فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی

شماره - - (بهار - - - -) صص. - - تا - -

مبانی نظریه‌مجموعه‌ای ریاضیات و چالش‌های آن*

مرتضی منیری

چکیده. در این مقاله به این موضوع می‌پردازیم که نظریهٔ مجموعه به چه معنایی به‌عنوان مبانی ریاضیات در نظر گرفته می‌شود. در ادامه به چالش‌های این دیدگاه می‌پردازیم. در این راستا، نظریهٔ مجموعهٔ مرتبهٔ اول را با منطق مرتبهٔ دوم و همچنین با نظریهٔ مجموعهٔ مرتبهٔ دوم مقایسه می‌کنیم. درنهایت این پرسش را بررسی می‌کنیم که آیا ریاضیات اصلاً به مبنا نیاز دارد.

۱. مقدمه

در خلال قرن بیستم، نظریهٔ مجموعه به‌عنوان مبنایی برای ریاضیات به رسمیت شناخته شد. این به معنای آن است که همهٔ مفاهیم ریاضی، شامل مفاهیمی ملموس چون عدد و خط، تا مفاهیم مجردی چون گروه و فضای هیلبرت[۱] را می‌توان برحسب مجموعه‌ها تعریف کرد و خواص مورد نظر آنها را به کمک اصول موضوعهٔ مجموعه‌ها اثبات نمود. به قول کیونن[۲]:

> نظریهٔ مجموعه مبانی ریاضیات است. همهٔ مفاهیم ریاضی بر اساس مفاهیم اولیهٔ مجموعه و عضویت تعریف می‌شوند. در نظریهٔ مجموعهٔ اصل‌موضوعی، ما اصولی را در مورد این مفاهیم اولیه تنظیم می‌کنیم. از این اصول موضوعه، همهٔ ریاضیات شناخته شده می‌تواند نتیجه شود ([۱۲]).

2010 *Mathematics Subject Classification.* 00A30; 03A05.

عبارات و کلمات کلیدی. نظریهٔ مجموعه، مبانی ریاضیات، منطق مرتبهٔ دوم، مبناگرایی .

[1]Hilbert

[2]Kunen

اما امکان تحویل ریاضیات به مجموعه‌ها، لزوماً به آن معنا نیست که ریاضیات به مبنا احتیاج دارد، یا اینکه مفاهیم ریاضی یاد شده "واقعاً" مجموعه هستند. همچنین به این معنی نیست که نظریهٔ مجموعه راهی برای شناخت ماهیت واقعی مفاهیم ریاضی به دست می‌دهد. مبناگرایی نظریه‌مجموعه‌ای را می‌توان صرفاً تلاشی برای وحدت بخشیدن به حوزه‌های مختلف ریاضیات و فراهم آوردن زبانی یک‌دست برای آن دانست، چیزی که به هیچ وجه از نظر ریاضی ضروری نیست. البته، از مزایای ریاضی این رویکرد، تسهیل ایجاد رابطه بین شاخه‌های به ظاهر مختلف ریاضی بوده است.

توجه به مجموعه‌ها به‌عنوان مبانی، ریشه‌ای قدیمی دارد. تسرملو[1] در سال ۱۸۹۷ وارد گوتینگن شد. او در این باره می‌نویسد:

> زمانی که من در گوتینگن دانشجوی خصوصی بودم، تحت تأثیر د. هیلبرت، که بیش از هر کس دیگری رشد علمی خود را مدیون او هستم، مشغول به سؤالاتی در مورد مبانی ریاضیات، به ویژه به مسائل اساسی نظریهٔ مجموعه‌های کانتوری، شدم ([۱۶]).

تسرملو در بیان اصول موضوعهٔ مشهور خود بیان می‌کند که:

> نظریهٔ مجموعه‌ها شاخه‌ای از ریاضیات است که وظیفهٔ آن بررسی ریاضی مفاهیم بنیادی «عدد»، «ترتیب» و «تابع» است و آنها را به شکل ساده و بکر خود در می‌آورد و از این طریق پایه‌های منطقی همهٔ حساب و آنالیز را توسعه می‌دهد ([۱۶]).

و اخیرتر، موسکواکیس[2] در این مورد می‌گوید:

> یک مثال معمولی از روشی که ما اتخاذ خواهیم کرد، «شناسایی» [خط هندسی] با مجموعهٔ... اعداد حقیقی است. ... معنای دقیق این «شناسایی» چیست؟ مطمئناً این نقاط اعداد واقعی نیستند. ... منظور ما از «همسان‌سازی» [خط] با [واقعی‌ها] این است که مطابقت... یک نمایش وفادار به ما می‌دهد... که به ما امکان می‌دهد برای همهٔ مفاهیم هندسی مفید تعاریف حسابی ارائه دهیم و خواص ریاضی [خط] را طوری مطالعه کنیم که گویی نقاط اعداد واقعی هستند.

[1] Zermelo
[2] Moschovakis

> ... به همین ترتیب، ما در درون کیهان مجموعه‌ها، بازنمایی‌های وفادار تمام اشیاء ریاضی مورد نیاز خود را کشف خواهیم کرد و نظریهٔ مجموعه را مطالعه خواهیم کرد... انگار همهٔ اشیاء ریاضی مجموعه هستند ([۱۶]).

در این مقاله در ابتدا به این می‌پردازیم که یک مبنا برای ریاضیات دقیقاً چه خواصی باید داشته باشد. از دید برخی از فیلسوفان علم، مبنایی برای ریاضیات تنها چارچوبی برای گفتمان مشترک در کل ریاضیات نیست، بلکه فراهم آوردن چارچوب یکدست مفهومی برای آن نیز است. درادامه به این پرسش می‌پردازیم که؛ آیا نظریهٔ مجموعه، به‌ویژه در دستگاه تسرملو-فرانکل (ZF)، این خواص را دارا است یا نه؟ درنهایت، به برخی پرسش‌های فلسفی مربوط به مبناگرایی، به‌ویژه مبناگرایی نظریه‌مجموعه‌ای اشاره می‌کنیم. به‌ویژه، بررسی می‌کنیم که؛ آیا ساختارگرایی در ریاضیات با در نظر گرفتن نظریهٔ مجموعه به‌عنوان مبانی ریاضیات سازگار است یا نه؟

۲. ویژگی‌های یک مبنا

مجموعه‌ها تنها مبنای پیشنهادی برای ریاضیات نیستند. رسته‌ها یا تایپ‌ها در نظریهٔ هموتوپی تایپ‌ها نیز به‌عنوان مبنایی برای ریاضیات پیشنهاد شده‌اند ([۴]، [۶]، [۱۳]، [۱۷]). اما قبل از هر بحثی، خوب است ببینیم که منظور از یک مبنا برای ریاضیات چیست و چه انتظاراتی از آن می‌بایست داشته باشیم. مفاهیم مختلفی در ریاضیات مطرح هستند. به‌طور خلاصه، یک مبنا برای ریاضیات، استفاده از یک مفهوم واحد برای توضیح همهٔ مفاهیم ریاضی است. مبناهای یادشده از مفاهیم مجموعه، رسته و تایپ برای این منظور استفاده می‌کنند. به نظر می‌رسد که این مفاهیم به‌طور پیشاریاضیاتی نیز قابل درکند، یا حداقل تصوری شهودی ولی شاید مبهم از آنها وجود دارد. هر یک از این مفاهیم، چارچوبی را فراهم می‌کند که با استفاده از آن می‌توان در مورد همهٔ اشیاء ریاضی صحبت کرد.

لیدیمن[1] و پرسنل[2] معتقدند که این به تنهایی کافی نیست، برای آنکه بتوان از مبنا برای ریاضیات به معنای قوی آن صحبت کرد می‌بایست جنبه‌هایی دیگری را نیز به بحث گذاشت ([۱۷]). این جنبه‌ها را به اختصار می‌توان معناشناسانه، متافیزیکی، شناخت‌شناسانه و روش‌شناسانه دانست. برای مثال، در مورد مجموعه‌ها باید روشن کنیم که وقتی از مجموعه صحبت می‌کنیم چه تعبیری از مجموعه و روابط بین آنها را مدنظر داریم. به‌علاوه باید به این بپردازیم که مجموعه‌ها به چه معنایی

[1] Ladyman
[2] Presnell

وجود دارند، اگر نام‌گرایانه نمی‌اندیشیم، عینی یا ذهنی؟ همچنین چگونه به آنها دسترسی شناختی داریم و اصول مربوط به آنها را بر چه اساسی درست می‌دانیم؟ و درنهایت روش مطالعهٔ آنها چگونه باید باشد و چگونه بین آنها و جهان فیزیکی ارتباط برقرار کنیم؟ اینها پرسش‌هایی هستند که بیش از آنکه ریاضی‌دانان متولی بحث در مورد آنها باشند، به فلاسفهٔ ریاضی یا ریاضی‌دانانی که دغدغهٔ فلسفی دارند مربوط می‌شوند. همچنین توجه کنید که این پرسش‌ها در درجهٔ اول به خود مفهوم مجموعه مرتبط می‌شوند، نه به مفاهیم ریاضی که بر اساس آنها تعریف می‌شوند. به‌علاوه، همهٔ اینها به این معنی نیست که باید توافقی کامل بر سر پاسخ این پرسش‌ها وجود داشته باشد.

از طرف دیگر، پنلوپه مدی[۱] اینکه مبناگرایی مجموعه‌ای بتواند یا ادعا داشته باشد که از نظر شناخت‌شناسی یا متافیزیکی حرف عمیقی در مورد ریاضیات بزند را رد می‌کند ([۱۶]). ریاضی‌دانان بسیاری از قضیه‌های ریاضی را می‌دانند بدون آنکه به ارتباط آنها با نظریهٔ مجموعه اندیشیده باشند. از طرف دیگر، اینکه مثلاً اعداد یا زوج‌های مرتب را به شکل‌های متفاوت می‌توان برحسب مجموعه‌ها تعریف کرد، این اندیشه که تعریف‌های مجموعه‌ای بتوانند ماهیت اشیا ریاضی را مشخص کنند، نامحتمل می‌کنند ([۵]). تفاوت مبانی مختلف مطرح شده برای ریاضیات و فلسفه‌های مختلف ریاضیات در همین است که از دومی انتظارات فلسفی بیشتری می‌رود. برای مثال، از تعریف فرگه[۲] از عدد طبیعی انتظار بیشتری می‌رود تا مفهوم این اعداد را توضیح دهد تا تعریف نظریه‌مجموعه‌ای آن ([۲]، [۵]).

کانتور[۳] یک مجموعه را گردایه‌ای از عناصر متمایز که جایگاهشان در شهود یا فکر انسان است یا همهٔ عناصری که بتوان به کمک قاعده‌ای آنها را به هم مرتبط کرد و به‌عنوان شیئی واحد دانست، معرفی می‌کند. به تعریف اول ایرادات زیادی می‌توان گرفت. مثلاً، مفهوم گردایه روشن‌تر از خود مفهوم مجموعه نیست، مجموعه‌هایی وجود دارند که در ذهن و شهود نمی‌گنجند. تعریف دوم روشن نمی‌کند که یک قاعده چگونه می‌تواند تعدادی عنصر را به شیئی واحد تبدیل کند، و به نظر می‌رسد مجموعه‌هایی وجود دارند که توسط یک قاعده گرد هم نیامده‌اند، و از همه مهم‌تر آنکه این تعریف از مجموعه به پارادوکس راسل[۴] منجر می‌شود.

در بخش بعد خواهیم دید که توصیف بهتری از مجموعه‌ها وجود دارد که در کار ساختن ریاضیات براساس مفهوم مجموعه کارایی بیشتری دارد. اما همین‌جا اشاره می‌کنیم، که با توصیفات کانتور،

[1] Penelope Maddy
[2] Frege
[3] Cantor
[4] Russell

روشن است که از دید او هر مجموعه با معین کردن اعضایش کاملاً مشخص می‌شود، و اینکه اعضای یک مجموعه بر خود آن مجموعه به‌نوعی تقدم دارند ([۵]). اینها دو خاصیتی هستند که در همهٔ بحث‌ها در مورد مجموعه‌ها باید در نظر داشت. بنابراین، هر چند پرسش‌های فلسفی فوق، پاسخ‌های قاطعی ندارند، اما هم پیش‌زمینه‌های غیردقیقی در مورد مفهوم مجموعه وجود دارد. البته در مورد مجموعه‌ها مطالعات دقیق فلسفی زیادی هم شده است که در اینجا نیازی نیست به آنها بپردازیم. برای مثال، [۱۵] را ببینید.

۳. تصور سلسله‌مراتبی از مجموعه‌ها

حداقل به دو گونه می‌توان به مجموعه‌ها نگریست. در دیدگاه اول، مجموعه‌ها به‌صورت بالفعل و به‌صورت یک کل وجود دارند و کار ریاضی‌دان رتبه‌بندی مجموعه‌ها و پیدا کرده ساختاری در بین آنها است. در دیدگاه دوم به مجموعه‌ها، مجموعه‌ها به‌صورت بالقوه وجود دارند. به عبارت دیگر، و به‌صورت استعاری، می‌توان گفت که مجموعه‌ها از مجموعهٔ تهی و با روش بازگشتی به مرور ساخته می‌شوند. در ادامه به دیدگاه دوم، سلسله‌مراتبی، می‌پردازیم.

در مرحلهٔ صفر، مجموعهٔ تهی را در نظر بگیرید. در مرحلهٔ یک، مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های تهی را در نظر بگیرید. به همین ترتیب به ازای هر عدد طبیعی پیش بروید. بعد از همهٔ این موارد، مرحلهٔ ω، اجتماع همهٔ مجموعه‌های مراتب قبلی را درنظر بگیرید. در مرحلهٔ بعد از ω، مجموعهٔ توانی مجموعهٔ مرحلهٔ ω را در نظر بگیرید. به همین ترتیب، در هر گام جلو بروید. هرگاه مرحلهٔ بلافاصله قبلی وجود نداشت، اجتماع مجموعه‌های ساخته شده در مرحلهٔ قبل از آن را در نظر بگیرید. به این ترتیب سلسله‌مراتب V از مجموعه‌ها به دست می‌آید. می‌توان نشان داد که تلقی سلسله‌مراتبی یادشده خواص مورد انتظار از مجموعه‌ها را دارا است و به‌علاوه، فارغ از پاردوکس‌های معمول مجموعه‌ای است. برای مثال، در این تلقی، هیچ مجموعه‌ای نمی‌تواند عضوی از خود باشد، و بنابراین، مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها وجود ندارد. زیرا عناصر هر مجموعه، در مراحلی پیش از خود مجموعه قرار دارند.

می‌توان ثابت کرد که مجموعه‌های یادشده، تمام خواصی که اصول موضوعهٔ ZF بیان می‌کنند را دارا هستند. در واقع، ZF را می‌توان تلاشی برای اصل‌موضوعی کردن خواص سلسله‌مراتب شهودی V دانست. البته، از جهت دیگر، می‌توان V را به‌عنوان مدلی از ZF، ساخته شده در دل این نظریهٔ بنیادی دانست. در این دیدگاه V رده‌ای (و نه مجموعه‌ای) از مجموعه‌ها است که اثبات وجودش

متکی بر اصول ZF است. این ساخت را می‌توان در ZF منهای اصل مبنا[1] انجام داد. در این صورت اصل مبنا معادل این ادعا است که هر مجموعه‌ای در یکی از مراتب این سلسله‌مراتب قرار دارد.

در موردی جملاتی مانند اصل انتخاب، با اینکه می‌بایست در V درست یا غلط باشد، اما ما نمی‌دانیم که کدام حالت برقرار است. برای توضیح این وضعیت، فرض کنید x مجموعه‌ای از مجموعه‌های ناتهی مجزا باشد. x در مرحله‌ای چون s تشکیل شده است. اعضای اعضای x در مراحلی زودتر از s تشکیل می شوند. از این رو، بنابر اصل انتخاب، در s، اگر نه زودتر، مجموعه ای تشکیل می‌شود که دقیقاً شامل یک عضو از هر عضو x است. اما چگونه بفهمیم که چنین مجموعه انتخابی تشکیل شده است؟ در این مورد راهی مستقل از پذیرفتن خود اصل انتخاب به نظر نمی‌رسد. فرضیهٔ پیوستار نیز وضعیتی مشابه دارد. در دیدگاهی واقع‌گرایانه به مجموعه‌ها، که همهٔ احکام مجموعه‌ای را درست یا غلط می‌داند، احکامی مانند اصل انتخاب و فرضیه پیوستار، مستقل از ZF هستند، صرفاً به این دلیل که ما در فرمول‌بندی اولیه این اصول به اندازه کافی بالغ نبوده‌ایم تا نظریه‌ای را بپذیریم که آنها را تعیین تکلیف کند. وظیفه پیش روی ما جستجوی اصولی بنیادی است که این سؤالات را تعیین تکلیف کنند. پذیرفتن اصولی مانند اصولی که وجود کاردینالهای بسیار بزرگ را بیان می‌کنند، تلاشی در این مسیر بوده که هنوز با موفقیت همراه نبوده‌اند ([۱۰]). به‌طور دقیق‌تر، ثابت شده است که با فرض وجود کاردینال‌های بزرگ، هم درستی و هم نادرستی فرضیهٔ پیوستار سازگار هستند ([۱۴]).

در اینجا توضیح یک نکتهٔ ظریف مفید به نظر می‌رسد. چرا پذیرفتن اینکه V مدلی از ZF است با اینکه بنابر قضایای ناتمامیت گودل[2]، ZF نمی‌تواند سازگاری خود را اثبات کند، تعارض ندارد؟ همان‌طور که گفتیم، خود ZF وجود V را ثابت می‌کند، اما نکته این است که در ZF ما نمی‌توانیم این جمله را بیان کنیم: «هر اصل موضوع ZF در V درست است». بیان این حکم از یک محمول درستی مرتبه اول استفاده می کند و در ZF، بنابر قضیه تعریف ناپذیری صدق تارسکی، چنین محمولی تعریف‌پذیر نیست ([۱۱]). اینکه V تمام اصول ZF را برآورده می‌کند، این یک جملهٔ واحد نیست، بلکه قالبی از تعدادی نامتناهی جمله است. یعنی، هرچند در فرانظریه می‌دانیم که هر اصل ZF در V صادق است، آنچه به طور مرتبهٔ اول داریم، فقط جملات صادق مجزا در مورد هر یک از نامتناهی اصل ZF است.

---

[1] axiom of foundation

[2] Gödel

نقطهٔ شروع در V را می‌توان به‌جای مجموعهٔ تهی، مجموعه‌ای از عناصری که مجموعه نیستند هم در نظر گرفت، مثلاً یک صندلی یا میز. اما در کار تعریف مفاهیم ریاضی به چنین اشیائی نیاز نیست. مفاهیم پایه‌ای ریاضی، شامل اعداد را می‌توان مطابق روش مرسوم در کتاب‌های نظریهٔ مجموعه برحسب مجموعه‌های محض تعریف کرد. همان‌طور که مشهور است، این کار را به روش‌های متعددی می‌توان انجام داد. این به این مشکل فلسفی منجر می‌شود که ظاهراً ترم‌های ریاضی مرجع ثابتی ندارند ([۷]). البته، از نظر ریاضی این هیچ مشکلی به وجود نمی‌آورد. می‌توان هر کدام از تعریف‌ها را که به دلایل عمل‌گرایانه مناسب‌تر به نظر می‌رسند، برگزید. از طرف دیگر، ساختارهای ریاضیات جدید، معمولاً همه در ابتدا برحسب مجموعه‌ها تعریف می‌شوند. در واقع، در حال حاضر روش استاندارد برای آنکه ریاضیدانان نشان دهند که فلان نظریهٔ ریاضی سازگار است، یافتن مدلی بر اساس مجموعه‌ها برای آن نظریهٔ ریاضی است. در مجموع به نظر می‌رسد که ساختار مجموعه‌های V می‌تواند به‌عنوان بنیادی برای ریاضیات در نظر گرفته شود. در واقع، V توسط تسرملو و به همین منظور معرفی شد.

۴. نظریه مجموعه در مقابل منطق مرتبهٔ دوم

نظریهٔ مجموعه به‌طور معمول در دستگاه اصل موضوعی تسرملو‌ـ‌فرانکل مرتبهٔ اول همراه با اصل انتخاب، ZFC، مطالعه می‌شود. منطق مرتبهٔ اول تنها شامل متغیرهای فردی است، یعنی متغیرهایی که به اعضای دامنهٔ ساختارهای ریاضی (یا غیر ریاضی)، مانند یک گروه اشاره می‌کنند. این دستگاه، ZFC، علی‌رغم محدود بودن به زبان مرتبهٔ اول، دستگاه منطقی استاندارد برای مجموعه‌ها است که مبانی ریاضیات در نظر گرفته می‌شود. از طرفی ساختارهای مختلفی در ریاضیات وجود دارند که اساساً مرتبهٔ دوم یا از مراتب بالاتر هستند، مانند حساب مرتبهٔ دوم پئانو[1]، میدان‌های مرتب کامل یا فضاهای توپولوژی. چگونه چنین چیزی ممکن است؟

پاسخ خلاصه آن است که خیر، تناقض یا ابهامی در کار نیست، درست است که ZFC مرتبهٔ اول است، اما تعبیری که ما به‌عنوان مجموعه از متغیرهای آن داریم، و اینکه $\in$ را به‌عنوان تعلق تعبیر می‌کنیم، باعث می‌شود که بتوانیم در مورد اعضای مجموعه‌ها، اعضای اعضای مجموعه‌ها، و به همین ترتیب از هر مرتبه‌ای، صحبت کنیم. خود ZFC تنها یک دستگاه اثباتی منطقی صوری مبتنی بر برهان‌های با طول متناهی است. پس این تعبیر ما است که این قدرت بیان از کلیهٔ مراتب

[1] Peano

را به فرمول‌های ZFC اعطا می‌کند، وگرنه همان‌طور که گفتیم، این دستگاه بر پایهٔ زبان و منطق مرتبهٔ اول بنا شده است. منطق مرتبهٔ اول، منطق کلاسیک و استاندارد است و برخی از مهم‌ترین قضایای منطق مانند قضیهٔ فشردگی در مورد آن برقرار هستند ولی در مورد منطق مرتبهٔ دوم خیر. در ادامه کمی دقیق‌تر به معرفی منطق مرتبهٔ دوم می‌پردازیم.

زبان منطق مرتبهٔ دوم، توسیعی از زبان منطق مرتبهٔ اول است، به این معنی که علاوه بر متغیرهای فردی که به اعضای دامنهٔ تعبیرهایش دلالت می‌کنند، متغیرهای رابطه‌ای و تابعی هم دارد. اینها به روابط و توابع تعریف شده بر دامنهٔ تعبیرها دلالت می‌کنند. زبان‌های از مراتب بالاتر حاوی متغیرهایی هستند که به روابط بین روابط و الی آخر، دلالت می‌کنند. در ادامه برای سادگی فقط به منطق مرتبهٔ دوم با متغیرهای مجموعه‌ای می‌پردازیم.

در معناشناسی استاندارد از زبان منطق مرتبهٔ دوم، هر زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ یک ساختار، به‌عنوان تعبیری از زبان، می‌تواند تعبیری از یک متغیر مجموعه‌ای باشد، به خلاف معناشناسی هنکین[1] برای منطق مرتبهٔ دوم که می‌توان دسته‌ای خاص از زیرمجموعه‌های دامنه‌ها را از ابتدا به عنوان تعبیر متغیرهای مجموعه‌ای در ساختار مورد در نظر ثابت گرفت. در هر یک از این تعبیرها، درستی یک فرمول در یک ساختار به طریق طبیعی تعریف می‌شود، یعنی همان تعریف صدق تارسکی[2]. می‌دانیم که منطق مرتبهٔ دوم با معناشناسی استاندارد، به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر نیست، اما منطق مرتبهٔ اول و همچنین منطق مرتبهٔ دوم با معناشناسی هنکین به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر هستند. یعنی دستگاهی اثباتی دارند که اصول و قواعد آنها به‌طور الگوریتمی قابل تمییزند و دقیقاً جملاتی در این دستگاه اثبات‌پذیرند که معتبر هستند، یعنی در همهٔ ساختارهای تعبیرگر درست هستند. از این نظر منطق مرتبهٔ دوم استاندارد، اساسا با منطق مرتبهٔ اول و همچنین منطق مرتبهٔ دوم با معناشناسی هنکین متفاوت است. از اینجا به بعد منظور ما از منطق مرتبهٔ دوم همین منطق است. همین ویژگی اصل‌پذیر نبودن یکی از نقاط ضعف اساسی منطق مرتبهٔ دوم استاندارد است.

حساب مرتبهٔ دوم پئانو، PA^2، توسیعی از حساب مرتبهٔ اول پئانو ([۲]) است. در PA^2، اصل استقرا با اصل استقرای قوی‌تر مرتبهٔ دوم که به‌ازای هر متغیر مجموعه‌ای بیان می‌شود، تعویض می‌شود. این واقعاً یک اصل است، به‌خلاف اصل (یا بهتر بگوییم قالب[3]) استقرای مرتبهٔ اول که

[1] Henkin
[2] Tarski
[3] scheme

در واقع بی‌نهایت مورد دارد، به ازای هر فرمول. به علاوه، اصل شمول[1] نیز به آن اضافه می‌شود. بنابر این اصل، به ازای هر فرمول، متغیر مرتبهٔ دومی وجود دارد که به ازای هر متغیر مرتبهٔ اول با آن فرمول هم‌ارز است. نظریهٔ مجموعهٔ مرتبهٔ دوم، ZFC^2، نیز توسیعی از ZFC است که در آن قالب‌های تفکیک[2] و جایگزینی[3] به ترتیب با تک اصل‌های تفکیک و جایگزینی تعویض شده‌اند، و همچنین قالب شمول نیز اضافه شده است ([۷]).

یکی از مزایای در نظر گرفتن ساختارهای ریاضی مرتبهٔ دوم آن است که برخلاف ساختارهای مرتبه اول بناشده بر ZFC، به نوعی یکتا هستند. یک ساختار مرتبهٔ دوم A تشخص‌پذیر مرتبهٔ دوم[4] است هرگاه جمله‌ای در زبان آن ساختار موجود باشد که در آن ساختار درست باشد و ضمنا هر ساختار دیگری که آن جمله در آن درست بود با A یکریخت باشد. ساختارهای مرتبهٔ دوم اعداد طبیعی، اعداد حقیقی و اعداد مختلط همگی تشخص‌پذیر مرتبهٔ دوم هستند. اینها ساختارهای اساسی ریاضیات هستند، و اینکه به عنوان ساختارهای مرتبهٔ دوم به نوعی یکتا هستند، اهمیت زیادی دارد. البته به‌راحتی می‌توان نشان داد که تنها تعداد ساختارهای تشخص‌پذیر مرتبهٔ دوم در زبان‌های شمارا، شمارا است، بنابراین بسیاری از ساختارهای ریاضی تشخص‌پذیر نیستند. علی‌رغم این موضوع، پیدا کردن ساختارهایی که تشخص‌پذیر مرتبهٔ دوم نیستند کار ساده‌ای نیست. یک مثال، ساختار $(N, <, A)$ است جایی که A مجموعه کدهای همه جملات معتبر زبان مرتبهٔ دوم شامل تنها یک رابطه دو موضعی است. به علاوه، اینکه هیچ ساختار مرتبهٔ دومی به شکل $(R, +, \cdot, <, A)$ جایی که A یک پایهٔ همل[5] است، تشخص‌پذیر مرتبهٔ دوم نباشد، با ZF سازگار است ([۱۸]).

علی‌رغم فواید در نظر گرفتن ساختارهای ریاضی به عنوان ساختارهای مرتبهٔ دوم، به هنگام مطالعهٔ ساختارهای مرتبهٔ دوم استفاده از یک فرانظریهٔ نظریه‌مجموعه‌ای ضروری به نظر می‌رسد. در واقع، جملات مرتبهٔ دومی وجود دارند که درستی یا نادرستی آنها در یک ساختار معادل درست بودن اصل انتخاب یا فرضیهٔ پیوستار در جهان نظریه مجموعه است. پس جملات مرتبهٔ دومی وجود دارند که حتی نظریه مجموعه نمی تواند در مورد آنها تصمیم بگیرد. این شاید مؤید نظر مشهور کواین[6] باشد که منطق مرتبهٔ دوم همان نظریهٔ مجموعه در لباس گوسفند است ([۱۹])!

---
[1]comprehension
[2]seperation
[3]replacement
[4]second order characterizable
[5]Hamel base
[6]Quine

۵. نظریهٔ مجموعهٔ مرتبهٔ اول در مقابل نظریهٔ مجموعهٔ مرتبهٔ دوم

اندیشه‌ای که حداقل از زمان ددکیند[۱] و به‌ویژه هیلبرت در مورد ریاضیات مطرح شد این بود که آنچه در ریاضیات اهمیت دارد، ساختارها هستند و نه اشیاء ریاضی. این اندیشه بعداً در دست فیلسوفانی چون شاپیرو[۲] به‌صورت یک مکتب عمده در فلسفهٔ ریاضی درآمد ([۳]). آیا مبناگرایی نظریه‌مجموعه‌ای با ساختارگرایی سازگار است؟ ساختارگرایی در ریاضیات این دیدگاه فلسفی است که در ریاضیات آنچه مهم است، روابط بین اشیاء ریاضی است و نه ماهیت خود اشیاء. برای تعدادی از اصول، هر مجموعه‌ای از اشیاء و خواص مرتبط آنها که آن اصول را برآورده کنند را می‌توان به‌عنوان تعبیری از آن اصول در نظر گرفت. نظریهٔ گروه‌ها به‌عنوان یک نظریهٔ جبری مثال خوبی از نظریه‌هایی است که با دیدگاه ساختارگرایی همراه هستند. اما در مورد نظریه‌های بنیادی چون ZF چه می‌توان گفت؟

دستگاه ZF نیز، اگر به‌صورت یک دستگاه اصل‌موضوعی مرتبهٔ اول معمولی به آن نگاه کنیم، مدل‌های بی‌شماری دارد. این مدل‌ها حتی می‌توانند شمارا باشند، اگر از بیرون و اصطلاحاً فرازبان به آنها بنگریم. در هر یک از این مدل‌ها می‌توان V را تعریف کرد و مطابق معمول همهٔ ساختارهای آشنای ریاضی را در آنها بازسازی کرد. از این نظر، ما با ریاضیات‌های متفاوتی مواجه هستیم. حتی از نظر برخی فیلسوفان اخیر ریاضی، این دیدگاه با افلاطون‌گرایی ریاضی سازگار است. تنها به‌جای یک جهان، با جنگلی از جهان‌های متفاوت مواجه هستیم که مستقلاً وجود دارند. بنابراین، اگر از جنبهٔ بنیادی و فرازبانی V بگذریم، می‌توانیم مدلهای مختلفی از مجموعه‌ها داشته باشیم که همگی مشروعیت دارند ولی در هر یک ریاضیات مشخصهٔ خود را دارد. در این دیدگاه، V یکی از بی‌شمار مدل‌های مجموعه‌ها است ([۹]).

حال ببینیم وضعیت با تغییر منطق مرتبهٔ اول به منطق مرتبهٔ دوم با معناشناسی استاندارد چه تفاوتی می‌کند. همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، در معناشناسی استاندارد در هر ساختار سورهای مرتبهٔ دوم می‌توانند به هر یک از زیرمجموعه‌های دامنه اشاره کنند. حال اگر نظریهٔ مجموعه‌های مرتبهٔ دوم ZFC^2 را نظر بگیریم، بنابر قضیهٔ تسرملو، هر مدل این نظریه به‌شکل V_κ است، جایی که κ یک کاردینال دسترس‌ناپذیر[۳] است. منظور از یک کاردینال دسترس‌ناپذیر، یک کاردینال ناشمارا است به‌طوری که از کاردینال‌های کوچک‌تر به کمک اعمال حسابی معمول کاردینال‌ها به‌دست نیاید.

[1] Dedekind
[2] Shapiro
[3] inaccessible cardinal

بنابراین، هر دو مدل این نظریه در مراتب پایین سلسله‌مراتب V، جایی که ریاضیات استاندارد را می‌توان تعبیر کرد، با هم یکریختند. این قضیه می‌تواند نتایجی بنیادی داشته باشد. برای مثال، از آنجا که فرضیهٔ پیوستار مربوط به رده‌های پایینی سلسله‌مراتب V است، بنابر قضیهٔ فوق، فرضیهٔ پیوستار در همهٔ مدل‌های نظریهٔ مرتبهٔ دوم مجموعه یا درست است و یا غلط است ([۷]، [۹]).

البته، همان‌طور که اشاره شد، معناشناسی استاندارد برای منطق مرتبهٔ دوم از فرض وجود مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های دامنه‌های تعبیرها استفاده می‌کند، و بنابراین خود برای شفاف‌سازی نیاز به نظریه‌ای برای مجموعه‌ها دارد. در واقع، نظریهٔ مجموعهٔ ZF با اصولی چون اصل نامتناهی، جایگزینی و مجموعه توانی، از ابتدا و به صراحت وجود برخی مجموعه‌های به قدر کافی بزرگ را می‌پذیرد. اما در گونهٔ مرتبهٔ دومی نظریه‌های ریاضی، این کار گام به گام صورت می‌گیرد. این وضعیتی است که در مورد نظریه‌های مرتبهٔ دوم حساب و اعداد حقیقی و اعداد مختلط برقرار است، هرچند این نظریه‌ها از این امتیاز برخوردارند که ساختارهای هدف خود را در حد یکریختی کاملاً مشخص می‌کنند. بنابراین، درنهایت به نظریهٔ مجموعه‌ها نیازمندیم ([۷]، [۹]، [۱۸]).

ساختار مجموعه‌ها در V یک موقعیت ویژه هم دارد. به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که V ساختاری سخت[1] است، یعنی تنها خودریختی آن، خودریختی بدیهی است. البته این ویژگی‌ای است که همهٔ مجموعه‌های انتقالی[2] هم دارند، یعنی آنهایی که هر عضو یکی از اعضای آنها، عضوی از خود آنها نیز است ([۱۱]، [۱۲]). از این نظر، هر یک از اعضای ردهٔ V، موقعیتی ویژه دارند و نمی‌توان آنها را بدون از از دست دادن این ساختار با عناصر دیگر تعویض کرد. حال دو روش مرسوم تعریف اعداد طبیعی را در نظر بگیرید، تعریف تسرملو ($0 = \varnothing, 1 = \{0\}, 2 = \{1\}, \ldots$) و تعریف فون‌نویمان[3] ($0 = \varnothing, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, \ldots$). این دو ساختار از نظر حسابی یکریختند. با توجه به اینکه هر یک از این دو ساختار مدلی از اصول معمول حساب اعداد طبیعی هستند، برخی این را دلیلی بر این گرفته‌اند که اعداد واقعاً مجموعه نیستند، تأییدی بر ساختارگرایی در ریاضیات ([۵]).

البته باید توجه کرد که دو ساختار فون‌نویمان و تسرملو از لحاظ مجموعه‌ای با هم یکریخت نیستند. اگر اعداد طبیعی را واقعا از جنس مجموعه‌ها بدانیم، بر این اساس می‌توانیم استدلال کنیم که حداکثر یکی از این دو تعریف واقعی اعداد است. بنابراین، عدم تعین نه‌تنها به اشیاء که به

---

[1] rigid
[2] transitive
[3] von Neumann

ساختارها نیز سرایت می‌کند. البته، درست است که در حال حاضر تشخیص اینکه کدام‌یک از دو تعریف فوق به ماهیت اعداد نزدیک‌تر است را نداریم، اما پیدا کردن چنین دلایلی در آینده ناممکن نیست. در هر حال، به نظر می‌رسد که این عدم تعین ظاهری، تهدیدی برای تحویل‌گرایی نظریهٔ مجموعه‌ای نیست، اگر همانند مدی تنها بر فواید عمل‌گرایانهٔ این تحویل تأکید کنیم ([۱۶]).

۶. آیا ریاضیات به مبنا نیاز دارد؟

ریاضیات از زمان باستان به‌عنوان مظهر دقت در نظر گرفته شده است. آکادمی افلاطون بر روی کسانی که هندسه، و در واقع ریاضیات، نمی‌دانستند بسته بود. تا همین امروز، ریاضیات ابزاری مطمئن برای انجام دقیق‌ترین و ظریف‌ترین کارها ازجمله فرستادن سفینه‌ها به ماه، یا شکافتن ذرات بنیادی است. از طرف دیگر، فلسفه و علوم تجربی فاقد چنین مجموعه‌ای از صفات هستند. در فلسفه بر سر هیچ مفهومی توافق وجود ندارد، و در علوم تجربی عدم قطعیت و نهایی نبودن نظریه‌های علمی، امری مسلم است. پرسش‌های فلسفی‌ای که فیلسوفان، از زمان افلاطون، دربارهٔ ریاضیات مطرح کرده‌اند، بیشتر تلاشی بوده برای فهم خود ریاضیات. این خیلی پیش از آن بوده، که در ابتدای قرن بیستم علائق فلسفی ریاضی‌دانان به‌سبب آشکار شدن برخی ابهام‌ها و پارادوکس‌های ظاهری، به ریاضیات جلب شود. علاقهٔ فلاسفه به ریاضیات قدمتی بسیار بیشتر و دلایلی بسیار متنوع‌تر دارد ([۲]، [۸]).

درمورد مبناگرایی نیز، برخی فیلسوفان علم مانند هیلری پاتنم[1]، معتقدند که ریاضیات به مبنا احتیاج ندارد. دلیلش ساده است؛ مبنا باید مستحکم‌تر از خود بنا باشد، اما هیچ چیز مستحکم‌تری از خود ریاضیات وجود ندارد (البته خود پاتنم، دقیقاً بعد از این ادعا، به کار ساخت مبنایی دیگر برای ریاضیات می‌پردازد ([۱])!) در هر حال، باید توجه کرد که مبنای ریاضیات را می‌توان جزئی از خود ریاضیات دانست. کانتور یک آنالیزدان بود که در ادامهٔ کار خود در سری‌های نامتناهی به مجموعه‌ها پرداخت ([۹]). به قول هیلبرت، نظریهٔ مجموعه بهشتی بوده که ریاضی‌دان‌ها نخواستند از آن بیرون روند. به‌علاوه، در مطالعهٔ این نظریه، روش‌های ریاضی موجود، به‌خصوص منطق ریاضی که قبلاً تدوین شده بود، به کار رفته است.

یکی دیگر از مزایای مهم استفاده از مبناگرایی مجموعه‌ای، و شاید هر نوع مبناگرایی دیگر در ریاضیات، تسهیل به کار بردن یک شاخه از ریاضیات در شاخهٔ دیگر است. زمانی که ساختارهای مختلف ریاضی در بخش‌های مختلف ریاضیات بر اساس ایدهٔ مشابه مجموعه‌ای تعریف شوند،

[1] Hilary Putnam

ترکیب آنها با یکدیگر و استفاده از روش‌ها و مفاهیم یکی در دیگری آسان‌تر می‌شود. از طرف دیگر، مبناگرایی روشی برای بررسی پرسش‌های بنیادی درمورد ریاضیات هم است. به قول برجس[1]:

> به‌هم‌پیوستگی [شاخه‌های مختلف ریاضیات] نشان می‌دهد که دیگر کافی نیست که هر شاخه از ریاضیات را به‌طور جداگانه بر مبنای دقیقی قرار دهیم... برای تضمین اینکه دقت در فرایند انتقال مطالب از یک شاخه از ریاضیات به شاخهٔ دیگر به خطر نیفتد، ضروری است که نقاط شروع شاخه‌های در حال اتصال لزوماً... هماهنگ باشند. ... تنها راه واضح برای اطمینان از هماهنگی نقاط شروع ... در نهایت استخراج همهٔ شاخه‌ها از یک نقطهٔ شروع مشترک و یکپارچه است ([۱۶]).

آنالیز ریاضی و مفهوم عدد حقیقی در اینجا موقعیتی ویژه دارد. اعداد طبیعی همواره مفاهیمی بدون ابهام در نظر گرفته شده‌اند، اما مبنای شهودی اعداد حقیقی کافی به نظر نمی‌رسید. در واقع، این ابهامها منشا پیدایش فلسفه‌های ریاضی در ابتدای قرن بیستم بوده است. ددکیند در مورد مفهوم پیوستگی می‌نویسد:

> پس این پیوستگی شامل چه چیزی می‌شود؟ همه‌چیز باید به پاسخ این سؤال بستگی داشته باشد و تنها از طریق آن می‌توانیم مبنای علمی برای بررسی همه حوزه‌های پیوسته به دست آوریم ([۱۶]).

از این نظر، تعریف مفهوم عدد حقیقی توسط مفهوم مجموعه، کارایی سطح بالاتری از نظریهٔ مجموعه به‌عنوان مبانی ریاضیات را نشان می‌دهد. این تعریف باعث شد که مفهوم عدد حقیقی بر پایه‌ای محکم قرار بگیرد که تا قبل از آن از آن بی‌بهره بود.

مراجع

[۱] پاتنم، ه.، «ریاضیات بدون مبانی»، در: *هیلری پاتنم: منتخب مقاله‌های فلسفی*، تدوین ک. لاجوردی، نشر نو، ۱۴۰۱.

[۲] منیری، م.، «چرا فلسفه‌های سه‌گانهٔ مشهور ریاضی مهم هستند؟»، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، **۳۷** (۱)، صص. ۱-۱۳، ۱۳۹۷.

[۳] منیری، م.، «ساختارگرایی در فلسفهٔ ریاضی معاصر»، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، **۳۷** (۲)، صص. ۳۷-۵۰، ۱۳۹۷.

[1] Burgess

[4] Awodey, S., ”Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective”, *Philosophia Mathematica*, **4** (3), pp. 209-237, 1996.

[5] Benacerraf, P. & Putnam, H. (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge University Press, 1983.

[6] Bentzen, B., ’What types should not be’, *Philosophia Mathematica*, **1** (28), pp. 60-76, 2020.

[7] Button, T. & Walsh, S. P., *Philosophy and Model Theory*, Oxford University Press, Walsh, S. & Hodges, W. (eds.), 2018.

[8] Hacking, I., *Why Is There Philosophy of Mathematics At All?*, Cambridge University Press, 2014.

[9] Hamkins, J. D., *Lectures on the Philosophy of Mathematics*, The MIT Press, 2021.

[10] Honzik, R., ’Large Cardinals and the Continuum Hypothesis’, In: Antos, C., Friedman, S. D., Honzik, R., Ternullo, C. (eds.), *The Hyperuniverse Project and Maximality*, Birkhäuser, Cham, 2018.

[11] Jech, T., *Set Theory (The Third Millennium Edition, revised and expanded)*, Springer-Verlag, 2003.

[12] Kunen, K., *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, 1980.

[13] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics (Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations)*, College Publications, 2009.

[14] Lévy, A. & Solovay, R.M., Measurable cardinals and the continuum hypothesis, *Israel J. Math*, 5, pp. 234–248, 1967.

[15] Maddy, P., *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, Oxford University Press, 2011.

[16] Maddy, P., ’Set-theoretic Foundations’, In: Caicedo, A. E., Cummings, J., Koellner, P. & Paul B. Larson (eds.), *Foundations of Mathematics*, American Mathematical Society, 2016.

[17] Ladyman, J. & Presnell, S., ”Does Homotopy Type Theory Provide a Foundation for Mathematics?”, *The British Journal for the Philosophy of Science*, **69** (2), 2018.

[18] Väänänen, J., ”Second Order Logic or Set Theory?”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, **18** (1), pp. 91-121. 2012.

[19] Väänänen, J., ”Second-order and Higher-order Logic”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta (ed.), 2021.

مرتضی منیری: دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی

تارنما: http://facultymembers.sbu.ac.ir/mortezamoniri/

رایانامه: m-moniri@sbu.ac.ir