بسمه‌تعالی

آزمون میان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱ — رشته‌های فنی و مهندسی

تاریخ امتحان: ۱۳۹۴/۸/۲۶ — گروه ۶ — زمان : ۱۱۰ دقیقه

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

---

۱. مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه را بیابید که در رابطه‌ی $\left(\frac{z+i}{2z-1}\right)^3 = 1$ صدق می‌کند.

---

۲. تابع f باضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

را درنظر بگیرید. ثابت کنید تابع $g(x) = (x-1)f(x)$ در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته است اما در بقیه‌ی نقاط $\mathbb{R}$ ناپیوسته است.

---

۳. فرض کنید به‌ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در رابطه‌ی $f(a+b) = f(a) + f(b) + abf(a)f(b)$ صدق کند. نشان دهید که اگر f در $x = 0$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه در هر نقطه از $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

---

۴. با کمک قاعده‌ی هوپیتال مقدار حد $\lim_{x\to 1} \left(2 - 2\cos(\frac{\pi}{3}x)\right)^{\tan(\frac{\pi}{2}x)}$ را محاسبه کنید.

---

۵. اگر تابع $f : [a,b] \to [a,b]$ بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر بوده و $f(a) + f(b) = a + b$ باشد ثابت کنید $x_1, x_2 \in (a,b)$ متمایزی وجود دارند به‌طوری‌که

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{2(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

---

۶. ابتدا بسط مکلورن تابع $e^{\frac{x^2}{2}} \sinh(3x)$ را تا جمله‌ی x^5 نوشته و سپس به‌کمک آن حد

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} \sinh(3x) - 3x(1+2x^2)}{x^5}$$

را به‌دست آورید.

(پرسش جایزه‌دار) پاسخ‌گویی به این پرسش اجباری نیست و پاسخ به آن یک نمره پاداش دارد.

★ فرض کنید تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ روی بازه‌ی باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $b - a \geq 4$. نشان دهید $c \in (a,b)$ وجود دارند به‌طوری‌که داریم: $f'(c) < 1 + f^2(c)$.

موفق باشید.

استاد درس: دکتر بخشنده

(۱) قرار می دهیم $w=\frac{z+i}{2z-1}$. ابتدا معادله‌ی $w^3=1$ را حل می کنیم:

۰/۲ نمره

$$w^3=1=e^{(0+2k\pi)i} \Rightarrow w_k=e^{\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)i}=e^{\frac{2k\pi}{3}i}$$

$$k=0,1,2$$

۰/۳ نمره

$$\begin{cases} w_0=e^0=1 \\ w_1=e^{\frac{2\pi}{3}i}=\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_2=e^{\frac{4\pi}{3}i}=\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

برای یافتن مقادیر z قرار می دهیم:

۰/۳ نمره

$$\begin{cases} w_0=1=\frac{z+i}{2z-1} \Rightarrow 2z-1=z+i \Rightarrow z=1+i \\ w_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{z+i}{2z-1} \Rightarrow z=\frac{5+\sqrt{3}}{14}-\frac{2+\sqrt{3}}{7}i \\ w_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{z+i}{2z-1} \Rightarrow z=\frac{5-2\sqrt{3}}{14}+\frac{\sqrt{3}-4}{14}i \end{cases}$$

---

(۲) تابع f کراندار است و به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $|f(x)|<2$. ابتدا ثابت می کنیم تابع g در $x=1$ پیوسته است یعنی نشان می دهیم $\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=0$.

۰/۴ نمره

$$|g(x)-g(1)|=|g(x)|=|(x-1)f(x)|$$

$$=|x-1|\,|f(x)|<2|x-1|$$

بنابراین اگر $\delta\leq\frac{\varepsilon}{2}$ انتخاب کنیم آن گاه داریم:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0 \quad ; \quad |x-1|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(1)|<\varepsilon$$

که $\lim_{x\to 1} g(x)=0$ را نتیجه می دهد. حال تابع $g(x)=\begin{cases}-(x-1) & x\in\mathbb{Q} \\ x-1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ را در نظر گرفته

صفحه ۲

و ثابت می‌کنیم تابع g در هر نقطه‌ی $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ فاقد حد بوده و در نتیجه ناپیوسته است.

دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد گویا و دنباله‌ی $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد اصم را در نظر می‌گیریم که هر دو دنباله به x_0 همگرا هستند. در این صورت داریم:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} -(x_n-1) = -x_0+1$$

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} (y_n-1) = x_0-1$$

حال اگر $\lim_{x\to x_0} g(x)$ موجود باشد آن‌گاه باید $-x_0+1 = x_0-1$ بوده و در نتیجه $x_0=1$ به دست می‌آید که با $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ در تناقض است. بنابراین $\lim_{x\to x_0} g(x)$ به ازای $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ موجود نیست و در نتیجه g در این نقاط ناپیوسته است.

۰/۶ نمره

---

(۳) فرض کنید $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ دلخواه باشد در این صورت طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)+f(h)+xh\,f(x)f(h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)\,[1+xh\,f(x)]}{h} \qquad (*)$$

۰/۵ نمره

۰/۲ نمره

حال چون $f(0+0) = f(0)+f(0)+(0\times 0)f(0)f(0)$ است پس $f(0)=0$ می‌باشد و می‌توانیم $(*)$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$(*) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} \times \lim_{h\to 0} [1+xh\,f(x)]$$

$$= f'(0)\times 1 = f'(0)$$

۰/۳ نمره

---

۴) قرار می‌دهیم $\left[2-2\cos(\frac{\pi}{3}x)\right]^{\tan(\frac{\pi}{2}x)} = A>0$. بنابراین

$$\ln A = \tan(\tfrac{\pi}{2}x)\cdot \ln\left[2-2\cos(\tfrac{\pi}{3}x)\right] = \frac{\ln\left[2-2\cos(\frac{\pi}{3}x)\right]}{\cot(\frac{\pi}{2}x)}$$

۰/۴ نمره

چون تابع $\ln$ بر دامنه‌اش پیوسته است بنابراین داریم:

$$\ln A = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left[2-2\cos(\frac{\pi}{3}x)\right]}{\cot(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{0}{0}$$ مبهم

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}x)}{2-2\cos(\frac{\pi}{3}x)}}{\frac{\pi}{2}\left(1+\cot^2(\frac{\pi}{2}x)\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

هوپیتال

۰/۶ نمره

در نتیجه $A = e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ مقدار حد می‌باشد.

۰/۲ نمره

---

۵) چون $a<\frac{a+b}{2}<b$ و f بر $[a,b]$ پیوسته است طبق قضیه‌ی مقدار میانی $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=\frac{a+b}{2}$. حال قضیه‌ی مقدار میانگین (لاگرانژ) را برای تابع f در بازه‌های $[a,c]$ و $[c,b]$ به کار می‌بریم. چون f بر $[a,c]$ پیوسته و بر (a,c) مشتق‌پذیر است پس $x_1\in(a,c)$ وجود دارد به‌طوری که

۰/۳ نمره

$$f'(x_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{\frac{a+b}{2}-f(a)}{c-a} = \frac{a+b-2f(a)}{2(c-a)}$$

همچنین f بر $[c,b]$ پیوسته و بر (c,b) مشتق‌پذیر است پس $x_2\in(c,b)$ وجود دارد به‌طوری که

$$f'(x_2) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c} = \frac{f(b)-\frac{a+b}{2}}{b-c} = \frac{2f(b)-a-b}{2(b-c)}$$

۰/۴ نمره

بنابراین داریم:

۰/۳ نمره

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{2(c-a)}{a+b-2f(a)}+\frac{2(b-c)}{2f(b)-a-b}$$

$$=\frac{2(c-a)}{f(b)-f(a)}+\frac{2(b-c)}{f(b)-f(a)}=\frac{2(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

---

(۶) با استفاده از فرمول بسط مکلورن داریم:

۰/۲ نمره

$$e^{x^2/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{2^n n!}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\times 2!}+\frac{x^6}{2^3\times 3!}+\cdots=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+O(x^4)$$

۰/۲ نمره

$$\sinh(3x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=3x+\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^5}{5!}+\cdots=3x+\frac{9x^3}{2}+\frac{81x^5}{40}+O(x^5)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

۰/۲ نمره

$$e^{x^2/2}\sinh(x)=\left[1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+O(x^4)\right].\left[3x+\frac{9x^3}{2}+\frac{81x^5}{40}+O(x^5)\right]$$

$$=3x+6x^3+\frac{93}{20}x^5+O(x^5)$$

در نتیجه داریم:

۰/۴ نمره

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2/2}\sinh(3x)-3x(1+2x^2)}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+6x^3+\frac{93}{20}x^5+O(x^5)-3x-6x^3}{x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^5\left[\frac{93}{20}+O(x)\right]}{x^5}=\frac{93}{20}$$

---

۱ نمره

★ پرسش جایزه دار:

تابع $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x)=e^{-x}f(x)$ را در نظر می‌گیریم که بر $[a,b]$ دو بار مشتق‌پذیر بوده و حداقل سه ریشه‌ی متمایز در این بازه دارد. فرض کنیم $x_1, x_2, x_3\in[a,b]$ ریشه‌های متمایز g باشند در این صورت طبق قضیه‌ی رل $c_1\in(x_1,x_2)$ و $c_2\in(x_2,x_3)$ وجود دارند که $g'(c_1)=g'(c_2)=0$. درحالیکه

$$g'(x)=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)$$

۰/۳ نمره

با استفاده دوباره از قضیه‌ی رل $c\in(c_1,c_2)$ وجود دارند که $g''(c)=0$.

چون

$$g''(x)=\left(-2f'(x)+f(x)+f''(x)\right)e^{-x}$$

می‌باشد در نتیجه معادله‌ی $f(x)+f''(x)=2f'(x)$ حداقل یک ریشه‌ی c در $[a,b]$ دارد.

۰/۷ نمره

• هر سؤال ارزش یک نمره دارد.

سمیع اله شبنده

۹۴/۸/۲۶