 = 0$ ، $K_{\gamma} = 0$ اگر $\rho = 1$ ؛

$- 4331$ $\rho > 1$ اگر $K_{\gamma} = -\frac{\pi}{\rho^m} \sin m\varphi$ ، $K_1 = -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad ; \quad Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy - 4332$$

$$; \quad H_x = ki \oint_C \frac{1}{r^{\gamma}} [(\eta - y) dz - (\xi - z) dy] - 4333$$

$$; \quad H_y = ki \oint_C \frac{1}{r^{\gamma}} [\xi - z) dx - (\xi - x) dz]$$

$$H_z = ki \oint_C \frac{1}{r^2} [(\xi - x) dy - (\eta - y) dx]$$

$$\pi a^{\sqrt{-}} - \varepsilon 3 \varepsilon 3 \quad \frac{\sqrt{}}{\gamma} \pi \sqrt{\sqrt{-}} a^{\sqrt{-}} - \varepsilon 3 \varepsilon 3 \quad I_1 - I_2 = (\varepsilon \pi - \sqrt{\sqrt{-}}) a^{\sqrt{-}} - \varepsilon 3 \varepsilon 3$$

$$\frac{\sqrt{-} - \sqrt{\sqrt{-}}}{\gamma} + (\sqrt{\sqrt{-}} - 1) \ln \sqrt{-} - \varepsilon 3 \varepsilon 0 \quad \frac{\pi}{\gamma} (1 + \sqrt{\sqrt{-}}) - \varepsilon 3 \varepsilon 4$$

$$\frac{\varepsilon \pi}{\gamma} abc \left(\frac{1}{a^{\sqrt{-}}} + \frac{1}{b^{\sqrt{-}}} + \frac{1}{c^{\sqrt{-}}} \right) - \varepsilon 3 \varepsilon 5 \quad \frac{120 \sqrt{\sqrt{-}} - 1}{\varepsilon 20} - \varepsilon 3 \varepsilon 6$$

$$\frac{\pi a^{\sqrt{-}}}{\gamma} \sin \alpha \cos^{\sqrt{-}} \alpha - \varepsilon 3 \varepsilon 7 \quad \pi^{\sqrt{-}} [a \sqrt{1 + a^{\sqrt{-}}} + \ln(a + \sqrt{1 + a^{\sqrt{-}}})] - \varepsilon 3 \varepsilon 8$$

$$\frac{2\pi(1 + \sqrt{\sqrt{-}})}{10} - \varepsilon 3 \varepsilon 9 \quad \frac{7\varepsilon}{10} \sqrt{\sqrt{-}} a^{\sqrt{-}} - \varepsilon 3 \varepsilon 0 \quad z. = \left(\cdot \leq \alpha \leq \frac{\pi}{\gamma} \right)$$

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} \pi r. a^{\sqrt{-}} - \varepsilon 3 \varepsilon 1 \quad \frac{a^{\sqrt{-}}}{\sqrt{\sqrt{-}}} - \varepsilon 3 \varepsilon 2, \sqrt{\sqrt{-}} \quad \pi a^{\sqrt{-}} - \varepsilon 3 \varepsilon 3, 1$$

$$\varepsilon y. = 0 \quad \varepsilon x. = \frac{a}{\gamma} - \varepsilon 3 \varepsilon 4 \quad \frac{\pi r. a (\sqrt{a^{\sqrt{-}} + \sqrt{b^{\sqrt{-}}})} \sqrt{a^{\sqrt{-}} + b^{\sqrt{-}}}}{12} - \varepsilon 3 \varepsilon 5$$

$$z. = \frac{a}{\pi} (\sqrt{\sqrt{-}} + 1) \quad \varepsilon x. = y. = \frac{a}{\sqrt{\sqrt{-}}} - \varepsilon 3 \varepsilon 6 \quad z. = \frac{16}{9\pi} a$$

$$\pi R \left[R(R + H)^{\sqrt{-}} + \frac{\sqrt{-}}{\gamma} H^{\sqrt{-}} \right] \quad (\text{ب} \quad \varepsilon \cdot a^{\sqrt{-}} \text{ (الف} - \varepsilon 3 \varepsilon 7, 1)$$

$$\varepsilon 3 \varepsilon 7 \quad \text{تساویر نیروی جاذبه بر محورهای مختصات:} \quad \frac{\sqrt{\sqrt{-}}}{12} - \varepsilon 3 \varepsilon 7, 2$$

$$u = \varepsilon \pi r. \min \left(a, \frac{a^{\sqrt{-}}}{r.} \right) - \varepsilon 3 \varepsilon 8 \quad Z = \pi k m p. \ln \frac{a}{b} \quad \varepsilon Y = 0 \quad \varepsilon X = 0$$

$$\text{اگر } F(t) = \frac{\pi}{1\lambda} (r - t^{\sqrt{-}})^{\sqrt{-}} - \varepsilon 3 \varepsilon 9 \quad r. = \sqrt{x^{\sqrt{-}} + y^{\sqrt{-}} + z^{\sqrt{-}}} \text{ که در آن}$$

$$F(t) = \frac{\pi(\lambda - 0 \sqrt{\sqrt{-}})}{\gamma} t^{\sqrt{-}} - \varepsilon 3 \varepsilon 0 \quad |t| > \sqrt{\sqrt{-}} \text{ اگر } F(t) = 0 \quad \varepsilon |t| \leq \sqrt{\sqrt{-}}$$

$$\text{اگر } F = \frac{\pi t}{r} [a^{\sqrt{-}} - (r - t)^{\sqrt{-}}] \quad \varepsilon t \leq r - a \text{ اگر } F = 0 - \varepsilon 3 \varepsilon 1$$

$$\varepsilon \pi a^{\sqrt{-}} - \varepsilon 3 \varepsilon 2 \quad t > r + a \quad (t \geq 0) \text{ اگر } F = 0 \quad \varepsilon r - a < t < r + a$$

$$0 - \varepsilon 3 \varepsilon 3 \quad \left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right] abc - \varepsilon 3 \varepsilon 4$$

$$\frac{\lambda\pi}{r} (a+b+c) R^3 - 4366 \qquad \frac{\xi\pi}{abc} (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - 4360$$

$$S \text{ مساحت } 2 - 4369 \qquad \frac{h^3}{r} - 4368 \qquad -\pi a^2 \sqrt{r} - 4367$$

$$-\frac{4}{r} a^2 - 4373 \qquad 2\pi R^2 - 4372 \qquad -2\pi a(a+h) - 4371 \qquad \cdot - 4370$$

$$\cdot - 4377 \qquad r \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz - 4376 \qquad \cdot - 4375$$

$$\text{آن در } \iiint_V \Delta u dx dy dz - 4379 \qquad r \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 4378$$

$$\frac{\xi\pi}{r} \left(a^2 + \frac{b^2}{r} \right) |c| - 4384 \qquad \cdot - 4380 \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{12}{0} \pi a^2 - 4388 \qquad 2a^2 - 4387 \qquad 2\pi^2 a^2 b - 4385, 1 \qquad \frac{r}{4} a^2 - 4380$$

$$I = \xi\pi \text{ (ب) } ; I = 0 \text{ (الف) } - 4392 \qquad -\frac{\pi h^2}{r} - 4390 \qquad 1 - 4389$$

$$\cos \alpha = \frac{r}{\sqrt{r}} \text{ ; } |\text{grad } u(\cdot)| = \sqrt{r} \text{ ; } \text{grad } u(\cdot) = r\mathbf{i} - r\mathbf{j} - r\mathbf{k} \text{ (الف) } - 4401$$

$$\text{ ; } \text{grad } u(A) = r\mathbf{i} + r\mathbf{j} \text{ (ب) } \text{ ; } \cos \gamma = -\frac{r}{\sqrt{r}} \text{ ; } \cos \beta = -\frac{r}{\sqrt{r}}$$

$$\text{ ; } \cos \gamma = 0 \text{ ; } \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{r}} \text{ ; } \cos \alpha = \frac{r}{\sqrt{r}} \text{ ; } |\text{grad } u(A)| = r\sqrt{r}$$

$$\text{ ; } \cos \gamma = 0 \text{ ; } \cos \beta = 0 \text{ ; } \cos \alpha = 1 \text{ ; } |\text{grad } u(B)| = \sqrt{r} \text{ ; } \text{grad } u(B) = r\mathbf{i}$$

$$- 4401, 1 \qquad M(-r, 1, 1) \text{ در نقطه } \text{grad } u = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{r} \text{ ; } |\text{grad } u(M)| = r \text{ ; } \text{grad } u(M) = r\mathbf{i} - r\mathbf{j} - r\mathbf{k}$$

$$\text{ ; } xy = z^2 \text{ (الف) } - 4402 \qquad \frac{du}{dt} = \frac{r}{\sqrt{r}} \text{ ; } \cos \gamma = -\frac{r}{r} \text{ ; } \cos \beta = -\frac{r}{r}$$

$$r = 1 - 4403 \qquad x = y = z \text{ (ب) } \text{ ; } x = y = z \text{ و } x = y = 0 \text{ (ب)}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{960} + \frac{z^2}{1024} = 1 \qquad \text{ ; } \frac{\xi(x^2 + y^2)}{u^2 - 206} + \frac{\xi z^2}{u^2} = 1 \text{ (} u \geq 16 \text{)} - 4404$$

$$\text{سطوح تراز عبارتند از سطوح } - 4406 \qquad \cos \varphi = -\frac{\lambda}{4} - 4400 \qquad \max u = r \cdot$$

مخروطی ؛ سطوح متساوی المدول گردایان عبارتند از سطح چنبره‌ها ؛

$$, \inf |\text{grad } u| = 0 \quad ; \quad \sup u = 1 \quad , \quad \inf u = 0$$

$$; \quad \frac{r}{r} \text{ (الف - ۴۴۰۹)} \quad \frac{|\Delta c|}{|\text{grad } u(x, y, z)|} - ۴۴۰۷ \quad \sup |\text{grad } u| = \frac{1}{r}$$

$$r r(c \times c) - ۴۴۱۲ \quad c - ۴۴۱۱ \quad f'(r) \frac{r}{r} - ۴۴۱۰ \quad - \frac{r}{r^3} \text{ (ب) } ; \quad r r \text{ (ب)}$$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z \text{ (الف - ۴۴۱۵, ۱)} \quad - r c(c \times r)$$

که در آن $e_r = i \cos \varphi + j \sin \varphi$ ، $e_\varphi = -i \sin \varphi + j \cos \varphi$ ، $e_z = k$ ، بردارهای هادی مماس بر خطوط مختصات مربوطه میباشند ؛

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi \text{ (ب)}$$

$$, \quad e_r = i \cos \varphi \sin \theta + j \sin \varphi \sin \theta + k \cos \theta$$

$$e_\varphi = -i \sin \varphi + j \cos \varphi \quad , \quad e_\theta = i \cos \varphi \cos \theta + j \sin \varphi \cos \theta - k \sin \theta$$

بردارهای هادی مماس بر محورهای مختصات مربوطه می باشد - ۴۴۱۶

$$\text{اگر} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = |\text{grad } u| \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{که در آن} \quad \frac{\partial u}{\partial u} = \frac{ru}{r}$$

$$l \perp r \text{ اگر} \quad \frac{\partial u}{\partial l} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial l} = - \frac{\cos(l, r)}{r^2} - ۴۴۱۷ \quad a = b = c$$

$$\text{grad } u \perp \text{grad } v \text{ اگر} \quad \frac{\partial u}{\partial l} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\text{grad } u \text{ grad } v}{|\text{grad } v|} - ۴۴۱۸$$

$$a = \frac{i(\sqrt{x^2 + y^2 + yz}) - j(\sqrt{x^2 + y^2 + xz}) + k(x - y)z}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} - ۴۴۱۹$$

$$; \quad \text{div } a(M) = \frac{18}{120} - ۴۴۲۲, ۱ \quad y = c_1 x, z = c_2 x^2 - ۴۴۲۰$$

$$\text{در آن} \quad \text{div}(\text{grad } u) = \Delta u - ۴۴۲۵ \quad , \quad - ۴۴۲۳ \quad \Pi = \frac{24}{120} \pi x^3$$

$$f(r) = c + \frac{c_1}{r} \quad ; \quad f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) - ۴۴۲۶ \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{2}{r} \text{ (ب) } ; \quad ۳ \text{ (الف - ۴۴۲۷)} \quad \text{که در آن } c \text{ و } c_1 \text{ ثابتند}$$

$$\text{در آن} \quad 3f(r) + rf'(r) \quad ; \quad f(r) = \frac{c}{r^3} - ۴۴۲۹ \quad \frac{f'(r)}{r} (c \times r) - ۴۴۲۸$$

$u \Delta v + \text{grad } u \times \text{grad } v$ (ب) ثابت است (الف - ۴۴۳۰) $u \Delta u + (\text{grad } u)^2$ که در آن Δu اپراتور لاپلاس است (الف - ۴۴۳۱) $\text{div } w = -2\omega^2$; $\text{div } v = 0$

۴۴۳۲ - در بیرون از مراکز جذب $\text{div } a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$ که در آن a_r و a_φ تصاویر بردار a بر خطوط مختصات $\varphi = \text{const}$ و $r = \text{const}$ میباشند

$$\text{div } a = \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u} (MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v} (NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w} (LMa_w) \right] \quad \text{الف - ۴۴۳۴}$$

که در آن a_u ، a_v ، a_w تصاویر بردار a بر محورهای مختصات مربوطه

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2} \quad \text{میباشند و}$$

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2} \quad \text{اگر } r, \varphi, z \text{ مختصات استوانه‌ای}$$

باشد در آن صورت $\text{div } a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right]$ اگر r, θ, φ مختصات کروی باشد آنگاه

$$\text{div } a = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r \sin \theta) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

$$\text{rot } a(M) = -\frac{0}{\xi} \mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{0}{\gamma} \mathbf{k} \quad \text{الف - ۴۴۳۶} \quad \text{ب) } \cdot$$

$$\cos \beta = \frac{-\xi}{\sqrt{131}} \quad \cos \alpha = \frac{-0}{\sqrt{141}} \quad |\text{rot } a(M)| = \frac{1}{\xi} \sqrt{141}$$

$$\cos \gamma = \frac{10}{\sqrt{141}} \quad \text{الف - ۴۴۳۷} \quad \text{ب) } \frac{f'(r)}{r} [\mathbf{r} \times \mathbf{c}]$$

$$\text{ب) } \cdot \quad \text{الف - ۴۴۳۹} \quad \mathbf{r} f(r) \mathbf{c} + \frac{f'(r)}{r} [c(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) - r(\mathbf{c} \times \mathbf{r})]$$

$$\text{rot } a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] \mathbf{k} \quad \text{الف - ۴۴۴۰} \quad \text{ب) } \text{rot } v = 2\omega \quad \text{الف - ۴۴۴۰}$$

که در آن a_r و a_φ بترتیب تصاویر بردار a بر خطوط مختصات $r = \text{const}$ و $\varphi = \text{const}$ میباشند (الف - ۴۴۴۰، ۲)

$$\text{rot } a = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_z$$

که در آن $a_z = a_z$ ؛ $a_\varphi = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi$ ؛ $a_r = a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \right. \quad (\text{ب})$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi$$

$$، a_r = a_x \cos \varphi \sin \theta + a_y \sin \varphi \sin \theta + a_z \cos \theta$$

$$، a_\theta = a_x \cos \varphi \cos \theta + a_y \sin \varphi \cos \theta - a_z \sin \theta$$

$$؛ ۰ (الف - ۴۴۴۲) \quad \pi h^3 (ب) ؛ ۰ (الف - ۴۴۴۱) \quad a_\varphi = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi$$

$$؛ \pi m - ۴۴۴۷ \quad \frac{\pi}{0} - ۴۴۴۵, ۱ \quad \cdot - ۴۴۴۵ \quad \frac{3\pi}{\lambda} - ۴۴۴۴ \quad \pi - ۴۴۴۳ \quad ۰ \quad (ب)$$

$$\text{گرمای } c \text{ در آن } \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} (k \text{ grad } u) - ۴۴۴۰ \quad \sum_{i=1}^n e_i - ۴۴۴۸$$

ویژه و ρ جرم ویژه جسم میباشد $\wedge \frac{2}{1} \times \ln 2 - ۴۴۵۲, ۱ \quad 2\pi^2 b^2 - ۴۴۵۲$

$$؛ 2\pi (الف - ۴۴۵۴) \quad \int_{rA}^{rB} f(r) r dr - ۴۴۵۳ \quad \frac{3}{4} (r + e^4 - 1) e^{-2} - ۴۴۵۲, 2$$

دورگرد C حول محور Oz است. $\Gamma = 0$ (الف - ۴۴۵۵) 2π (ب) $\Gamma = 2\pi n$ (ب) که در آن تعداد دورهای

$$Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy - ۴۴۵۶ \quad \Gamma = -\pi (\cos \beta + 2 \cos \gamma) e^{\gamma}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} ، \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad ؛ \Gamma = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

$$u = \frac{m}{r} - ۴۴۵۸ \quad \frac{1}{r} - ۴۴۵۷, ۱ \quad u = xyz(x + y + z) + C - ۴۴۵۷$$

$$M(x, y, z) \text{ فاصله نقطه متغیر } r_i \text{ که در آن } u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i} - ۴۴۵۹$$

$$u(x, y, z) = \int_{r_i}^r f(t) dt - ۴۴۶۰ \quad M_i (i = 1, 2, \dots, n) \text{ از نقطه}$$

که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ضمائم

I - ثابتهای مهم

$$\begin{aligned}\pi &= ۳,۱۴۱۵۹۲۶۵۳۶ \\ \frac{1}{\pi} &= ۰,۳۱۸۳۰۹۸۸۶۲ \\ \pi^2 &= ۹,۸۶۹۶۰۴۴۰۱۱ \\ \sqrt{\pi} &= ۱,۷۷۲۴۵۳۸۵۰۹\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e &= ۲,۷۱۸۲۸۱۸۲۸۵ \\ \frac{1}{e} &= ۰,۳۶۷۸۷۹۴۴۲۱ \\ e^2 &= ۷,۳۸۹۰۵۶۰۹۸۹ \\ \sqrt{e} &= ۱,۶۴۸۷۲۱۲۷۰۷\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M = \lg e &= ۰,۴۳۴۲۹۴۴۸۱۹ \\ \frac{1}{M} = \ln 10 &= ۲,۳۰۲۵۸۵۰۹۳۰ \\ \text{رادیان } ۱ &= ۵۷^{\circ} ۱۷' ۴۴,۸۰۶'' \\ \text{arc } ۱^{\circ} &= ۰,۰۱۷۴۵۳۲۹۲۵\end{aligned}$$

II - جدولها

۱ - مقادیر عکس . جذر و کعب . تابع نمایی

n	$\frac{1}{n}$	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10 \cdot n}$	$\sqrt[3]{100 \cdot n}$	e^n	$\frac{n}{e^{10}}$	$e^{-\frac{n}{10}}$	e^{-n}
۱	۱,۰۰۰	۱,۰۰	۱,۰۰	۲,۱۵	۴,۶۴	۲,۷۱۸	۱,۱۰۵	۰,۹۰۵	۰,۳۶۸
۲	۰,۵۰۰	۱,۴۱	۱,۲۶	۲,۷۱	۵,۸۵	۷,۳۸۹	۱,۲۲۱	۰,۸۱۹	۰,۱۳۵
۳	۰,۳۳۳	۱,۷۳	۱,۴۴	۳,۱۱	۶,۶۹	۲۰,۰۹	۱,۳۵۰	۰,۷۴۱	۰,۰۴۹۸
۴	۰,۲۵۰	۲,۰۰	۱,۵۹	۳,۴۲	۷,۳۷	۵۴,۶۰	۱,۴۹۲	۰,۶۷۰	۰,۰۱۸۳
۵	۰,۲۰۰	۲,۲۴	۱,۷۱	۳,۶۸	۷,۹۴	۱۴۸,۴۱	۱,۶۴۹	۰,۶۰۷	۰,۰۰۶۷۴

6	۰٫۱۶۷	۲٫۴۵	۷٫۷۵	۱٫۸۲	۳٫۹۱	۸٫۴۳	۴۰۳٫۴	۱٫۸۲۲	۰٫۵۴۹	۲٫۴۸۸×۱۰ ^{-۳}
۷	۰٫۱۴۳	۲٫۶۵	۸٫۳۷	۱٫۹۱	۴٫۱۲	۸٫۸۸	۱۰۹۶٫۶	۲٫۰۱۴	۰٫۴۹۷	۹٫۱۲×۱۰ ^{-۴}
۸	۰٫۱۲۵	۲٫۸۳	۸٫۹۴	۲٫۰۰	۴٫۳۱	۹٫۲۸	۲۹۸۱	۲٫۲۲۶	۰٫۴۴۹	۳٫۳۵×۱۰ ^{-۴}
۹	۰٫۱۱۱	۳٫۰۰	۹٫۴۹	۲٫۰۸	۴٫۴۸	۹٫۶۵	۸۱۰۳	۲٫۴۶۰	۰٫۴۰۷	۱٫۲۳×۱۰ ^{-۴}
۱۰	۰٫۱۰۰	۳٫۱۶	۱۰٫۰۰	۲٫۱۵	۴٫۶۴	۱۰٫۰۰	۲۲۰۲۶	۲٫۷۱۸	۰٫۳۶۸	۴٫۵۴×۱۰ ^{-۵}

۲- مانتیس لگاریتم های اعشاری

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰	-∞	۰۰۰	۳۰۱	۴۷۷	۶۰۲	۶۹۹	۷۷۸	۸۴۵	۹۰۳	۹۵۴
۱۰	۰۰۰	۰۴۱	۰۷۹	۱۱۴	۱۴۶	۱۷۶	۲۰۴	۲۳۰	۲۵۵	۲۷۹
۲۰	۳۰۱	۳۲۲	۳۴۲	۴۶۲	۳۸۰	۳۹۸	۴۱۵	۴۳۱	۴۴۷	۴۶۲
۳۰	۴۷۷	۴۹۱	۵۰۵	۵۱۹	۵۳۱	۵۴۴	۵۵۶	۵۶۸	۵۸۰	۵۹۱
۴۰	۶۰۲	۶۱۳	۶۲۳	۶۳۳	۶۴۳	۶۵۳	۶۶۳	۶۷۲	۶۸۱	۶۹۰
۵۰	۶۹۹	۷۰۸	۷۱۶	۷۲۴	۷۳۲	۷۴۰	۷۴۸	۷۵۶	۷۶۳	۷۷۱
۶۰	۷۷۸	۷۸۵	۷۹۲	۷۹۹	۸۰۶	۸۱۳	۸۲۰	۸۲۶	۸۳۳	۸۳۹
۷۰	۸۴۵	۸۵۱	۸۵۷	۸۶۳	۸۶۹	۸۷۵	۸۸۱	۸۸۶	۸۹۲	۸۹۸
۸۰	۹۰۳	۹۰۸	۹۱۴	۹۱۹	۹۲۴	۹۲۹	۹۳۴	۹۴۰	۹۴۴	۹۴۹
۹۰	۹۵۴	۹۵۹	۹۶۴	۹۶۸	۹۷۳	۹۷۸	۹۸۲	۹۸۷	۹۹۱	۹۹۶

۳ - لگاریتم های طبیعی

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰	-∞	۰,۰۰۰	۰,۶۹۳	۱,۰۹۹	۱,۳۸۶	۱,۶۰۹	۱,۷۹۲	۱,۹۴۶	۲,۰۷۹	۲,۱۹۷
۱۰	۲,۳۰۳	۲,۳۹۸	۲,۴۸۵	۲,۵۶۵	۲,۶۳۹	۲,۷۰۸	۲,۷۷۳	۲,۸۳۳	۲,۸۹۰	۲,۹۴۴
۲۰	۲,۹۹۶	۳,۰۴۵	۳,۰۹۱	۳,۱۳۵	۳,۱۷۸	۳,۲۱۹	۳,۲۵۸	۳,۲۹۶	۳,۳۳۲	۳,۳۶۷
۳۰	۳,۴۰۱	۳,۴۳۴	۳,۴۶۶	۳,۴۹۷	۳,۵۲۶	۳,۵۵۵	۳,۵۸۴	۳,۶۱۱	۳,۶۳۸	۳,۶۶۴
۴۰	۳,۶۸۹	۳,۷۱۴	۳,۷۳۸	۳,۷۶۱	۳,۷۸۴	۳,۸۰۷	۳,۸۲۹	۳,۸۵۰	۳,۸۷۱	۳,۸۹۲
۵۰	۳,۹۱۲	۳,۹۳۲	۳,۹۵۱	۳,۹۷۰	۳,۹۸۹	۴,۰۰۷	۴,۰۲۵	۴,۰۴۳	۴,۰۶۰	۴,۰۷۸
۶۰	۴,۰۹۴	۴,۱۱۱	۴,۱۲۷	۴,۱۴۳	۴,۱۵۹	۴,۱۷۴	۴,۱۹۰	۴,۲۰۵	۴,۲۲۰	۴,۲۳۴
۷۰	۴,۲۴۸	۴,۲۶۳	۴,۲۷۷	۴,۲۹۰	۴,۳۰۴	۴,۳۱۸	۴,۳۳۱	۴,۳۴۴	۴,۳۵۷	۴,۳۶۹
۸۰	۴,۳۸۲	۴,۳۹۴	۴,۴۰۷	۴,۴۱۹	۴,۴۳۱	۴,۴۴۳	۴,۴۵۴	۴,۴۶۶	۴,۴۷۷	۴,۴۸۹
۹۰	۴,۵۰۰	۴,۵۱۱	۴,۵۲۲	۴,۵۳۳	۴,۵۴۳	۴,۵۵۴	۴,۵۶۴	۴,۵۷۵	۴,۵۸۵	۴,۵۹۵
۱۰۰	۴,۶۰۵	۴,۶۱۵	۴,۶۲۵	۴,۶۳۵	۴,۶۴۴	۴,۶۵۴	۴,۶۶۳	۴,۶۷۳	۴,۶۸۲	۴,۶۹۱

لگاریتم های طبیعی $10^{\pm n}$

n	+	-	n	+	-	n	+	-
۱	۲,۳۰۲۶	۲,۶۹۷۴	۳	۶,۹۰۷۸	۷,۰۹۲۲	۵	۱۱,۵۱۲۹	۱۲,۴۸۷۱
۲	۴,۶۰۵۲	۵,۳۹۴۸	۴	۹,۲۱۰۳	۱۰,۷۸۹۷	۶	۱۳,۸۱۵۰	۱۴,۱۸۴۵

۴ - توابع هذلولی

x	$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	$\text{th } x$	x	$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	$\text{th } x$
۰	۰	۱	۰				
۰٫۱	۰٫۱۰۰	۱٫۰۰۵	۰٫۱۰۰	۱٫۶	۲٫۳۷۶	۲٫۵۷۸	۰٫۹۲۲
۰٫۲	۰٫۲۰۱	۱٫۰۲۰	۰٫۱۹۷	۱٫۷	۲٫۶۴۶	۲٫۸۲۸	۰٫۹۳۵
۰٫۳	۰٫۳۰۵	۱٫۰۴۵	۰٫۲۹۱	۱٫۸	۲٫۹۴۲	۳٫۱۰۷	۰٫۹۴۷
۰٫۴	۰٫۴۱۱	۱٫۰۸۱	۰٫۳۸۰	۱٫۹	۳٫۲۴۸	۳٫۴۱۸	۰٫۹۵۶
۰٫۵	۰٫۵۲۱	۱٫۱۲۸	۰٫۴۶۲	۲٫۰	۳٫۶۲۷	۳٫۷۶۲	۰٫۹۶۴
۰٫۶	۰٫۶۳۷	۱٫۱۸۵	۰٫۵۳۷	۲٫۱	۴٫۰۲۲	۴٫۱۴۴	۰٫۹۷۰
۰٫۷	۰٫۷۵۹	۱٫۲۵۵	۰٫۶۰۴	۲٫۲	۴٫۴۵۷	۴٫۵۶۸	۰٫۹۷۶
۰٫۸	۰٫۸۸۸	۱٫۳۳۷	۰٫۶۶۴	۲٫۳	۴٫۹۳۷	۵٫۰۳۷	۰٫۹۸۰
۰٫۹	۱٫۰۲۷	۱٫۴۳۳	۰٫۷۱۶	۲٫۴	۵٫۴۶۶	۵٫۵۵۷	۰٫۹۸۴
۱٫۰	۱٫۱۷۵	۱٫۵۴۳	۰٫۷۶۲	۲٫۵	۶٫۰۵۰	۶٫۱۳۲	۰٫۹۸۷
۱٫۱	۱٫۳۳۶	۱٫۶۶۹	۰٫۸۰۱	۲٫۶	۶٫۶۹۵	۶٫۷۶۹	۰٫۹۸۹
۱٫۲	۱٫۵۰۹	۱٫۸۱۱	۰٫۸۳۴	۲٫۷	۷٫۴۰۶	۷٫۴۷۳	۰٫۹۹۱
۱٫۳	۱٫۶۹۸	۱٫۹۷۱	۰٫۸۶۲	۲٫۸	۸٫۱۹۲	۸٫۲۵۳	۰٫۹۹۳
۱٫۴	۱٫۹۰۴	۲٫۱۵۱	۰٫۸۸۵	۲٫۹	۹٫۰۶۰	۹٫۱۱۵	۰٫۹۹۴
۱٫۵	۲٫۱۲۹	۲٫۳۵۲	۰٫۹۰۵	۳٫۰	۱۰٫۰۱۸	۱۰٫۰۶۸	۰٫۹۹۵

برای $x > 3$ با خطای کمتر از ۰٫۰۵ داریم $\text{sh } x \approx \text{ch } x \approx \frac{1}{2} e^x$

۵- فاکتوریل و توابع مربوط به آن

n	$n!$	$(2n-1)!!$	$(2n)!!$	$\frac{1}{n!}$	$\frac{1}{(2n-1)!!}$	$\frac{1}{(2n)!!}$
۱	۱	۱	۲	۱	۱	۰,۰
۲	۲	۳	۸	۰,۵	۰,۳۳۳۳۳۳۳۳	۰,۱۲۵
۳	۶	۱۵	۴۸	۰,۱۶۶۶۶۶۶۶۷	۰,۰۶۶۶۶۶۶۶۷	۰,۰۲۰۸۳۳۳۳۳
۴	۲۴	۱۰۰	۳۸۴	۰,۰۴۱۶۶۶۶۶۷	۰,۰۰۹۵۲۳۸۱۰	۰,۰۰۲۶۰۴۱۶۷
۵	۱۲۰	۹۴۵	۳۸۴۰	۰,۰۰۸۳۳۳۳۳۳	۰,۰۰۱۰۵۸۲۰۱	۰,۰۰۰۲۶۰۴۱۷
۶	۷۲۰	۱۰۳۹۵	۴۶۰۸۰	۰,۰۰۱۳۸۸۸۸۹	۰,۰۰۰۰۹۶۲۰۰	۰,۰۰۰۰۲۱۷۰۱
۷	۵۰۴۰	۱۳۵۱۳۵	۶۴۵۱۲۰	۰,۰۰۰۱۹۸۴۱۳	۰,۰۰۰۰۰۷۴۵۰۰	۰,۰۰۰۰۰۱۵۵۰
۸	۴۰۳۲۰	۲۰۲۷۰۲۵	۱۰۳۲۱۹۲۰	۰,۰۰۰۰۰۲۴۸۰۲	۰,۰۰۰۰۰۰۴۹۳	۰,۰۰۰۰۰۰۰۹۷
۹	۳۶۲۸۸۰	۳۴۴۵۹۴۲۵	۱۸۵۷۹۴۵۶۰	۰,۰۰۰۰۰۰۲۷۵۶	۰,۰۰۰۰۰۰۰۲۹	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۵
۱۰	۳۶۲۸۸۰۰	۶۵۴۷۲۹۰۷۵	۳۷۱۵۸۹۱۲۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰۲۷۶	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۲	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰

٦ - توابع مثلثاتی

α°	α (رادیان)	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\cos \alpha$		
۰	۰	۰	۰	∞	۱	۱,۰۷۱	۹۰
۱	۰,۰۱۷	۰,۰۱۷	۰,۰۱۷	۵۷,۲۹	۱,۰۰۰	۱,۰۵۳	۸۹
۲	۰,۰۳۵	۰,۰۳۵	۰,۰۳۵	۲۸,۶۴	۰,۹۹۹	۱,۰۳۶	۸۸
۳	۰,۰۵۲	۰,۰۵۲	۰,۰۵۲	۱۹,۰۸	۰,۹۹۹	۱,۰۱۸	۸۷
۴	۰,۰۷۰	۰,۰۷۰	۰,۰۷۰	۱۴,۳۰	۰,۹۹۸	۱,۰۰۱	۸۶
۵	۰,۰۸۷	۰,۰۸۷	۰,۰۸۷	۱۱,۴۳	۰,۹۹۶	۱,۰۸۴	۸۵
۶	۰,۱۰۵	۰,۱۰۵	۰,۱۰۵	۹,۰۱۴	۰,۹۹۵	۱,۰۶۶	۸۴
۷	۰,۱۲۲	۰,۱۲۲	۰,۱۲۳	۸,۱۴۴	۰,۹۹۳	۱,۰۴۹	۸۳
۸	۰,۱۴۰	۰,۱۳۹	۰,۱۴۱	۷,۱۱۵	۰,۹۹۰	۱,۰۳۱	۸۲
۹	۰,۱۵۷	۰,۱۵۶	۰,۱۵۸	۶,۳۱۴	۰,۹۸۸	۱,۰۱۴	۸۱
۱۰	۰,۱۷۵	۰,۱۷۴	۰,۱۷۶	۵,۶۷۱	۰,۹۸۵	۱,۰۰۶	۸۰
۱۱	۰,۱۹۲	۰,۱۹۱	۰,۱۹۴	۵,۱۴۵	۰,۹۸۲	۱,۰۰۰	۷۹
۱۲	۰,۲۰۹	۰,۲۰۸	۰,۲۱۳	۴,۷۰۵	۰,۹۷۸	۱,۰۰۰	۷۸
۱۳	۰,۲۲۷	۰,۲۲۵	۰,۲۳۱	۴,۳۳۱	۰,۹۷۴	۱,۰۰۰	۷۷
۱۴	۰,۲۴۴	۰,۲۴۳	۰,۲۴۹	۴,۰۱۱	۰,۹۷۰	۱,۰۰۰	۷۶
۱۵	۰,۲۶۲	۰,۲۵۹	۰,۲۶۸	۳,۷۳۲	۰,۹۶۶	۱,۰۰۰	۷۵
۱۶	۰,۲۷۹	۰,۲۷۶	۰,۲۸۷	۳,۴۸۷	۰,۹۶۱	۱,۰۰۰	۷۴
۱۷	۰,۲۹۷	۰,۲۹۲	۰,۳۰۶	۳,۲۷۱	۰,۹۵۶	۱,۰۰۰	۷۳
۱۸	۰,۳۱۴	۰,۳۰۹	۰,۳۲۵	۳,۰۷۸	۰,۹۵۱	۱,۰۰۰	۷۲

α°	$(\text{رادیان})\alpha$	$\sin \alpha$	$\lg \alpha$	$\text{ctg } \alpha$	$\cos \alpha$		
۱۹	۰,۳۳۲	۰,۳۲۶	۰,۳۴۴	۲,۹۰۴	۰,۹۴۶	۱,۲۳۹	۷۱
۲۰	۰,۳۴۹	۰,۳۴۲	۰,۳۶۴	۲,۷۴۷	۰,۹۴۰	۱,۲۲۲	۷۰
۲۱	۰,۳۶۷	۰,۳۵۸	۰,۳۸۴	۲,۶۰۰	۰,۹۳۴	۱,۲۰۴	۶۹
۲۲	۰,۳۸۴	۰,۳۷۰	۰,۴۰۴	۲,۴۷۰	۰,۹۲۷	۱,۱۸۷	۶۸
۲۳	۰,۴۰۱	۰,۳۹۱	۰,۴۲۴	۲,۳۵۶	۰,۹۲۱	۱,۱۶۹	۶۷
۲۴	۰,۴۱۹	۰,۴۰۷	۰,۴۴۰	۲,۲۴۶	۰,۹۱۴	۱,۱۵۲	۶۶
۲۵	۰,۴۳۶	۰,۴۲۳	۰,۴۶۶	۲,۱۴۰	۰,۹۰۶	۱,۱۳۴	۶۵
۲۶	۰,۴۵۴	۰,۴۳۸	۰,۴۸۸	۲,۰۵۰	۰,۸۹۹	۱,۱۱۷	۶۴
۲۷	۰,۴۷۱	۰,۴۵۴	۰,۵۱۰	۱,۹۶۳	۰,۸۹۱	۱,۱۰۰	۶۳
۲۸	۰,۴۸۹	۰,۴۶۹	۰,۵۳۲	۱,۸۸۱	۰,۸۸۳	۱,۰۸۲	۶۲
۲۹	۰,۵۰۶	۰,۴۸۵	۰,۵۵۴	۱,۸۰۴	۰,۸۷۵	۱,۰۶۵	۶۱
۳۰	۰,۵۲۴	۰,۵۰۰	۰,۵۷۷	۱,۷۳۲	۰,۸۶۶	۱,۰۴۷	۶۰
۳۱	۰,۵۴۱	۰,۵۱۵	۰,۶۰۱	۱,۶۶۴	۰,۸۵۷	۱,۰۳۰	۵۹
۳۲	۰,۵۵۹	۰,۵۳۰	۰,۶۲۵	۱,۶۰۰	۰,۸۴۸	۱,۰۱۲	۵۸
۳۳	۰,۵۷۶	۰,۵۴۵	۰,۶۹۴	۱,۵۴۰	۰,۸۳۹	۰,۹۹۵	۵۷
۳۴	۰,۵۹۳	۰,۵۵۹	۰,۶۷۰	۱,۴۸۳	۰,۸۲۹	۰,۹۷۷	۵۶
۳۵	۰,۶۱۱	۰,۵۷۴	۰,۶۷۰	۱,۴۲۸	۰,۸۱۹	۰,۹۶۰	۵۵
۳۶	۰,۶۲۸	۰,۵۸۸	۰,۶۲۷	۱,۳۷۶	۰,۸۰۹	۰,۹۴۲	۵۴
۳۷	۰,۶۴۶	۰,۶۰۲	۰,۶۵۴	۱,۳۲۷	۰,۷۹۹	۰,۹۲۵	۵۳
۳۸	۰,۶۶۳	۰,۶۱۶	۰,۶۸۱	۱,۲۸۰	۰,۷۸۸	۰,۹۰۸	۵۲
۳۹	۰,۶۸۱	۰,۶۲۹	۰,۸۱۰	۱,۲۳۵	۰,۷۷۷	۰,۸۹۰	۵۱
۴۰	۰,۶۹۸	۰,۶۴۳	۰,۸۳۹	۱,۱۹۲	۰,۷۶۶	۰,۸۷۳	۵۰

۴۱	۰,۷۱۶	۰,۶۵۶	۰,۸۶۹	۱,۱۵۰	۰,۷۵۵	۰,۸۵۵	۴۹
۴۲	۰,۷۳۳	۰,۶۶۹	۰,۹۰۰	۱,۱۱۱	۰,۷۴۳	۰,۸۳۸	۴۸
۴۳	۰,۷۵۰	۰,۶۸۲	۰,۹۳۳	۱,۰۷۲	۰,۷۳۱	۰,۸۲۰	۴۷
۴۴	۰,۷۶۸	۰,۶۹۵	۰,۹۶۶	۱,۰۳۶	۰,۷۱۹	۰,۸۰۳	۴۶
۴۵	۰,۷۸۵	۰,۷۰۷	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۰,۷۰۷	۰,۷۸۵	۴۵
		$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\sin \alpha$	α (رادیان)	α°

۷- تابع گاما

x	۱,۰	۱,۱	۱,۲	۱,۳	۱,۴	۱,۵	۱,۶	۱,۷	۱,۸	۱,۹	۲,۰
$\Gamma(x)$	۱,۰۰۰	۰,۹۵۱	۰,۹۱۸	۰,۸۹۷	۰,۸۸۷	۰,۸۸۶	۰,۸۹۴	۰,۹۰۹	۰,۹۳۱	۰,۹۶۲	۱,۰۰۰

بازای $x > 0$ $\min \Gamma(x) = \Gamma(1,4716) = 0,8856$

فهرست

ص

..... مقدمه ۵

قسمت اول

توابع یک‌متغیره

..... فصل ۱ - مقدمه* آنالیز ۵

بخش ۱ - اعداد حقیقی ۷

بخش ۲ - نظریه* دنباله‌ها ۱۳

بخش ۳ - مفهوم تابع ۲۸

بخش ۴ - نمایش ترسیمی تابع ۳۷

بخش ۵ - حد تابع ۵۲

بخش ۶ - O - Y نماد ۷۷

بخش ۷ - پیوستگی تابع ۸۱

بخش ۸ - تابع معکوس، تابع پارامتری ۹۲

بخش ۹ - پیوستگی یکنواخت تابع ۹۶

بخش ۱۰ - تعادلات تابعی ۹۹

..... فصل ۲ - حساب دیفرانسیل توابع یک‌متغیره ۱۰۲

بخش ۱ - مشتق تابع صریح ۱۰۲

بخش ۲ - مشتق تابع معکوس. مشتق تابع پارامتری. مشتق تابع ضمنی ۱۲۰

بخش ۳ - معنای هندسی مشتق ۱۲۳

بخش ۴ - دیفرانسیل تابع ۱۲۸

بخش ۵ - مشتق و دیفرانسیل مراتب بالاتر ۱۳۲

بخش ۶ - قضایای رول، لاگرانژ و کوشی ۱۴۳

بخش ۷ - صعود و نزول تابع. نامساویها ۱۵۰

بخش ۸ - جهت تقعر (گودی). نقاط عطف ۱۵۵

بخش	۹- رفع ابهام	۱۵۷
بخش	۱۰- دستور تیلر	۱۶۳
بخش	۱۱- اکسترسم تابع، بیشترین و کمترین مقدار تابع	۱۶۸
بخش	۱۲- رسم نمودار توابع از روی نقاط مشخص	۱۷۴
بخش	۱۳- مسایلی در بارهٔ ماگزیمم و مینیمم توابع	۱۷۷
بخش	۱۴- تماس منحنی‌ها، دایرهٔ انحنا، گسترده	۱۷۱
بخش	۱۵- حل تقریبی معادلات	۱۸۴

فصل ۳- انتگرالهای ناسعین

بخش	۱- انتگرالهای ناسعین ساده	۱۸۶
بخش	۲- انتگرال گیری توابع گویا	۱۹۷
بخش	۳- انتگرال گیری توابع گنگ	۲۰۰
بخش	۴- انتگرال گیری توابع مثلثاتی	۲۰۵
بخش	۵- انتگرال گیری توابع متعالی مختلف	۲۱۱
بخش	۶- مثالهای مختلف انتگرال گیری توابع	۲۱۴

فصل ۴- انتگرالهای معین

بخش	۱- انتگرال معین بعنوان حد مجموع	۲۱۷
بخش	۲- محاسبهٔ انتگرالهای معین بکمک انتگرالهای ناسعین	۲۲۲
بخش	۳- قضایای میانگین	۲۳۴
بخش	۴- انتگرالهای ناویژه	۲۳۸
بخش	۵- محاسبهٔ مساحات	۲۴۵
بخش	۶- محاسبهٔ طول قوس (کمان)	۲۴۹
بخش	۷- محاسبهٔ احجام	۲۵۲
بخش	۸- محاسبهٔ مساحت سطوح دوار	۲۵۵
بخش	۹- محاسبهٔ لنگرها (گشتاورها)، مختصات مرکز ثقل (گرانیگاه)	۲۵۷
بخش	۱۰- مسایلی از مکانیک و فیزیک	۲۵۹
بخش	۱۱- محاسبهٔ تقریبی انتگرالهای معین	۲۶۱

فصل ۵- سری ها

بخش	۱- سری های عددی، نشانه های همگرایی سری های ثابت العلامه	۲۶۴
بخش	۲- نشانه های همگرایی سری های متغیر العلامه	۲۷۹
بخش	۳- اعمال روی سری ها	۲۸۶

۲۸۷	۴- سری های تابعی	بخش
۳۰۲	۵- سری های تام	بخش
۳۱۶	۶- سری های فوریه	بخش
۳۲۲	۷- جمع سری ها	بخش
۳۲۷	۸- پیدا کردن انتگرالهای معین بکمک سری	بخش
۳۲۹	۹- حاصل ضرب های نامتناهی	بخش
۳۳۶	۱۰- دستور استیرلینگ	بخش
۳۳۷	۱۱- تقریب توابع پیوسته بکمک چندجمله ای	بخش

قسمت دوم

توابع چندمتغیره

۳۴۱	۶- حساب دیفرانسیل توابع چندمتغیره	فصل
۳۴۱	۱- حد تابع، پیوستگی	بخش
۳۴۸	۲- مشتق های جزئی، دیفرانسیل تابع	بخش
۳۶۵	۳- مشتق گیری توابع ضمنی	بخش
۳۷۸	۴- تعویض متغیرها	بخش
۳۹۳	۵- کاربردهای هندسی	بخش
۴۰۰	۶- فرمول تیلر	بخش
۴۰۳	۷- اکستریم تابع چندمتغیره	بخش
۴۱۳	۷- انتگرالهای وابسته به پارامتر	فصل
۴۱۳	۱- انتگرالهای ویژه وابسته به پارامتر	بخش
	۲- انتگرالهای ناویژه وابسته به پارامتر، همگرایی یکنواخت	بخش
۴۲۰	انتگرالها	
	۳- مشتق گیری و انتگرال گیری انتگرالهای ناویژه نسبت به پارامتر	بخش
۴۲۷	۴- انتگرالهای اولری	بخش
۴۳۵	۵- دستور انتگرالی فوریه	بخش
۴۳۹	۸- انتگرالهای چندگانه و منحنی الخط	فصل
۴۴۲	۱- انتگرال دوگانه	بخش
۴۵۲	۲- محاسبه مساحات	بخش