فصل اول

استدلال در هندسه ۱

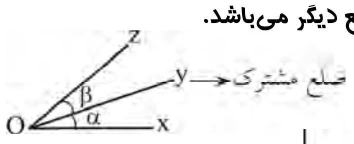
مباحث این فصل :

① زوایا و قضایا	② چهار ضلعی محدب
③ مثلث متساوی الساقین	④ مثلث متساوی الاضلاع
⑤ مثلث قائم الزاویه	⑥ مثلث‌های هم نهشت
⑦ عمودمنصف‌های مثلث	⑧ نیمسازهای مثلث
⑨ زاویه بین نیمسازها	⑩ خم‌ها
⑪ انواع استدلال	⑫ چندضلعی‌ها
⑬ متوازی الاضلاع	⑭ متوازی الاضلاع‌های خاص

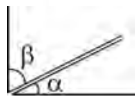
زوایا و قضایا

✪ **دو زاویه مجاور :** دو زاویه‌ای که در یک ضلع مشترک بوده و این ضلع مشترک مابین دو ضلع دیگر می‌باشد.

مانند زاویه‌های α و β :

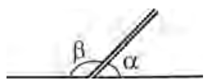


✪ **دو زاویه متمم :** دو زاویه‌ای که مجموعشان ۹۰° باشد را گویند .



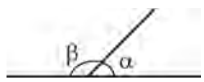
مانند : $\beta = \alpha$ ***متمم*** $= ۹۰ - \alpha$

✪ **دو زاویه مکمل :** دو زاویه‌ای که مجموعشان ۱۸۰° باشد را گویند .



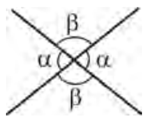
مانند : $\beta = \alpha$ ***مکمل*** $= ۱۸۰ - \alpha$

✪ **دو زاویه مجانب :** دو زاویه‌ی مجاور که مکمل نیز باشند را گویند .



مانند :

✪ **دو زاویه متقابل به رأس :** در هر دو خط متقاطع، زاویه‌های روبه‌رو را متقابل به رأس گویند که با هم برابرند :



⌛ **تست ۱ :** مجموع دو زاویه ۱۲۰° است، مجموع مکمل‌های آن دو زاویه چه‌قدر است؟

۱) ۲۴۰° ۲) ۱۲۰° ۳) ۱۸۰° ۴) ۳۰۰°

حل : $\alpha + \beta = ۱۲۰^\circ \longrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ مکمل} = ۱۸۰ - \alpha \\ \beta \text{ مکمل} = ۱۸۰ - \beta \end{cases} \Rightarrow (۱۸۰ - \alpha) + (۱۸۰ - \beta) = ۳۶۰ - (\alpha + \beta) = ۳۶۰ - ۱۲۰ = ۲۴۰$

⌛ **تست ۲ :** زوایای **A** و **B** مکمل‌اند، اگر زاویه‌ی **A** دو برابر زاویه‌ی **B** باشد، حاصل **۲A − ۳B** چه‌قدر است؟

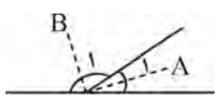
۱) ۹۰° ۲) ۳۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۶۰°

حل : $\begin{cases} A + B = ۱۸۰ \\ A = ۲B \end{cases} \longrightarrow ۲B + B = ۱۸۰ \Rightarrow B = ۶۰ \longrightarrow A = ۲B = ۱۲۰ \Longrightarrow ۲A - ۳B = ۲۴۰ - ۱۸۰ = ۶۰$

⌛ **تست ۳ :** دو زاویه‌ی **A** و **B** مجانب‌اند. زاویه‌ی بین نیمساز **A** و نیمساز **B** چند درجه است؟

۱) ۴۵° ۲) ۹۰° ۳) ۱۸۰° ۴) نامعلوم

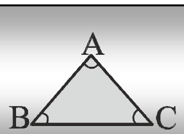
حل :



$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ \Longrightarrow \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ = \frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{۲} = ۹۰^\circ$

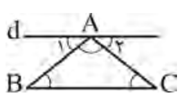
قضیه۱ :

مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° می‌باشد.



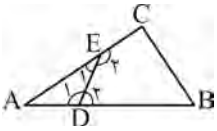
$\longrightarrow \boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ}$

☑ **اثبات :** از رأس A موازی ضلع BC خطی رسم می‌کنیم بر اساس قضیه‌ی خطوط موازی و مورب خواهیم داشت :



$d \parallel BC \longrightarrow \begin{cases} \hat{A}_۱ = B \\ \hat{A}_۲ = C \end{cases}$ & می‌دانیم : $\hat{A}_۱ + \hat{A} + \hat{A}_۲ = ۱۸۰^\circ \longrightarrow B + A + C = ۱۸۰^\circ$ ☑

تست : در شکل مقابل $\hat{E}_۱ = \hat{B}$ ، کدام رابطه صحیح است؟ (مثال ۱۰ ص۱۱ هندسه ۱)

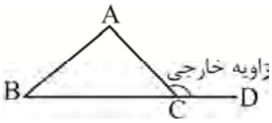


۱) $D_۱ = C$ ۲) $E_۲ = A$

۳) $D_۲ = C$ ۴) $E_۲ = D_۱$

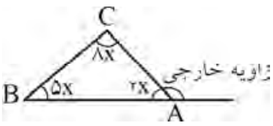
حل : $\begin{cases} A + E_۱ + D_۱ = ۱۸۰ \\ A + B + C = ۱۸۰ \end{cases} \longrightarrow A + \cancel{E_۱} + D_۱ = A + \cancel{B} + C \Rightarrow D_۱ = C$

✪ زاویه‌ی خارجی مثلث : زاویه‌ای که از امتداد یک ضلع مثلث تشکیل می‌شود، زاویه‌ی خارجی مثلث نامیده می‌شود.



تست ۱ : زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۸ ، ۵ و ۲ می‌باشد، اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی این مثلث چند درجه است؟

۱) ۷۲° ۲) ۸۲° ۳) ۸۴° ۴) ۶۶° (سراسری تجربی ۸۰)

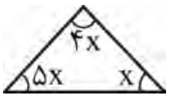


حل : $A + B + C = ۱۸۰^\circ \longrightarrow ۲x + ۵x + ۸x = ۱۸۰^\circ \longrightarrow ۱۵x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۲^\circ$

کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی $= ۱۸۰ -$ (بزرگ‌ترین زاویه‌ی داخلی) $= ۱۸۰ - ۸x = ۱۸۰ - ۹۶ = ۸۴^\circ$

تست ۲ : زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۱ ، ۴ و ۵ است، نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی الاضلاع ۲) قائم‌الزاویه ۳) منفرجه‌الزاویه ۴) نامشخص



حل : $x + ۴x + ۵x = ۱۸۰^\circ \longrightarrow ۱۰x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۸^\circ$

$\longrightarrow$ ***زوایا :*** $\{۱۸^\circ , ۵ \times ۱۸ = ۹۰^\circ , ۴ \times ۱۸ = ۷۲^\circ\} \longrightarrow$ قائم‌الزاویه

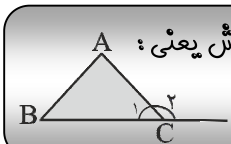
تست ۳ : زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۲ ، ۷ و ۹ است، مجموع دو زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۱۱۰° ۲) ۱۰۰° ۳) ۹۰° ۴) ۸۰°

حل : $۲x + ۷x + ۹x = ۱۸x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰^\circ \longrightarrow$ ***دو زاویه‌ی کوچک‌تر :*** $\begin{cases} ۲x = ۲۰^\circ \\ ۷x = ۷۰^\circ \end{cases} \Rightarrow$ جمع $= ۹۰^\circ$

قضیه ۲ :

در هر مثلث، هر زاویه‌ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش یعنی :

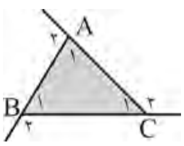


$\Longrightarrow \boxed{\hat{C}_۲ = \hat{A} + \hat{B}}$

☑ اثبات : زاویه‌ی $C_۲$ مکمل $C_۱$ می‌باشد، یعنی : $C_۲ = ۱۸۰^\circ - C_۱$ از طرفی $A + B + C_۱ = ۱۸۰^\circ$ لذا داریم : $A + B = ۱۸۰^\circ - C_۱ = C_۲$

قضیه ۳ :

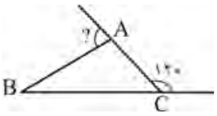
در هر مثلث مجموع زوایای خارجی برابر با ۳۶۰° است.



☑ اثبات : $\Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_۲ = \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ \\ \hat{B}_۲ = \hat{A}_۱ + \hat{C}_۱ \\ \hat{C}_۲ = \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ \end{cases} \Longrightarrow \hat{A}_۲ + \hat{B}_۲ + \hat{C}_۲ = ۲(\hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱) = ۲ \times ۱۸۰^\circ = ۳۶۰^\circ$

نتیجه :کلاً در هر چندضلعی محدب، مجموع زوایای خارجی برابر با ۳۶۰° می‌باشد.

تست ۱ : در شکل مقابل زاویه‌ی خارجی **C**، ۱۲۰° و زاویه‌ی **A** دو برابر **B** می‌باشد، زاویه‌ی خارجی **A** کدام است؟

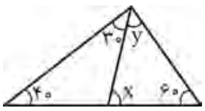


۱) ۸۰° ۲) ۱۰۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۴۰°

حل :

$$\begin{cases} A+B=۱۲۰^\circ \\ A=۲B \end{cases} \longrightarrow ۲B+B=۱۲۰^\circ \Rightarrow B=۴۰^\circ \longrightarrow A=۸۰^\circ \Longrightarrow ?=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

تست ۲ : در شکل مقابل $x+y$ کدام است؟ (تمرین ۹ ص ۱۳ هندسه ۱)



۱) ۹۰ ۲) ۱۱۰
۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۰

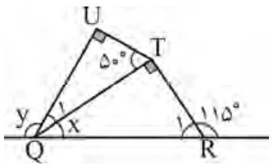
حل :

$$\begin{cases} x=۳۰+۴۰=۷۰ \\ y=۱۸۰-x-۶۰=۱۸۰-۷۰-۶۰=۵۰ \end{cases} \longrightarrow x+y=۱۲۰$$

راه حل ساده‌تر :

$$x+y+۶۰=۱۸۰^\circ \Rightarrow x+y=۱۲۰^\circ$$

تست ۳ : در شکل مقابل $x+y$ چه‌قدر است؟ (تمرین ۹ ص ۱۳ هندسه ۱)



۱) ۹۰ ۲) ۱۲۰
۳) ۱۳۵ ۴) ۱۴۰

حل :

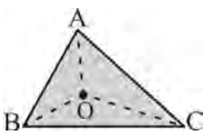
$$R_۱=۱۸۰-۱۱۵=۶۵ \longrightarrow x+۶۵=۹۰ \Rightarrow x=۲۵$$

$$Q_۱=۹۰-۵۰=۴۰ \longrightarrow y=۱۸۰-x-Q_۱=۱۸۰-۲۵-۴۰=۱۱۵ \Longrightarrow x+y=۲۵+۱۱۵=۱۴۰$$

راه حل ساده‌تر :

$$\begin{cases} x+y+Q_۱=۱۸۰^\circ \text{ (نیم‌صفحه)} \\ Q_۱=۹۰-۵۰=۴۰^\circ \end{cases} \Rightarrow x+y=۱۴۰^\circ$$

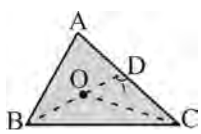
تست ۴ : در داخل مثلث **ABC** نقطه دلخواه **O** را به دو رأس **B** و **C** وصل کرده اگر $\hat{C}=۳۰^\circ$ و $\hat{B}=۸۰^\circ$ ، کدام رابطه درست است؟



۱) $۳۰^\circ<B\hat{O}C<۷۰^\circ$ ۲) $۹۰^\circ<B\hat{O}C<۱۵۰^\circ$
۳) $۷۰^\circ<B\hat{O}C<۱۸۰^\circ$ ۴) $۹۰^\circ<B\hat{O}C<۱۸۰^\circ$

حل : محل تلاقی امتداد BO با ضلع مثلث را D می‌نامیم، لذا داریم :

$$\hat{A}=۱۸۰-(\hat{B}+\hat{C})=۱۸۰-(۸۰+۳۰)=۷۰$$

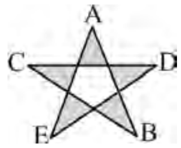


$$\begin{cases} \hat{D}_۱>A & \text{چون } \hat{D}_۱ \text{ زاویه‌ی خارجی مثلث ABD است :} \\ B\hat{O}C>D_۱ & \text{چون } B\hat{O}C \text{ زاویه‌ی خارجی مثلث ODC است :} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow B\hat{O}C>A \longrightarrow B\hat{O}C>۷۰^\circ$$

ضمناً هر زاویه‌ی مثلث از ۱۸۰° نیز کوچک‌تر است، لذا داریم : $۷۰<B\hat{O}C<۱۸۰$

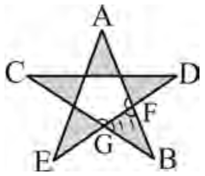
تست ۵ : در شکل مقابل مجموع زوایای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و $\hat{D}$ و $\hat{E}$ کدام است؟



۱) ۱۸۰° ۲) ۲۷۰°

۳) کم‌تر از ۱۸۰° ۴) بین ۱۸۰° و ۲۷۰°

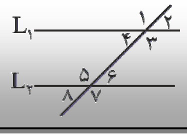
حل :



$$\begin{cases} \hat{F}_۱ = \hat{A} + \hat{E} \\ \hat{G}_۱ = \hat{C} + \hat{D} \\ \hat{F}_۱ + \hat{G}_۱ + \hat{B} = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A} + \hat{E} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ$$

قضیه ۴: خطوط موازی

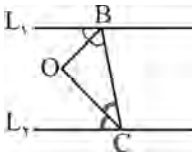
اگر دو خط موازی را یک خط مورب قطع کند، ۸ زاویه پدید می‌آید که چهار زاویه‌ی حاده، با هم برابر و چهار زاویه‌ی منفرجه نیز با هم برابرند ؛ و مجموع هر زاویه‌ی حاده و هر زاویه‌ی منفرجه، ۱۸۰° است.



$$\Longrightarrow \begin{cases} \hat{۱} = \hat{۳} = \hat{۵} = \hat{۷} \\ \hat{۲} = \hat{۴} = \hat{۶} = \hat{۸} \end{cases} \quad \& \quad \hat{۱} + \hat{۲} = ۱۸۰^\circ$$

تست ۱ : در شکل مقابل $L_۱$ و $L_۲$ موازیند، OB و OC نیمساز دو زاویه‌ی B و C هستند.

زاویه‌ی $\hat{O}$ کدام است؟ (تمرین ۱۳ صفحه‌ی ۱۴ هندسه ۱)

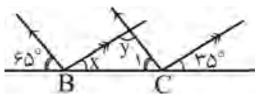


۱) حاده ۲) قائمه ۳) منفرجه ۴) نامشخص

حل :

$$\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\div ۲} \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ \longrightarrow \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۹۰^\circ \Longrightarrow \hat{E} = ۹۰^\circ$$

تست ۲ : در شکل مقابل $(y - x)$ چند درجه است؟ (تمرین ۹ صفحه‌ی ۱۳ هندسه ۱)



۱) ۳۵ ۲) ۴۵

۳) ۵۵ ۴) ۶۵

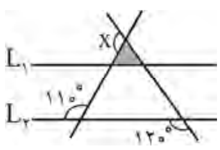
حل :

به علت خطوط موازی و مورب:

$$\begin{cases} \hat{C}_۱ = ۶۵^\circ \\ \hat{x} = ۳۵^\circ \end{cases} \longrightarrow \hat{x} + \hat{y} + \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ \longrightarrow ۳۵ + \hat{y} + ۶۵ = ۱۸۰^\circ$$

$$\longrightarrow \hat{y} = ۸۰ \Rightarrow \hat{y} - \hat{x} = ۴۵^\circ$$

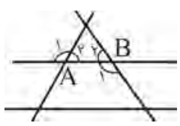
تست ۳ : اگر $L_۱ \| L_۲$ باشد، زاویه‌ی $\hat{x}$ چند درجه است؟ (تمرین ۹ ص۱۳ هندسه ۱)



۱) ۱۱۰ ۲) ۱۲۰

۳) ۱۳۰ ۴) ۱۴۰

حل :



$$\Longrightarrow \begin{cases} \hat{A}_۱ = ۱۱۰ \longrightarrow \hat{A}_۲ = ۷۰ \\ \hat{B}_۱ = ۱۲۰ \longrightarrow \hat{B}_۲ = ۶۰ \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ ***زاویه‌ی خارجی :*** $\hat{x} = \hat{A}_۲ + \hat{B}_۲ = ۷۰ + ۶۰ = ۱۳۰^\circ$

چهار ضلعی محدب

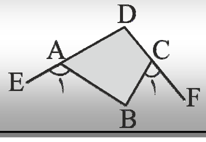
چهارضلعی که تمام زاویه‌های داخلی آن از ۱۸۰° کوچک‌تر باشد را گویند

یا

چهار ضلعی که با امتداد هر ضلع‌اش تمامی شکل در یک طرف آن خط واقع شود را گویند.

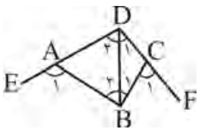
قضیه ۵ :

در هر چهارضلعی محدب، مجموع هر دو زاویه‌ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش :

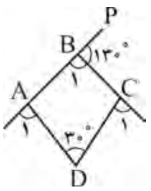


$\Longrightarrow \boxed{\hat{A}_۱+\hat{C}_۱=\hat{D}+\hat{B}}$

☑ **اثبات :** $\hat{A}_۱+\hat{C}_۱=(\hat{B}_۲+\hat{D}_۲)+(\hat{B}_۱+\hat{B}_۲)=\hat{B}+\hat{D} \longleftarrow \begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{B}_۲+\hat{D}_۲\\ \hat{C}_۱=\hat{B}_۱+\hat{D}_۱\end{cases} \Leftarrow$



⌛ **تست :** با توجه به شکل مقابل مجموع زوایای خارجی **A** و **C** کدام است؟ *(تمرین ۱۲ ص۱۴ هندسه ۱)*



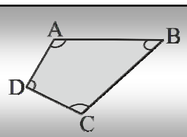
۱) ۵۰ ۲) ۸۰

۳) ۱۱۰ ۴) ۱۶۰

حل : **داریم :** $B_۱=۱۸۰-۱۳۰=۵۰ \Rightarrow A_۱+C_۱=\hat{B}_۱+\hat{D}=۵۰+۳۰=۸۰^\circ$

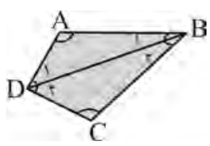
قضیه۶ :

مجموع زوایای داخلی هر چهار ضلعی، ۳۶۰° می‌باشد.



$\Longrightarrow \boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ}$

☑ **اثبات :** کافی است یکی از اقطار چهار ضلعی را رسم کرده و مجموع زوایای داخلی هر مثلث را بنویسیم :



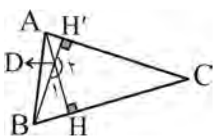
$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}_۱+\hat{D}_۱=۱۸۰^\circ\\ \hat{C}+\hat{B}_۲+\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ\end{cases} \xrightarrow{\oplus} \hat{A}+\hat{B}_۱+\hat{D}_۱+\hat{C}+\hat{B}_۲+\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ+۱۸۰^\circ$$

$$\longrightarrow \hat{A}+(\hat{B}_۱+\hat{B}_۲)+\hat{C}+(\hat{D}_۱+\hat{D}_۲)=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$$

⌛ **تست :** در یک مثلث $\mathbf{A=۸۰^\circ}$ و $\mathbf{B=۶۰^\circ}$ می‌باشد، زاویه بین ارتفاع **AH** و ارتفاع $\mathbf{BH'}$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۸۴)*

۱) ۳۰° ۲) ۴۰° ۳) ۶۰° ۴) ۸۰°

حل : $\begin{cases}A=۸۰\\ B=۶۰\end{cases} \longrightarrow C=۱۸۰-(A+B)=۱۸۰-(۸۰+۶۰)=۴۰$

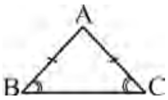


از طرفی : $\hat{D}_۲+\hat{H}'+\hat{C}+\hat{H}=۳۶۰ \longrightarrow \hat{D}_۲+۹۰+۴۰+۹۰=۳۶۰$

$$\longrightarrow \hat{D}_۲=۳۶۰-۲۲۰=۱۴۰ \Longrightarrow \hat{D}_۱=۱۸۰-۱۴۰=۴۰$$

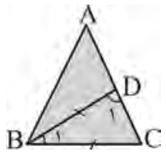
مثلث متساوی الساقین

تعریف : مثلثی که دارای دو ضلع مساوی باشد را مثلث متساوی‌الساقین گویند.



خاصیت ۱ : زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند : $AB = AC \Rightarrow \hat C = \hat B$

مثال ۱ : اگر در مثلث متساوی‌الساقین ABC طول نیمساز داخلی $\hat B$ برابر طول قاعده‌ی BC باشد، زاویه‌ی $\hat A$ را بیابید.

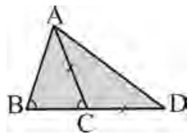


حل :

$$\begin{cases}\hat A = ۱۸۰^\circ - ۲\hat C \\ BD = BC \longrightarrow \hat C = \hat D_۱ \longrightarrow \hat B_۱ = ۱۸۰^\circ - ۲\hat C\end{cases} \Longrightarrow \hat A = \hat B_۱$$

$$\hat A + ۲\hat B = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat A + ۴\hat B_۱ = ۱۸۰^\circ \longrightarrow \hat A + ۴\hat A = ۱۸۰^\circ \longrightarrow ۵\hat A = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat A = ۳۶^\circ$$

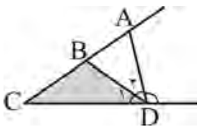
مثال ۲ : در مثلث متساوی‌الساقین ABC با زاویه‌ی رأس $A = ۱۶^\circ$ قاعده‌ی BC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. زاویه D چه‌قدر است؟



حل :

$$B = C = \frac{۱۸۰ - A}{۲} = \frac{۱۸۰ - ۱۶}{۲} = \frac{۱۶۴}{۲} = ۸۲$$

$$C = A + D \xrightarrow{A=D} C = ۲D \longrightarrow ۸۲ = ۲D \Rightarrow D = ۴۱^\circ$$



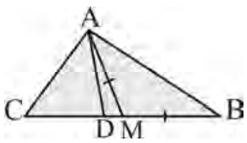
مثال ۳ : اگر در شکل مقابل $BC = BD = AD$ باشد و $C = ۲۰^\circ$ باشد، زاویه‌ی $\hat D$ چند درجه است؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰

حل : $\hat D_۱ = \hat C = ۲۰^\circ \longrightarrow B_{\text{خارجی}} = C + \hat D_۱ = ۴۰^\circ \Rightarrow \hat A = ۴۰^\circ \longrightarrow \hat D = \hat A + \hat C = ۶۰^\circ$

تست : در شکل مقابل، AD نیمساز و $AM = MB$ ، اگر $B = ۳۰^\circ$ و $DAM = ۲۰^\circ$ باشد زاویه‌ی $\hat C$ چه‌قدر است؟ *(آزاد تجربی ۸۲)*

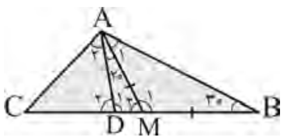
۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۲۰



حل :

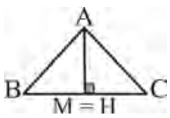
$$MB = AM \longrightarrow \hat A_۱ = ۳۰^\circ \longrightarrow \hat M_۱ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat M_۲ = ۶۰^\circ$$

$$\hat D_۱ = ۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ - \hat M_۲ = ۱۰۰^\circ \longrightarrow \hat D_۲ = ۱۸۰^\circ - \hat D_۱ = ۸۰^\circ$$



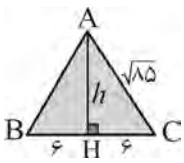
از طرفی چون AD نیمساز زاویه‌ی A است، لذا : $A_۲ = ۲۰^\circ + ۳۰^\circ = ۵۰^\circ$ بنابراین :

$$\Longrightarrow \hat C = ۱۸۰^\circ - \hat D_۲ - \hat A_۲ = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ - ۵۰^\circ = ۵۰^\circ$$



خاصیت ۲ : ارتفاع و نیمساز و عمودمنصف و میانه‌ی صادره از رأس A بر هم منطبق‌اند.

تست : طول ساق یک مثلث متساوی‌الساقین $\sqrt{۸۵}$ و طول قاعده‌ی آن ۱۲ است، مساحت مثلث چه‌قدر است؟ *(سراسری تجربی ۸۰)*



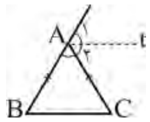
۱) $۲۴\sqrt{۳}$ ۲) ۴۲ ۳) $۳۰\sqrt{۲}$ ۴) ۴۸

حل :

$$AC^۲ = AH^۲ + HC^۲ \longrightarrow ۸۵ = h^۲ + ۳۶ \longrightarrow h^۲ = ۴۹ \Rightarrow h = ۷$$

$$\Longrightarrow S = \frac{۱}{۲} BC \times AH = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۷ = ۴۲$$

خاصیت ۳ : نیمساز خارجی رأس همواره با قاعده موازیست.

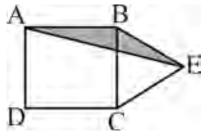


$$\longrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases} \Rightarrow At \parallel BC$$

تست‌های نمونه :

تست ۱ : مربع **ABCD** و مثلث متساوی‌الاضلاع $\overset{\Delta}{BEC}$ در شکل داده شده است، زاویه‌ی $D\hat{A}E$ چه‌قدر است؟

(تمرین ۲ ص ۱۳ هندسه ۱ و آزاد پزشکی ۷۷)

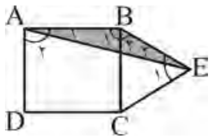


۱) ۷۵ ۲) ۶۰

۳) ۴۵ ۴) ۷۰

حل :

$$\begin{cases} AB = BC \\ BC = BE \end{cases} \longrightarrow AB = BE \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}_1 \quad \& \quad \begin{cases} \hat{B}_1 = 90^\circ \\ \hat{B}_2 = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 150^\circ$$

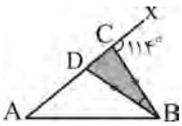


$$\longrightarrow \hat{A}_1 + \hat{E}_2 = 180^\circ - \hat{B} = 30^\circ \longrightarrow \hat{A}_1 = \frac{30}{2} = 15^\circ$$

$$\Longrightarrow D\hat{A}E = \hat{A}_2 = 90 - A_1 = 90 - 15 = 75^\circ$$

تست ۲ : در شکل مقابل زاویه‌ی $B\hat{C}X = 114^\circ$، زاویه‌ی $C\hat{B}D$ چند درجه است؟

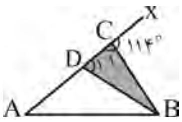
(سراسری تجربی ۸۴)



۱) ۴۲ ۲) ۴۶

۳) ۴۸ ۴) ۵۲

حل :

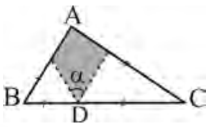


$$\hat{C}_1 = 180 - 114 = 66 = \hat{D}_1 \longrightarrow \hat{D}_1 + \hat{C}_1 + \hat{B} = 180^\circ$$

$$\longrightarrow 66 + 66 + \hat{B} = 180^\circ \longrightarrow \hat{B} = 180 - 132 = 48^\circ$$

تست ۳ : در شکل مقابل زاویه‌ی $\hat{A} = 112^\circ$ و دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند، زاویه‌ی $\hat{\alpha}$ چند درجه است؟

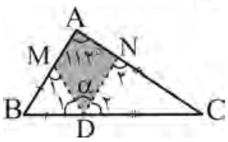
(سراسری تجربی ۸۵)



۱) ۳۲ ۲) ۳۴

۳) ۳۶ ۴) ۳۸

حل :



$$\Longrightarrow \begin{cases} \hat{B} + \hat{M}_1 + \hat{D}_1 = 180 \xrightarrow{\hat{M}_1 = \hat{D}_1} \hat{B} = 180 - 2\hat{D}_1 \quad (1) \\ \hat{C} + \hat{N}_2 + \hat{D}_2 = 180 \xrightarrow{\hat{N}_2 = \hat{D}_2} \hat{C} = 180 - 2\hat{D}_2 \quad (2) \end{cases}$$

از طرفی : $\hat{B} + \hat{C} = 180 - \hat{A} = 180 - 112 = 68^\circ \Rightarrow (1) + (2) : \hat{B} + \hat{C} = (180 - 2\hat{D}_1) + (180 - 2\hat{D}_2) = 68^\circ$

$$\longrightarrow 360 - 2(\hat{D}_1 + \hat{D}_2) = 68^\circ \longrightarrow \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 146^\circ \longrightarrow \hat{\alpha} = 180 - (\hat{D}_1 + \hat{D}_2) = 180 - 146 = 34^\circ$$

راه حل خلاصه‌تر : $\hat{M}_1 = \hat{D}_1 \ ,\ \hat{N}_2 = \hat{D}_2 \quad (1)$ و $\hat{M}_1 + \hat{N}_2 = \hat{A} + \hat{\alpha} = 112 + \alpha$ ***: بنا به قضیه ۵***

$$\longrightarrow \hat{D}_1 + \hat{D}_2 + \hat{\alpha} = 180^\circ \xrightarrow{(1)} \hat{M}_1 + \hat{N}_2 = 180^\circ - \hat{\alpha} \longrightarrow \hat{M}_1 + \hat{N}_2 = 112 + \hat{\alpha} = 180^\circ - \hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\alpha} = 34^\circ$$

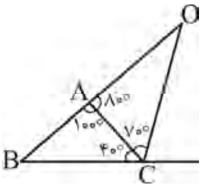
راه تستی : در تست فوق رابطه‌ی $\boxed{\alpha = 90 - \frac{\hat{A}}{2}}$ ثابت می‌شود. یعنی : $\hat{\alpha} = 90 - \frac{112}{2} = 90 - 56 = 36^\circ$

راه حل سه سوت : چون برای زاویه‌ی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ محدودیتی نداریم و باید $\hat{B} + \hat{C} = 68^\circ$ باشد. فرض می‌کنیم : $\hat{B} = 40^\circ$ و $\hat{C} = 28^\circ$

آن‌گاه : $\hat{D}_1 = 70^\circ$ و $\hat{D}_2 = 76^\circ \Longrightarrow \hat{\alpha} = 180 - 70 - 76 = 34^\circ$

تست ۴ : یکی از زوایای مثلث متساوی‌الساقینی 100° است، نیمساز خارجی یکی از زاویه‌ها، ضلع مقابل‌اش را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

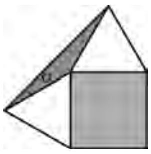
۱) ۲۵   ۲) ۳۰   ۳) ۳۵   ۴) ۴۰



حل : قطعاً زاویه‌ی رأس باید 100° باشد، نه دو زاویه‌ی قاعده. زیرا جمع‌شان از 180° بیشتر می‌شود.

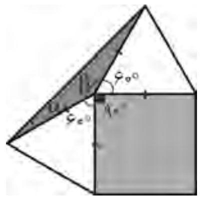
$$\hat{C}=\frac{180-100}{2}=40^\circ \quad \& \quad \hat{C}_{\text{خارجی}}=140 \Rightarrow \hat{O}=180-(80+70)=30$$

تست ۵ : در شکل زیر دو مثلث ساخته‌شده روی اضلاع مربع، متساوی‌الاضلاع هستند، زاویه‌ی $\hat{\alpha}$ چه‌قدر است؟



۱) ۵   ۲) ۱۰   ۳) ۱۵   ۴) ۲۰

(تمرین ۳ صفحه‌ی ۱۲)

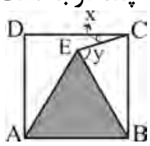


حل :

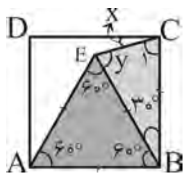
$$\hat{\beta}=360-(90+60+60)=150^\circ$$

$$\Longrightarrow 2\hat{\alpha}=180-\hat{\beta}=180-150=30^\circ \longrightarrow \hat{\alpha}=15^\circ$$

تست ۶ : در شکل زیر چهارضلعی مربع و مثلث **AEB** متساوی‌الاضلاع می‌باشد، حاصل $y-x$ چند درجه است؟ (مثال ۶ صفحه‌ی ۸ هندسه ۱)



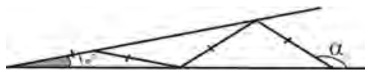
۱) ۴۰   ۲) ۵۰   ۳) ۶۰   ۴) ۷۰



حل :

$$\Longrightarrow \begin{cases}\hat{y}=\hat{C}_1=\dfrac{180-30}{2}=75\\ \hat{x}=90-\hat{C}_1=90-75=15\end{cases} \Rightarrow \hat{y}-\hat{x}=60$$

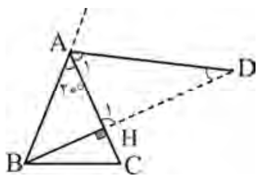
تست ۷ : در شکل مقابل، زاویه‌ی $\hat{\alpha}$ کدام است؟



۱) ۱۱۰   ۲) ۱۲۰   ۳) ۱۴۰   ۴) ۱۵۰

حل : اگر از چپ به راست به‌ترتیب زوایا را حساب کنیم، خواهیم داشت :

تست ۸ : زاویه‌ی رأس مثلث متساوی‌الساقین مقابل 20° می‌باشد، زاویه‌ی بین نیمساز خارجی زاویه‌ی رأس **A** و ارتفاع **BH** کدام است؟

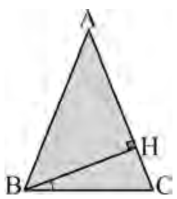


۱) ۵   ۲) ۱۰   ۳) ۱۵   ۴) ۲۰

حل :

$$\hat{A}_1=\frac{180-20}{2}=80^\circ \longrightarrow \hat{H}_1=90^\circ \longrightarrow \hat{D}+\hat{A}_1=90^\circ \longrightarrow \hat{D}+80=90^\circ \Rightarrow \hat{D}=10^\circ$$

مثال : در یک مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر یک ساق نصف آن ساق است. زاویه‌ی بین این ارتفاع و قاعده کدام است؟



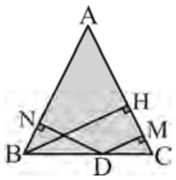
۱) ۳۰   ۲) ۱۵   ۳) ۲۰   ۴) ۴۵

حل :

$$BH=\frac{1}{2}AB \longrightarrow \hat{A}=30^\circ \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=75^\circ$$

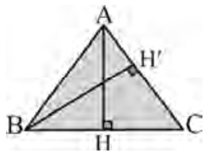
$$\longrightarrow \hat{B}_1+\hat{C}=90^\circ \longrightarrow \hat{B}_1=90-75=15^\circ$$

خاصیت ۴ : مجموع فاصله‌های هر نقطه بر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن برابر است با ارتفاع وارد بر ساق آن.



$$\Longrightarrow \boxed{BH = DM + DN}$$

مثال : در مثلثی به اضلاع ۵ ، ۵ و ۶ نقطه‌ی D ضلع بزرگ‌تر را به نسبت ۱ و ۳ تقسیم کرده است. مجموع فواصل D از دو ساق این مثلث چه‌قدر است؟



حل : مطابق خاصیت فوق داریم :

$$DM + DN = BH' = h_b$$

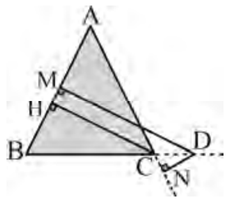
حال، محاسبه‌ی ارتفاع وارد بر ساق :

$$AC^۲ = AH^۲ + HC^۲ \Rightarrow ۵^۲ = AH^۲ + ۳^۲$$

$$\longrightarrow AH^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \longrightarrow AH = ۴ \Rightarrow h_a = ۴$$

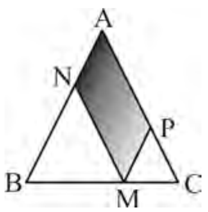
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} a \times h_a = \frac{۱}{۲} b \times h_b \longrightarrow a \times h_a = b \times h_b \longrightarrow ۶ \times ۴ = ۵ \times h_b \longrightarrow h_b = \frac{۲۴}{۵}$$

خاصیت ۵ : قدر مطلق تفاضل فواصل هر نقطه‌ی واقع بر امتداد قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن برابر است با اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق مثلث.



$$\Longrightarrow \boxed{CH = |DM - DN|}$$

خاصیت ۶ : هرگاه از نقطه‌ی M واقع بر قاعده‌ی BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC ، دو خط به موازات ساق‌ها رسم کنیم. تا ساق‌ها را در نقاط P و Q قطع کنند :

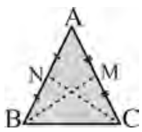


اولاً : مجموع این دو خط برابر یک ساق مثلث است، یعنی : $MP + MN = AC$

ثانیاً : چهارضلعی $ANMP$ متوازی‌الاضلاع بوده با محیط برابر مجموع دو ساق.

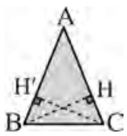
ثالثاً : اگر M وسط BC باشد، چهارضلعی $ANMP$ لوزی خواهد بود.

خاصیت ۷ : هر مثلث که دو میانه‌ی مساوی داشته باشد، متساوی‌الساقین است.



$$BM = CN \Rightarrow AB = AC$$

خاصیت ۸ : هر مثلث که دو ارتفاع مساوی داشته باشد، متساوی‌الساقین است.



$$BH = CH' \Rightarrow AB = AC$$

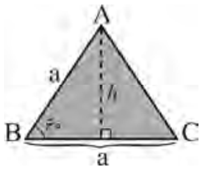
خاصیت ۹ : هر مثلث که دو نیمساز مساوی داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

$$BD = CD' \Rightarrow AB = AC$$

مثلث متساوی الاضلاع

تعریف : مثلثی که هر سه ضلع‌اش با هم برابر باشند را گویند.

خاصیت ۱ : هر زاویه‌ی این مثلث، ۶۰° می‌باشند :



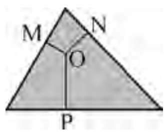
خاصیت ۲ : ارتفاع این مثلث : $h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ زیرا :

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{h}{a}$$

خاصیت ۳ : مساحت این مثلث : $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ زیرا :

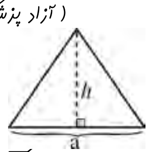
$$\textbf{مساحت} : S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{a \times h}{۲} = \frac{a}{۲} \times h = \frac{a}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

خاصیت ۴ : مجموع فواصل هر نقطه در درون این مثلث تا سه ضلع آن همواره برابر با ارتفاع است.



$$\Longrightarrow \boxed{OM + ON + OP = h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a}$$

تست ۱ : در مثلث متساوی‌الاضلاعی به مساحت $۸\sqrt{۳}$ طول ارتفاع کدام است؟ *(آزاد پزشکی ۸۳)*



۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

حل : $S = \frac{\cancel{\sqrt{۳}}}{۴}a^۲ = ۸\cancel{\sqrt{۳}} \longrightarrow a^۲ = ۳۲ \Rightarrow a = \sqrt{۱۶ \times ۲} = ۴\sqrt{۲} \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۶}$

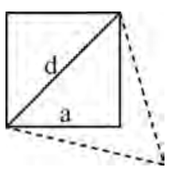
تست ۲ : در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\sqrt{۳}$، مساحت مثلث چند برابر محیط آن است؟ *(آزاد پزشکی ۸۴)*

۱) ۴ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

حل : $a = \sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۳ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴} \\ P = ۳a = ۳ \times \sqrt{۳} \end{cases} \Longrightarrow$ **نسبت :** $\frac{S}{P} = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}}{۳\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۴}$

تست ۳ : روی قطر مربعی به ضلع a، مثلث متساوی‌الاضلاعی می‌سازیم مساحت مثلث چند برابر مساحت مربع است؟ *(آزاد تجربی ۸۴)*

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$



حل : می‌دانیم : $\boxed{\text{قطر} = \sqrt{۲} \times \text{ضلع}} \longrightarrow d = \sqrt{۲}a$

$$\begin{cases} \textbf{مساحت مثلث} : S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times d^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times (\sqrt{۲}a)^۲ = \frac{\sqrt{۳}a^۲}{۲} \\ \textbf{مساحت مربع} : S' = a^۲ \end{cases} \Longrightarrow \textbf{نسبت} : \frac{S}{S'} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a^۲}{a^۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

راه حل سه سوت : $S_{\text{مثلث}}=\frac{(\sqrt{۲})^{۲}\times\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Longleftarrow S_{\text{مربع}}=۱ \Leftarrow d=\sqrt{۲} \longleftarrow a=۱$: فرض سه سوت

در این سوال هرچند راه حل سه سوت در روند محاسبه تغییر چندانی ایجاد نکرده، ولی $\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

سرعت شما را در محاسبات افزایش می‌دهد. (**چند ثانیه هم خودش غنیمته !!**)

⌛ **تست ۴ :** **مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۲\sqrt{۳}$ چند برابر ارتفاع آن است؟** *(آزاد تجربی ۸۵)*

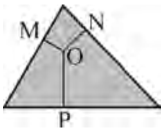
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۱

حل : $a=۲\sqrt{۳} \longrightarrow \begin{cases} S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} \\ h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a \end{cases} \Longrightarrow$ ***نسبت*** **:** $\frac{S}{h}=\frac{a}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$

⌛ **تست ۵ :** **نقطه‌ی M درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع $۶\sqrt{۳}$ قرار دارد، مجموع فواصل این نقطه از سه ضلع مثلث چه‌قدر است؟**

۱) ۶ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۶+\sqrt{۳}$ ۴) ۹ *(سراسری تجربی ۸۱)*

حل : $OM+ON+OP=h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۶\sqrt{۳}=۹ \Longrightarrow$



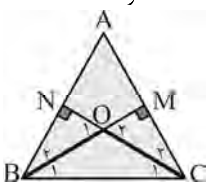
راه حل سه سوت : فرض کنیم موقع حل این تست به هر دلیلی ندانیم که $OM+ON+OP=h$

این‌جاست که چون برای انتخاب O محدودیتی نداریم. می‌توانیم نقطه‌ی O را منطبق بر یکی از رئوس مثلث، مثلاً

رأس A فرض کنیم که به سادگی نتیجه می شود : $OM=ON=۰$ و $OP=AH_a=h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

⌛ **مثال :** در مثلث متساوی‌الاضلاع **ABC** ، نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یکدیگر را در نقطه‌ی **O** قطع کرده‌اند،

ثابت کنید : $\frac{OB}{OM}=\frac{OC}{ON}=۲$



اثبات : $OB=OC \Longleftarrow$ مثلث OBC متساوی‌الساقین بوده. $\Leftarrow \hat{B}_۱=۳۰^\circ$ و $\hat{C}_۱=۳۰^\circ$

ضمناً مثلث‌های OBN و OCM قائم‌الزاویه خواهند شد زیرا : $\hat{B}_۱+\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow M=۹۰^\circ$

مشابهاً $N=۹۰^\circ$ پس بنا به حالت دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز) با هم، هم‌نهشت‌اند.

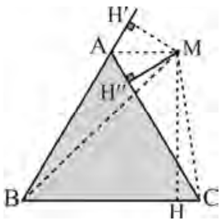
$$\begin{cases} \hat{B}_۲=\hat{C}_۲=۳۰^\circ \\ OB=OC \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ : \text{متقابل به رأس} \end{cases} \Longrightarrow \overset{\Delta}{OBN}=\overset{\Delta}{OCM} \Rightarrow OM=ON$$

هم‌چنین ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است. یعنی :

$$\begin{cases} \hat{C}_۲=۳۰^\circ \Rightarrow OM=\frac{۱}{۲}OC \\ B_۲=۳۰^\circ \Rightarrow ON=\frac{۱}{۲}OB \end{cases} \Longrightarrow \frac{OB}{ON}=\frac{OC}{OM}=۲$$

خاصیت ۵ : در هر مثلث متساوی‌الاضلاع میانه و ارتفاع و نیمساز و عمود منصف هر ضلع بر هم منطبق‌اند و نیز محل برخورد ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و عمود منصف‌ها بر هم منطبق‌اند.

مثال : در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الاضلاع به ضلع a و M نقطه‌ای دلخواه می‌باشد، مقدار $MH + MH' - MH''$ را بیابید.



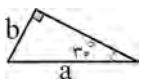
حل :

$$S_{ABC} = S_{AMB} + S_{MBC} - S_{AMC} = \frac{MH' \times a}{۲} + \frac{MH \times a}{۲} - \frac{MH'' \times a}{۲}$$

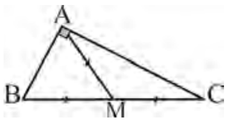
$$= \frac{a}{۲}(MH + MH' - MH'') \longrightarrow MH + MH' - MH'' = \frac{۲S}{a} = \frac{۲}{a} \times \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = h$$

مثلث قائم الزاویه

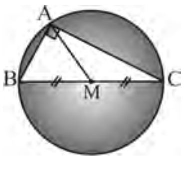
خاصیت ۱ : در مثلث قائم‌الزاویه ، ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰° نصف وتر است : $\Rightarrow b = \frac{a}{۲}$



خاصیت ۲ : در مثلث قائم‌الزاویه ، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است : $\Rightarrow AM = BM = MC$



خاصیت ۳ : در مثلث قائم‌الزاویه ، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث وسط وتر است.



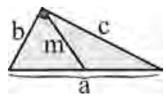
خاصیت ۴ : اعداد فیثاغورسی معروف عبارتند از :

$$\boxed{۳,۴,۵} \xrightarrow{\text{مضارب}} \boxed{۶,۸,۱۰} \quad \& \quad \boxed{۵,۱۲,۱۳} \quad \& \quad \boxed{a\ ,\ a\ ,a\sqrt{۲}}$$

تست : در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۸}$ طول میانه‌ی وارد بر وتر چه‌قدر است؟ *(آزاد تجربی ۸۱)*

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $۲\sqrt{۱۰}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$

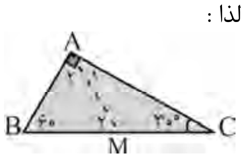
حل :



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ = (\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۸})^۲ = ۲ + ۸ = ۱۰ \longrightarrow a = \sqrt{۱۰} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

مثال ۳ : ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است.

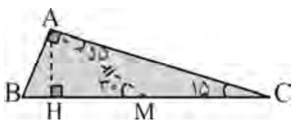
اثبات : M وسط BC است. می‌دانیم $AM = MC = BM$ پس مثلث AMC متساوی‌الساقین خواهد بود. لذا :



$$\hat{C} = \hat{A}_۱ = ۳۰^\circ \Longrightarrow \hat{A}_۲ = ۶۰ \ ,\ \hat{M}_۲ = \hat{C} + \hat{A}_۱ = ۶۰$$

بنابراین مثلث AMB متساوی‌الاضلاع بوده و خواهیم داشت : $AM = BM = \frac{BC}{۲}$

مثال ۴ : ثابت کنید اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یک زاویه‌ی حاده ۱۵° باشد. آن‌گاه ارتفاع وارد بر وتر ربع ($\frac{۱}{۴}$) وتر است.



اثبات : M وسط BC است. پس $AM = MC = MB$ در نتیجه : مثلث AMC متساوی‌الساقین

و خواهیم داشت : $A\widehat{M}B = ۳۰^\circ$

حال در مثلث AMH طبق نکته‌ی بالا ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰ درجه‌ی $A\widehat{M}H$ برابر نصف وتر (AM) خواهد بود یعنی :

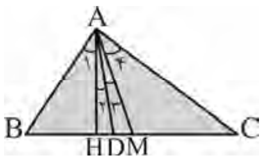
$$AH=\frac{1}{2}AM=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}BC)=\frac{1}{4}BC$$

⌛ **مثال :** در مثلثی یکی از زوایا 30° و تفاضل دو زاویه‌ی دیگر نیز 30° می‌باشد. نوع مثلث را مشخص کنید.

حل : $\begin{cases} A=30 \Rightarrow B+C=150 \\ B-C=30 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} B=90 \\ C=60 \end{cases} \Rightarrow$ مثلث قائم الزاویه می‌باشد.

خاصیت ۵ : در مثلث قائم‌الزاویه ABC پاره‌خط‌های AH ، AD و AM به ترتیب ارتفاع، نیمساز و میانه وارد بر وتر BC هستند

در این صورت روابط زیر برقرارند :



$$\Longrightarrow \begin{cases} \hat{A}_1=\hat{A}_4=\hat{C} & \text{زاویه‌ی حاده کوچک‌تر} \\ \hat{A}_2=\hat{A}_3 \\ \hat{A}_2+\hat{A}_3+\hat{A}_4=\hat{B} & \text{زاویه‌ی حاده بزرگ‌تر} \end{cases}$$

⌛ **مثال :** در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر 16° است. کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث چند درجه است؟

راه اول : $\begin{cases} A=90 \\ B>C \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} B+C=90 \\ B-C=16 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} 2B=106 \Rightarrow B=53^\circ \Rightarrow C=37^\circ$

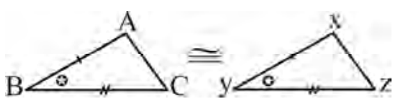
راه دوم : با توجه به نکته فوق داریم : $C=A_1=A_4=\frac{90-16}{2}=\frac{74}{2}=37^\circ$

مثلث‌های همنهشت

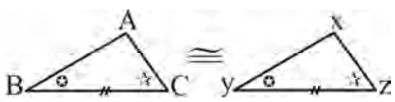
✪ **دو مثلث همنهشت :** دو مثلثی را گویند که دقیقاً بر هم منطبق شوند و یکدیگر را بپوشانند ✪

✪ حالت‌های تساوی دو مثلث :

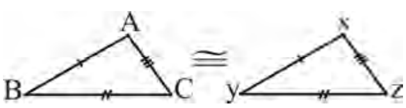
۱ـ حالت (ض‌زض) : هرگاه دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از یک مثلث، با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.



۲ـ حالت (زض‌ز) : هرگاه دو زاویه و ضلع بین آن ها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.



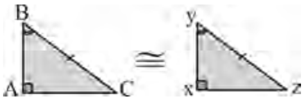
۳ـ حالت (ض‌ض‌ض) : هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.



حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه :

۱ـ تساوی وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه :

۲ـ تساوی وتر و یک زاویه‌ی حاده :



۳ـ تساوی یک ضلع زاویه‌ی قائمه و یک زاویه‌ی حاده :

حالت هم‌نهشتی دو مثلث متساوی الساقین : *در حالت تساوی یک ضلع و یک زاویه نظیر دو مثلث متساوی‌اند.*

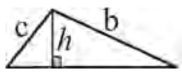
✪ حالاتی که مثلث مشخص نمی‌شود :

① با معلوم بودن سه زاویه نمی‌توان مثلث را مشخص نمود !

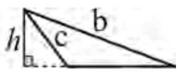
مانند تمامی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع که هر سه زاویه‌ی آن‌ها 60° است اما با اضلاع متفاوت. *(فعالیت ۱ صفحه‌ی ۲۱ هندسه ۱)*

② اگر از یک مثلث دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم معلوم باشد، دو مثلث مشخص خواهد شد زیرا :

با توجه به این که ارتفاع در داخل مثلث یا خارج مثلث باشد، دو نوع جواب خواهیم داشت، به صورت :



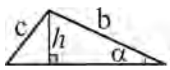
یا



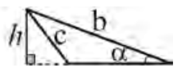
(فعالیت ۲ صفحه‌ی ۲۱ هندسه ۱)

③ اگر از یک مثلث دو ضلع و زاویه‌ی مقابل به یکی از دو ضلع معلوم باشد، دو مثلث مشخص خواهد شد زیرا :

با توجه به این که ارتفاع در داخل مثلث یا خارج مثلث باشد، دو نوع جواب خواهیم داشت، به صورت :

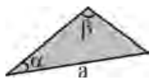


یا



⌛ **تمرین :** آیا با معلوم بودن یک ضلع و دو زاویه از مثلث که یکی غیر مجاور باشد، مثلث مشخص خواهد شد؟ *(فعالیت ۳ ص ۲۱ هندسه ۱)*

جواب : بله، زیرا داریم :

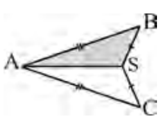


که با معلوم بودن دو زاویه، زاویه‌ی سوم به‌دست می‌آید و حالت دو زاویه و ضلع بین (زضز) از هم‌نهشتی‌ها اتفاق خواهد افتاد.

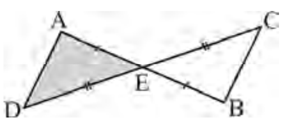
مسائل منتخب ص ۲۳ الی ۲۷ کتاب درسی

⌛ **مسأله ۱ :** دلیل هم‌نهشتی هر کدام را بگویید : *(مسأله ۱ صفحه‌ی ۲۳)*

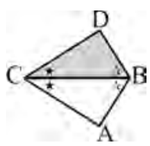
الف)



ب)



پ)

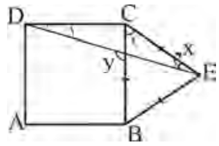


جواب : الف) دو ضلع مساوی که مشخص شده‌اند و AS ضلع سوم در هر مثلث مشترک است لذا حالت (ض‌ض‌ض) اتفاق افتاده است.

ب) دو ضلع مساوی که مشخص شده‌اند و دو زاویه‌ی متقابل به رأس در E با هم برابرند لذا حالت (ض‌زض) اتفاق افتاده است.

پ) دو زاویه‌ی مساوی که مشخص شده‌اند و BC ضلع بین دو زاویه در هر دو مثلث مشترک است لذا (زضز) اتفاق افتاده است.

مسأله ۲ : در شکل مقابل، **ABCD** یک مربع است، اندازه‌های **x** و **y** را بیابید.



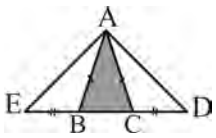
(مسأله ۱۳ صفحه‌ی ۲۶)

جواب : $\begin{cases} BC = CE \\ BC = DC \end{cases} \longrightarrow DC = CE \Rightarrow \overset{\Delta}{CDE}$: متساوی‌الساقین $\Longrightarrow \begin{cases} \hat{C} = ۶۰ + ۹۰ = ۱۵۰^\circ \\ \hat{x} = \hat{D}_۱ = \dfrac{۱۸۰ - ۱۵۰}{۲} = ۱۵^\circ \end{cases}$

ضمناً : y زاویه‌ی خارجی C و $D_۱$ می‌باشد، لذا : $\hat{y} = ۹۰ + ۱۵ = ۱۰۵$

مسأله ۳ : با توجه به شکل، ثابت کنید که :

(مسأله ۱۴ صفحه‌ی ۲۶ هندسه ۱)



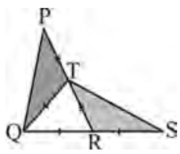
AD = AE

جواب : چون $AB = AC$ لذا مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده پس زوایای داخلی B و C با هم برابرند در نتیجه زوایای خارجی‌شان نیز با هم برابرند بنابراین :

$\begin{cases} AB = AC \\ \hat{B}_{\text{خارجی}} = \hat{C}_{\text{خارجی}} \\ EB = CD \end{cases} \xRightarrow{(\text{ضزض})} \overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{ACD} \longrightarrow AE = AD$

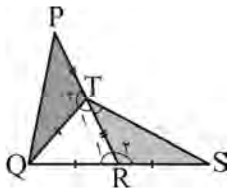
مسأله ۴ : در شکل روبه‌رو ، ثابت کنید :

$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{P\hat{T}Q = T\hat{R}S} \\ \mathbf{PQ = TS} \end{cases}$



(مسأله ۱۵ صفحه‌ی ۲۶)

جواب :

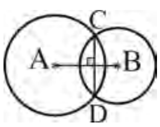


$QT = QR \longrightarrow \hat{T}_۱ = \hat{R}_۱ \Rightarrow \hat{T}_۲ = \hat{R}_۲$

$\Longrightarrow \begin{cases} QT = RS \\ \hat{T}_۲ = \hat{R}_۲ \\ PT = TR \end{cases} \xrightarrow{(\text{ضزض})} \overset{\Delta}{TPQ} \cong \overset{\Delta}{TRS} \Rightarrow PQ = TS$

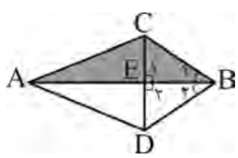
مسأله ۵ : دو دایره به مرکزهای **A** و **B** یکدیگر را در **C** و **D** قطع کرده‌اند :

(مسأله‌ی ۱۶ صفحه‌ی ۲۶)



الف) ثابت کنید : $A\hat{C}B = A\hat{D}B$

ب) ثابت کنید که AB ، عمودمنصف CD است.



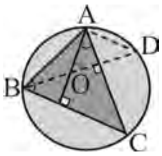
اثبات الف : $\begin{cases} AC = AD & \text{: شعاع‌های دایره‌ی بزرگ} \\ BC = BD & \text{: شعاع‌های دایره‌ی کوچک} \\ AB = AB & \text{: مشترک} \end{cases}$

$\xRightarrow{(\text{ضضض})} \overset{\Delta}{ACB} \cong \overset{\Delta}{ADB} \longrightarrow \begin{cases} A\hat{C}B = A\hat{D}B \\ \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \end{cases}$

اثبات ب : $\begin{cases} BC = BD \\ \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \\ BE = BE \end{cases} \xRightarrow{(\text{ضزض})} \overset{\Delta}{BCE} \cong \overset{\Delta}{BDE} \longrightarrow \begin{cases} CE = DE \\ \hat{E}_۱ = \hat{E}_۲ \end{cases} \longrightarrow \hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{E}_۱ = \hat{E}_۲ = ۹۰^\circ$

« تست‌های استدلال در هندسه۱ »

۱- در شکل رو به رو ، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه‌ی $A\hat{O}D$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)



۱) $C\hat{A}D$ ۲) $O\hat{B}C$

۳) $O\hat{A}C$ ۴) $A\hat{D}O$

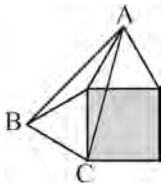
۲- در چهار ضلعی $ABCD$، عمود منصف‌های دو ضلع مقابل AB و CD در نقطه M متقاطع‌اند. اگر $BC > AD$ باشد، کدام نابرابری همواره صحیح است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $C\hat{A}B > C\hat{A}D$ ۲) $A\hat{M}B > B\hat{M}C$ ۳) $B\hat{M}C > A\hat{M}D$ ۴) $C\hat{M}D > A\hat{M}B$

۳- یک ضلع مثلث متساوی الاضلاع به طول ۴ واحد، قطر یک مربع است، کوتاه‌ترین فاصله‌ی رأس دیگر مربع از ضلع این مثلث، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}-۱$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ۴) ۱ (سراسری ریاضی ۹۲)

۴- در شکل روبه‌رو، طول ضلع مربع ۲ واحد است، دو مثلث متساوی الاضلاع بر روی دو ضلع مجاور ساخته شده است. مساحت مثلث ABC کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)



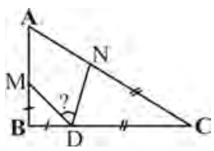
۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$

۳) $۲+\sqrt{۳}$ ۴) ۴

۵- در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = ۸۰^\circ$، عمود منصف‌های دو ساق مثلث، قاعده‌ی BC را در M و N قطع می‌کند. کوچکترین زاویه‌ی مثلث AMN چند درجه است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۶- در شکل مقابل $\hat{A} = ۵۸^\circ$ ، $BM = BD$ و $CN = CD$ ، زاویه‌ی $M\hat{D}N$ چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۹۱)



۱) ۵۸ ۲) ۵۹

۳) ۶۱ ۴) ۶۲

۷- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع a , $a+۲$ و $a+۴$ مساحت کدام است؟ (آزاد تجربی ۹۰)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۶

۸- در یک مثلث بین زوایا رابطه‌ی $\angle C = \angle A + ۲\angle B$ برقرار است محل تلاقی سه ارتفاع کجا قرار دارد؟ (آزاد ریاضی ۹۰)

۱) داخل مثلث ۲) روی محیط مثلث ۳) خارج مثلث ۴) هر سه حالت ممکن است.

۹- در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A} = ۴۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$ اگر نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع H باشد زاویه‌ی $C\hat{H}A$ چند درجه است؟ (آزاد ریاضی ۹۰)

۱) ۱۰۰° ۲) ۱۲۰° ۳) ۱۴۰° ۴) ۸۰°

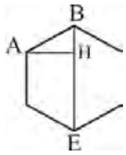
۱۰- در مثلث ABC اگر و $\hat{B} = ۳۰^\circ$ باشد، طول AD نیمساز زاویه‌ی A چند برابر طول BC است؟ (آزاد ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۱- در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره‌خطهای $BM = BA$ و $CN = CA$ را جدا می‌کنیم، اگر زاویه $\hat{A} = ۷۲^\circ$ باشد، زاویه‌ی $M\widehat{A}N$ چند درجه است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

۱) ۵۴ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۴۲

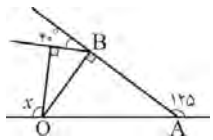
۱۲- در شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۴ مطابق شکل طول عمودی که از A بر قطر BE رسم می‌شود چه‌قدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۶)



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۱۳- در شکل مقابل $\hat{A} = ۱۲۵^\circ$ و $\hat{B} = ۴۰^\circ$ است، زاویه‌ی x چند درجه است؟ (سراسری تجربی ۸۷)



۱) ۱۰۵ ۲) ۱۱۰

۳) ۱۱۵ ۴) ۱۲۵

۱۴- در مثلث ABC ضلع $BC = ۱۰$ و میانه‌ی AM برابر ۵ است، این مثلث : (آزاد ریاضی ۸۷)

۱) در رأس A حاده است. ۲) در رأس A قائمه است

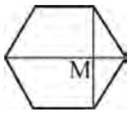
۳) در رأس A منفرجه است. ۴) هر سه حالت می‌تواند باشد.

۱۵- در مثلثی که زاویه‌ها به نسبت ۲ و ۳ و ۷ و زاویه بزرگ‌تر A و D محل تلاقی سه نیمساز باشد، حاصل $A\hat{D}B + A\hat{D}C - B\hat{D}C$ کدام است؟

۱) ۱۰۵° ۲) ۷۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰° (آزاد ریاضی ۸۷)

۱۶- نقطه M نقطه تلاقی دو قطر شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۴ است، چند نقطه روی محیط شش‌ضلعی وجوددارد‌که از M به فاصله $\sqrt{۵}$ باشد؟

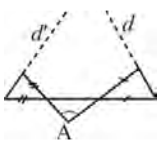
(آزاد ریاضی ۸۷)



۱) چهار نقطه ۲) دو نقطه

۳) یک نقطه ۴) نقطه‌ای وجود ندارد.

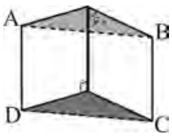
۱۷- در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند. زاویه‌ی $\hat{A} = ۱۰۰^\circ$، دوخط d و d' با زاویه چند درجه متقاطع اند؟ (سراسری ریاضی ۸۸)



۱) ۲۰ ۲) ۵۰

۳) ۴۵ ۴) ۴۰

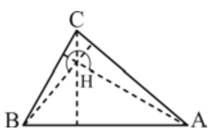
۱۸- در شکل مقابل، یک مربع و یک لوزی با زاویه ۶۰°، در یک ضلع مشترک‌اند، بزرگ‌ترین زاویه‌ی متوازی‌الاضلاع $ABCD$ چند درجه است؟ (سراسری تجربی ۸۸)



۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۵

۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

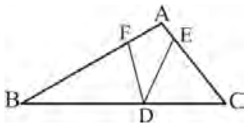
۱۹- در مثلث ABC که در آن $A = ۴۰^\circ$ و $B = ۶۰^\circ$ و H محل تلاقی سه ارتفاع است، زاویه‌ی $A\hat{H}C$ چند برابر زاویه‌ی $B\hat{H}C$ است؟ (آزاد ریاضی ۸۸)



۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$

۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

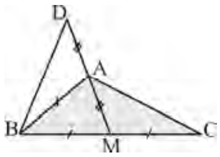
۲۰- در شکل مقابل، $CE = CD, BF = BD$ و $\hat{B} + \hat{C} = ۴۰^\circ$ زاویه‌ی $B\hat{A}C$ چند برابر زاویه‌ی $F\hat{D}E$ است؟ (آزاد ریاضی ۸۸)



۱) ۷ ۲) ۳

۳) ۵ ۴) ۹

۲۱- در شکل مقابل $\hat{D} + \hat{C} = ۶۱^\circ$ اندازه زاویه $A\hat{B}C$ چند درجه است؟ (سراسری تجربی ۸۹)



۱) ۳۹ ۲) ۶۱

۳) ۵۸ ۴) ۵۶

۲۲- در مثلث با اضلاع $AB = ۲$ ، $BC = \sqrt{۱۲}$ و $AC = ۴$ طول نیمساز AD چند برابر طول میانه‌ی BM است؟ (آزاد ریاضی عصر ۸۹)

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۲۳- در مثلثی به اندازه‌ی اضلاع $a \geq ۸$ و ۷ و ۵ ، کدام عدد برای اندازه‌های سه میانه مورد قبول است؟ (خارج از کشور ریاضی ۸۹)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۹ ۴) ۲۴

تست‌های تکمیلی

۲۴- با کدام‌یک از معلومات زیر فقط یک مثلث می‌توان رسم کرد؟

۱) یک ضلع و یک زاویه ۲) طول دو ضلع و زاویه‌ی مجاور به یکی از آن‌ها

۳) وسطهای سه ضلع ۴) سه زاویه مثلث

۲۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یک زاویه‌ی حاده‌ی آن ۲۵° است، اندازه‌ی زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۱) ۱۰° ۲) ۲۰° ۳) ۳۰° ۴) ۴۰°

۲۶- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\hat{B} = ۱۵^\circ$ می‌باشد اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمساز و میانه‌ی وارد بر وتر کدام است؟

۱) ۲۵° ۲) ۲۰° ۳) ۳۰° ۴) ۳۵°

۲۷- هرگاه درمثلث قائم‌الزاویه‌ای یک زاویه‌ی حاده نصف زاویه‌ی حاده‌ی دیگر و ارتفاع وارد بر وتر مساوی $۱/۵$ باشد، طول وتر برابر است با :

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۲۸- در مثلثی ($AB = AC$) اگر $\hat{A} = ۶۰^\circ$ باشد مجموع فواصل نقطه‌ی M واقع بر BC از دو ضلع دیگر برابر است با :

۱) $\frac{b}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}b$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}b$ ۴) $\frac{۲b}{۳}$

۲۹- در مثلثی ($AB = BC$) اگر $A = ۳۰^\circ$ باشد، قدرمطلق تفاضل فواصل M روی امتداد BC از دو ضلع AB و AC کدام است؟

۱) b ۲) $\frac{b}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}b$ ۴) $\sqrt{۳}b$

۳۰- مجموع فواصل یک نقطه‌ی واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر $\sqrt[۴]{۳}$ می‌باشد مساحت این مثلث برابر است با :

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۳}$

۳۱- مثلث قائم‌الزاویه‌ای که مساحت آن ۱۸ می‌باشد یک زاویه‌ی ۷۵° دارد طول وتر آن کدام است؟

۱) ۱۲ ‏ ۲) $۱۲\sqrt{۲}$ ‏ ۳) $۱۲\sqrt{۳}$ ‏ ۴) ۲۴

۳۲- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC طول دو ضلع زاویه‌ی قائمه ۲ و ۴ می‌باشد، شعاع دایره‌ی محیطی مثلث چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ‏ ۲) $\sqrt{۲}$ ‏ ۳) $\sqrt{۳}$ ‏ ۴) $۲\sqrt{۲}$

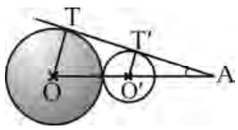
۳۳- چند مثلث می‌توان رسم کرد که در آن $AB = ۸$ و $AC = ۷$ و $\hat{B} = \frac{\pi}{۳}$ باشد؟

۱) یک ‏ ۲) دو ‏ ۳) سه ‏ ۴) هیچ

۳۴- اندازه‌ی اضلاع مثلثی ۲۴ و ۴۵ و ۵۱ می‌باشد، اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی آن برابر است با :

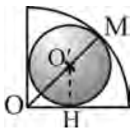
۱) ۱۲ ‏ ۲) ۲۲/۵ ‏ ۳) ۲۵/۵ ‏ ۴) ۲۱

۳۵- در شکل مقابل دو دایره‌ی مماس بر هم و شعاع یکی سه برابر دیگری است، اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر است با :



۱) ۳۰° ‏ ۲) ۴۵° ‏ ۳) ۳۶° ‏ ۴) $۲۲/۵^\circ$

۳۶- در شکل روبه‌رو شعاع ربع دایره R است، شعاع دایره‌ی محاط در آن برابر است با :

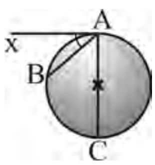


۱) $(\sqrt{۲}+۱)R$ ‏ ۲) $(\sqrt{۲}-۱)R$ ‏ ۳) $(۲-\sqrt{۲})R$ ‏ ۴) $\frac{(\sqrt{۲}-۱)R}{۲}$

۳۷- در ذوزنقه متساوی‌الساقینی اگر قطر BD برابر قاعده‌ی AB و ساق AD برابر قاعده‌ی DC باشد، زاویه‌ی $\hat{A}$ برابر است با :

۱) ۳۶° ‏ ۲) ۵۴° ‏ ۳) ۶۰° ‏ ۴) ۷۲°

۳۸- اگر اندازه‌ی زاویه‌ی ظلی $\hat{A} = ۴۰^\circ$ باشد، اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{BC}$ برابر است با :



۱) ۸۰° ‏ ۲) ۵۰° ‏ ۳) ۱۰۰° ‏ ۴) ۹۰°

۳۹- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ‏ $(A = \frac{\pi}{۲})$ حاصل عبارت $\frac{۱+\cos ۲C}{\sin ۲B}$ برابر است با :

۱) $\cos C$ ‏ ۲) $\cot C$ ‏ ۳) $\sin C$ ‏ ۴) $\tan C$

۴۰- سه خط دو به دو متقاطع مفروضند. چند نقطه در این صفحه می‌توان یافت که از هر سه خط مزبور به یک فاصله باشند؟

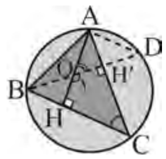
۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) ۴

« پاسخ تست‌های استدلال در هندسه۱ »

۱- «۴»

روش اول :

$$\begin{cases} \text{زاویه } A\hat{O}D \text{ مکمل زاویه } \hat{O}_۱ \\ \text{در چهارضلعی } OHCH' : \text{زاویه } \hat{C} \text{ مکمل زاویه } \hat{O}_۱ \end{cases}$$

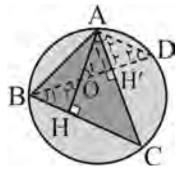


$\Rightarrow \hat{C} = A\hat{O}D$

از طرفی زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ هر دو محاطی و مقابل به کمان $\overset{\frown}{AB}$ هستند.

$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{D} = A\hat{D}O \\ \hat{C} = A\hat{O}D \end{cases} \Longrightarrow \hat{D} = A\hat{O}D = A\hat{D}O$$

روش دوم :



$$\begin{cases} \hat{B}_۱ + \hat{O}_۲ = ۹۰ \\ \hat{A}_۱ + \hat{O}_۱ = ۹۰ \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{cases}$$

$$\longrightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \quad \text{و} \quad \hat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$$

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ AH' = AH' \\ \hat{H}'_۱ = \hat{H}'_۲ = ۹۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{(زض ز)}} \overset{\Delta}{AOH'} \cong \overset{\Delta}{ADH'}$$

$$\Longrightarrow A\hat{O}D = A\hat{D}O$$

روش تستی : مثلث را متساوی الاضلاع فرض می‌کنیم، لذا :

$A\hat{O}D = ۶۰^\circ$ و گزینه‌ها عبارتند از :

۱) $C\hat{A}D = ۳۰^\circ$ (محاطی مقابل به کمان $\overset{\frown}{DC} = ۶۰^\circ$)

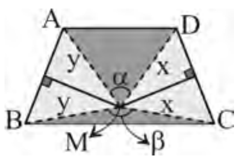
۲) $O\hat{B}C = ۳۰^\circ$ (نصف زاویه‌ی ۶۰°)

۴) $A\hat{D}O = ۶۰^\circ$ (محاطی مقابل به کمان $\overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ$)

۳) $O\hat{A}C = ۳۰^\circ$ (نصف زاویه‌ی ۶۰°)

۲- «۳»

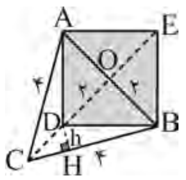
می‌دانیم فاصله‌ی هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند لذا :



$$\begin{cases} MD = MC = x \\ MA = MB = y \\ BC > AD \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس لولا}} \beta > \alpha \Rightarrow B\hat{M}C > A\hat{M}D$$

۳- «۱»



روش اول : با رسم شکل، امتداد قطر ED از رأس C می‌گذرد مورد سؤال اندازه‌ی DH است لذا :

در مثلث قائم الزاویه‌ی DHC، ضلع h مقابل به زاویه‌ی ۳۰° است.

پس نصف وتر است : $h = \frac{DC}{۲}$

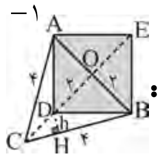
$$\longrightarrow \text{محاسبه } DC : DC = CO - DO$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ارتفاع مثلث } ABC : CO = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ = ۲\sqrt{۳} \\ \text{نصف قطر مربع} : DO = \frac{۱}{۲} \times ۴ = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow DC = CO - DO = ۲\sqrt{۳} - ۲ = ۲(\sqrt{۳} - ۱)$$

$$h = \frac{۱}{۲} DC = \frac{۱}{۲} \times ۲(\sqrt{۳} - ۱) = \sqrt{۳} - ۱$$

روش دوم :



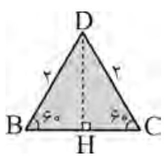
$$S_{OBC} = S_{OBD} + S_{BCD}$$

$$\frac{۱}{۲} \times (۴)^۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ + S_{BCD}$$

$$\longrightarrow S_{BCD} = ۲\sqrt{۳} - ۲ = \frac{۱}{۲} \times h \times BC = \frac{۱}{۲} \times h \times ۴ = ۲h$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{۳} - ۱$$

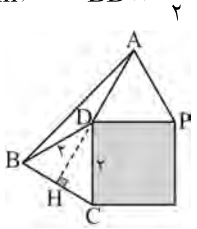
۴- «۳»



چون در مثلث متساوی الاضلاع، ارتفاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ضلع است. زیرا :

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{DH}{BD} \Rightarrow DH = BD \times \sin ۶۰^\circ = BD \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\longrightarrow DH = ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$



$$\begin{cases} DH = h = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳} \\ AD = DP = ۲ \end{cases}$$

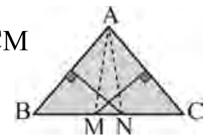
$$\Rightarrow AH = AD + DH = ۲ + \sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\ \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۲} BC \times AH$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times (۲ + \sqrt{۳}) = ۲ + \sqrt{۳}$$

۵- «۲»

$$AB = AC \longrightarrow B = C = \frac{۱۸۰ - ۸۰}{۲} = ۵۰^\circ$$



M روی عمودمنصف AC $\Rightarrow AM = CM$

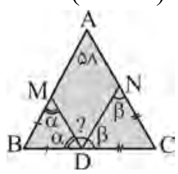
$\longrightarrow M\hat{A}B = ۸۰ - ۵۰ = ۳۰^\circ$

N روی عمودمنصف AB $\Rightarrow AN = BN$

$\longrightarrow N\hat{A}B = \hat{B} = ۵۰ \longrightarrow N\hat{A}C = ۸۰ - ۵۰ = ۳۰^\circ$

$$\Rightarrow M\hat{A}N = ۸۰ - (۳۰ + ۳۰) = ۲۰^\circ$$

۶- «۳»



روش اصلی : $\overset{\Delta}{ABC} : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$

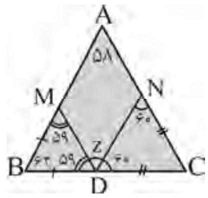
$= ۵۸ + (۱۸۰ - ۲\alpha) + (\cancel{۱۸۰} - ۲\beta) = \cancel{۱۸۰}$

$\longrightarrow ۲\alpha + ۲\beta = ۲۳۸ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۱۹$

$\alpha + ? + \beta = ۱۸۰ \Rightarrow ? = ۱۸۰ - (\alpha + \beta) = ۱۸۰ - ۱۱۹ = ۶۱$

روش تستی : با فرض $B = ۶۲$ و $C = ۶۰$

و محاسبه زوایای M و N داریم :



$\Longrightarrow z = ۱۸۰ - (۶۰ + ۵۹) = ۱۸۰ - ۱۱۹ = ۶۱^\circ$

۷- «۲»

رابطه‌ی فیثاغورث : $(a + ۴)^۲ = (a + ۲)^۲ + a^۲$

$\longrightarrow \cancel{a^۲} + ۸a + ۱۶ = \cancel{a^۲} + ۴a + ۴ + a^۲$

$\longrightarrow a^۲ - ۴a - ۱۲ = ۰ \longrightarrow (a - ۶)(a + ۲) = ۰$

$\begin{cases} a = ۶ \\ a = -۲ \ \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow a = ۶ \longrightarrow$ اضلاع مثلث : ۸ , ۶ , ۱۰

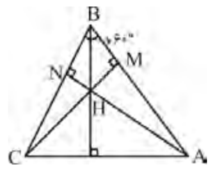
مساحت : $S = \frac{۱}{۲}$ (ضرب اضلاع زاویه قائمه) $= \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۸ = ۲۴$

۸- «۳»

نقطه تلاقی ۳ ارتفاع وقتی روی محیط مثلث است که مثلث قائم‌الزاویه باشد یعنی : $A + ۲B = ۹۰ \Rightarrow C = ۹۰$

بنابراین $A + B = ۹۰$ خواهد بود که این غیرممکن است. وقتی نقطه تلاقی ۳ ارتفاع داخل مثلث است که ۳ زاویه‌ی مثلث حاده است یعنی C حاده و $A + ۲B = C$ نیز حاده است اما وقتی C حاده باشد آن‌گاه $A + B$ منفرجه خواهد بود حال چه‌طور $A + ۲B$ می‌تواند حاده باشد، پس این حالت نیز غیرممکن است. لذا در حالت $C = A + ۲B$ ، نقطه تلاقی ارتفاع‌های خارج مثلث باشد.

۹- «۲»



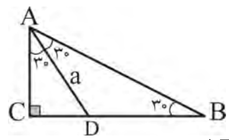
چهارضلعی $BMHN$ محاطی است زیرا دو زاویه‌ی قائمه دارد پس زاویه‌ی $\hat{B}$ مکمل $N\hat{H}M$ است.

$N\hat{H}M = ۱۸۰ - \hat{B} = ۱۸۰ - ۶۰ = ۱۲۰$

$\longrightarrow C\hat{H}A = N\hat{H}M = ۱۲۰^\circ$

۱۰- «۴»

$$\begin{cases} \hat{A} = ۶۰^\circ \\ \hat{B} = ۳۰^\circ \end{cases} \longrightarrow C = ۱۸۰ - (A + B) = ۹۰^\circ$$



$\Leftarrow$ مثلث ABC قائم الزاویه است

حال : با فرض $AD = a$ داریم :

$BD = AD = a \Leftarrow$ مثلث ABD متساوی الساقین است

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{CD}{AD} \longrightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{CD}{a} \Rightarrow CD = \frac{a}{۲}$$

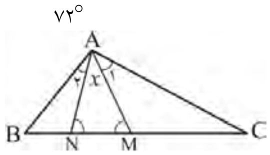
$$\longrightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{AD}{CD + DB} = \frac{a}{\frac{a}{۲} + a} = \frac{a}{\frac{۳}{۲}a} = \frac{۲}{۳}$$

۱۱- «۱»

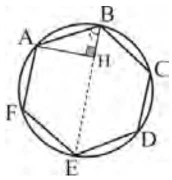
$$\hat{N} = \hat{x} + \hat{A}_۱ \quad , \quad \hat{M} = \hat{x} + \hat{A}_۲ \quad , \quad \hat{A}_۱ + \hat{x} + \hat{A}_۲ = ۷۲^\circ$$

$$\hat{N} + \hat{M} + \hat{x} = ۱۸۰^\circ \longrightarrow \hat{x} + \underbrace{\hat{A}_۱ + \hat{x} + \hat{A}_۲}_{۷۲^\circ} + \hat{x} = ۱۸۰^\circ$$

$$\longrightarrow ۲\hat{x} = ۱۰۸^\circ \Rightarrow \hat{x} = ۵۴^\circ$$



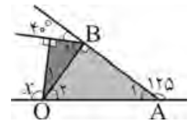
۱۲- «۳»



$$\begin{cases} ABH \text{ قائم‌الزاویه } \longrightarrow \hat{B}_۱ = ۶۰^\circ \\ AH = AB \times \sin ۶۰^\circ = AB \times \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad AH = ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$$

۱۳- «۱»



$$۴۰^\circ + \hat{B}_۱ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{B}_۱ = ۵۰^\circ$$

$$O_۱ + B_۱ = ۹۰^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{O}_۱ = ۴۰^\circ$$

$$A_۱ = ۱۸۰ - ۱۲۵ = ۵۵^\circ \quad \longrightarrow \quad O_۲ + A_۱ = ۹۰^\circ$$

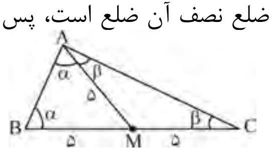
$$\Rightarrow \quad \hat{O}_۲ = ۳۵^\circ$$

$$\longrightarrow \quad \hat{x} + \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۱۸۰ \quad \longrightarrow \quad \hat{x} + ۴۰ + ۳۵ = ۱۸۰$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{x} = ۱۰۵^\circ$$

۱۴- «۲»

روش اول : چون میانه‌ی وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع است، پس مثلث قائم‌الزاویه است.



روش دوم : مثلث‌های MAB و MAC متساوی‌الساقین‌اند لذا :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \quad \longrightarrow \quad (\alpha + \beta) + \alpha + \beta = ۱۸۰^\circ$$

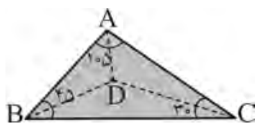
$$\longrightarrow \quad ۲(\alpha + \beta) = ۱۸۰^\circ$$

$$\longrightarrow \quad \alpha + \beta = ۹۰^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = ۹۰^\circ$$

$\Leftarrow$ مثلث ABC در رأس A قائمه است.

۱۵- «۲»

$$۲x + ۳x + ۷x = ۱۸۰ \quad \longrightarrow \quad ۲x = ۱۸۰ \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = ۱۵$$



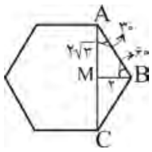
$$\longrightarrow \quad \begin{cases} \hat{C} = ۳۰ \\ \hat{B} = ۴۵ \\ \hat{A} = ۱۰۵ \end{cases}$$

$$A\hat{D}B + A\hat{D}C - B\hat{D}C = (۱۸۰ - \frac{۱۰۵ + ۴۵}{۲})$$

$$+(۱۸۰ - \frac{۱۰۵ + ۳۰}{۲}) - (۱۸۰ - \frac{۳۰ + ۴۵}{۲})$$

$$= ۱۰۵ + ۱۱۲/۵ - ۱۴۲/۵ = ۷۵^\circ$$

۱۶- «۲»



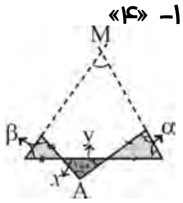
با توجه به اندازه‌ی ضلع شش‌ضلعی

در مثلث AMB داریم :

$$\begin{cases} MB = AB \times \sin ۳۰^\circ = ۴ \times \dfrac{۱}{۲} = ۲ \\ AM = AB \times \sin ۶۰^\circ = ۴ \times \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳} \simeq ۲ \times ۱/۷ = ۳/۴ \end{cases}$$

پس اگر به مرکز M و شعاع $۲/۲ \simeq \sqrt{۵}$ دایره‌ای رسم کنیم فقط دو ضلع AB و BC قطع می‌شود.

۱۷- «۴»



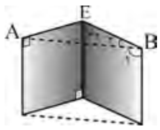
$$x + y = ۸۰^\circ \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} ۲\alpha + y = ۱۸۰ \\ ۲\beta + x = ۱۸۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\oplus} \quad ۲\alpha + ۲\beta + (x + y) = ۳۶۰^\circ$$

$$\longrightarrow \quad ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ - ۸۰^\circ = ۲۸۰^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = ۱۴۰^\circ$$

$$M + \alpha + \beta = ۱۸۰ \quad \longrightarrow \quad M + ۱۴۰ = ۱۸۰ \quad \Rightarrow \quad M = ۴۰^\circ$$

۱۸- «۲»



مثلث AEB متساوی‌الساقین است.

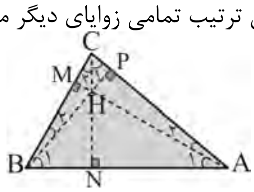
$$B_۲ = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ) = ۱۵^\circ \quad \Rightarrow \quad B_۱ = ۱۲۰ - ۱۵ = ۱۰۵^\circ$$

۱۹- «۳»

در مثلث AMB چون $M = ۹۰^\circ$ ، $B = ۶۰^\circ$ لذا : $A_۱ = ۳۰^\circ$

و بدین ترتیب تمامی زوایای دیگر مشخص می‌شود. یعنی :

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = ۳۰ \quad \hat{A}_۲ = ۱۰ \\ \hat{B}_۱ = ۵۰ \quad \hat{B}_۲ = ۱۰ \\ \hat{C}_۱ = ۵۰ \quad \hat{C}_۲ = ۳۰ \end{cases}$$

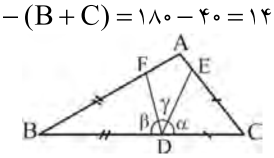


$$\frac{A\hat{H}C}{B\hat{H}C} = \frac{۱۸۰ - (A_۲ + C_۱)}{۱۸۰ - (B_۲ + C_۲)} = \frac{۱۸۰ - (۱۰ + ۵۰)}{۱۸۰ - (۱۰ + ۳۰)} = \frac{۱۲۰}{۱۴۰} = \frac{۶}{۷}$$

۲۰- «۱»

$$B + C = ۴۰ \quad \longrightarrow \quad A = ۱۸۰ - (B + C) = ۱۸۰ - ۴۰ = ۱۴۰$$

$$\begin{cases} ۲\beta = ۱۸۰ - B \\ ۲\alpha = ۱۸۰ - C \end{cases}$$



$$\xrightarrow{\oplus} \quad ۲\beta + ۲\alpha = ۳۶۰ - (B + C) = ۳۶۰ - ۴۰ = ۳۲۰$$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = ۱۶۰$$

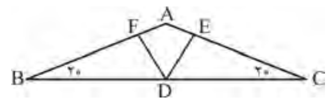
$$\alpha+\beta+\gamma=۱۸۰ \longrightarrow ۱۶۰+\gamma=۱۸۰ \Rightarrow \gamma=۲۰$$

چون : $\alpha+\beta=۱۶۰$ بنابراین $F\hat{D}E=۲۰^\circ$ و $B\hat{A}C=۱۴۰^\circ$

لذا : $\frac{B\hat{A}C}{F\hat{E}D}=\frac{۱۴۰}{۲۰}=۷$

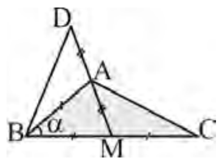
راه حل سه سوت : با فرض $\hat{B}=\hat{C}=۲۰^\circ$ آن‌گاه : $\hat{A}=۱۴۰^\circ$

$$\begin{cases} C\hat{D}E=\frac{۱۸۰-۲۰}{۲}=۸۰^\circ \\ B\hat{D}F=۸۰^\circ \end{cases}$$



$$\Rightarrow E\hat{D}F=۱۸۰-(۸۰+۸۰)=۲۰ \Rightarrow \frac{B\hat{A}C}{F\hat{D}E}=\frac{۱۴۰}{۲۰}=۷$$

۲۱- «۳»



با فرض $ABM=\alpha$ و متساوی الساقین بودن مثلث ABM و از تساوی دو مثلث AMC و DAB داریم :

$$\hat{D}+\hat{C}=\hat{A}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰-(۹۰+\frac{\alpha}{۲})=۶۱^\circ$$

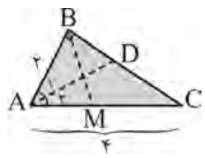
$$\longrightarrow ۹۰-۶۱=\frac{\alpha}{۲} \longrightarrow ۲۹=\frac{\alpha}{۲} \Rightarrow \alpha=۵۸^\circ$$

۲۲- «۲»

این مثلث در رأس B قائم‌الزاویه است. زیرا :

$$BC^۲+AB^۲=AC^۲ \Rightarrow (\sqrt{۱۲})^۲+۲^۲=۴^۲$$

پس میانه وارد بر وتر نصف وتر است. یعنی : $BM=۲$.



ضمناً AB نصف وتر است.

پس : $\hat{C}=۳۰^\circ$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$ ، لذا :

$$ABD: \cos A_۱=\frac{AB}{AD} \longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲}{AD}$$

$$AD=\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳} \Longrightarrow \frac{AD}{BM}=\frac{\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۳- «۳»

طبق نامساوی مثلث : $۷-۵<a<۷+۵$

$$\longrightarrow ۲<a<۱۲ \xrightarrow{۸\le a} ۸\le a<۱۲$$

$$\Rightarrow \text{حداقل محیط}=۵+۷+۸=۲۰$$

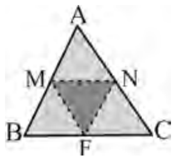
از طرفی : $\frac{۳}{۴}(\text{محیط}) < m_a+m_b+m_c < \text{محیط}$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}\times ۲۰ < m_a+m_b+m_c < ۲۰$$

فقط گزینه ۳ در این بازه است، یعنی : $m_a+m_b+m_c=۱۹$

تست‌های تکمیلی

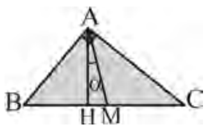
۲۴- «۳»



کافیست وسط‌های سه ضلع رابه هم وصل کرده، تا مثلث MNF حاصل شود. حال اگر از این رئوس به موازات اضلاع خطوطی رسم کنیم،مثلث موردنظرحاصل خواهد شد.

۲۵- «۴»

روش اول :



$$\hat{C}=۲۵ \Rightarrow \hat{B}=۶۵$$

$$\Rightarrow \alpha=|B-C|=۴۰$$

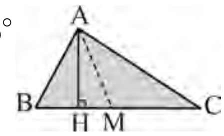
روش دوم : در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

پس : $AM=MC$ لذا : $M\hat{A}C=\hat{C}=۲۵^\circ$

همچنین می‌دانیم زاویه‌ی $H\hat{A}C$ متمم زاویه‌ی C است.

$$\hat{C}+H\hat{A}C=۹۰^\circ \longrightarrow H\hat{A}C=۶۵^\circ$$

$$\Rightarrow M\hat{A}H=H\hat{A}C-M\hat{A}C=۴۰^\circ$$



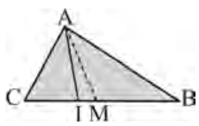
۲۶- «۳»

روش اول :

$$\hat{B}=۱۵ \Rightarrow \hat{C}=۷۵$$

$$\Longrightarrow \alpha=\frac{|B-C|}{۲}=\frac{|۷۵-۱۵|}{۲}=۳۰$$

روش دوم : میانه وارد بر وتر نصف وتر است :

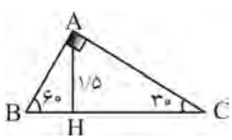


$$AM=MB \longrightarrow M\hat{A}B=\hat{B}=۱۵^\circ$$

ضمناً نیمساز زاویه‌ی $A=۹۰^\circ$ را نصف می‌کند: $I\hat{A}B=\frac{۹۰}{۲}=۴۵^\circ$

$$\Rightarrow I\hat{A}M=I\hat{A}B-M\hat{A}B=۴۵-۱۵=۳۰^\circ$$

۲۷- «۲»

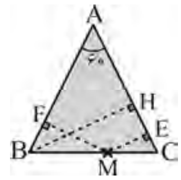


در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه نصف زاویه دیگر باشد دارای زوایای ۳۰° و ۶۰° خواهد بود. لذا :

$$\sin ۳۰ = \frac{AH}{AC} \longrightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱/۵}{AC} \Rightarrow AC = ۳$$

$$\sin ۶۰ = \frac{AC}{BC} \longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳}{BC} \Longrightarrow BC = ۲\sqrt{۳}$$

۲۸- «۳»

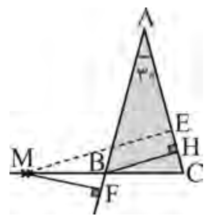


می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه واقع بر قاعده BC از دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق است. یعنی :

$$\begin{cases} ME + MF = BH \\ \sin A = \frac{BH}{AB} \longrightarrow BH = AB \times \sin ۶۰^\circ = c \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{b=c} BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} b$$

۲۹- «۲»



$$\begin{cases} ME - MF = BH \\ BH = AB \times \sin ۳۰^\circ = c \times \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow BH = \frac{c}{۲} = \frac{b}{۲}$$

۳۰- «۱»

می‌دانیم مجموع فواصل از سه ضلع برابر ارتفاع می‌باشد، لذا :

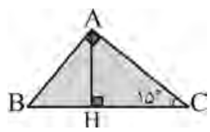
$$\sqrt[۴]{۳} = h = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sqrt{۳} = \frac{۳}{۴} a^۲$$

$$\Rightarrow a^۲ = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

حال : $S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} = ۱$

۳۱- «۱»

می‌دانیم در مثلث قائم الزاویه اگر یک زاویه ۱۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است.

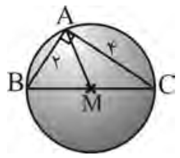


$$\begin{cases} \frac{۱}{۲} a h_a = ۱۸ \\ h_a = \frac{۱}{۴} a \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲} a \times \frac{۱}{۴} a = ۱۸$$

$$\longrightarrow a^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow a = ۱۲$$

۳۲- «۱»

می‌دانیم در مثلث قائم الزاویه مرکز دایره محیطی وسط وتر است.

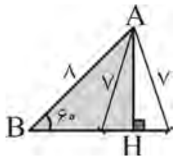


$$BC^۲ = ۴^۲ + ۲^۲ = ۱۶ + ۴ = ۲۰$$

$$BC = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{BC}{۲} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۲} = \sqrt{۵}$$

۳۳- «۲»



$$AH = AB \times \sin ۶۰^\circ$$

$$= ۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳} < AC = ۷$$

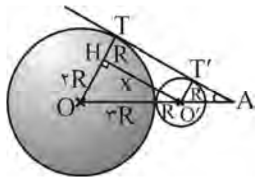
چون AC از ارتفاع بزرگتر است پس اگر به مرکز A و شعاع ۷ دایره‌ای بزنیم، ضلع BH را در دو نقطه قطع می‌کند لذا دو مثلث خواهیم داشت.

۳۴- «۳»

چون رابطه فیثاغورث برقرار است، یعنی : $۵۱^۲ = ۴۵^۲ + ۲۴^۲$

لذا مثلث قائم‌الزاویه بوده بنابراین شعاع دایره محیطی نصف وتر آن خواهد بود. یعنی : $R = \frac{۵۱}{۲} = ۲۵/۵$

۳۵- «۱»



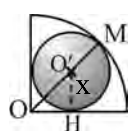
از نقطه O' خطی موازی TT' رسم می‌کنیم،

در مثلث $OO'H$ داریم :

$$\sin O' = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{OH}{OO'} = \frac{۲R}{۳R + R} = \frac{۲R}{۴R} = \frac{۱}{۲}$$

$$\longrightarrow O' = ۳۰^\circ \Longrightarrow \hat{A} = \hat{O}' = ۳۰^\circ$$

۳۶- «۲»



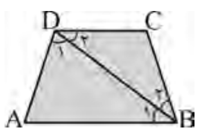
$$O'H = x \longrightarrow OO' = x\sqrt{۲}$$

$$OM = OO' + O'M$$

$$\longrightarrow R = x\sqrt{۲} + x = x(\sqrt{۲} + ۱)$$

$$\Longrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{۲} + ۱} \times \frac{\sqrt{۲} - ۱}{\sqrt{۲} - ۱} = R(\sqrt{۲} - ۱)$$

۳۷- «۴»



$$\begin{cases} BD = AB \longrightarrow D_۱ = A \\ DC = AD = BC \longrightarrow D_۲ = B_۲ \end{cases}$$

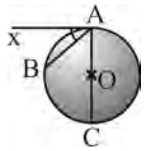
$$\xrightarrow{D_۲ = B_۱} B_۱ = B_۲ = \frac{A}{۲}$$

حال : $A + D_1 + B_1 = 180 \longrightarrow A + A + \frac{A}{2} = 180$

$$\longrightarrow \frac{5}{2}A = 180 \Rightarrow A = 72^\circ$$

۳۸- «۳»

$$x\hat{A}B = 40^\circ \longrightarrow B\hat{A}C = 50^\circ \Longrightarrow \overset{\frown}{BC} = 100^\circ$$



۳۹- «۲»

$$\frac{1+\cos 2C}{\sin 2B} = \frac{2\cos^2 C}{2\sin B\cos B} \overset{✪}{=} \frac{\cos^2 C}{\cos C\sin C}$$

$$= \frac{\cos C}{\sin C} = \cot C$$

توضیح مرحله ✪ : *چون دو زاویه* B و C متمم *یکدیگرند، پس :*

$$\begin{cases} \sin B = \cos C \\ \cos B = \sin C \end{cases}$$

۴۰- «۴»

سه خط یک مثلث می‌سازند و سه مرکز دایره‌ی محاطی خارجی و یک مرکز دایره‌ی محاطی داخلی از هر سه ضلع به یک فاصله‌اند. پس چهار نقطه از هر سه خط به یک فاصله‌اند.